ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVIII. Серия 4 1961

# О НЕКОТОРЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ НУЛЯМИ

*И. В. Островский*

Целым функциям с отрицательными нулями посвящено очень большое количество работ (подробную библиографию и обзор основных результатов см. [1]). В этих работах асимптотические свойства таких функций изучаются в предположении, что либо сама функция, либо ее нули, либо, наконец, некоторые величины, учитывающие определенным образом и поведение функции, и распределение ее нулей, имеют довольно простое асимптотическое разложение*. В настоящей статье никаких предположений такого рода не делается, и оценки получаются, конечно, менее точными.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения: $f(z)$ — целая функция, $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ — число ее нулей в круге $|z| \leqslant t$,

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \left[n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)\right] d\ln t + n\left(0, \frac{1}{f}\right)\ln r,$$

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\ln} |[f(re^{i\varphi})]^{-1}| \, d\varphi,$$

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\ln} |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi,$$

$$M(r, f) = \max_{|z| \leqslant r} |f(z)|.$$

Основными результатами работы являются две теоремы: первая из них содержит одно качественное высказывание о росте целой функции с отрицательными нулями, вторая — количественные оценки роста канонического произведения Вейерштрасса с отрицательными нулями.

---

* Типичным результатом является следующая теорема Валирона — Титчмарша: *Если $f(z)$ — целая функция порядка $\rho$, $0 < \rho < 1$, с отрицательными нулями, то выполнение одного из соотношений*

$$n\left(r, \frac{1}{f}\right) \sim \lambda r^{\rho}, \quad \ln|f(r)| \sim \pi\lambda \operatorname{cosec} \pi\rho \cdot r^{\rho}$$

*влечет за собой выполнение другого.*

**Теорема 1.** *Если целая функция $f(z)$ рода $p$ с отрицательными нулями удовлетворяет условиям*

$$\text{а)}\ \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-p}\ln M(r, f)=\infty, \quad \text{б)}\ \underline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-p-1/2}\ln M(r, f)=0,$$

*то она не может быть ограниченной на отрицательном луче.*

**Теорема 2.** *Если $f(z)$ — каноническое произведение рода $p$ с отрицательными нулями и порядок его $\rho$ удовлетворяет условию $p<\rho<p+1$, то справедливы соотношения*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{n\left(r, \frac{1}{f}\right)}\geqslant\frac{\pi\cos\theta\rho}{\sin\pi\rho}\geqslant\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{n\left(r, \frac{1}{f}\right)}, \ -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi, \tag{1}$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\arg f(re^{i\theta})}{n\left(r, \frac{1}{f}\right)}\geqslant\frac{\pi\sin\theta\rho}{\sin\pi\rho}\geqslant\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\arg f(re^{i\theta})}{n\left(r, \frac{1}{f}\right)}, \ -\pi<\theta<\pi. \tag{2}$$

Легко видеть, что из (1) следует теорема 1 в несколько ослабленной форме, а именно: при дополнительном предположении, что рассматриваемая целая функция является каноническим произведением порядка $\rho$, $p<\rho<p+{}^1/_2$. Теорему 1 можно считать обобщением известной теоремы Вимана о целых функциях не выше минимального типа порядка ${}^1/_2$; теорема Вимана легко получается из нашей при $p=0$. Отметим, что требование наличия у функции $f(z)$ рода $p$ в теореме 1 можно опустить: в силу одной теоремы А. А. Гольдберга [2] оно является следствием условий а) и б).

Результаты настоящей статьи были получены при решении задачи, предложенной автору Б. Я. Левиным: доказать, что целая функция с отрицательными нулями, не выше минимального типа порядка 3/2, не может быть ограниченной на вещественной оси*. Выражаем Б. Я. Левину свою глубокую благодарность.

В § 1 мы приводим ряд соотношений, содержащих несобственные интегралы, которые используются в дальнейшем, в § 2 и 3 — доказательства теорем 1 и 2. В § 4 мы показываем, что эти теоремы в известной мере являются точными и, наконец, в § 5 обсуждаем некоторые смежные результаты.

Для доказательства теоремы 1 используем метод, изобретенный Данжуа [3] и несколько обобщенный с помощью одной идеи Чельберга [4] в совместной работе А. А. Гольдберга и автора [5]. Доказательство теоремы 2 опирается на одну теорему типа Таубера, установленную Пойа [6]. Отметим, что примененные здесь нами методы систематически использовались в [5] для изучения мероморфных функций рода нуль и некоторых классов функций, мероморфных в полуплоскости; эту статью можно считать продолжением работы [5].

**§ 1.** Пусть

$$E(u, p)=(1-u)\exp\left(u+\frac{u^2}{2}+\ \ldots\ +\frac{u^p}{p}\right)$$

— канонический множитель Вейерштрасса рода $p$. Фиксируем ветвь $\arg E(-u, p)$ в плоскости, разрезанной по лучу $-\infty<u\leqslant-1$ так, чтобы при $u=0$ она обращалась в нуль. Тогда мы имеем:

$$\int\limits_0^\infty\frac{\ln E(-re^{i\theta}, p)}{r^{\sigma+1}}\,dr=\frac{\pi e^{i\theta\sigma}}{\sigma\sin\pi\sigma}. \tag{3}$$

$$(-\pi<\theta<\pi, \quad p<\sigma<p+1)$$

---

* Этот результат получается из теоремы 1 при $p=1$.

Это соотношение легко получить, произведя в левой части один раз интегрирование по частям, а затем воспользовавшись стандартными методами теории вычетов.

Если перейти в (3) к вещественным и мнимым частям и использовать очевидное соотношение

$$\int_0^\infty \frac{X(r)}{r^{1+\sigma}}\,dr = \frac{1}{\sigma}, \quad 0<\sigma<\infty, \tag{4}$$

$$\text{где } X(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 1, & 1 < r < \infty, \end{cases}$$

то легко получаются равенства

$$\int_0^\infty \frac{\ln|E(-re^{i\theta}, p)|}{r^{1+\sigma}}\,dr = \frac{\pi\cos\theta\sigma}{\sin\pi\sigma}\int_0^\infty \frac{X(r)}{r^{1+\sigma}}\,dr, \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \frac{\arg E(-re^{i\theta}, p)}{r^{1+\sigma}}\,dr = \frac{\pi\sin\theta\sigma}{\sin\pi\sigma}\int_0^\infty \frac{X(r)}{r^{1+\sigma}}\,dr, \tag{6}$$

где $-\pi<\theta<\pi$, $p<\sigma<p+1$. Соотношение (5), очевидно, останется справедливым и при $\theta=\pm\pi$; в частности при $\theta=\pi$, $\sigma=p+{}^1/_2$ мы получаем

$$\int_0^\infty \frac{\ln|E(r, p)|}{r^{p+{}^3/_2}}\,dr = 0. \tag{7}$$

**§ 2.** Исследуя с помощью обычных методов анализа функцию

$$v_p(r) = \ln|E(r, p)|, \quad 0 \leqslant r < \infty$$

мы обнаруживаем, что имеется точка $\eta_p>1$ такая, что $v_p(r)<0$ при $0<r<\eta_p$ и $v_p(r)>0$ при $\eta_p<r<\infty$. Положим теперь

$$\varphi_p(a) = \int_a^\infty v_p(r)\,r^{-p-{}^3/_2}dr, \quad 0 \leqslant a < \infty.$$

Так как $\varphi_p(\infty)=0$ и, в силу (7), $\varphi_p(0)=0$ и так как $\varphi'_p(a)\ (=-v_p(a)\,a^{-p-{}^3/_2})$ лишь один раз (в точке $\eta_p$) меняет знак с «+» на «—», то $\varphi_p(a)>0$ при $0<a<\infty$.

Введем теперь функцию $\Psi_p(a)$, $0<a<\infty$, соотношением

$$\Psi_p(a) = \frac{\varphi_p(a)\,a^{p+{}^1/_2}}{|\ln E(-a,p)|}.$$

Эта функция непрерывна и положительна при $0<a<\infty$. Находя ее пределы при $a\to 0$ и $a\to\infty$, мы видим, что они оба конечны и положительны. Отсюда следует существование двух постоянных $h_p$ и $H_p$, $0<h_p<H_p<\infty$ таких, что при $0<a<\infty$

$$h_p \leqslant \Psi_p(a) \leqslant H_p,$$

откуда

$$h_p|\ln E(-a,p)|\,a^{-p-{}^1/_2} \leqslant \varphi_p(a) \leqslant H_p|\ln E(-a,p)|\,a^{-p-{}^1/_2}. \tag{8}$$

Если записать это соотношение для некоторого $b > a$ и затем вычесть его из (8), то получим, что

$$\int_a^b \frac{\ln|E(r,p)|}{r^{p+3/2}}\,dr \geqslant h_p \frac{|\ln E(-a,p)|}{a^{p+1/2}} - H_p \frac{|\ln E(-b,p)|}{b^{p+1/2}}. \tag{9}$$

$$(0 < a < b < \infty)$$

Пусть теперь $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда $f(z) = z^m \exp(P_p(z))\,\pi_p(z)$, где $P_p(z)$ — полином степени не выше $p$, а

$$\pi_p(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E\left(-\frac{z}{a_k}, p\right),\ a_k > 0, —$$

каноническое произведение Вейерштрасса.

Вводя в (9) новые переменные $x = ra_k$, $u = aa_k$, $v = ba_k$ и складывая получающиеся соотношения по $k = 1, 2, 3, \ldots$, придем к неравенству

$$\int_u^v \frac{\ln|\pi_p(-x)|}{x^{p+3/2}}\,dx \geqslant h_p \frac{|\ln \pi_p(u)|}{u^{p+1/2}} - H_p \frac{|\ln \pi_p(v)|}{v^{p+1/2}}$$

$$(0 < u < v < \infty).$$

Учитывая, что $|\ln|f(z)| - \ln|\pi_p(z)|| = O(|z|^p)$, $|z| \to \infty$, будем иметь:

$$\int_u^v \frac{\ln|f(-x)|}{x^{p+3/2}}\,dx \geqslant h_p \frac{|\ln|f(u)|| - K_1 u^p}{u^{p+1/2}} - H_p \frac{|\ln|f(v)|| + K_2 v^p}{v^{p+1/2}} \tag{10}$$

$$(1 \leqslant u < v < \infty),$$

где $K_1$ и $K_2$ — некоторые положительные постоянные.

В дальнейшем нам придется опираться на следующие две простые леммы, доказательство которых отнесем на конец параграфа.

**Лемма 1.** Если функция $f(z)$ рода $p$ с отрицательными нулями удовлетворяет условию а) теоремы 1, то

$$|\ln|f(u)||\,u^{-p} \to \infty \text{ при } u \to +\infty.$$

**Лемма 2.** Если целая функция $f(z)$ не имеет нулей внутри угла $-\alpha < \arg z < \alpha$ $(0 < \alpha < \pi/2)$, то

$$|\ln|f(v)|| \leqslant 7 \ln M(3v \operatorname{cosec} \alpha, f) + O(1), \quad 0 \leqslant v < \infty.$$

Закончим доказательство теоремы 1.

Предположим, что утверждение теоремы не имеет места. Тогда найдется такое число $A$, $1 < A < \infty$, что $|f(-x)| \leqslant A$ при $1 \leqslant x < \infty$. В силу леммы 1 можно выбрать $u > 0$ так, чтобы выполнялось $|\ln|f(u)|| - K_1 u^p > 3h_p^{-1} \ln A$. Из неравенства (10) следует, что для этого $u$ и произвольного $v > u$

$$\frac{\ln A}{p+1/2} \cdot \frac{1}{u^{p+1/2}} \geqslant \frac{3 \ln A}{u^{p+1/2}} - H_p \frac{|\ln|f(v)|| + K_2 v^p}{v^{p+1/2}}. \tag{11}$$

Выберем теперь (что возможно в силу условия б)) последовательность $v_k \to +\infty$ так, что $\lim\limits_{k\to\infty} v_k^{-p-1/2} \ln M(v_k, f) = 0$. Замечая, что к нашей функции применима лемма 2 (даже с $\alpha=\pi/2$), отсюда выводим, что и $\lim\limits_{k\to\infty} v_k^{-p-1/2}|\ln|f(v_k)||=0$. Устремляя теперь в (11) $v\to+\infty$ по последовательности $v_k$, приходим к абсурдному соотношению

$$(\ln A)(p+{}^1/_2)^{-1}\geqslant 3\ln A.$$

Итак, справедливость теоремы доказана — в предположении, что леммы 1 и 2 справедливы. Докажем теперь эти леммы.

Доказательство леммы 1. Так как функция $f(z)$ имеет род $p$, то из условия а) вытекает, что интеграл

$$\int\limits_0^\infty n\left(t,\frac{1}{f}\right)t^{-p-1}\,dt$$

расходится. Представим, следуя Валирону, $\ln f(z)$ в виде

$$\ln f(z)=(-1)^p\int\limits_0^\infty n\left(t,\frac{1}{f}\right)\frac{z^{p+1}}{t^{p+1}(z+t)}\,dt+O(|z|^p).$$

Отсюда получаем соотношение $(u\geqslant 0)$

$$|\ln|f(u)||=u^{p+1}\int\limits_0^\infty n\left(t,\frac{1}{f}\right)\frac{dt}{t^{p+1}(u+t)}+O(u^p)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}u^p\int\limits_0^u n\left(t,\frac{1}{f}\right)t^{-p-1}\,dt+O(u^p),$$

из которого немедленно вытекает утверждение леммы.

Доказательство леммы 2. По формуле Пуассона — Иенсена мы имеем при $|z|\leqslant R$:

$$\ln|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\theta})|\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2+2Rr\cos(\varphi-\theta)}\,d\theta+$$

$$+\sum_{|a_k|<R}\ln\left|\frac{R(z-a_k)}{R^2-\bar a_k z}\right|,$$

где $a_k$ — нули функции $f(z)$, $z=re^{i\varphi}$. Полагая $z=v>0$, $R=2v$, легко получаем неравенство

$$\begin{aligned}|\ln|f(v)||\leqslant 3T(2v,f)+3m\left(2v,\frac{1}{f}\right)+\\+\sum_{|a_k|<2v}\ln\left|\frac{4v-\bar a_k}{2(v-a_k)}\right|.\end{aligned}\qquad(12)$$

Замечая, что

$$\left|\frac{4v-\bar a_k}{2(v-a_k)}\right|\leqslant\frac{3v}{\sin\alpha\cdot|a_k|},$$

из (12) выводим *

$$|\ln|f(v)||\leqslant 3T(2v,f)+3m\left(2v,\frac{1}{f}\right)+N\left(\frac{3v}{\sin\alpha},\frac{1}{f}\right).$$

* не уменьшая общности, можно считать, что $a_k\neq 0$, $k=1,2,\ldots$

Учтем теперь, что $T(r, f) \leqslant \ln M(r, f)$ и что, по формуле Иенсена,

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r, f) + O(1), \quad r \geqslant 0;$$

тогда будем иметь:

$$|\ln|f(v)|| \leqslant 6T(2v, f) + T(3v \operatorname{cosec} \alpha, f) + O(1) \leqslant$$
$$\leqslant 7 \ln M(3v \operatorname{cosec} \alpha, f) + O(1),$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Для доказательства теоремы 2 мы используем следующую теорему, представляющую простую перефразировку результата Пойа [6]:

(А) Пусть на интервале $0 \leqslant x < \infty$ заданы две функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, причем $\varphi_2(x) \geqslant 0$. Пусть еще заданы два числа $\rho \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

а) оба интеграла

$$\int_0^\infty |\varphi_1(x)| x^{-1-\sigma} dx \text{ и } \int_0^\infty \varphi_2(x) x^{-1-\sigma} dx$$

сходятся при $\rho < \sigma < \rho + \varepsilon$, а второй из них при $\sigma < \rho$ расходится;

б) существует функция $\Psi(z)$, голоморфная при $|z - \rho| < \varepsilon$ и вещественная при вещественных $z$, такая, что при $\rho < \sigma < \rho + \varepsilon$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi_1(r)}{r^{1+\sigma}} dr = \Psi(\sigma) \int_0^\infty \frac{\varphi_2(r)}{r^{1+\sigma}} dr.$$

Тогда

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\varphi_1(r)}{\varphi_2(r)} \geqslant \Psi(\rho) \geqslant \varliminf_{r \to \infty} \frac{\varphi_1(r)}{\varphi_2(r)}.$$

Пусть $f(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} E\left(-\frac{z}{a_k}, p\right)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Производя в соотношении 5) замену $r = ua_k^{-1}$ и складывая получающиеся равенства по $k = 1, 2, 3, \ldots$, будем иметь

$$\int_0^\infty \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{1+\sigma}} dr = \frac{\pi \cos\theta\sigma}{\sin\pi\sigma} \int_0^\infty \frac{n\left(r, \frac{1}{f}\right)}{r^{1+\sigma}} dr. \tag{13}$$

Аналогично из соотношения 6) получаем

$$\int_0^\infty \frac{\arg f(re^{i\theta})}{r^{1+\sigma}} dr = \frac{\pi \sin\theta\sigma}{\sin\pi\sigma} \int_0^\infty \frac{n\left(r, \frac{1}{f}\right)}{r^{1+\sigma}} dr. \tag{14}$$

Применяя теперь к (13) и (14) теорему (А), убеждаемся в справедливости (1) и (2).

**§ 4.** Покажем, что теорему 2 можно считать в известной мере точной. Рассмотрим каноническое произведение

$$\prod_{\rho}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E\left(-\frac{z}{k^{1/p}}, p\right), \quad p < \rho < p+1.$$

Э. Линделеф доказал, что для этого произведения в угле $|\arg z| \leqslant \pi - \sigma\ (0 < \sigma < \pi)$ имеет место асимптотическое разложение

$$\ln \prod_{\rho}(z) = \pi \operatorname{cosec} \pi\rho \cdot z^{\rho} + O(|z|^{p}) \tag{15}$$

Учитывая, что $n(r, 1/\Pi_{\rho}) = r^{\rho} + O(1)$, легко получаем, что для $\Pi_{\rho}(z)$ соотношения (1) и (2) при $\theta \neq \pm\pi$ обращаются в равенства.

Перейдем к обсуждению теоремы 1.

Если отбросить условие а), утверждение теоремы перестает быть справедливым — достаточно рассмотреть пример

$$f(z) = \exp[(-1)^{p+1} z^{p}].$$

Покажем, что и условие б) существенно. Для этого построим функцию порядка $p + {}^1/_2$ и нормального типа*, с отрицательными нулями, ограниченную при $z < 0$. Пусть $\varphi(z) = \Pi_{p+1/2}(z)$. Положим

$$\Psi(z) = \varphi(z)\{\sin[\pi(-z)^{p+1/2}]\}^{-1}. \quad (\arg(-z) = 0 \text{ при } z < 0).$$

Эта функция, очевидно, голоморфна в полуплоскости $Re z < 0$ и имеет там порядок роста не выше $p + {}^1/_2$. Так как на любом луче $\arg \xi = \nu$, $0 < |\nu| < \pi$, справедливо

$$\ln|\sin \pi\xi| = \pi |\sin \nu|\,|\xi| + O(1),$$

то при $\pi > |\theta| > \pi(1 - 1/\overline{p + {}^1/_2})$, $\arg z = \theta$,

$$\ln|\sin[\pi(-z)^{p+1/2}]| = \pi|\cos(p + {}^1/_2)\theta|\,|z|^{p+1/2} + O(1).$$

Из этого соотношения и асимптотического разложения (15) следует, что

$$\ln|\Psi(z)| = O(|z|^{p})$$

на каждом луче $\arg z = \theta$, $\pi > |\theta| > \pi(1 - 1/\overline{p + {}^1/_2})$. Применяя к $\Psi(z)$ в угле $|\pi - \arg z| \leqslant \frac{\pi}{2(2p+1)}$ принцип Фрагмена — Линделефа, получаем оценку

$$\ln|\Psi(-x)| = O(x^{p}). \quad (x \to +\infty)$$

Отсюда вытекает, что существует постоянная $K > 0$ такая, что

$$|\varphi(-x)| < \exp(Kx^{p}). \quad (x \geqslant 1)$$

Функция

$$f(z) = \varphi(z)\exp[K(-1)^{p+1} z^{p}],$$

очевидно, и дает нужный нам пример.

---

* Из построения будет видно, что для этой функции существует $\lim r^{-p-1/2} \ln M(r, f) > 0$.

§ 5. Здесь мы приведем три результата, легко получаемые с помощью теоремы (A).

1) Воспользовавшись «вещественной частью» соотношения (3) и очевидным соотношением

$$\int_0^\infty (\overset{+}{\ln} r) r^{-1-\sigma}\, dr = \sigma^{-2} \quad (0 < \sigma < \infty),$$

получим равенство

$$\int_0^\infty \frac{\ln |E(-re^{i\theta}, p)|}{r^{1+\sigma}}\, dr = \frac{\pi\sigma\cos\theta\sigma}{\sin\pi\sigma} \int_0^\infty \frac{\overset{+}{\ln} r}{r^{1+\sigma}}\, dr.$$

$$(p < \sigma < p+1, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

Из него следует, что для любого канонического произведения $f(z)$ рода $p$ с отрицательными нулями справедливо

$$\int_0^\infty \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^{1+\sigma}}\, dr = \frac{\pi\sigma\cos\theta\sigma}{\sin\pi\sigma} \int_0^\infty \frac{N(r, 1/f)}{r^{1+\sigma}}\, dr. \tag{13'}$$

$$(\rho < \sigma < p+1, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

Аналогично с помощью «мнимой части» (3) получаем

$$\int_0^\infty \frac{\arg f(re^{i\theta})}{r^{1+\sigma}}\, dr = \frac{\pi\sigma\sin\theta\sigma}{\sin\pi\sigma} \int_0^\infty \frac{N(r, {}^1/f)}{r^{1+\sigma}}\, dr. \tag{14'}$$

$$(\rho < \sigma < p+1, \quad -\pi < \theta < \pi)$$

Применяя к (13′) и (14′) теорему (A), приходим к неравенствам:

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{N(r, {}^1/f)} \geqslant \frac{\pi\rho\cos\theta\rho}{\sin\pi\rho} \geqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{N(r, {}^1/f)}, \tag{1'}$$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\arg f(re^{i\theta})}{N(r, {}^1/f)} \geqslant \frac{\pi\rho\sin\theta\rho}{\sin\pi\rho} \geqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{\arg f(re^{i\theta})}{N(r, {}^1/f)}. \tag{2'}$$

Валирон [9] доказал, что для целых функций порядка $\rho < 1$ справедливо соотношение:

$$\varlimsup_{r\to\infty} \ln \mu(r, f)\,[T(r, f)]^{-1} \geqslant \pi\rho \operatorname{ctg} \pi\rho,$$

где $\mu(r, f) = \min\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Этот результат является следствием (1′) при $\theta = \pi$.

2) Проинтегрируем обе части соотношения (13′) по множеству $E_\rho$, состоящему из тех значений $\theta$, для которых $\cos\theta\rho \cdot \operatorname{cosec}\pi\rho > 0$. Применяя к получившемуся равенству теорему (A), приходим к заключению, что

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\widetilde{m}_\rho(r, f)}{N(r, {}^1/f)} \geqslant \frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho} \int_{E_\rho} \cos\theta\rho\, d\theta \geqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{\widetilde{m}_\rho(r, f)}{N(r, {}^1/f)}, \tag{16}$$

где $\widetilde{m}_\rho(r, f) = \int\limits_{E_\rho} \ln |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant 2\pi T(r, f)$.

Из левой стороны (16) легко получаем такую оценку для величины $\Delta(0, f) = 1 - \varliminf_{r\to\infty} N(r, 1/f)[T(r, f)]^{-1}$ (эта величина называется обычно дефектом нулей $f(z)$ в смысле Валирона):

$$\Delta(0, f) \geqslant \begin{cases} \dfrac{p}{p + |\sin \pi\rho|}, & p < \rho \leqslant p + 1/2 \\ \dfrac{p + 1 - |\sin \pi\rho|}{p + 1}, & p + 1/2 \leqslant \rho < p + 1. \end{cases}$$

Можно проверить, что для канонического произведения $\Pi_\rho(z)$ это соотношение обращается в равенство *.

3) Пусть теперь $f(z)$ — целая функция порядка $\rho$, $1/2 \leqslant \rho < 1$, $f(0) = 1$, с отрицательными нулями. Из соотношения (3) легко следует, что

$$\int_0^\infty \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\sigma+1}}\, dr = \cos\sigma\theta \int_0^\infty \frac{\ln f(r)}{r^{\sigma+1}}\, dr.$$

Проинтегрировав обе части по $\theta$ в пределах от $-\frac{\pi}{2\rho}$ до $\frac{\pi}{2\rho}$ и после этого применив теорему (А), получим

$$\varlimsup_{r\to\infty} \{\ln f(r)\}^{-1} \int_{-\pi/2\rho}^{\pi/2\rho} \ln|f(re^{i\theta})|\, d\theta \geqslant 2\rho^{-1},$$

откуда

$$\varlimsup_{r\to\infty} \{\ln M(r, f)\}^{-1}\, T(r, f) \geqslant (\pi\rho)^{-1} \tag{17}$$

(мы воспользовались тем, что $\ln f(r) = \ln M(r, f)$).

Полученное нами соотношение (17) связано со следующей задачей: определить точное значение величины

$$h_\rho = \inf \varlimsup_{r\to\infty} \{\ln M(r, f)\}^{-1} T(r, f),$$

где inf берется по всем целым функциям порядка $\rho$. Эта задача была сформулирована в работе Пэйли [8]. При $0 \leqslant \rho \leqslant 1/2$ точное значение $h_\rho = \frac{\sin \pi\rho}{\pi\rho}$ найдено Валироном. Пэйли высказал предположение, что при $\rho > 1/2$ $h_\rho = (\pi\rho)^{-1}$. Это предположение, насколько нам известно, до сих пор не доказано. Наш результат (17) показывает, что оно справедливо при $1/2 \leqslant \rho < 1$ для функций с отрицательными нулями. Отметим, что предположение об отрицательности нулей можно было бы снять, если бы удалось доказать элементарное неравенство

$$\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} \overset{+}{\ln} \left|\prod_1^n (re^{i\varphi} - a_k)\right| d\varphi}{\displaystyle\max_{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi} \overset{+}{\ln} \left|\prod_1^n (re^{i\varphi} - a_k)\right|} \geqslant \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} \overset{+}{\ln} \left|\prod_1^n (re^{i\varphi} + |a_k|)\right| d\varphi}{\displaystyle\ln \prod_1^n (r + |a_k|)}.$$

$$(0 \leqslant r < \infty)$$

* В работе Эдрея и Фукса [7] доказано, что для целых функций рода $p \geqslant 1$ с отрицательными нулями всегда $\delta(0, f) > 0$, где $\delta(0, f) = 1 - \varlimsup_{r\to\infty} N(r, 1/f)[T(r, f)]^{-1}$ — дефект нулей $f(z)$ в смысле Неванлинна; очевидно, $\delta(0, f) \leqslant \Delta(0, f)$, так что этот результат из нашего не получается.

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. P. Boas. Entire functions, New York, 1954, Ch. IV.

2. А. А. Гольдберг. Мероморфные функции с разделенными нулями и полюсами, «Изв. высш. учеб. завед.» Математика, (1960), 4, 67—72.

3. A. Denjoy. Sur une théoréme de Wiman, C. r. Acad. Sci., **193** (1931), 828—830.

4. B. Kjellberg. A relation between maximum and minimum modulus..., 12 Scand. mat. kongr., Lund, 1953 (1954), 135—138.

5. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Некоторые теоремы о росте мероморфных функций, «Записки мат. отд. физ.-мат. фак. ХГУ и ХМО», т. XXVII, сер. 4. (1961), 3—37.

6. G. Pólya. On the minimum modulus of integral functions, J. Lond. Math. Soc., **1** (1926), 78—86.

7. A. Edrei, W. H. J. Fuchs. On the growth of meromorphic functions... , Trans. of Amer. Math. Soc., **93**, 2 (1959), 292—328.

8. R. E. A. C. Paley. A note on integral functions, Proc. Cambr. Phil. Soc., 28 (1932), 262—265.

9. G. Valiron. Sur le minimum du module des fonctions entières d'ordre inférieur a un, Mathematica, **11** (1935), 264—269.