

Псевдодифференциальные уравнения электромагнитной дифракции на плоскопараллельной структуре и их дискретная модель

Ю. В. Гандель, В. О. Мищенко

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

We had devoted the presenting work to the mathematical modeling of the electromagnetic wave scattering on flat screens in the presence of dielectric underground. The problem difficulty lies with the non-homogeneous nature of the space that surrounding screen. The system of hyper-singular integral equations was built by the method of parametrical representations of integral and pseudo-differential transformations. We can find the scattered field by solving this system. To solve such tasks numerically we succeeded to a generation of the discrete closed wind frames method to build the discrete model.

1. Введение в проблему

Принимающие (или передающие) антенны радиотехнических устройств могут нередко рассматриваться как плоские бесконечно тонкие идеально проводящие экраны, закрепленные на диэлектрической подложке. Форма экрана может быть самой разной и требовать задания размеров различных своих элементов. Понятно, что длина падающей (или возбуждаемой) электромагнитной волны, скорее всего, близка к одному из этих размеров. В дальнейшем для определённости будем говорить о рассеянии волн.

Ранее подходы к решению трёхмерных задач дифракции на проводящих экранах в пространстве [1-3] и задач дифракции на включениях в слоистых диэлектриках [4-5] развивались, преимущественно, по отдельности. Метод настоящей работы позволяет решать, задачи, объединяющие существенные элементы обеих указанных постановок. Он относится к классу «методов дискретных особенностей», для которых в настоящее время характерна тенденция к сведению эллиптических краевых задач к гиперсингулярным интегральным уравнениям (ГСИУ) или их системам с последующим построением на базе этих уравнений дискретных моделей по принципу коллокаций [6]. Впервые этот подход – сведение парных интегральных уравнений двумерной или трёхмерной задачи к гиперсингулярным интегральным уравнениям был сформулирован и применён в [7].

В данной работе для моделирования картины рассеяния волн на плоском экране (не обязательно связанном или односвязном) в качестве источника рассматривается монохроматическая волна, приходящая, скажем, в вакууме (или в неионизированном воздухе) от далёкого мощного излучателя в форме плоской волны. Ради избавления от громоздкости какая-либо экранирующая поверхность с противоположной стороны (стороны несущего диэлектрика) считается отсутствующей. Таким образом, слой несущего диэлектрика моделируется

полупространством с определёнными значениями электрической и магнитной проницаемостей. Требуется разработать дискретную математическую модель для подготовки вычислительных экспериментов по исследованию характеристик рассеяния, основанных на расчётах полей в дальней, средней или ближней зонах от экрана.

Вывод гиперсингулярных интегральных уравнений основан в данной работе на использовании параметрических представлений псевдодифференциальных и интегральных операторов. Это - прозрачный подход, который для задач в однородном пространстве разработан в [7] на примере поляризованных полей и для пространственно случая реализован в [8]. Для двумерных задач при наличии раздела диэлектрических сред этот подход развивается в [9]. Представляется, что альтернативные методы вывода ГСИУ, основанные на физическом понятии об эквивалентных токах или на технике функции Грина, для рассматриваемых здесь задач излишне сложны.

С другой стороны, основанный на базе параметрических представлений псевдодифференциальных операторов подход ограничивается тем условием на область распространения электромагнитных волн, что она должна быть представима объединением своих непересекающихся подобластей, в которых применимо построение общих решений методом разделения переменных. Это компенсируется наиболее простым учётом геометрии решаемой задачи для снижения числа неизвестных функций, связанных в решаемой системе ГСИУ, и упрощения работы с ними. При этом рациональный выбор неизвестных функций осуществляется не интуитивно, а в естественном процессе преобразования части краевых условий для исходных неизвестных в условия финитности новых функций, которые по этой причине удобно выбрать искомыми. В данной работе в качестве исходных неизвестных выступают две компоненты электрической составляющей электромагнитного поля.

2. Математическая постановка задачи

В трёхмерном пространстве $X = R^3$, точки которого будут обозначаться как $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ ($x, y \in R^3$)

Выделяются подобласти

$$\begin{aligned} X_+ &= \langle x \in R^3 \mid x_3 > 0 \rangle && (\text{индекса «плюс»}) \\ X_- &= \langle x \in R^3 \mid x_3 < 0 \rangle && (\text{индекса «минус»}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Связанные с ними величины, какие-либо элементы или функции при необходимости подчеркнуть их принадлежность будут снабжаться соответствующим индексом («плюс» или «минус»). Граничная плоскость

$$P = \partial X_+ = \partial X_- = \langle x \in R^3 \mid x_3 = 0 \rangle \quad (2.2)$$

может отождествляться с R^2 , в связи с чем вводятся обозначения

$$x = (x', x_3), \quad y = (y', y_3) \quad (x', y' \in R^2, \quad x_3, y_3 \in R)$$

Рассеивающий экран Σ моделируется с помощью ограниченной в R^2 области σ , имеющей, скажем, кусочно-аналитическую границу $\partial\sigma$:

$$\Sigma = (\sigma, 0) = \langle x \in R^3 \mid x_3 = 0, \sigma \in R^2 \rangle \subset \Pi = (R^2, 0) \quad (2.3)$$

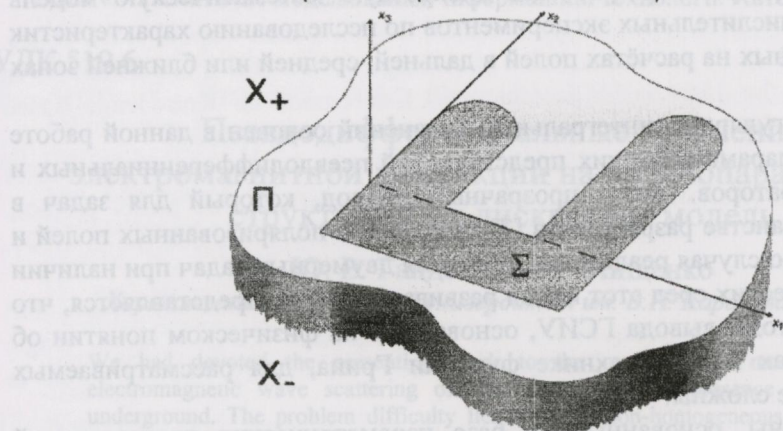


Рис.1. Экран Σ на поверхности диэлектрика, заполняющего область X_- .

Рассматриваются поля вида

$$E(x, t) = E \cdot \exp(-i\omega t), \quad H(x, t) \cdot \exp(-i\omega t) \quad (2.4)$$

где

$$E = E(x) = (E_1, E_2, E_3), \quad H = H(x) = (H_1, H_2, H_3)$$

Стационарные уравнения Максвелла в кусочно-неоднородной среде имеют форму:

$$\operatorname{rot} H = -i \varepsilon_{\pm} \varepsilon_0 \omega \cdot E \quad (x \in X_{\pm}, \text{ i.e. } x_3 > 0 \text{ or } x_3 < 0), \quad (2.5)$$

$$\operatorname{rot} E = i \varepsilon_{\pm} \varepsilon_0 \omega \cdot H \quad (x \in X_{\pm}), \quad (2.6)$$

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{div} H = 0 \quad (x \notin \Pi, \text{ i.e. } x_3 \neq 0) \quad (2.7)$$

На границе раздела диэлектрических сред для тангенциальных составляющих, как это принято, потребуем:

$$i=1, 2 \Rightarrow [E_i]_{-0}^{+0} = E_i(x', +0) - E_i(x', -0) = 0, \quad (2.8)$$

$$i=1, 2 \Rightarrow [H_i]_{-0}^{+0} = 0, \quad (2.9)$$

Пусть (E^0, H^0) является решением системы (2.5)-(2.7), которое удовлетворяет (2.8)-(2.9) при всех $x \in \Pi$ (т. е., $\forall x' \in R^2$) и имеет физический смысл падающего на экран поля. Тогда наблюдаемое полное поле (E^f, H^f) можно представить в виде

$$(E^f, H^f) = (E^0, H^0) + (E, H) \quad (x \in R^3 \setminus \Sigma) \quad (2.10)$$

где E, H - искомые вектор-функции, которым придаётся смысл рассеянного (дифрагированного) поля. Оно, конечно, удовлетворяет (2.5)-(2.7) и (2.8)-(2.9), но последнее полностью - только вне экрана Σ :

$$i=1, 2 \Rightarrow [E_i]_{-0}^{+0} = 0, [H_i]_{-0}^{+0} = 0 \quad (x \in \Pi \setminus \Sigma) \quad (2.11)$$

На самом экране тангенциальные компоненты электрической составляющей полного поля обнуляются, так что

$$i=1, 2 \Rightarrow E_i(x', +0) = -E_i^0(x', 0) = E_i(x', -0) \quad (x' \in \sigma) \quad (2.12)$$

На краю экрана требуется выполнение условия Майкснера, которое, как хорошо известно, в своей наиболее слабой форме ограничивает особенность поля вблизи края требованием конечности энергии электромагнитного поля. Поэтому выставляем условие

$$E, H \in L_2^{loc}(R^3) \quad (2.13)$$

Остаётся обычное (естественное в задачах дифракции в неограниченном пространстве) требование подобия в первом приближении рассеянного поля уходящей сферической волне – условие Зоммерфельда (запись которого должна учитывать вид временного множителя в (2.4)):

$$E, H = o\left(\frac{1}{R}\right) \quad (R \rightarrow \infty) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial R} E - ik_{\pm} E = o\left(\frac{1}{R}\right), \quad \frac{\partial}{\partial R} H - ik_{\pm} H = o\left(\frac{1}{R}\right) \quad (R \rightarrow \infty, x \in X_{\pm}) \quad (2.15)$$

(равномерно по R) где

$$R = \sqrt{|x'|^2 + x_3^2}, \quad k_{\pm}^2 = \varepsilon_{\pm} \varepsilon_0 \mu_{\pm} \mu_0 \quad (2.16)$$

Имеет место единственность решения краевой задачи (2.5)-(2.7), (2.11)-(2.15) в классе дифференцируемых вектор-функций с локально квадратично суммируемыми частными производными. Её проверка основана на математической формализации принципа сохранения электромагнитной энергии, как это показано на аналогичных и близких задачах в [10-12,4,5].

3. Вывод гиперсингулярных интегральных уравнений задачи

Следствием (2.5)-(2.7) является, как известно, то, что компоненты векторов поля удовлетворяют уравнениям Гельмгольца при соответствующих значениях волнового числа k (у нас всегда равно k_{+} или k_{-}):

$$-\Delta E_i = k_{\pm}^2 E_i, \quad -\Delta H_i = k_{\pm}^2 H_i \quad (i=1..3, x \in X_{\pm}) \quad (3.1)$$

Метод параметрических представлений позволяет получить на основании этого систему уравнений, связывающую 2 из 6 компонент поля (остальные через них выражаются).

Далее будет использоваться интегральное преобразование Фурье в R^2 обычных и обобщенных функций переменных (x', x_3) по переменной x' , параметризованное координатой x_3 . В качестве Фурье образов у нас будут выступать функции аргумента λ' :

$$\lambda' = (\lambda_1, \lambda_2), \quad \lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \quad (3.2)$$

которые будут иметь не более, чем полиномиальный рост (вместе со всеми своими производными). Таким образом, мы сможем оставаться в рамках пространства обобщенных функций медленного роста $\mathfrak{S}'$ [10]. Для таких обобщенных функций, корректны, как известно, понятия дифференцирования, умножения (на локально суммируемую функцию медленного роста), локализации носителя (финитность). Поэтому для этих обобщенных функций допустимы обычные функциональные обозначения (разумеется, без «поточечной» интерпретации). Принятую здесь нормировку преобразования Фурье поясним его выражением на основных функциях:

$$F[u] = F[u](\lambda') = F[u(x')](\lambda') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} u(x') \cdot \exp(-i\lambda'x') dx' \quad (3.3)$$

При использовании прямого и обратного преобразований Фурье будут применяться обозначения:

$$\begin{aligned} F^{-1}[f] &= F^{-1}[f](x') = F^{-1}[f(\lambda')](x'), \\ F[g] &= F[g](\lambda') = F[g(x')](\lambda') \quad (f, g \in \mathfrak{S}') \end{aligned} \quad (3.4)$$

Принадлежность элементов f, g более узким функциональным классам будет при выкладках подразумеваться ясной из контекста. В окончательных результатах выражения вида $F^{-1}[f](x')$ с локально суммируемой функцией f будут интерпретироваться конкретнее. В частности, для выяснения аналитических свойств Фурье прообраза будем выяснять поведение $f(\lambda')$ при $\lambda' \rightarrow \infty$. Напомним также, что преобразование Фурье элементов $u = u(x')$, обладающих центральной симметрией, сохраняет это свойство у образов, позволяя рассматривать, так называемое, преобразование Фурье-Бесселя G (иначе – преобразование Ганкеля нулевого порядка) [13-14]:

$$\begin{aligned} u(x') = u(|x'|) &\Rightarrow F[u](\lambda') = G[u(|x'|)](\lambda) \quad (\lambda = |\lambda'|), \\ f(\lambda') = f(|\lambda'|) &= f(\lambda) \Rightarrow F^{-1}[f(\lambda')](x') = G[f(\lambda)](|x'|) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Речь идёт об интегральном преобразовании с ядром вида

$$G(\xi, \lambda) = \lambda J_0(\xi\lambda),$$

Для упомянутых интерпретаций обобщенных функций полезна формула Зоммерфельда [11], которой в наших обозначениях можно придать такой вид:

$$G\left[\frac{\exp(-x_3\sqrt{\lambda^2 - k^2})}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\right](|x'|) = \frac{\exp(ik\sqrt{|x'|^2 + x_3^2})}{\sqrt{|x'|^2 + x_3^2}} \quad (3.6)$$

Применение к равенствам (3.1) прямого преобразования Фурье по $x' \in \mathbb{R}^2$ приводит к дифференциальным уравнениям гармонических колебаний

относительно x_3 , куда λ' входит как параметр. Поэтому, если решение рассматриваемой краевой задачи (2.5)-(2.7), (2.11)-(2.15) существует, то

$$E = F^{-1} \left[C^{\pm}(\lambda') \exp(\mp x_3 \gamma_{\pm}(\lambda)) \right], \quad (3.7)$$

где, определяя, как обычно, квадратный корень из $z = \rho \exp(i\varphi)$ равным

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho} \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\right), \text{ мы обозначаем}$$

$$\gamma_{\pm} = \sqrt{\lambda^2 - k_{\pm}^2} \quad (3.8)$$

Вытекающая из (2.11)-(2.12) всюду на Π (2.3) непрерывность тангенциальных компонент $E_i(x)$ ($i=1, 2$) электрической составляющей поля позволяет (в силу однозначной обратимости преобразования Фурье в классе $\mathfrak{I}'$) заключить, что

$$C^{+}_i(\lambda') = C^{-}_i(\lambda') = C_i(\lambda') \quad (i=1, 2) \quad (3.9)$$

Аналогично, исходя из вытекающего из (2.7) выражения

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial E_1}{\partial x_1} - \frac{\partial E_2}{\partial x_2},$$

с учётом представления (3.7) и равенств (3.9), совершая предельные переходы по $x_3 \rightarrow +0$ и $x_3 \rightarrow -0$, получим:

$$-\gamma_+ C^{+}_3 = -i(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) = \gamma_- C^{-}_3 \quad (3.10)$$

Полагая тогда

$$C_3 = \sqrt{\frac{\gamma_+}{\gamma_-}} C^{+}_3,$$

получим, что

$$C^{\pm}_3 = \pm \sqrt{\frac{\gamma_{\mp}}{\gamma_{\pm}}} C_3, \quad C_3 = i \frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2}{\sqrt{\gamma_+ \gamma_-}} \quad (3.11)(3.12)$$

Для вывода системы уравнений обратимся к тем из граничных условий (2.11) на $\Pi \setminus \Sigma$, которое ещё не было использовано. С учётом (2.5) это даёт:

$$0 = [H_1]^{+0}_{-0} = -\frac{i}{\omega \mu_0} \left[-\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} E_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} E_2 \right) \right]^{+0}_{-0}, \quad (3.13)$$

$$0 = [H_2]^{+0}_{-0} = -\frac{i}{\omega \mu_0} \left[-\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} E_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} E_3 \right) \right]^{+0}_{-0} \quad (x' \notin \sigma)$$

Здесь скачок подразумевается при фиксированном x' по x_3 , и для удобства записи введена функция

$$\mu(x_3) = \begin{cases} \mu_+ & \Leftarrow x_3 > 0 \\ \mu_- & \Leftarrow x_3 < 0 \end{cases}$$

Подставим в (3.13) выражение E_i через C_i (3.7, 9, 11) и, подразумевая, что далее C_3 будет согласно (3.12) выражено через C_1, C_2 , получим:

$$\begin{aligned} F^{-1} \left[i\lambda_2 \left(\frac{1}{\mu_+} \sqrt{\frac{\gamma_-}{\gamma_+}} + \frac{1}{\mu_-} \sqrt{\frac{\gamma_+}{\gamma_-}} \right) C_3 - \left(-\frac{\gamma_+}{\mu_+} - \frac{\gamma_-}{\mu_-} \right) C_2 \right] &= F^{-1} [f_2] = 0, \\ F^{-1} \left[i\lambda_1 \left(\frac{1}{\mu_+} \sqrt{\frac{\gamma_-}{\gamma_+}} + \frac{1}{\mu_-} \sqrt{\frac{\gamma_+}{\gamma_-}} \right) C_3 + \left(+\frac{\gamma_+}{\mu_+} + \frac{\gamma_-}{\mu_-} \right) C_1 \right] &= F^{-1} [f_1] = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

($x' \notin \sigma$)

(заодно вводя обозначения f_1, f_2). Эти формулы свидетельствуют о финитности Фурье прообразов функций f_1, f_2 . Следовательно,

$$u_i(x') = F^{-1} \left[\frac{\mu_- + \mu_+}{\mu_- \mu_+} f_i(\lambda') \right] \Rightarrow \text{supp } u_i \subseteq \sigma \quad (i=1, 2) \quad (3.15)$$

где постоянный множитель при f_i взят для упрощения дальнейших формул.

Теорема 3.1. Предельные значения на Π (2.2) тангенциальных компонент электрической составляющей рассеянного поля допускают (в предположении существования решения задачи (2.5)-(2.7), (2.11)-(2.15)) представление в форме сумм результатов действия псевдодифференциальных операторов $G_{i,j}$ на финитные (возможно, обобщенные) функции, сосредоточенные на σ :

$$\begin{aligned} E_i(x', 0) &= G_{i,1}[u_1](x') + G_{i,2}[u_2](x') \quad (i=1, 2, \text{supp } u_i \subseteq \sigma), \\ G_{i,j}[u](x') &= F^{-1} [g_{i,j}(\lambda') \cdot F[u](\lambda')] (x') \quad (i, j=1, 2) \end{aligned}$$

где символы $g_{i,j}(\lambda')$ псевдодифференциальных операторов имеют явные выражения. Из их, в частности, вытекает, что обобщенные ядра операторов $G_{i,j}$ слагаются из одной (при $i \neq j$) или двух частей так, что обязательная часть

представляет собой обобщённую производную $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ суммы ядер потенциалов

простого слоя оператора Гельмгольца (при $k = k_+, k_-$) и регулярной функции. Дополнительная (только при $i = j$) часть является суммой самих таких ядер потенциалов простого слоя и другой регулярной функции. Регулярные функции обладают первыми частными производными, которые непрерывны по Гёльдеру.

Мы пользуемся тем, что для обобщенной функции $f \in \mathfrak{D}'$ и финитной $g \in \mathfrak{D}'$ свёртка $f * g$ заведомо возможна, а её преобразованием Фурье служит произведение Фурье образов (и обратно) [13]. Хорошо известно также, что, если

данные обобщенные функции регулярны, и f отождествляется с локально суммируемой функцией, а g - с финитной и непрерывной (с носителем K), то

$$(f * g)(x') = \int_K f(x' - y') \cdot g(y') dy'$$

Следствие 3.1. Указанная в теореме пара финитных функций удовлетворяет системе свёрточных уравнений

$$\begin{aligned} G_{1,1} * u_1 + G_{1,2} * u_2 &= -E^0_1(x', 0), \\ G_{2,1} * u_1 + G_{2,2} * u_2 &= E^0_2(x', 0) \quad (x' \in \sigma) \end{aligned} \quad (3.16)$$

которая может считаться гиперсингулярной в том смысле, что главные части ядер получаются применением вторых частных производных к сужению на Π (2.2) фундаментальных решений оператора Гельмгольца в R^3 (см. формулировку теоремы).

Поскольку фундаментальное решение оператора Гельмгольца в R^3 (рассматриваемое при $x_3 = 0$) имеет особенность порядка $|x'|^{-1}$, то применение вторых частных производных приводит к неинтегрируемым в R^2 («гиперсингулярным») особенностям порядка $|x'|^{-3}$. Поэтому свёртки в (3.16) могут, как это хорошо известно, выражаться интегральной операцией только при понимании интегралов в смысле Адамара. Отметим также, что выделение главной части двумерных свёрток в форме ядер потенциалов для 3-мерного оператора Гельмгольца допускает произвол в выборе значений волновых чисел для этих потенциалов. Имеет смысл брать нулевое значение (как это сделано в [7]) или $k = k_-, k_+$, как в настоящей работе.

Замечание 3.1. В простейшем у нас частном случае, когда среды в полупространствах X_+, X_- одинаковы, система гиперсингулярных уравнений, решение которой позволяет строить рассеянное поле, может быть взята из работы [1], если применить её результаты к частному для неё случаю плоских экранов.

Доказательство теоремы 3.1.

Удобно ввести сокращенные обозначения для средних величин, взвешенных магнитными проницаемостями:

$$(a, b)_\mu = \frac{\mu_-}{\mu_- + \mu_+} \cdot a + \frac{\mu_+}{\mu_- + \mu_+} \cdot b = \alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b \quad (3.17)$$

Формулы (3.14) после подстановки туда (3.12) и приведения подобных (с учётом (3.17)), примут вид линейной системы относительно $C_1(\lambda'), C_2(\lambda')$:

$$\begin{aligned} ((\gamma_+, \gamma_-)_\mu - \lambda_1^2 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu) \cdot C_1 - \lambda_1 \lambda_2 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu C_2 &= F[u_1] \\ -\lambda_1 \lambda_2 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu \cdot C_1 - ((\gamma_+, \gamma_-)_\mu + \lambda_2^2 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu) C_2 &= F[u_2] \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$(3.19)$$

Покажем, что модуль функционального дискриминанта $D = D(\lambda') = D(\lambda)$ этой системы ограничен от нуля. Ему легко придать вид:

$$D = (\gamma_+, \gamma_-)_\mu^2 - \lambda^2 (\gamma_+, \gamma_-)_\mu (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu = -q^2 - \alpha(1-\alpha) \cdot (\lambda^2(k_+^2 + k_-^2) - 2k_+^2 k_-^2) \cdot \gamma_+^{-1} \gamma_-^{-1} = -q^2 - \alpha(1-\alpha) \cdot \varphi(\lambda) \quad (q^2 = -\alpha^2 k_+^2 - (1-\alpha)k_-^2) \quad (3.20)$$

Очевидно, что

$$D = -q^2 \iff k_+^2 = k_-^2 = k^2 \quad (\text{в частности, при } \varepsilon_+ = \varepsilon_-, \mu_+ = \mu_-)$$

Иначе, если $k_+^2 \neq k_-^2$, то, как мы убедимся,

$$\operatorname{Re} D \leq -q^2 \neq 0 \quad (\lambda \in R) \quad (3.21)$$

Действительно,

$$k_{\min}^2 \leq \lambda^2 \leq k_{\max}^2 \Rightarrow \operatorname{Re} \varphi(\lambda) = 0 \rightarrow \operatorname{Re} D = -q^2$$

$$0 < \lambda^2 < k_{\min}^2 \Rightarrow \operatorname{Re} D = D, \quad \varphi(\lambda) = \frac{2k_+^2 k_-^2 - \lambda^2(k_+^2 + k_-^2)}{\sqrt{(k_+^2 - \lambda^2)(k_-^2 - \lambda^2)}} >$$

$$\frac{2k_{\min}^2 k_{\max}^2 - k_{\min}^2(k_{\min}^2 + k_{\max}^2)}{\sqrt{(k_+^2 - \lambda^2)(k_-^2 - \lambda^2)}} > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} D < -q^2$$

$$k_{\max}^2 < \lambda^2 \Rightarrow \operatorname{Re} D = D, \quad \varphi(\lambda) = \frac{\lambda^2(k_+^2 + k_-^2) - 2k_+^2 k_-^2}{\sqrt{(\lambda^2 - k_+^2)(\lambda^2 - k_-^2)}} >$$

$$\lambda^2 \frac{(k_{\min}^2 + k_{\max}^2) - 2k_{\min}^2}{\sqrt{(\lambda^2 - k_+^2)(\lambda^2 - k_-^2)}} > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} D < -q^2$$

Таким образом, (3.19) разрешимо относительно вектора значений $C_i(\lambda')$:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} (\gamma_+, \gamma_-)_\mu - \lambda_2 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu & \lambda_1 \lambda_2 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu \\ \lambda_1 \lambda_2 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu & (\gamma_+, \gamma_-)_\mu - \lambda_1 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F[u_1] \\ F[u_2] \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

В силу (3.7) и (3.9) преобразования Фурье функций $C_i(\lambda') (i=1,2)$ представляют собой предельные значения первых двух компонент электрической составляющей рассеянного поля. Поэтому (3.22) определяет вид упоминаемых в формулировке теоремы $g_{i,j}(\lambda')$ (символов псевдодифференциальных операторов $G_{i,j}$). Эти функции, очевидно, аналитичны в R^2 вне окружностей $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = k_\pm^2$. Поведение $g_{i,j}(\nu')$ в окрестностях точек λ' указанных окружностей определяется поведением выражений вида

$$\frac{(\gamma_+, \gamma_-)_\mu}{D(\nu)} \sim \gamma_\pm^2 = O(|\nu' - \lambda'|) \quad (\nu' \rightarrow \lambda'),$$

$$\frac{\nu_i \nu_j (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu}{D(\nu)} = -\frac{\lambda_i \lambda_j \beta_\pm \gamma_\pm(\lambda)}{2\alpha(1-\alpha)(\lambda^2 \bar{k}^2 - \tilde{k}^4)} + O(|\nu' - \lambda'|) \quad (\nu' \rightarrow \lambda'),$$
(3.23)

где

$$\beta_+ = \alpha, \quad \beta_- = 1 - \alpha, \quad \bar{k}^2 = \frac{k_+^2 + k_-^2}{2}, \quad \tilde{k}^4 = \sqrt{k_+^2 k_-^2} \quad (3.24)$$

Следовательно, функции $g_{i,j}(\lambda')$ непрерывны всюду в R^2 . Но мы вычленим из них главные части явного вида, медленно убывающие при $\lambda \rightarrow \infty$ так, чтобы остатки убывали быстро и могли быть Фурье образами регулярных функций. При этом приходится учитывать то, что главные части будут иметь особенности (и, в виду непрерывности внесут такие же особенности в остатки, несколько изменяя аналитические свойства их прообразов). В осуществление этой программы запишем функциональный дискриминант в виде

$$D(\lambda) = -q_1^2(1 + \psi(\lambda)) \quad \left(q_1^2 = q^2 + 2\alpha(1-\alpha) \cdot \bar{k}^2 \right),$$

$$D^{-1} = -q_1^{-2} \left(1 + \frac{\psi}{1-\psi} \right) = -q_1^{-2} (1 + \xi(\lambda)),$$
(3.25)

где, очевидно, при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем

$$\psi(\lambda), \xi(\lambda) = O(\lambda^{-2}),$$

Поэтому структура символов $g_{i,j}(\lambda')$ такова:

$$h_{i,j} = \lambda_i \lambda_j \frac{(\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu}{D} = -\lambda_i \lambda_j \left(\frac{(\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu + (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu \cdot \xi(\lambda)}{q_1^2} \right) \quad (= g_{i,j} \Leftarrow i \neq j)$$
(3.26),

$$g_{i,j} = \frac{(\gamma_+, \gamma_-)_\mu}{D} - h_{j,j} = \lambda^2 \frac{(\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu}{D} - \frac{(k_+^2 \gamma_-^{-1}, k_-^2 \gamma_-^{-1})_\mu}{D} - h_{j,j} =$$

$$\lambda_i^2 \frac{(\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu}{D} - \frac{(k_+^2 \gamma_-^{-1}, k_-^2 \gamma_-^{-1})_\mu}{D} = -q_1^{-2} \times$$

$$(\lambda_i^2 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu - (k_+^2 \gamma_-^{-1}, k_-^2 \gamma_-^{-1})_\mu + \lambda_i^2 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu \cdot \xi(\lambda) + \eta(\lambda)) \quad (j = 3-i)$$
(3.27)

где

$$\zeta(\lambda) = (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu \cdot \xi(\lambda), \quad \eta(\lambda) = O(\lambda^{-3})$$
(3.28)

при этом функции $\zeta(\lambda), \eta(\lambda)$ (которые определяют «остатки») имеют в силу вида выделенных главных частей интегрируемые особенности порядка

$(\lambda - k_{\pm})^{-1/2}$ на окружностях $\lambda = |\lambda'| = k_{\pm}$. Поэтому каждую из этих функций можно представить в виде суммы некой финитной функции с указанными особенностями $f_1 \in L_2(R^2)$ и непрерывной функции $f_2 \in L_1(R^2)$, причём $\lambda_1^m \lambda_2^n f_1 \in L_2$ при всех, а $\lambda_1^m \lambda_2^n f_2 \in L_2$ при тех m, n , что $m + n < 2$. Другими словами, интересующие нас $\zeta(\lambda), \eta(\lambda)$ имеют Фурье прообразы, которые локально квадратично интегрируемы, причём, по крайней мере, вместе со своими частными производными первого порядка.

Доказательство следствия 3.1

Уравнения (3.16) следуют из краевых условий (2.12) и установленного теоремой представления граничных значений тангенциальных компонент электрического поля через две финитные функции, которые теперь трактуются как искомые.

4. Конечномерное моделирование методом замкнутых дискретных рамок

Об аналитическом решении (3.16) говорить не приходится, так же, как и о точном решении бесконечномерной линейной системы, к которой эту систему ГСИУ можно, так или иначе, свести. Поэтому актуальным является построение методов приближенного решения полученной гиперсингулярной системы. На сегодня реализуемым подходом является сопоставление исходной системе уравнений в свёртках её конечномерного аналога, причём определенным, отработанным на модельных задачах («каноническим») способом. Один из наиболее известных «канонических» приёмов – метод конечных элементов или (при решении интегральных уравнений на границе области) – метод граничных элементов. Они используют принцип галёркинских приближений. Если этот принцип применяется к уравнениям с гиперсингулярными ядрами в сочетании с коллокационным подходом, то такой метод следует отнести к классу методов дискретных особенностей. Он требует вычисления гиперсингулярных интегралов, включающих базисные функции. Если базисные функции постоянны на своём носителе, то такой «интеграл» выражают через обычные интегралы, включая контурные – «по рамкам» [6], так, что в случае задач гидродинамики ($k = 0$) получается тот же результат, что и при использовании для дискретизации физических соображений о формировании произвольных течений системами малых замкнутых вихрей [6].

Метод замкнутых дискретных рамок выбран нами по трём причинам. Во-первых, отличительной чертой таких методов является возможность получить устойчивую в отношении численных методов (типа Гаусса или Зейделя) СЛАУ, не закладывая в базисные функции точной информации о свойствах искомого решения, таких как поведение на границе. Во вторых, для подходов МДО в разнообразных плоских задачах дифракции имеется достаточно полная математическая теория [16]. В третьих, для ГСИУ трехмерной дифракции на экранах, но в однородном пространстве, корректность метода замкнутых дискретных рамок тоже обоснована [6].

Определим, что приближение к решению уравнения в свёртках (3.16) будет нами разыскиваться в классе регулярных функций вида

$$u_i(x') = \sum_{\alpha} u_{i,\alpha} \cdot I_{\alpha}(x') \quad (i=1,2), \quad (4.1)$$

где базисные функции I_{α} , в свою очередь, имеют вид

$$I(x') = h(x') \cdot \chi_C(x') \quad (h \in C^2(R^2), C \subset R^2) \quad (4.2)$$

где C - ограниченная область (какая-то из ячеек некоторого разбиения области σ), χ_C - её характеристическая функция. Тогда свёртки в (3.16), не подпадающие под классическое определение, будем понимать как регулярные функции соответственно естественному определению

$$(g * I_C)(x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} F^{-1}[F[g] \cdot F[I_{C,\varepsilon,\delta}]](x') \quad (4.3)$$

где $I_C(x')$ - функция с носителем C (4.2), $I_C^{\varepsilon}(x')$ - такая же, но её носитель - объединение $C(\varepsilon)$ всех ε -кругов с центрами в точках из C , а $I_{C,\varepsilon,\delta}^{\varepsilon}(x')$ - регуляризация последней функции с помощью бесконечно гладкой δ -шапочки [13, с.50]. Теперь хорошо известными в теории обобщенных функций приёмами можно убедиться в справедливости нужной нам формулы типа Грина.

Лемма 4.1. Пусть ограниченная область C имеет кусочно аналитическую границу.

1⁰. Пусть функция $f(\lambda')$ - локально интегрируемая медленного роста, а её Фурье прообраз - тоже локально интегрируемая регулярная функция, которая имеет непрерывные частные производные второго порядка, по крайней мере, вне нуля. Тогда свёртка с функцией $I = I_C$ вида (4.2) допускает представление

$$\begin{aligned} (-F^{-1}[\lambda_i \lambda_j f] * I_C)(z') &= \oint_{\partial C} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial x_j} (F^{-1}[f](z' - x')) \cdot h(x') dx_{3-i} + \\ &+ (-1)^{j-1} \oint_{\partial C} F^{-1}[f](z' - x') \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} h dx_{3-j} + \iint_C F^{-1}[f](z' - x') \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} h dx_1 dx_2 \\ &\quad (z' \notin \partial C). \end{aligned} \quad (4.4)$$

2⁰. Утверждение сохраняет силу, если функции двух переменных: $f(\lambda')$ - непрерывно дифференцируема, а $h(x')$ из (4.2) - линейна.

$$\begin{aligned} (-F^{-1}[\lambda_i \lambda_j f] * I_C)(z') &= \oint_{\partial C} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial x_j} (F^{-1}[f](z' - x')) \cdot h(x') dx_{3-i} + \\ &+ (-1)^{j-1} \oint_{\partial C} F^{-1}[f](z' - x') \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} h dx_{3-j} \quad (h = Ax_1 + Bx_2, z' \notin \partial C) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Доказательство леммы 4.1. Пусть, например, $i \neq j$, а $x' \in C$. Зафиксируем z' и рассмотрим

$$\begin{aligned}
& -F^{-1}[\lambda_1 \lambda_2 f]^* I_{C,\delta}^\varepsilon = -F^{-1}[f \cdot \lambda_1 \lambda_2 F[I_{C,\delta}^\varepsilon]] = \\
& \iint_C F^{-1}[f](z' - x') \cdot \frac{\partial^2 I_{C,\delta}^\varepsilon}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \iint_{C(\varepsilon) \setminus C} F^{-1}[f](z' - x') \cdot \frac{\partial^2 I_{C,\delta}^\varepsilon}{\partial x_1 \partial x_j} dx_1 dx_j = \\
& \iint_C F^{-1}[f](z' - x') \cdot \frac{\partial^2 I_C}{\partial x_1 \partial x_j} dx_1 dx_j + \\
& \oint_{\partial C} \frac{\partial}{\partial x_2} (F^{-1}[f](z' - x')) \cdot I_{C,\delta}^\varepsilon dx_2 + F^{-1}[f](z' - x') \cdot \frac{\partial I_{C,\delta}^\varepsilon}{\partial x_1} dx_1 + \\
& \iint_{C(\varepsilon) \setminus C} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (F^{-1}[f](z' - x')) \cdot I_{C,\delta}^\varepsilon dx_1 dx_j = J_1[f] + J_{2,\delta}^\varepsilon[f] + J_{3,\delta}^\varepsilon[f]
\end{aligned} \quad (4.6)$$

Поскольку регуляризации локально интегрируемой функции при $\delta \rightarrow 0$ сходятся к этой функции, причём по метрике L_1 [, теорема II], а интеграл от локально интегрируемой функции по ограниченной области непрерывно зависит от области, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} J_{3,\delta}^\varepsilon[f] = 0 \quad (4.7)$$

Контурный интеграл $J_{2,\delta}^\varepsilon$ (по «рамке», охватывающей особенность) при $\delta < \varepsilon$ от δ не зависит. Более того, тогда он не зависит и от ε и вполне определяется на ∂C предельными значениями подынтегрального выражения изнутри C :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} J_{2,\delta}^\varepsilon = \oint_{\partial C} \frac{\partial}{\partial x_2} (F^{-1}[f](z' - x')) \cdot h dx_2 - F^{-1}[f](z' - x') \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1, \quad (4.8)$$

Из (4.6)-(4.8) вытекает (4.4). Другие случаи ($i = j$, $x' \notin \bar{C}$) рассматриваются аналогично, что и завершает доказательство первого пункта. Для проверки 2° применим (4.4) к линейной $h(x')$ и регуляризации $F^{-1}[f]_\delta(x')$ функции $F^{-1}[f]$ с помощью бесконечно гладкой δ -шапочки. Последний член правой части обнулится, и для получения (4.5) остаётся перейти к пределу при $\delta \rightarrow 0$. Используется то, что регуляризация непрерывной функции сходится к этой функции равномерно на компактах, а непрерывные производные рассматриваемых регуляризаций суть регуляризации производных регуляризируемой функции.

Результат леммы позволяет распространять формулы обобщенного метода замкнутых вихревых рамок (аналогичные [6], формула (12.3.7)) на случаи более сложных гиперсингулярных ядер и базисных функций различной формы.

5. Алгоритм приближенного вычисления рассеянного поля

Методы вычисления характеристик дифракционного процесса, должны, так или иначе, использовать средства расчёта рассеянного поля в заданной точке пространства. Некоторые характеристики вычисляются через явно рассчитанные значения напряженностей (или потенциалов) в различных точках, другие - посредством анализа (обычно - асимптотического) выражений, вытекающих из

формул для таких расчетов. Изложим алгоритмическую схему приближенного расчёта напряженностей электрического и магнитного полей в рассматриваемой задаче.

Шаг 1. Дискретизация области σ . Рассмотрим сперва квадратную сетку в R^2 , шаг которой h выбирается из соображений компромисса между его практической малостью по сравнению с длиной падающей волны λ и показателем сложности вычислений $Compl(h)$. (Выбор этого показателя не однозначен в принципе [19] и еще зависит от используемых вспомогательных численных методов, характера и объёма предполагаемых вычисленных экспериментов. Можно ориентироваться на простейшие оценки сложности по памяти $Compl(h) = c \cdot h^4$ и по времени $Compl(h) = c \cdot h^6$, имеющие в виду решение возникающих СЛАУ по методу Гаусса.) Заменить далее исходную область σ на ступенчатую область σ_N , составленную из тех N ячеек сетки, большая часть которых (скажем, в смысле площади) пересекается с σ .

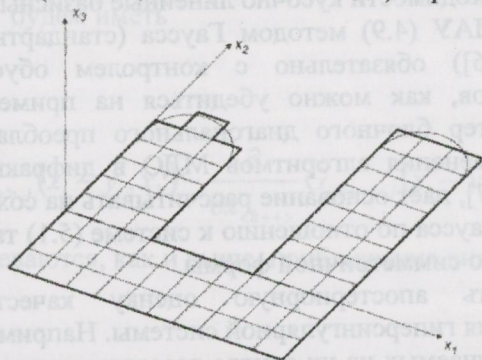


Рис. 2. Иллюстрация шага дискретизации области σ .

Замечание к шагу 1. Учитывая малость h по сравнению с λ и невысокий порядок аппроксимации метода внутри области (см. следующий шаг) степень заботы о близости $\partial\sigma_N$ к $\partial\sigma$ не обязательно должна быть максимальной, но определяться конкретными требованиями прикладной задачи. Повышать эту близость можно за счет сдвига и плавных деформаций исходной сетки. Некоторым обоснованием этого служит опыт численного решения ГСИУ на неквадратных сетках для плоских экранов (см., например, сообщения, сделанные в [6,8,17]).

Шаг 2-1. Обеспечить вычисление для задаваемых точек значений преобразования Фурье функций $\lambda_i \zeta(\lambda), \eta(\lambda)$.

Шаг 2-2. Заменить исходную гиперсингулярную систему её дискретным аналогом, используя базисные функции I_k , сосредоточенные и постоянные на элементах $\sigma(k)$ ступенчатой области σ_N ($k = 1..N$):

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^N G_{i,j,k,l} \cdot u_{j,l} = (-1)^i q_1^2 E_i(x'_k, 0) \quad (i=1,2; k=1..N), \quad (5.1)$$

где x'_k суть геометрические центры ячеек $\sigma(k)$, составляющих ступенчатую область σ_N ,

$$u_i(x') \mapsto [u_{i,k}]_{k=1}^N, \quad (x' \in \sigma(k) \Rightarrow u_i(x') = u_{i,k}), \quad (5.2)$$

$$G_{i,j,k,l} = (-1)^{i-1} \oint_{\partial\sigma(l)} \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ \frac{(\exp(ik_+|x'_k - x'|), \exp(ik_-|x'_k - x'|))_\mu}{|x'_k - x'|} + F^{-1}[\zeta](x'_k - x') \right\} dx_{3-j} + \delta_{i,j} \iint_{\sigma(l)} \left\{ -\frac{(k_+ \exp(ik_+|x'_k - x'|), k_- \exp(ik_-|x'_k - x'|))_\mu}{|x'_k - x'|} + G[\eta](x'_k - x') \right\} dx_1 dx_2 \quad (i=1,2; k=1..N) \quad (5.3)$$

Эти формулы основаны на применении леммы 3.1. Она позволяет также использовать при необходимости кусочно линейные базисными функции.

Шаг 3. Решить СЛАУ (4.9) методом Гаусса (стандартно используемым в реализациях МДО [6]) обязательно с контролем обусловленности. Для прямоугольных экранов, как можно убедиться на примерах, матрица этой системы имеет характер блочного диагонального преобладания. А это, как показывает опыт применения алгоритмов МДО в дифракционных, но более простых задачах [6,8,17], даёт основание рассчитывать на сохранение численной устойчивости метода Гаусса по отношению к системе (5.1) также и для экранов, не имеющих какой-либо симметричной формы.

Шаг 4. Получить апостериорную оценку качественной точности приближенного решения гиперсингулярной системы. Например, контролировать правдоподобность получаемых на их основе рассеянных полей 3-мерной задачи путём их сравнения с также основанными на ГСИУ решениями близких, но более простых задач - двумерных с учётом диэлектрической подложки [18] или трехмерных но с однородным диэлектрическим окружением экрана [8]. (Требовать обязательной количественной оценки точности за счёт измельчения сетки не представляется в данных задачах реальным в виду малости порядка сходимости и ограниченности вычислительного ресурса, основанного на персональных компьютерах.)

Шаг 5. Вычислить значение напряженности электрической составляющей поля в заданной точке в соответствии со связью между искомым векторным полем и решением системы (3.16), вытекающей из (3.7)-(3.10) и (3.22) (в обозначениях теоремы 3.1):

$$i=1,2 \Rightarrow E_i(x) = \sum_{j=1}^2 \{ F^{-1}[g_{i,j} \cdot \exp(\mp x_3 \cdot \gamma_{\pm})] * u_j \}(x'), \quad (5.4)$$

$$E_3(x) = \pm \sum_{j=1}^2 \left\{ F^{-1} \left[\sum_{i=1}^2 i \lambda_i g_{i,j} \cdot \exp(\mp x_3 \gamma_{\pm}) \right] * u_j \right\}(x') \quad \left(x' \in R^2, \begin{matrix} x_3 > 0 \\ x_3 < 0 \end{matrix} \right) \quad (5.5)$$

Подразумевается, что вычисление использует не точное решение $(u_1(x'), u_2(x'))$ системы (3.16), а приближенное, составленное из функций $u = u_i$ вида (4.1)-(4.2), полученное на шаге 3.

Замечание к шагу 5. Из (5.4)-(5.5) вытекает вид таких символов $\tilde{g}_{i,j}(\lambda', x_3)$ для псевдодифференциальных операторов с бесконечно гладкими ядрами $G_{i,j}$, действующих на функции переменной x' (x_3 - параметр), что

$$E_k = \sum_j \tilde{G}_{k,j}(x', x_3) * u_j(x') \quad (k=1..3, x_3 \neq 0), \quad (5.6)$$

где * понимается в смысле классической свёртки по переменной x' .

Шаг 6. Вычислить значение напряженности магнитной составляющей поля в заданной точке в соответствии с (2.6) и (5.4)-(5.5). Точнее: если обозначить

$$\langle k+ \rangle = k+1 \pmod{3}, \quad \langle k++ \rangle = k+2 \pmod{3}, \quad (5.7)$$

то при $k=1..3, x_3 \neq 0$ будем иметь

$$H_k = -\frac{i}{\mu_{\pm} \mu_0 \omega} \times \sum_j \iint_{\sigma(N)} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\langle k++ \rangle}} \tilde{G}_{\langle k++ \rangle, j}(x' - y', x_3) - \frac{\partial}{\partial x_{\langle k+ \rangle}} \tilde{G}_{\langle k+ \rangle, j}(x' - y', x_3) \right) \cdot u_j(y') dy' \quad (5.8)$$

где под u_j подразумеваются, как и выше, приближения вида (4.1)-(4.2).

6. Заключение

В численном исследовании процессов рассеяния электромагнитных волн плоскими металлическими экранами реальных радиотехнических устройств следует принимать во внимание наличие диэлектрических подложек, на которых эти экраны обыкновенно крепятся. Рассмотренная постановка задачи определённым образом учитывает это обстоятельство. При этом принимаемые ради упрощения задачи идеализирующие предположения позволили остаться в рамках класса плоско параллельных структур и применить в рассматриваемой задаче метод параметрических представлений интегральных и псевдодифференциальных операторов.

Этим удалось в значительной степени обойти сложность вывода эквивалентных интегральных уравнений на экране, которыми целесообразно заменить исходную постановку для системы уравнений Максвелла в диэлектрически кусочно неоднородном окружающем экран пространстве. Точнее, нами построена система уравнений в свёртках (с гиперсингулярными ядрами) относительно неких неизвестных функций точки экрана. Выбор этих неизвестных функций (взамен предельных значений двух компонент электрического поля) осуществляется не эвристически, но указание на него получается в процессе реализации метода параметрических интегральных представлений псевдодифференциальных операторов.

Ядра полученных уравнений в свёртках, как нами доказано, выражаются в основном через вторые производные (в смысле обобщенных функций) локально

суммируемых и вне нуля непрерывных функций, причём особенности в нуле такие, как у фундаментальных решений уравнений Гельмгольца. Поэтому поиск приближенных решений в классе кусочно-постоянных функций приводит к такой дискретной модели данной системы, которая соответствует методу замкнутых дискретных рамок, т.е. обобщенному методу замкнутых дискретных вихревых рамок [6]. Ввиду того, что такая система пока находится вне имеющейся теории сверхсингулярных интегральных уравнений, нами рассмотрены её идейные связи с построениями математической теории методов дискретных особенностей. В этом состоит неформальное обоснование выбора модели дискретизации именно из данного класса.

Несмотря на громоздкость формул, переводящую задачи дифракции на экранах в диэлектрически неоднородных средах в качественно более сложный класс, нами строится схема расчётного алгоритма, позволяющего производить численный расчёт рассеянных полей и, тем самым, их характеристик (включая диаграммы направленности).

Теоретическое значение данной работы состоит в том, что она развивает метод параметрических представлений интегральных и псевдодифференциальных операторов в классах обобщённых функций для нового класса математических задач электродинамики в сочетании с алгоритмической подготовкой последующей численной реализации МДО. А прикладное значение — в том, что её результаты открывают дорогу для вычислительных экспериментов на основе новой математической и дискретной моделей дифракции на идеально проводящих экранах с имитацией эффекта диэлектрической подложки.

Дальнейшие исследования, которые продолжали бы направление данной работы, прежде всего, требуют надёжной программной реализации построенной здесь схемы базового алгоритма и могут состоять в планировании и проведении систематических вычислительных экспериментов для выяснения прикладных возможностей таких алгоритмов. Представляет также безусловный интерес развитие и углублённое исследование математическими методами свойств разработанной в данной работе модели дифракции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы // ДАН СССР, 1984, - т.286, вып. 1., С. 96-100.
2. Anfinogenov A.Yu., Lifanov I.I. On numerical solution of integral equations of planar and spatial diffraction problems. — Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. — 1992. — Vol. 7, N 5, P. 387-404.
3. Щербина В.А. Граничные уравнения для квазистационарной задачи дифракции электромагнитного поля в R^3 на идеально проводящем разрезе // Труды VII Международного симпозиума МДОЗМФ. — Феодосия, 1997. — С.234-235.
4. Смагин С.И. О численном решении задач дифракции в интегральных постановках // Труды Международной конференции по вычислительной

- математике МКВМ-2004. Ч. II. – Новосибирск. – Изд. ИВМиМГ СО РАН, 2005. – С. 653-659.
5. Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Об использовании гиперсингулярных интегральных уравнений для численного анализа задач дифракции электромагнитных волн на магнитоэлектрических телах // Труды XII Международного симпозиума МДОЗМФ-2005. - Харьков-Херсон, 2005. - С 114-117.
 6. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. – М.: Янус-К.– 2001.– 508 с.
 7. Гандель Ю.В. Парные и гиперсингулярные интегральные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на плоских решетках и экранах // Труды XI Международного симпозиума МДОЗМФ-2003.-Харьков-Херсон,2003.- С.53-58
 8. Антонен А. В., Гандель Ю. В. Численный анализ гиперсингулярного уравнения задач дифракции на плоском экране // Вестник Харк. нац. ун-та., – 2003. – № 590. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. 1. – С. 9-14.
 9. Антонен А.В. Математическая модель на базе МДО многоэлементной полосковой антенны на экранированной диэлектрической подложке // Вестник Харк. нац. ун-та. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления". вып. 5. - № 703, 2005. - С. 25-35.
 10. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. - М.: Мир, 1987, 311 с.
 11. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н. Лекции по математической физике.- М: Изд-во МГУ, 1993.- 352 с.
 12. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики.- М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
 13. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука. –1979, 320 с.
 14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
 15. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
 16. Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Учеб. пособие, Ч.1, Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.- Харьков-Херсон: изд. ХНУ, 2001.- 92 с.
 17. Гахов А. В., Мищенко В.О. Трехмерная модель метода дискретных особенностей рассеяния скалярных волн экраном на границе раздела сред // Вестник ХНТУ.-2006.-№2(25)С.135-140.
 18. Луговой А.В., Сологуб В.Г. Рассеяние электромагнитных волн идеально проводящей лентой, лежащей на границе диэлектрического полупространства. – Препринт ИРЭ АН УССР №28. - Харьков, 1973. – 44 с.
 19. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М. – 1979. -536 с.

Эффективность вычислений МДО в скалярной задаче 3-мерной дифракции на экране, лежащем в плоскости раздела сред

А. В. Гахов

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

This paper investigated the new numerical method. This one obtained by the application of the generated discrete closed wind frames method to the hypersingular integral equation of this problem. Using method of planned computing experiment, we showed the adequacy of the developing algorithm and the realizing program. We estimated that reinforcement of the model which is connected with the physical difference of media upper and lower of the screen. We estimated the time complexity of calculations too.

1. Численные методы типа дискретных особенностей в пространственных задачах дифракции, истоки данной работы

Методы дискретных особенностей как численные методы, математически эквивалентные решению сингулярных или гиперсингулярных интегральных уравнений или систем, берут начало от метода дискретных вихрей С.М. Белоцерковского в аэрогидродинамике [1]. В дальнейшем, как известно, класс этих методов существенно расширился и включил в себя, в частности, новые подходы к решению двумерных и трёхмерных задач математической теории дифракции [2-11]. Настоящая работа опирается на следующие методы из указанной области. Это метод параметрических интегральных представлений псевдодифференциальных уравнений для плоскопараллельных задач дифракции [10] и численный обобщенный метод дискретных замкнутых вихревых рамок [6,9] применительно к гиперсингулярным интегральным уравнениям (ГСИУ) с неким ядром, главная часть которого есть нормальная производная потенциала двойного слоя.

Вместе с этим данная работа использует вычислительный эксперимент для исследования эффективности алгоритма, схема которого предложена в [12] для решения пространственной задачи дифракции плоских волн на жестком экране, расположенном в плоскости раздела двух различных сред. Обоснование такого экспериментального исследования дифракционных задач, имеющих усложненную приближенную к реальности постановку, опирается, согласно концепции [7], на соотнесение полученных численных результатов с какими-то подобными результатами, ранее обоснованными в модельных случаях.

Отметим, что в скалярных, а также векторных задачах дифракции на экранах в 3-х мерном пространстве наряду с построением ГСИУ и численных алгоритмов их решения, накоплен большой опыт проведения компьютерных экспериментов испытательного характера по пространственной дифракции методами дискретных особенностей на экранах [2,5,9,11,13-16].

В работах [3-6] пространство вне рассеивающих экранов предполагается однородным, что в ряде случаев упрощает постановку задач, делая их модельным, но позволяет в какой-то мере привлекать в исследованиях аналитические подходы, а также проводить вычислительные эксперименты при степени дискретизации, достаточной по требованиям точности и приемлемой по вычислительным ресурсам.

Данная статья развивает результат работы [12] в направлении превращения алгоритмической схемы в практически работоспособный алгоритма и близка к [14,16] по подходу к планированию и программному обеспечению численных экспериментов.

2. Актуальность темы, цели и задачи работы.

Актуальность разработки алгоритмов и программ для расчета дифракционных полей при различных акустических свойствах частей пространства, разделяемого плоскостью экрана, объясняется тем, что во многих реальных задачах рассеивающие экраны лежат на подложке из более плотного материала (в акустических задачах) или из твёрдого диэлектрика (в электродинамических). Учёт этого обстоятельства существенно осложняет задачу, поэтому постановки задач первоначальных работ [2-11] его опускали. Однако метод параметрических интегральных представлений псевдодифференциальных уравнений позволяет концептуально просто учесть слоистую неоднородность пространства в плоскопараллельных задачах. Поэтому с недавних пор (после преодоления ряда технических проблем) такие задачи начинают ставиться и решаться в двумерной [17] и пространственной постановках [18,12].

В данной работе, следуя [12], принята постановка, в которой система плоских бесконечно тонких акустически жестких экранов (которую можно трактовать как один, но, вообще говоря, несвязный экран) располагается на плоской границе раздела двух однородных сред.

Цель данной работы – построение вычислительного алгоритма с его реализацией в форме компьютерной программы и проверка прикладной эффективности этого алгоритма в серии численных экспериментов.

Для осуществления поставленной цели нами решены задачи, которые позволяют осуществить следующее. Завершить построение прикладного алгоритма расчета рассеянного поля по соответствующей схеме МДО (разработанной в [12]), сравнить сложность постановки задачи дифракции для экрана на разделе сред со случаем экрана в однородном пространстве, испытать прикладную значимость разработанного нами программного обеспечения (комплекс Diffraction Studio 2.0), которое реализует построенный алгоритм.

3. Описание математической модели и постановка задачи о вычислительной эффективности моделирования

Представление о геометрии экрана, его расположении и характере “падающего поля” (моделируемого в нашем случае плоской волной) даёт Рис.1

Плоский бесконечно тонкий экран Σ геометрически представляет собой область (не обязательно односвязную) в плоскости XY , граница которой в представленных здесь вычислительных экспериментах принималась

составленной из отрезков, параллельных осям OX и OY . Физически это акустически жесткое препятствие для звуковых волн.

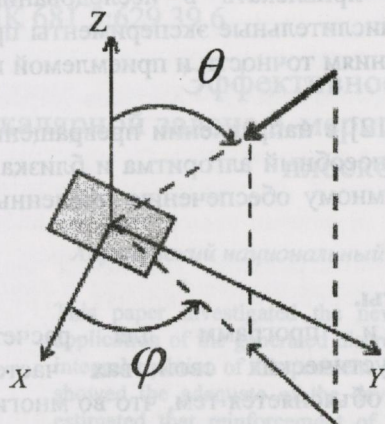


Рис. 1 Схема падения плоской волны на жесткий экран

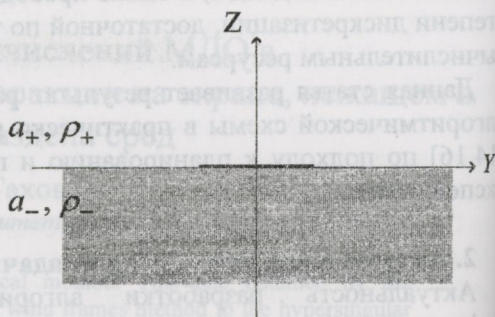


Рис. 2 Физические среды над и под плоскостью экрана различны

В верхнем полупространстве

$$\{x = (\tilde{x}, x_3) \in R^3 \mid x_3 > 0\}, \quad \tilde{x} = (x_1, x_2) \in R^2$$

плотность принимается постоянной и равной ρ_+ , а в нижнем

$$\{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 < 0\}, \quad \tilde{x} = (x_1, x_2) \in R^2$$

также постоянной и равной ρ_- . Падающая волна и, соответственно, рассеянное поле считаются имеющими постоянную частоту ω , так что волновые числа в верхнем и нижнем полупространствах равны:

$$\begin{aligned} k_+ &= \frac{\omega}{a_+} & (x_3 > 0) \\ k_- &= \frac{\omega}{a_-} & (x_3 < 0) \end{aligned} \quad (1)$$

где a_+ и a_- - скорости распространения звуковых волн в верхнем и нижнем полупространствах.

Полное поле, наблюдаемое в процессе рассеяния плоской волны на экране ищем в виде:

$$v = p + w, \quad (2)$$

где p - падающее поле [12], а w - рассеянное поле, которое следует определить.

Краевая задача для уравнения Гельмгольца, которой удовлетворяет рассеянное поле [20]:

$$\Delta w + k_+^2 w = 0 \quad (x_3 > 0) \quad \Delta w + k_-^2 w = 0 \quad (x_3 < 0) \quad (3)$$

$$w|_{x_3=+0} = w|_{x_3=-0} \quad (x_3 = 0, \tilde{x} \notin \Sigma) \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho_+} \frac{\partial w}{\partial x_3} \Big|_{x_3=+0} = \frac{1}{\rho_-} \frac{\partial w}{\partial x_3} \Big|_{x_3=-0} \quad (\tilde{x} \notin \Sigma) \quad (5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_3} \Big|_{x_3=+0} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} \Big|_{x_3=+0} \quad \frac{\partial w}{\partial x_3} \Big|_{x_3=-0} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} \Big|_{x_3=-0} \quad (\tilde{x} \in \Sigma) \quad (6)$$

$$\left(\frac{x}{|x|}, \text{grad } w(x) \right) - ik_{\pm} w(x) = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (\text{равномерно по } x/|x|) \quad (7)$$

$$\int_U (|w|^2 + |\nabla w|^2) dx < \infty \quad (\text{в окрестности } U \text{ края экрана } \partial \Sigma) \quad (8)$$

Поле w может быть согласно [12,18] выражено через функцию $u(\tilde{x})$, сосредоточенную на экране ($\text{supp } u \subseteq \Sigma$), которая является решением гиперсингулярного интегрального уравнения

$$u * K = f \quad \left(f(\tilde{x}) = \frac{1}{\rho_+} \frac{\partial p}{\partial x_3} \Big|_{x_3=+0} \right) \quad (9)$$

где $*$ - двумерная свертка, которая может пониматься в смысле обобщенных функций [21], а ядро - преобразование Фурье

$$K = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\rho_+} \gamma_+ \left(1 + \frac{\rho_-}{\rho_+} \frac{\gamma_+}{\gamma_-} \right)^{-1} e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda,$$

которое понимаем в смысле обобщенных функций, но в силу своей структуры оказывается суммой гиперсингулярного ядра и гладкой функции.

Согласно результату работы [12] для приближенного решения (9) можно использовать дискретную модель, основанную на решении следующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\forall \nu: \sum_{\mu} u_{\mu} \left(-\xi_1 \cdot \text{a.f.p.} \iint_{\Sigma_{\mu}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{e^{ik_{+}|y-\tilde{x}_{\nu}|}}{|y-\tilde{x}_{\nu}|} dy + \right. \\ \left. + \xi_2 \cdot \iint_{\Sigma_{\mu}} \frac{e^{ik_{+}|y-\tilde{x}_{\nu}|}}{|y-\tilde{x}_{\nu}|} + \iint_{\Sigma_{\mu}} P(|y-\tilde{x}|) dy \right) = f(\tilde{x}_{\nu}), \quad (\tilde{x}_{\nu} \in \Sigma_{\nu}) \quad (10)$$

где а.f.p.- указывает на понимание «интеграла» в смысле конечной части по Адамару [6]

$$\xi_1 = \frac{1}{\rho_+ + \rho_-}, \quad \xi_2 = \frac{k_-^2 \cdot \rho_- + (\rho_- + 2\rho_+) \cdot k_+^2}{2 \cdot (\rho_- + \rho_+)^2}$$

$$P(\eta) \in C^{2-\varepsilon}(\mathbb{R}^2) \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

$$\Sigma = \bigcup_{\mu=1}^N \Sigma_{\mu}, \quad \Sigma_{\mu} \cap \Sigma_{\eta} = \emptyset, \mu \neq \eta$$

$$u = \sum_{\mu=1..N} u_{\mu} \cdot I_{\mu}(\tilde{x}), \quad I_{\mu}(\tilde{x}) = 1 \text{ если } \tilde{x} \in \Sigma_{\mu}, \text{ иначе } 0$$

Задачи настоящей работы:

- разработка полного набора функций и процедур для прикладного алгоритма расчета рассеянного поля с оптимизацией вычислений элементов СЛАУ;
- повышение эффективности (точность за меньшее время) вычисления интегралов разной кратности специального вида от комплексозначных функций;
- экспериментальное исследование временной сложности программной реализации алгоритма для экрана на разделе сред (по сравнению со случаем экрана в однородном пространстве);
- испытание прикладных возможностей программной реализации алгоритма на подборке модельных постановок задач;

4. Разработка и оптимизация алгоритма расчета коэффициентов СЛАУ

Формула восстановления рассеянного поля в заданной точке содержит обычный интеграл и имеет вид:

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} u(y) \int_{R^2} \frac{e^{-\gamma_-(x_3-y_3)}}{\left(1 + \frac{\rho_- \gamma_+}{\rho_+ \gamma_-}\right)} e^{-i(\tilde{x}-\tilde{y}, \lambda)} d\lambda dy \quad (11)$$

В уравнении (9) и формуле (11) регулярные ядра являются двумерными преобразованиями Фурье центрально симметричных функций громоздкого, но явного вида [12,18]. Поэтому для вычисления интеграла

$$\iint_{\Sigma_{\mu}} P(y - \tilde{x}) dy, \quad (\Sigma_{\mu} \subset \Sigma)$$

запишем ядро в форме преобразования Фурье-Бесселя:

$$P(r) = \int_0^{\infty} |\lambda| \cdot j_0(r|\lambda|) \cdot \left[\frac{\rho_+ \rho_- (k_+^2 - k_-^2)^3}{2(\rho_+ + \rho_-)^2 \gamma_+ (\gamma_+ + \gamma_-)^3 (\rho_- \gamma_+ + \rho_+ \gamma_-)} - \frac{\rho_- (\rho_+ - \rho_-) (k_+^2 - k_-^2)^2}{2(\rho_+ + \rho_-)^2 (\gamma_+ + \gamma_-)^2 (\rho_- \gamma_+ + \rho_+ \gamma_-)} \right] \quad (12)$$

Первый интеграл в (10), который понимается там по Адамару можно трактовать также свертку характеристической функции ячейки Σ_{ν} с высоко сингулярным ядром. На такой интеграл можно распространить формулу типа Грина, которая позволяет придать ему форму, в которой используются обычные двумерные и криволинейные интегралы [6]. С учетом этого, уравнение (10) примет вид:

$$\forall \nu: \sum_{\mu} u_{\mu} \left(\xi_1 \cdot \oint_{\partial \Sigma_{\mu}} \left(\vec{dl} \times \nabla_y \frac{e^{ik_+|y-\tilde{x}_{\nu}|}}{|y-\tilde{x}_{\nu}|} \right) \cdot \vec{n} + \right. \\ \left. + \xi_2 \cdot \frac{i}{k_+} \int_0^{2\pi} e^{ik_+ \Phi(\varphi)} d\varphi + \iint_{\Sigma_{\mu}} P(|y-\tilde{x}|) dy \right) = f(\tilde{x}_{\nu}), \quad (\tilde{x}_{\nu} \in \Sigma_{\nu}) \quad (13)$$

где преобразован также и второй интеграл. Он преобразован при помощи перехода в полярные координаты с центром в точке локализации особенности.

Основным этапом, занимающим вычислительные ресурсы, является этап формирования матрицы системы.

Анализ вида интегралов, необходимых для подсчета элементов матрицы, позволяет сократить количество вычисляемых элементов матрицы и, тем самым, уменьшить время ее формирования.

Если форма экрана прямоугольная и без отверстий, то структура матрицы при выбранной нами нумерации ячеек Σ_{μ} имеет блочнотеплицеву структуру [2]. В случае экрана - прямоугольная «рамка» мы применяем идентичную схему нумерации ячеек Σ_{μ} , а также алгоритм «фильтрации» для оптимизации счета элементов матрицы (отфильтровываются ранее вычисленные элементы).

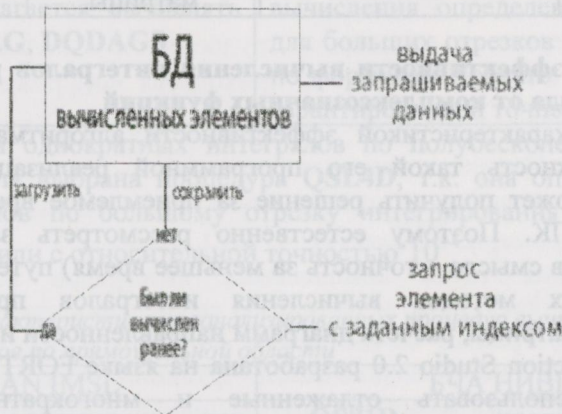


Рис.3 Схема «фильтрации» элементов матрицы

Применение схемы фильтрации (Рис.3) возможно благодаря свойству вычисляемых интегралов, зависящих от расстояния, что позволяет естественным образом ввести их параметризацию и организовать хранение вычисленных значений.

Прямоугольный экран Σ покрывается $N_1 \times N_2$ ячейками Σ_{μ} и может содержать отверстие, покрываемое $M_1 \times M_2$ ячейками той же сетки.

Табл. 1 Затраты на формирование матрицы системы по числу различных вычисляемых элементов

	Произвольный экран	Сплошной прямоугольный экран	Прямоугольный экран с отверстием
Матрица	общего вида	блочно-теплицева	общего вида, много повторяющихся элементов
Размерность матрицы	$N_1 N_2 \times N_1 N_2$	$N_1 N_2 \times N_1 N_2$	$(N_1 - M_1)(N_2 - M_2) \times (N_1 - M_1)(N_2 - M_2)$
Количество ГС интегралов для вычислений	$N_1 \cdot N_2$	1	1
Количество обычных интегралов для вычисления	$N_1 N_2 \cdot (N_1 N_2 - 1)$	$N_1 \cdot N_2 - 1$	порядка $N_1 \cdot N_2$, зависит от конкретного вида экрана
Чем достигнуто	-	Удачной структурой матрицы	Применением «фильтрации»

5. Повышение эффективности вычисления интегралов разной кратности специального вида от комплексозначных функций

Важнейшей характеристикой эффективности алгоритма в нашей задаче является возможность такой его программной реализации, при которой исследователь может получить решение за приемлемое время с достаточной точностью на ПК. Поэтому естественно рассмотреть задачу повышения эффективности (в смысле – точность за меньшее время) путем отбора наиболее производительных методов вычисления интегралов при формировании коэффициентов матрицы, расчета диаграмм направленности и полей.

Версия Diffraction Studio 2.0 разработана на языке FORTRAN с тем, чтобы максимально использовать отлаженные и многократно опробованные стандартные процедуры как самого FORTRAN – библиотеки IMSL, так и набор подпрограмм «Библиотеки численного анализа НИВЦ МГУ»

Табл. 2.1 Краткая характеристика проанализированных процедур вычисления однократных интегралов по отрезкам

FORTRAN IMSL	БЧА НИВЦ МГУ
DQDAGS - предназначена для вычисления однократного интеграла от функции по отрезку с заданной абсолютной и относительной погрешностями	QSS1D – предназначена для вычисления однократного интеграла по обобщенной квадратурной формуле Симпсона с заданной абсолютной погрешностью
DQDAG - предназначена для вычисления однократного интеграла	QSL1D - предназначена для вычисления однократного интеграла

функции с использованием квадратур Гаусса-Кронрода с заданной абсолютной и относительной погрешностями	по формулам Лобатто 11-й степени точности QSK2D - предназначена для вычисления однократного интеграла по обобщенной квадратурной формуле Ньютона-Котеса, точной для многочленов 9-й степени
--	---

Для эффективного вычисления однократных интегралов по отрезкам среди рассматриваемых (см. Табл.2.1) была выбрана процедура **DQDAG**. На этот выбор однозначно указывают результаты тестовых прогонов соответствующих версий программы Diffraction Studio (v.1,2). Использование **DQDAG** не только позволило контролировать погрешности, но и адаптировать счет к осциллирующим интегралам.

Вычисления проводились с относительной погрешностью 10^{-5} , значение параметра для квадратур Гаусса-Кронрода выбиралось для осциллирующих интегралов равным 6 (30-61 узел)

Табл. 2.2 Краткая характеристика проанализированных процедур вычисления однократных интегралов по большому (в нашем случае - полубесконечному) отрезку

FORTRAN IMSL	БЧА НИВЦ МГУ
Специализированные процедуры отсутствуют, предлагается вычислять процедурами DQDAG , DQDAGS	QSL4D - предназначена для вычисления определенного интеграла для больших отрезков интегрирования по формулам Лобатто 11-ой степени с гарантированной точностью

Для вычислений однократных интегралов по полубесконечным отрезкам интегрирования была выбрана процедура **QSL4D**, т.к. она оптимизированная для счета интегралов по большому отрезку интегрирования (см. Табл.2.2). Вычисления проводили с относительной точностью 10^{-4}

Табл. 2.3 Краткая характеристика проанализированных процедур вычисления двукратных интегралов по прямоугольной области

FORTRAN IMSL	БЧА НИВЦ МГУ
DQAND - предназначена для вычисления двукратного интеграла функции по гиперчетыреугольнику DTWODQ - предназначена для вычисления двукратного интеграла от функции с использованием квадратур Гаусса-Кронрода с заданной абсолютной и относительной погрешностями	QS81D - предназначена для вычисления определенного N - кратного ($N=2..15$) интеграла по прямоугольному параллелепипеду методом Гаусса с заданной абсолютной погрешностью QS82D - предназначена для вычисления определенного N - кратного ($N=2..15$) интеграла по прямоугольному параллелепипеду методом Гаусса

Из проанализированных нами библиотечных подпрограмм вычисления интегралов по прямоугольнику (см. Табл.2.3), в качестве достаточно

эффективных зарекомендовали себя **QS81D**, **DQAND** и **DTWODQ**. Причем в случае наличия осцилляций предпочтение отдавалось **DTWODQ** (вычисления проводили с относительной погрешностью 10^{-5} , значение параметра для квадратур Гаусса-Кронрода выбиралось для осциллирующих интегралов равным 6 (30-61 узел)), а в остальных случаях - **QS81D**, **DQAND**, разделяя применение только временем счета конкретных интегралов.

Несмотря на разнообразие стандартных процедур вычисления в некоторых случаях для достижения поставленной цели эффективности нам пришлось разрабатывать на их основе собственные процедуры вычислений. Некоторые такие случаи приведены ниже.

В связи с этим отметим, что для вычисления матрицы СЛАУ, полей и диаграмм направленности необходимо вычислять интегралы следующего вида

$$I = \int_{\Sigma_\mu} f(x) K(|x|) dx, \text{ где } K(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{R^p} g(\xi, y) dy = K_p, \quad p = 1, 2 \quad (14)$$

где значения $f(x), g(\xi, y)$ - комплексные.

При изучении возможности применения стандартных процедур оказалось, что все подпрограммы настроены на работу с действительными подинтегральными функциями. Стандартным приемом является вычисление по очереди Re и Im частей подинтегральной функции. Но в данном случае он не эффективен потому, что функция $K(\xi)$ в (14) также комплекснозначная, а вычисление интеграла от нее весьма трудоемко. Вычисляя Re и Im частей интеграла I по очереди, при $p=2$ приходится четырежды возвращаться к вычислению двойных интегралов вида K_p . Оказалось, что в таком случае, несмотря на более быстрое вычисление вещественных интегралов по сравнению с комплексными, вычисление одного комплексного интеграла вида K_2 дает ускорение счета примерно в 3 раза (PC 512M 1.6GHz).

Для вычисления таких комплексных интегралов необходимо найти компромисс между скоростью и точностью вычисления, поэтому автором была разработана подпрограмма, вычисляющая двумерный интеграл (приблизенно по Симпсону) от комплекснозначной функции, используя стандартные процедуры IMSL. Также возможен другой подход, создавая при первом счете $K(\xi)$ кеш вычисленных значений (при наличии необходимых ресурсов памяти), и при остальных - использование этих значений.

Дополнительные затруднения вызывают вычисление интегралов вида

$$\int_0^\infty f(\xi) \cdot j_0(|x| \cdot \xi) \cdot d\xi \quad (15)$$

где $j_0(t)$ - функция Бесселя 0-го порядка.

Мы считаем нецелесообразным использование при вычислении (15) полиномиального представления для функции Бесселя и построение с его помощью квадратурной формулы для всего интеграла. Это связано, во первых, с неисследованной точностью представления такой квадратурой исходного

интеграла, а также с тем, что библиотека IMSL располагает хорошо оптимизированной для счета процедурой вычисления функции Бесселя. Таким образом, при вычислении интегралов вида (15) мы использовали стандартную процедуру вычисления функции Бесселя и построенную на ее основе квадратурную формулу для интеграла (15). Бесконечный интервал интегрирования мы на практике заменяли конечным интервалом, правый конец которого определялся экспериментально и по величине был порядка 100.

6. Сравнительные затраты времени

Одним из показателей эффективности вычислений является экономия времени, необходимого исследователю для планирования и проведения содержательного вычислительного эксперимента. В связи с усложнением физической задачи и, как следствие, усложнением вычислений мы изучили этот вопрос на примере изменения времени вычислений в сравнении с упрощенной постановкой, рассмотренной нами ранее [12,16].

На рис.4 изображены диаграммы роста времени вычислений матрицы системы и общего времени вычислений в случае наличия ($k_+ = \frac{3}{2}\pi$, $k_- = 2\pi$) и отсутствия ($k_+ = k_- = 2\pi$) разделения пространства на две среды.

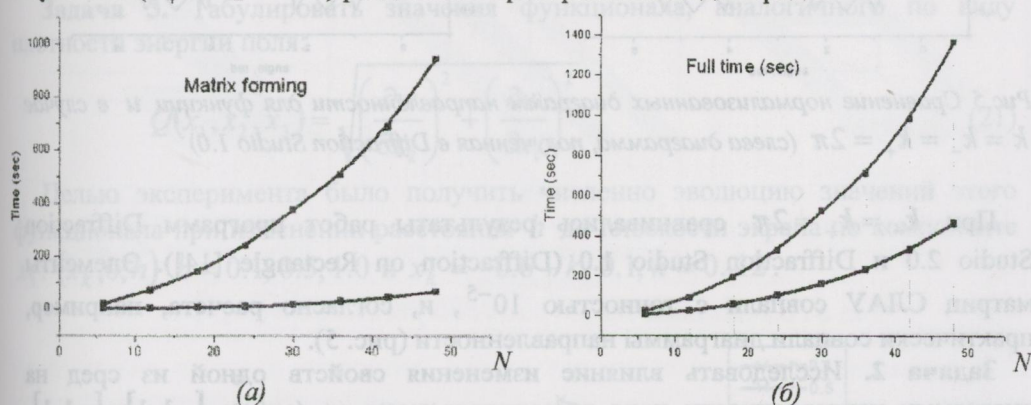


Рис.4 Время формирования матрицы (а) и полное время решения (б) в зависимости от разбиения для случаев $k_- \neq k_+$ (верхняя) и $k_- = k_+$ (нижняя кривая)

Как видно из диаграмм, в нашем случае наблюдается нелинейная зависимость времени вычислений от параметра дискретизации. В приведенных на Рис. 4 (а) примерах наблюдалась (при величине достоверности аппроксимации $R^2 = 0.9999$):

при $k_- \neq k_+$

$$t = 0.2305 \cdot N^5 - 4.4459 \cdot N^4 + 31.461 \cdot N^3 - 81.3 \cdot N^2 + 148.89 \cdot N - 70.242$$

при $k_- = k_+$

$$t = 0.6525 \cdot N^3 + 0.1322 \cdot N^2 + 16.896 \cdot N - 12.792$$

где t - время формирования матрицы, N - количество расчетных точек по одной из сторон квадратного экрана.

Интервал для параметра дискретизации в опытах по оценке времени вычислений выбирался нами с большим перекрытием тех значений, которые достаточны для приемлемой точности в расчётах полей (см. [6,14-17]).

7. Испытание алгоритма на системе модельных и реальных тестовых примеров и анализ результатов вычислений

Рассмотрим 6 примеров постановки различных задач, требующих ответа на некие вопросы путем проведения вычислительных экспериментов.

Задача 1. Сравнить счёт в частном случае $k_- = k_+$ с результатами, получаемыми по модели рассеяния на экранах в однородной среде [14].

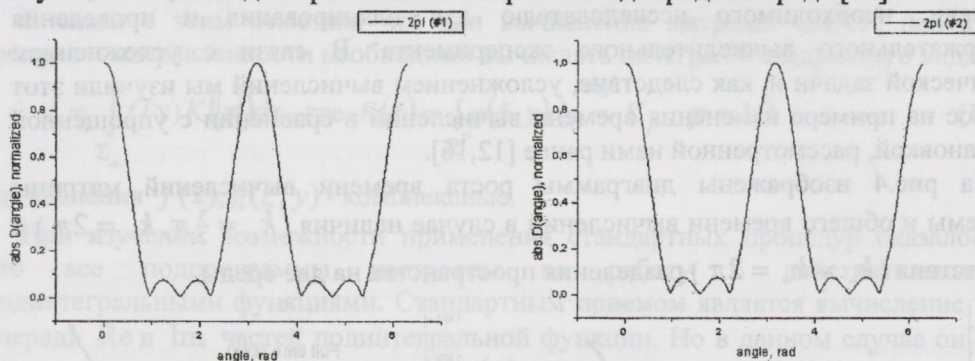


Рис.5 Сравнение нормализованных диаграмм направленности для функции u в случае $k = k_- = k_+ = 2\pi$ (слева диаграмма, полученная в Diffraction Studio 1.0)

При $k_- = k_+ = 2\pi$ сравнивались результаты работ программ Diffraction Studio 2.0 и Diffraction Studio 1.0 (Diffraction on Rectangle [14]). Элементы матриц СЛАУ совпали с точностью 10^{-5} , и, согласно расчета, например, практически совпали диаграммы направленности (рис. 5).

Задача 2. Исследовать влияние изменения свойств одной из сред на диаграмму направленности поля рассеянного поля w (экран $[-1, 1] \times [-1, 1]$, $k_+ = 2\pi$, k_- меняется с шагом 0.1 в интервале $\pi \dots 3\pi$). В результате (рис. 6) наблюдалась картина плавного и незначительного колебания вида диаграммы направленности относительно ее значения в однородной среде.

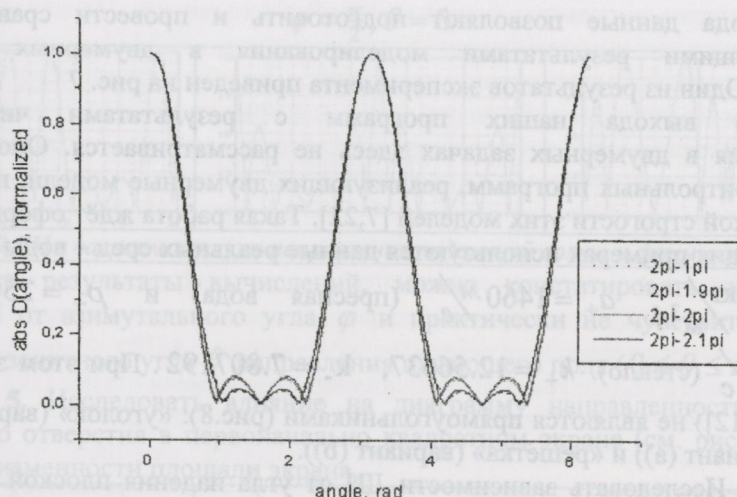


Рис. 6 Эволюция модуля нормализованной диаграммы направленности при изменении свойств первой среды

Задача 3. Табулировать значения функционала, аналогичного по виду плотности энергии поля:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2} \quad (21)$$

Целью эксперимента было получить численно эволюцию значений этого функционала при изменении расстояния h до плоскости экрана по компоненте x_3 : $(x_k, 0, h)$ $h = 0.1, 0.5, 1.0$ и $x_k = -0.6 + k \cdot 0.1, k = 0..12$.

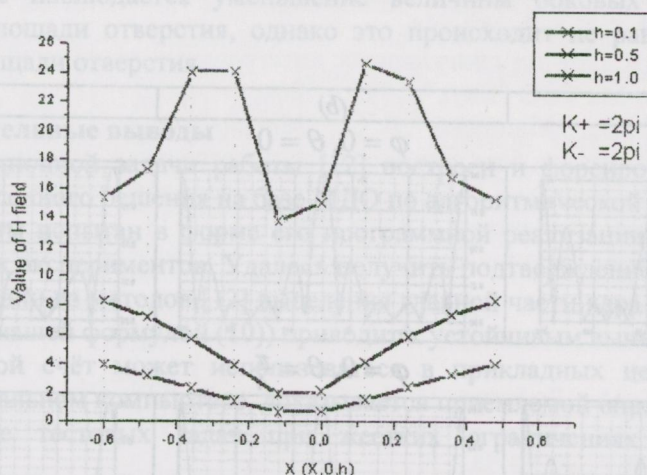


Рис. 7 Изменение вида графика функционала Q при удалении от экрана на расстояние h

Такого рода данные позволяют подготовить и провести сравнение с соответствующими результатами моделирования в двумерных задачах дифракции. Один из результатов эксперимента приведен на рис. 7

Сравнение выхода наших программ с результатами численного моделирования в двумерных задачах здесь не рассматривается. Оно требует валидации контрольных программ, реализующих двумерные модели, на уровне математической строгости этих моделей [7,22]. Такая работа ждёт оформления.

В следующих примерах используются данные реальных сред – воды и стекла:

$$\rho_+ = 999.03 \text{ кг/м}^3, \quad a_+ = 1460 \text{ м/с} \quad (\text{пресная вода}) \quad \text{и} \quad \rho_- = 2500 \text{ кг/м}^3,$$

$a_- = 2350 \text{ м/с}$ (стекло). $k_+ = 12.56637$, $k_- = 7.807192$. При этом экраны (в отличие от [12]) не являются прямоугольниками (рис.8): «уголок» (вариант (с)), «рамка» (вариант (а)) и «решетка» (вариант (б)).

Задача 4. Исследовать зависимости ДН от угла падения плоской волны (в верхнем полупространстве) на экраны разных форм.

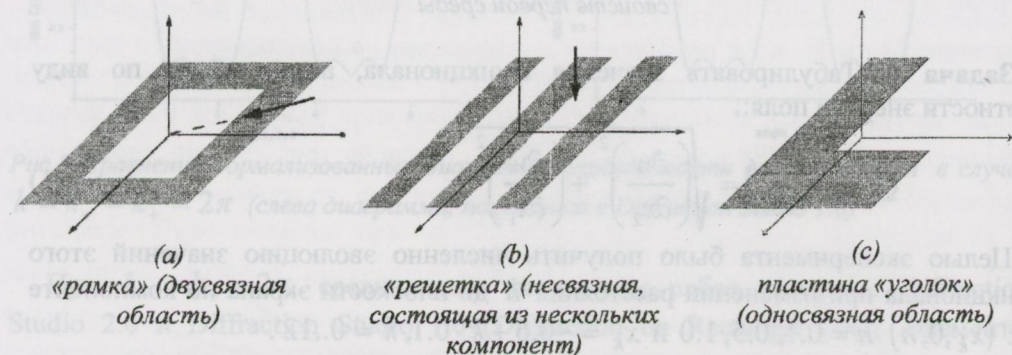
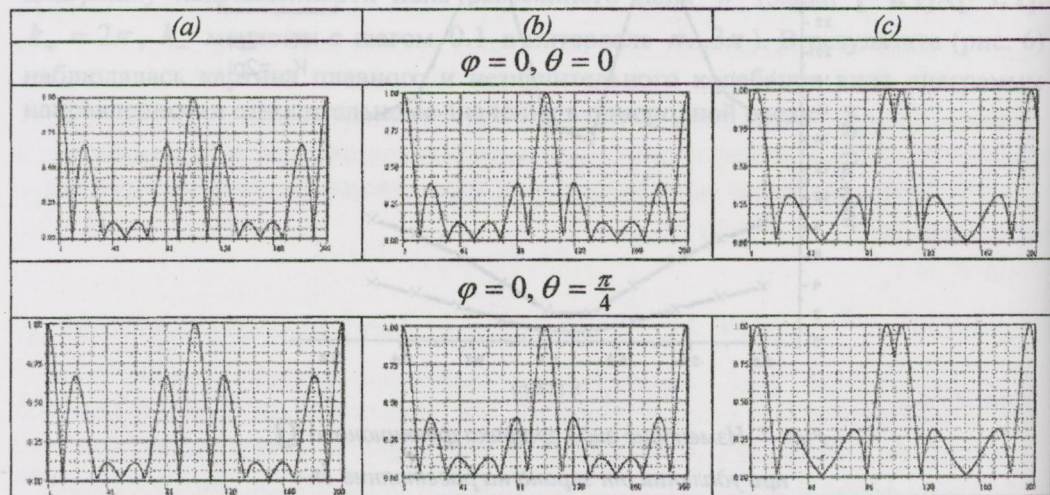


Рис. 8 Рассеивающие экраны различных рассмотренных форм



$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \theta = 0$$

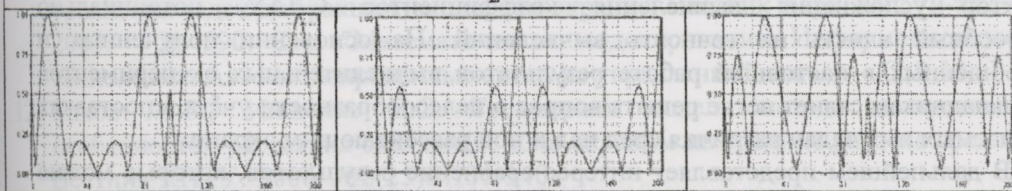


Рис. 9 ДН в зависимости от направления падающей волны и формы экрана

Анализируя результаты вычислений, можно констатировать зависимость формы ДН от азимутального угла φ и практически не чувствительность к изменению зенитного угла θ направления падающего поля ($0 \leq \theta \leq \pi/3$).

Задача 5. Исследовать влияние на диаграмму направленности площади квадратного отверстия в первоначально квадратном экране (см. рис 8 (а).) при условии неизменности площади экрана.

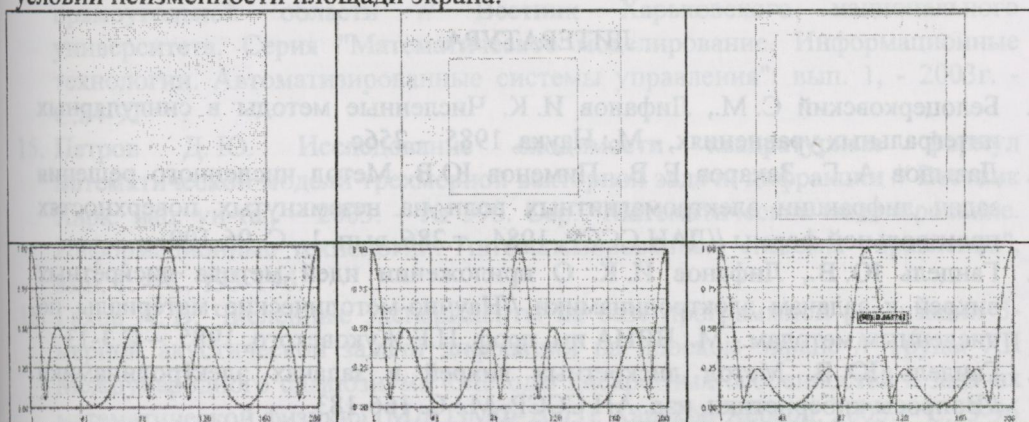


Рис. 10 Пример изменения ДН для структуры типа (а)

При анализе наблюдается уменьшение величины боковых лепестков с увеличением площади отверстия, однако это происходит не равномерно при увеличении площади отверстия.

8. Заключительные выводы

Для дифракционной задачи работы [12] построен и форсирован алгоритм реализации численного решения на базе МДО по алгоритмической схеме [12].

Этот алгоритм испытан в форме его программной реализации проведением вычислительных экспериментов. Удалось получить подтверждение того, что, по крайней мере, один из методов [12] выделения главной части ядра ГСИУ задачи (он отражается нашей формулой (10)) приводит к устойчивым вычислениям.

То, что такой счёт может использоваться в прикладных целях даже на рядовом персональном компьютере, доказывается приемлемой определённойостью ответов в ряде тестовых задач при жестких ограничениях на порядок дискретизации.

Конечно, принятая нами постановка задачи дифракции скалярных волн на плоских экранах, предусматривающая различие в свойствах среды над и под плоскостью экрана, приводит к существенному усложнению вычислений. Это приводит к повышению степени нелинейного роста его продолжительности и

требуемой памяти с ростом параметра дискретизации задачи. Не менее важен и фактор усложнения вычисления коэффициентов СЛАУ, потенциально способный влиять на точность вычислений. На основании полученных и обобщенных в настоящей работе результатов вычислительных экспериментов прикладникам станет легче решать вопрос о целесообразности учёта в поставках решаемых ими задач различия сред над и под рассеивающим экраном.

В дальнейшем представляет интерес сравнение результатов, которые можно получить разработанными здесь средствами для вытянутых прямоугольных экранов ширины l в 3-мерном пространстве, с результатами вычислений по двумерной модели МДО для отрезка длины l . Сложность такой задачи связана с привлечением стороннего программного обеспечения МДО 2-мерных задач. Этим проблемам (и содействию их преодоления) посвящена статья [22].

Автор благодарит своего научного руководителя Мищенко В.О. за советы и постоянное внимание к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях, - М.: Наука, 1985. - 256с.
2. Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю.В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы //ДАН СССР, 1984,- т.286, вып. 1., С. 96-100.
3. Гандель Ю. В., Лифанов И. К. О приложении идей метода дискретных вихрей к задачам электродинамики //Научно-методические материалы по численным методам.- М.: ВВИА им. проф. Н.Е.Жуковского, 1985. - С.3-13
4. Гандель Ю. В. Метод дискретных вихрей в задачах электродинамики //Вопросы кибернетики, изд. АН СССР, М.: С. 166-183
5. Anfinogenov A. Yu., Lifanov I. I. On numerical solution of integral equations of planar and spatial diffraction problems. - Russ. J. Numer. Annal. Math. Modeling. - 1992. - Vol. 7, N 5, P. 387-404.
6. Лифанов И. К., Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент, М.: ТОО "Янус", 1995. - 520с.
7. Гандель Ю. В., Мищенко В. О. Математическое моделирование в электродинамике на базе сингулярных интегральных уравнений и проект программной системы // Математическое моделирование. Сб. науч. тр. НАН Украины. Ин-т. математики. - Киев, 1996. - С.70-74
8. Щербина В. А. Граничные уравнения для квазистационарной задачи дифракции электромагнитного поля в R^3 на идеально проводящем разрезе // Труды VII Международного симпозиума «МДОЗМФ». - Феодосия, 1997. - С.234-235.
9. Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. - М.: Янус-К.- 2001.- 508 с. - С.53-58
10. Гандель Ю. В. Парные и гиперсингулярные интегральные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на плоских решетках и экранах // Труды XI Международного симпозиума МДОЗМФ-2003.-Харьков-Херсон,2003.-

11. Антонец А. В., Гандель Ю. В. Численный анализ гиперсингулярного уравнения задач дифракции на плоском экране // Вестник Харк. нац. ун-та., – 2003. – № 590. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. 1. – С. 9-14.
12. Гахов А. В., Мищенко В. О. Трехмерная модель метода дискретных особенностей рассеяния скалярных волн экраном на границе раздела сред // Вестник ХНТУ.-2006.-№2(25)С.135-140
13. Анфиногенов А. Ю. Численное решение задачи расчёта экологической обстановки в городе по фактору шума методом дискретных особенностей // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». Вип. 1. - № 590, 2003. - С. 15-18.
14. Гахов А. В., Мищенко В. О. Вычислительный эксперимент на базе численного решения гиперсингулярного интегрального уравнения для прямоугольной области // Вестник Харьковского национального университета. Серия "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления": вып. 1, - 2003г. - С.84-91
15. Петров Д. Ю. Исследование сходимости квадратурных формул математической модели трехмерной векторной задачи дифракции // Вестник Харк. нац. ун-та., – 2003. – № 590. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. 1. – С. 193-196.
16. Гахов А. В. Численные эксперименты на базе программной реализации 3-мерной акустической задачи дифракции на плоском экране // Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2005). Харьков-Херсон. 2005. – С.93-96
17. Антонец А. В. Математическая модель на базе МДО многоэлементной полосковой антенны на экранированной диэлектрической подложке // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». Вип. 5. - № 703, 2005. - С. 25-35.
18. A. Gahov, V. Mishchenko The Hypersingular Equation Technique for the 3-d Problem of Diffraction on a Metal Screen in a Stratified Medium // Proceedings of the 11th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Kharkiv, Ukraine, June 26-29 2006, - Pp.602-604.
19. Гахов А. В. Экспериментальное определение параметров достоверного моделирования дифракции на предфракталах методом дискретных особенностей // Труды Международных школ-семинаров «МДОЗМФ», вып. 4, Орел. ОГУ, 2006. – С.23-29
20. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния, М.: Мир, 1987 – 311с.
21. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике - М.: Наука, 1979. - 318 с.
22. Мищенко В. О., Программное обеспечение МДО: роль математических моделей надежности и трудоемкости // Труды Международных школ-семинаров «МДОЗМФ», вып. 4, Орел. ОГУ, 2005. – С.73-8

Модель системы массового обслуживания с отказами и с неординарным входным потоком

В. П. Городнов

*Академия внутренних войск Министерства внутренних дел Украины,
Народная украинская академия, Украина*

For markovian processes with continuous time and discrete states the theorem about conditions of states groups forming for the purpose of equations record for such groups is proved. Theorem outcome for process CW operation and groups stations equation forming regulation are formulated. Regulation is used for deducing analytic description of final probabilities of states for queue system model with refusals and unordinary entry aspirations stream. An analytic formula correctness is verified by the way of their transition into known Erlang formulas in the case of unordinary entrance stream degeneration into simple stream.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Существует большая группа микро экономических систем (предприятий, систем связи, банковских и иных учреждений) динамика работы которых связана с заранее неизвестными моментами времени поступления заказов, покупателей, вызовов, клиентов и т.п., каждый из которых для конкретной системы представляет собой требование на обслуживание. Интервалы времени Δt между требованиями и длительность обслуживания T_o случайны, имеют математическое ожидание $M[\Delta t] = I^{-1}$, $M[T_o] = \mu^{-1}$ соответственно и удовлетворяют условиям предельной теоремы А. Я. Хинчина [1, стр. 64–68] о формировании простейшего потока событий. Математическое ожидание числа событий потока в единицу времени принято называть [1, стр. 20] интенсивностью (I) потока. Для таких процессов известны модели n -канальных систем массового обслуживания, например с отказами, описываемые формулами Эрланга [2] для вероятностей P_k состояний S_k , в которых в системе находится ровно k требований:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \quad 0 \leq k \leq n; \quad \rho = \frac{I}{\mu}; \quad P_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1}. \quad (1)$$

Однако входной поток может включать группы требований с заранее неизвестным составом, поступающие в систему в один и тот же момент времени. Так на автозаправочную станцию могут поступать группы автомобилей из авто колонн, в придорожный ресторан посетители могут приходить группами в моменты прибытия автотранспорта, поток клиентов в гостиницу включает как одиночных клиентов, так и их группы (например, семьи) в составе нескольких человек. Такой поток называется неординарным. Оценка вероятностей состояний систем массового обслуживания неординарного

входного потока требований считается возможной лишь численными методами для конкретной структуры потока. Наиболее успешной попыткой исследования модели обслуживания неординарного потока являются работы А. Шахбазова [3]. Однако аналитическое описание финальных вероятностей системы обслуживания неординарного входного потока отсутствует, что делает тему статьи актуальной.

2. Истоки исследования автора

Настоящая работа опирается на систему утверждений о свойствах неординарного (общего стационарного) потока [1, стр. 14, 42, 43], которые приведем без доказательства.

Общим стационарным потоком без последствия называется стационарный поток *моментов* времени поступления групп событий, который также является простейшим.

Неординарный поток включает *группы по i событий* ($i = 1, 2, \dots$) в группе и может быть определен путем задания закона распределения вероятностей (a_i) поступления групп в составе i событий в любой очередной группе. Тогда параметр потока (частота появления групп событий), обозначим эту величину символом λ , окажется меньше интенсивности потока ($\lambda < I$). Для случайных интервалов времени между группами событий в таком потоке сохраняется справедливость предельной теоремы А. Я. Хинчина [1] и форма показательного распределения интервалов времени, но уже с параметром λ :

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \quad (2)$$

При этом для выполнения равенства ($\lambda = I$) необходимо и достаточно иметь $a_1 = 1$. В таком случае поток событий становится простейшим. Для всех остальных (неординарных) стационарных потоков без последствия интенсивность потока всегда больше его параметра ($I > \lambda$).

3. Нерешенные проблемы и цели работы

Каждому значению вектора вероятностей (a_i) поступления групп требований соответствует свое численное описание модели обслуживания неординарного потока, что не способствует оптимизму в исследовании таких систем. Нерешенной остается частная задача аналитического описания модели обслуживания неординарного потока. Решение отмеченной и схожих задач может быть получено в случае решения проблемы выявления еще одного фундаментального свойства марковских процессов с непрерывным временем и дискретными состояниями, которое (свойство) может быть инструментом для получения искомых моделей.

Целью работы является доказательство еще одного свойства марковских процессов с непрерывным временем и дискретными состояниями и с его помощью — получение аналитического описания модели системы массового обслуживания с отказами и с неординарным входным потоком.

4. Основной материал

4.1. Теорема, ее следствия и правила составления уравнений

Предположим, что модель процесса (или системы) представлена в классе марковских процессов с непрерывным временем и дискретными состояниями и показана размеченным графом (рис. 1), каждая вершина S_i которого соответствует возможному состоянию процесса (системы), а вся совокупность вершин образует замкнутое множество X .

Потоком переходов по стрелке (по ребру) графа (см. рис. 1) назовем произведение интенсивности переходов ξ_{ij} по этой стрелке на вероятность (P_i) того состояния из которого стрелка выходит:

$$\xi_{ij} \times P_i.$$

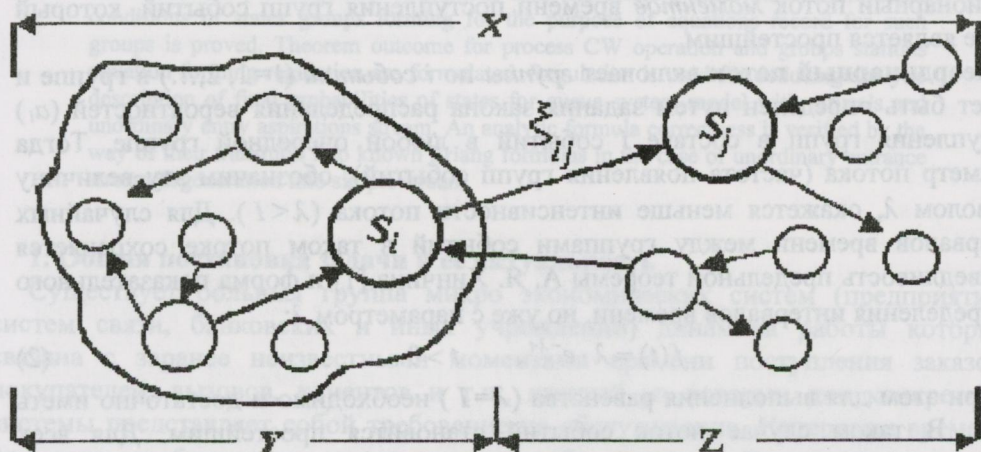


Рис. 1. Граф модели процесса

Теорема. Производная вероятности нахождения процесса в подмножестве вершин графа, охваченном замкнутым контуром, не зависит от потоков переходов внутри подмножества вершин и равна алгебраической сумме потоков переходов по ребрам графа, пересекающим контур разбиения. Входящие потоки имеют знак плюс, выходящие — знак минус.

Доказательство. Пусть множество X вершин графа разбито замкнутым контуром на два непересекающихся подмножества Y и Z (см. рис. 1):

$$Y \cap Z = \emptyset, \quad Y = X - Z.$$

Обозначим вероятности нахождения процесса в каждом подмножестве вершин:

$$P_X(t) = P_Y(t) + P_Z(t) = \sum_{i \in X} P_i(t); \quad P_Y(t) = \sum_{i \in Y} P_i(t); \quad P_Z(t) = \sum_{i \in Z} P_i(t). \quad (3)$$

Продифференцируем выражения для вероятностей $P_Y(t)$, $P_Z(t)$, получим:

$$\dot{P}_Y(t) = \sum_{i \in Y} \dot{P}_i(t); \quad \dot{P}_Z(t) = \sum_{i \in Z} \dot{P}_i(t). \quad (4)$$

Будем считать, что $\xi_{ij} = 0$, если из вершины S_i нельзя перейти в вершину S_j за один шаг.

Вероятность $P_i(t)$ нахождения процесса в отдельной вершине S_i марковского графа, например подмножества вершин X , определяется исходящими и входящими в это состояние потоками переходов и описывается дифференциальным уравнением Чепмена-Колмогорова [2]:

$$\dot{P}_i(t) = -P_i(t) \times \sum_{k \in X} \xi_{ik} + \sum_{k \in X} P_k(t) \times \xi_{ki}. \quad (5)$$

Подставляя формулу (5) в (4) для каждого из подмножеств вершин и выделяя потоки переходов через контур разбиения, получим:

$$\begin{aligned} \dot{P}_Y(t) = \sum_{i \in Y} \left[-P_i(t) \times \sum_{k \in Y} \xi_{ik} + \sum_{k \in Y} P_k(t) \times \xi_{ki} \right] - \\ - \sum_{i \in Y} P_i(t) \times \sum_{j \in Z} \xi_{ij} + \sum_{j \in Z} P_j(t) \times \sum_{k \in Y} \xi_{jk}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_Z(t) = \sum_{i \in Z} \left[-P_i(t) \times \sum_{k \in Z} \xi_{ik} + \sum_{k \in Z} P_k(t) \times \xi_{ki} \right] - \\ - \sum_{j \in Z} P_j(t) \times \sum_{k \in Y} \xi_{jk} + \sum_{i \in Y} P_i(t) \times \sum_{j \in Z} \xi_{ij}. \end{aligned} \quad (7)$$

Определяя сумму вероятностей $\dot{P}_Y(t)$ и $\dot{P}_Z(t)$ (формулы (2.23, 2.24)), замечаем, что слагаемые вне квадратных скобок взаимно сокращаются и остается:

$$\begin{aligned} \dot{P}_Y(t) + \dot{P}_Z(t) = \sum_{i \in Y} \left[-P_i(t) \times \sum_{k \in Y} \xi_{ik} + \sum_{k \in Y} P_k(t) \times \xi_{ki} \right] + \\ + \sum_{i \in Z} \left[-P_i(t) \times \sum_{k \in Z} \xi_{ik} + \sum_{k \in Z} P_k(t) \times \xi_{ki} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Нетрудно показать, что выражение (8) тождественно равно нулю при любых значениях входящих в него переменных. Действительно, из формул (3) находим:

$$P_X(t) = P_Y(t) + P_Z(t) = \sum_{i \in X} P_i(t).$$

Вследствие замкнутости множества X для вероятностей состояний этого множества выполняется условие нормировки:

$$P_X(t) = \sum_{i \in X} P_i(t) = P_Y(t) + P_Z(t) = 1. \quad (9)$$

Дифференцируя равенство (9), получим:

$$\sum_{i \in X} \dot{P}_i(t) = \dot{P}_Y(t) + \dot{P}_Z(t) = 0. \quad (10)$$

В силу равенства (10) выражение (8) можно записать так:

$$\begin{aligned} - \sum_{i \in Y} \left[-P_i(t) \times \sum_{k \in Y} \xi_{ik} + \sum_{k \in Y} P_k(t) \times \xi_{ki} \right] = \\ = \sum_{i \in Z} \left[-P_i(t) \times \sum_{k \in Z} \xi_{ik} + \sum_{k \in Z} P_k(t) \times \xi_{ki} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Из равенства (11) следует, что суммарный поток переходов из подмножества вершин Y равен суммарному потоку переходов в подмножество вершин Z .

Однако в равенстве (11) поток переходов из множества вершин Y не содержит ни одной интенсивности ξ_{ij} , для которой номер i или j принадлежит множеству вершин Z , также как и входящий поток в множество вершин Z не содержит ни одной интенсивности ξ_{ij} , для которой номер i или j принадлежат множеству вершин Y . Кроме того, при произвольном выделении двух подмножеств (Y и Z) одно из них может быть пустым, соответственно с нулевым суммарным поток переходов.

Следовательно, равенство (11) может иметь место только в случае, когда суммарные потоки переходов в левой и правой частях равенства (11) строго равны нулю, т.е.:

$$\sum_{i \in Y} \left[-P_i(t) \times \sum_{k \in Y} \xi_{ik} + \sum_{k \in Y} P_k(t) \times \xi_{ki} \right] = 0;$$

$$\sum_{i \in Z} \left[-P_i(t) \times \sum_{k \in Z} \xi_{ik} + \sum_{k \in Z} P_k(t) \times \xi_{ik} \right] = 0.$$

Таким образом, первые слагаемые в формулах (6) и (7), представляющие суммарный поток переходов внутри подмножеств вершин Y и Z соответственно, равны нулю при любых значениях входящих в формулы переменных величин. В правых частях формул (6) и (7) дифференциальных уравнений для вероятностей нахождения процесса в выделенных группах вершин остаются только потоки переходов по ребрам графа, пересекающим контур разбиения:

$$\dot{P}_Y(t) = - \sum_{i \in Y} P_i(t) \times \sum_{j \in Z} \xi_{ij} + \sum_{j \in Z} P_j(t) \times \sum_{k \in Y} \xi_{jk}; \quad (12)$$

$$\dot{P}_Z(t) = - \sum_{j \in Z} P_j(t) \times \sum_{k \in Y} \xi_{jk} + \sum_{i \in Y} P_i(t) \times \sum_{j \in Z} \xi_{ij}. \quad (13)$$

Теорема доказана.

Учитывая то, что в правых частях уравнений (12) и (13) оказались алгебраические суммы потоков переходов с соответствующими знаками, можно сформулировать правило записи дифференциальных уравнений для вероятностей нахождения моделируемого процесса в группах состояний.

Правило контуров. Производная вероятности нахождения процесса в группе состояний, охваченных замкнутым контуром, равна алгебраической сумме потоков переходов по стрелкам (ребрам) графа, пересекающим контур разбиения. Исходящие потоки берутся со знаком минус, входящие — со знаком плюс.

В частном случае, когда внутри замкнутого контура оказывается только одна вершина, соответствующая состоянию S_i моделируемого процесса, правило контуров переходит в известное [2] правило составления дифференциальных уравнений Чепмена-Колмогорова для одного состояния и обеспечивает запись уравнения (5).

Следствие. В стационарном режиме суммарный поток переходов через любой замкнутый контур на марковском графе равен нулю.

Действительно, условием стационарного режима процесса является:

$$\dot{P}_Y(t) = \dot{P}_Z(t) = 0.$$

Тогда выражения (12) и (13) преобразуются к общему виду:

$$-\sum_{i \in Y} P_i \times \sum_{j \in Z} \xi_{ij} + \sum_{j \in Z} P_j \times \sum_{i \in Y} \xi_{ji} = 0,$$

определяющему суммарный поток переходов через контур разбиения, что позволяет сформулировать правило записи уравнений баланса потоков переходов через контур разбиения, позволяющее значительно упростить анализ моделей реальных процессов.

Правило баланса потоков. Для стационарного режима сумма потоков переходов, входящих в замкнутый контур на графе состояний процесса, равна сумме выходящих потоков:

$$\sum_{j \in Z} P_j \times \sum_{i \in Y} \xi_{ji} = \sum_{i \in Y} P_i \times \sum_{j \in Z} \xi_{ij}.$$

Найденное свойство позволяет значительно упростить анализ марковских моделей реальных процессов в микро экономических системах. Отказавшись от описания отдельных состояний и переходя к анализу вероятностей нахождения процесса в группах состояний, объединяемых из физических соображений согласно целям анализа по интересующему в ходе исследования признаку, в ряде случаев удастся получить аналитическое описание моделей, исследование которых было возможно только численными методами, что приводило к потере общности анализа и оперативности моделирования.

4.2. Многоканальная система обслуживания групп требований с отказами, введение.

Процесс работы такой системы массового обслуживания связан с поступлением в случайные моменты времени групп требований с заранее неизвестным составом. Каждая группа может содержать ровно i требований, нуждающихся в индивидуальном обслуживании, то есть в предоставлении требованию индивидуального канала обслуживания, который (канал) будет занят обслуживанием этого требования, в среднем $(1/\mu)$ времени.

Заявкой на обслуживание назовем группу в составе i требований, поступивших в систему обслуживания в один и тот же момент времени (одновременно). Как правило, всегда существует разумная оценка максимально возможного числа (L) требований в одной заявке ($i \leq L$).

Заранее угадать количество требований в очередной заявке, как правило не удастся и эту величину (i) приходится считать случайной. Однако наблюдение за потоком заявок позволяет оценить долю (a_i) заявок, включающих ровно i требований в составе общего потока заявок в систему обслуживания. Величина (a_i) в таком случае может служить оценкой вероятности того, что очередная заявка в своем составе будет иметь ровно i требований. В свою очередь, эта вероятность позволяет найти оценку математического ожидания ($M_{тр.з}$) числа требований в составе одной заявки.

Для ординарного потока интенсивность I определяет среднее число требований, поступающих в систему в единицу времени и одновременно — частоту их поступления. Для неординарного потока с той же интенсивностью I частота поступления групп требований (заявок) будет меньше, что определяет необходимость еще одной характеристики.

Параметром (λ) входного потока заявок называется среднее число заявок (групп требований), поступающих в систему в единицу времени ("частота" поступления (заявок) групп требований). Очевидно, что ($\lambda \leq I$).

Парциальным потоком заявок с параметром λ_i назовем часть общего входного потока, включающую поток заявок с количеством ровно i требований в одной заявке.

На практике оценка значений отмеченных характеристик входного потока может быть выполнена по результатам наблюдений за потоком и фиксации общего числа ($N_{\text{прб}}$) требований, поступавших в систему обслуживания за время ($T_{\text{наб}}$) наблюдений, а также числа заявок (N_i) в составе ровно i требований. Оценки можно выполнить по формулам:

$$I = \frac{N_{\text{прб}}}{T_{\text{наб}}}; \quad N_s = \sum_{i=1}^L N_i; \quad a_i = \frac{N_i}{N_s}; \quad \lambda = \frac{N_s}{T_{\text{наб}}}; \quad \lambda_i = \lambda \cdot a_i.$$

Между отмеченными характеристиками неординарного входного потока заявок (групп требований) возникают следующие взаимосвязи:

$$M_{\text{пр.з}} = \sum_{i=1}^L i \times a_i; \quad \lambda = \frac{I}{M_{\text{пр.з}}}; \quad \lambda_i = \lambda \times a_i; \quad i=1, 2, \dots, L.$$

4.3. Модель обслуживания групп требований $M_2/M/n$ с отказами (частный случай).

Ввиду сложности моделирования процессов обслуживания неординарного входного потока, сначала рассмотрим принцип получения аналитических выражений для финальных вероятностей на элементарном примере системы $M_2/M/n$ с отказами, то есть такой системы, в которой имеется n однотипных приборов, обслуживающих поток требований с параметром λ и включающий всего два парциальных потоков заявок ($L=2$), а именно – парциальный поток заявок в составе ровно одного требования в заявке ($a_1 > 0$, $\lambda_1 = \lambda a_1$) и поток заявок в составе ровно двух требований в заявке ($a_2 > 0$, $\lambda_2 = \lambda a_2$). Граф модели процесса такой системы массового обслуживания приведен на рис. 2, где в случае поступления *одиночного* требования следует переход в *соседнее* состояние справа (см. на рис. 2 стрелки с обозначением частоты переходов λ_1), в случае поступления заявки в составе двух требований следует перескок вправо через одно состояние (см. на рис. 2 стрелки с обозначением частоты переходов λ_2).

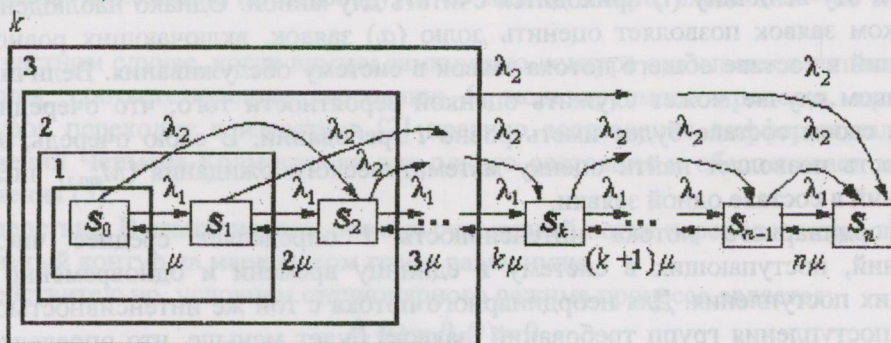


Рис. 2. Граф модели процесса системы массового обслуживания неординарного входного потока заявок ($M_2/M/n$)

Введем обозначения для коэффициентов ($\rho_i, i=1, 2$) загрузки системы частью входного потока заявок:

$$\rho_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu}; \quad \rho_1 = \frac{\lambda_2}{\mu}. \quad (14)$$

Далее воспользуемся правилом баланса потоков переходов и составим уравнения баланса для контуров на графе модели (см. рис. 2), получим:

$$\left. \begin{aligned} 1\mu P_1 &= (\lambda_1 + \lambda_2)P_0; \\ 2\mu P_2 &= (\lambda_1 + \lambda_2)P_1 + \lambda_2 P_0; \\ 3\mu P_3 &= (\lambda_1 + \lambda_2)P_2 + \lambda_2 P_1; \\ &\dots \\ k\mu P_k &= (\lambda_1 + \lambda_2)P_{k-1} + \lambda_2 P_{k-2}; \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 1P_1 &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu} P_0; \\ 2P_2 &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu} P_1 + \frac{\lambda_2}{\mu} P_0; \\ 3P_3 &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu} P_2 + \frac{\lambda_2}{\mu} P_1; \\ &\dots \\ kP_k &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu} P_{k-1} + \frac{\lambda_2}{\mu} P_{k-2}. \end{aligned} \right\}$$

Учтем обозначения для коэффициентов загрузки и найдем:

$$P_1 = \rho_0 P_0; \quad 2P_2 = \rho_0 P_1 + \rho_1 P_0; \quad 3P_3 = \rho_0 P_2 + \rho_1 P_1; \dots \quad kP_k = \rho_0 P_{k-1} + \rho_1 P_{k-2}.$$

Таким образом, исходное уравнение, связывающее финальные вероятности модели, принимает вид:

$$kP_k = \rho_0 P_{k-1} + \rho_1 P_{k-2} \quad (15)$$

Для отыскания финальных вероятностей P_k предусмотрим возможность будущей проверки корректности получаемых выражений, например путем сравнения с хорошо известными формулами Эрланга (1):

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \quad k=1, \dots, n; \quad \rho = \frac{\lambda_1}{\mu}. \quad (16)$$

С этой целью будем искать выражения для финальных вероятностей P_k в форме, близкой к формулам Эрланга, например в виде:

$$P_k = \frac{\rho_0^k}{k!} P_0 f_k, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (17)$$

В этом случае все особенности неординарной структуры входного потока заявок должны быть сосредоточенными в выражениях для функций (f_k), которые поэтому назовем функциями неординарности.

При вырождении входного потока в ординарный (в простейший) все функции неординарности должны оказаться равными единице и найденные формулы для финальных вероятностей автоматически должны преобразовываться в формулы Эрланга (16), что будет свидетельствовать в пользу корректности анализа рассматриваемого более общего случая обслуживания неординарного входного потока заявок.

При определении выражений для функций неординарности подставим формулы финальных вероятностей (17) в выражение (15), получим:

$$k \left(\frac{\rho_0^k}{k!} \right) P_0 f_k = \rho_0 \left(\frac{\rho_0^{k-1}}{(k-1)!} \right) P_0 f_{k-1} + \rho_1 \left(\frac{\rho_0^{k-2}}{(k-2)!} \right) P_0 f_{k-2}.$$

После приведения подобных членов получим удобное при быстрых расчетах рекуррентное выражение для определения значений функций неординарности (f_k), когда по известным значениям предыдущих функций находится значение следующей функции (при $L=2$):

$$f_k = f_{k-1} + f_{k-2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \cdot (k-1). \quad (18)$$

Выражение для вероятности нулевого состояния найдем с использованием условия нормировки вероятностей, в которое подставим формулы (17), получим:

$$\sum_{k=0}^n P_k = 1; \rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{\rho_0^k}{k!} P_0 f_k = P_0 \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho_0^k}{k!} f_k \right) = 1; \rightarrow P_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho_0^k}{k!} f_k \right)^{-1}.$$

Для определения значения самой первой функции неординарности (f_0) подставим в формулу (17) значение $k=0$, получим:

$$P_0 = P_0 \times f_0.$$

откуда следует равенство $f_0 = 1$. Значение функции неординарности (f_1) найдем из формулы (18) при значении $k=1$, получим:

$$f_1 = f_{1-1} + f_{1-2} \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \times (1-1) = f_0. \quad (19)$$

Таким образом, при $L=2$ две первые функции неординарности оказались равными единице ($f_1 = f_0 = 1$), что делает определенными аналитические выражения для всех искомых финальных вероятностей и позволяет считать поставленную задачу решенной. Однако, следует отметить, что в данном случае последнее состояние системы обслуживания не является единственным для возникновения отказа в обслуживании требований. Поэтому вероятность обслуживания следует искать с применением выражения для математического ожидания числа занятых каналов обслуживания ($M_{зк}$) и абсолютной пропускной способности (A) системы:

$$M_{зк} = \sum_{k=0}^n k P_k; \quad A = \mu M_{зк}; \quad P_{обс} = q = \frac{A}{I}; \quad P_{отк} = 1 - P_{обс}.$$

Отметим, что при ($L=3$) для системы $M_3/M/n$ с отказами входной поток требований с параметром λ будет включать три парциальных потока заявок с параметрами ($\lambda_1 = \lambda a_1$, $\lambda_2 = \lambda a_2$, $\lambda_3 = \lambda a_3$). На графе модели процесса (см. рис. 2) из каждого состояния вправо будут выходить уже не две, а три дуги и в правой части общего уравнения (15) появится третье слагаемое:

$$k P_k = \rho_0 P_{k-1} + \rho_1 P_{k-2} + \rho_2 P_{k-3},$$

$$\text{где} \quad \rho_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\mu}; \quad \rho_1 = \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\mu}; \quad \rho_2 = \frac{\lambda_3}{\mu},$$

что приведет к появлению третьего слагаемого и в уравнении (18):

$$f_k = f_{k-1} + f_{k-2} \frac{\rho_1}{\rho_0^2} (k-1) + f_{k-3} \frac{\rho_2}{\rho_0^3} (k-1)(k-2).$$

При этом для новой ситуации ($L=3$) множители $(k-1)$ автоматически обеспечат равенство единице двух первых функций ($f_1 = f_0 = 1$) неординарности. Для третьей функции полагаем $k=2$ и из общей формулы находим:

$$f_2 = f_1 + f_0 \frac{\rho_1}{\rho_0^2} + f_{-1} \frac{\rho_2}{\rho_0^3} (2-1)(2-2) = 1 + \frac{\rho_1}{\rho_0^2}; \rightarrow f_2 = 1 + \frac{\rho_1}{\rho_0^2}.$$

Выражения для последующих функций ($f_k, k > 2$) неординарности становятся громоздкими, что делает их аналитическую запись нецелесообразной, а рекуррентное представление функций неординарности — достаточным для выполнения расчетов.

4.4. Проверка корректности решения

Для проверки корректности полученного решения найдем выражения функций неординарности (f_k) при вырождении неординарного входного потока требований в простейший. В этом случае параметр парциального потока заявок на обслуживание сразу двух требований оказывается равным нулю ($\lambda_2 = 0$). Тогда из формул (14) и (16) следует ($\rho_1 = 0; \rho_0 = \rho$). Подставляя значение $\rho_1 = 0$ в формулу (18), с учетом равенства ($f_0 = 1$), находим, что второе слагаемое обращается в ноль и формула (18) принимает вид:

$$f_k = f_{k-1} = 1; \quad k = 1, \dots, n.$$

В итоге выражение (17) для финальных вероятностей P_k преобразуется в хорошо известные формулы Эрланга (16), что свидетельствует в пользу корректности проведенного анализа и полученных выражений (17) финальных вероятностей для более общего случая обслуживания неординарного входного потока требований частной структуры.

4.5. Модель обслуживания групп требований $M_L/M/n$ с отказами (общий случай)

В такой системе имеется n однотипных приборов, обслуживающих поток групп требований с параметром потока (“частотой” появления групп) λ . Общий поток включает L парциальных потоков заявок с параметрами ($\lambda_1 = \lambda a_1, \lambda_2 = \lambda a_2, \dots, \lambda_L = \lambda a_L$). Напомним, заявки в каждом парциальном потоке содержат ровно i требований ($i = 1, \dots, L$) в каждой заявке. Для определенности общего случая модели будем считать, что $L \geq n$. При этом для реального потока с иным составом достаточно положить равными нулю вероятности ($a_i = 0$) появления заявок в составе ровно i требований, если такие заявки в потоке отсутствуют.

Обозначим символом S_k ($0 \leq k \leq n$) состояние в котором заняты ровно k каналов и построим граф модели процесса в такой системе обслуживания (см. рис. 3). На графе модели в случае поступления одиночного требования следует подключение еще одного канала обслуживания и переход в соседнее состояние справа (см. на рис. 3 стрелки с обозначением частоты переходов λ_1). В случае поступления заявки с большим числом ($i > 1$) требований следует подключение сразу еще i каналов обслуживания и перескок вправо через $(i-1)$ состояний (см. на рис. 3 стрелки с обозначением частоты $\sum \lambda_i$), если в системе есть достаточное количество свободных каналов обслуживания. В случае недостатка свободных каналов следует переход в последнее состояние S_n , при этом часть требований в заявке, для которых не окажется свободных каналов обслуживания, получают отказ и покинут систему не обслуженными.

Суммарная интенсивность потока обслуживания (число обслуживаемых требований в единицу времени) для каждого состояния определяется количеством каналов, занятых в этом состоянии. Так, если занят обслуживанием один канал (состояние S_1), то интенсивность обслуживания равна производительности одного канала (μ), если заняты обслуживанием ровно k каналов (состояние S_k), то интенсивность обслуживания будет в k раз больше и составит величину ($k\mu$).

На графе модели (рис. 2.11) возможен пошаговый переход из одного состояния в любое другое состояние за конечное число шагов. Поэтому при постоянных интенсивностях переходов в системе обслуживания возможно установление стационарного режима.

Задача заключается в определении аналитических выражений для финальных вероятностей P_k ($0 \leq k \leq n$) состояний S_k , которые (вероятности) являются исчерпывающей характеристикой процесса обслуживания и позволяют получить оценки всех показателей эффективности процесса.

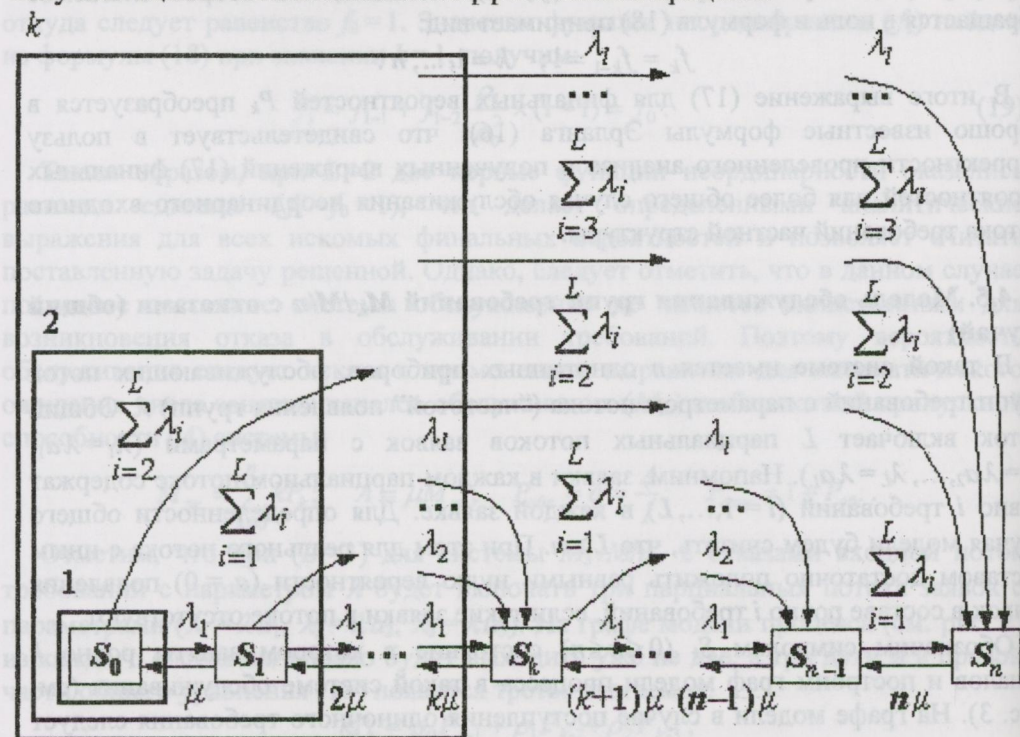


Рис.3. Граф модели обслуживания неординарного входного потока требований

Решение. Будем искать выражения для финальных вероятностей P_k , как и ранее, в форме, близкой к формулам Эрланга, а именно в виде:

$$P_k = \frac{\rho_0^k}{k!} P_0 f_k, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (20)$$

В этом случае все особенности неординарной структуры входного потока заявок должны быть сосредоточены в выражениях для функций

неординарности (f_k). При вырождении входного потока в ординарный (в простейший) все функции неординарности должны оказаться равными единице и найденные формулы финальных вероятностей автоматически должны преобразовываться в формулы Эрланга (16), что будет свидетельствовать в пользу корректности анализа рассматриваемого более общего случая — обслуживания неординарного входного потока заявок.

Введем обозначения для коэффициентов (ρ_i , $0 \leq i < L$) загрузки системы частью входного потока заявок, в которой (в части потока) отсутствуют первые i парциальных потоков заявок:

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \sum_{j=1+i}^L \lambda_j, & \text{при } 0 \leq i < L; \\ 0, & \text{при } i \geq L. \end{cases} \quad (21)$$

Воспользуемся правилом баланса потоков переходов и составим уравнения баланса для контуров на графе модели (см. рис. 3), получим:

$$\left. \begin{aligned} 1\mu P_1 &= \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_0; \\ 2\mu P_2 &= \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_1 + \left(\sum_{i=2}^L \lambda_i \right) P_0; \\ 3\mu P_3 &= \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_2 + \left(\sum_{i=2}^L \lambda_i \right) P_1 + \left(\sum_{i=3}^L \lambda_i \right) P_0; \\ &\dots \\ k\mu P_k &= \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_{k-1} + \left(\sum_{i=2}^L \lambda_i \right) P_{k-2} + \left(\sum_{i=3}^L \lambda_i \right) P_{k-3} + \dots + \left(\sum_{i=k}^L \lambda_i \right) P_0. \end{aligned} \right\}$$

Последовательность уравнений позволяет установить закономерность их формирования: в правой части количество слагаемых совпадает с индексом k финальной вероятности, стоящей в левой части равенства; индекс финальной вероятности в каждом слагаемом в правой части уменьшается относительно индекса k на величину (α) номера слагаемого (в первом слагаемом — на $\alpha = 1$, во втором — на $\alpha = 2$ и т. д.). Эта же величина α является нижней границей суммы параметров парциальных потоков групп требований ($\sum \lambda_i$) для каждой из упомянутых вероятностей. Поэтому далее будем оперировать уравнением для общего случая k -го контура на графе модели (см. последнее уравнение для вероятности P_k). Разделим левую и правую части k -го уравнения на величину производительности μ , получим:

$$kP_k = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_{k-1} + \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=2}^L \lambda_i \right) P_{k-2} + \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=3}^L \lambda_i \right) P_{k-3} + \dots + \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=k}^L \lambda_i \right) P_0.$$

Затем воспользуемся коэффициентами (ρ_i , $0 \leq i < L$) загрузки системы частью входного потока заявок и найдем уравнение для общего случая:

$$kP_k = \rho_0 P_{k-1} + \rho_1 P_{k-2} + \rho_2 P_{k-3} + \dots + \rho_{k-1} P_0. \quad (22)$$

Напомним, что правая часть уравнения (22) “удлиняется” или “укорачивается” автоматически в зависимости от значений индекса k в силу того, что для $i < 0$ состояния S_i отсутствуют и вероятности $P_i = 0$.

Подставим формулы (20) для финальных вероятностей P_k в уравнение (22). Третье слагаемое в правой части использовалось для иллюстрации закономерности изменения слагаемых, далее в целях краткости записи третье слагаемое в правой части опустим, получим:

$$k \frac{\rho_0^k}{k!} P_0 \cdot f_k = \rho_0 \frac{\rho_0^{k-1}}{(k-1)!} P_0 f_{k-1} + \rho_1 \frac{\rho_0^{k-2}}{(k-2)!} P_0 f_{k-2} + \dots + \rho_{k-1} \cdot (1) \cdot P_0 f_0.$$

Затем разделим обе части равенства на множитель, стоящий в левой части равенства перед функцией неординарности (f_k), для наглядности учтем отброшенное третье слагаемое в правой части равенства, выполним операции, аналогичные приведенным в формулах (18, 19), получим:

$$f_k = f_{k-1} + f_{k-2} \frac{\rho_1}{\rho_0^2} (k-1) + f_{k-3} \frac{\rho_2}{\rho_0^3} (k-1)(k-2) + \dots + f_0 \frac{\rho_{k-1}}{\rho_0^k} (k-1) \dots (1).$$

В последнем слагаемом перемножается последовательность из $(k-1)$ чисел, каждое из которых меньше предыдущего на единицу, последнее число оказывается равным единице. Найденное выражение является рекуррентным, удобным для быстрых численных расчетов и может быть представлено более компактно:

$$f_k = f_{k-1} + \sum_{i=2}^k \left[f_{k-i} \frac{\rho_{i-1}}{\rho_0^i} \prod_{j=1}^{i-1} (k-j) \right], \quad k = 2, \dots, n. \quad (23)$$

Явные аналитические выражения функций неординарности из формулы (23) получить можно, но их запись бесполезна в силу громоздкости.

Выражение для вероятности нулевого состояния найдем с использованием условия нормировки вероятностей, в которое подставим формулы (20), получим:

$$\sum_{k=0}^n P_k = 1; \rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{\rho_0^k}{k!} P_0 f_k = P_0 \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho_0^k}{k!} f_k \right) = 1; \rightarrow P_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho_0^k}{k!} f_k \right)^{-1}$$

Для определения значения самой первой функции неординарности (f_0) подставим в формулу (20) значение $k=0$, получим:

$$P_0 = P_0 \times f_0,$$

откуда следует равенство $f_0 = 1$. Значение функции неординарности (f_1) найдем из формулы (23) при значении $k=1$. Как и в случае формулы (19), получим:

$$f_1 = f_{1-1} + \sum_{i=2}^1 \left[f_{1-i} \frac{\rho_{i-1}}{\rho_0^i} \prod_{j=1}^{i-1} (1-j) \right] = f_0 + [0] = f_0.$$

Таким образом, две первые функции неординарности оказались равными единице ($f_1 = f_0 = 1$), что делает определенными аналитические выражения для всех искоемых финальных вероятностей и позволяет считать поставленную задачу решенной. Отметим, что в данном случае "отказовыми" являются все последние $(L-1)$ состояний системы массового обслуживания, так как появление заявки в составе L требований для этих состояний приведет к обязательному отказу в обслуживании какой-то части требований в этой заявке. Поэтому вероятность обслуживания следует искать с применением выражения для математического ожидания числа занятых каналов обслуживания ($M_{зк}$) и абсолютной пропускной способности (A) системы:

$$M_{\text{зк}} = \sum_{k=0}^n k P_k; \quad A = \mu \cdot M_{\text{зк}}; \quad P_{\text{обс}} = q = \frac{A}{I}; \quad P_{\text{отк}} = 1 - P_{\text{обс}}.$$

4.6. Проверка корректности аналитического описания модели

Проверку корректности полученного решения выполним также как и раньше – найдем выражения функций неординарности (f_k) при вырождении неординарного входного потока требований в простейший. В этом случае параметры парциальных потоков заявок на обслуживание сразу двух и более требований оказываются равными нулю ($\lambda_i = 0, i > 1$). Тогда из формулы (21) следует ($\rho_0 = \rho; \rho_i = 0, i > 0$). Подставляя значение ($\rho_i = 0, i > 0$) в формулу (23), с учетом равенства ($f_0 = 1$), находим, что второе слагаемое обращается в ноль и формула (23) принимает вид:

$$f_k = f_{k-1} = 1; \quad k = 1, \dots, n.$$

В итоге выражение (20) для финальных вероятностей P_k преобразуется в хорошо известные формулы Эрланга (16), что свидетельствует в пользу корректности проведенного анализа, полученных выражений (20) финальных вероятностей и выражения (23) функций неординарности для общего случая обслуживания неординарного входного потока требований.

Задача решена.

5. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Доказанная в тексте теорема фактически является инструментом графического преобразования системы дифференциальных уравнений Чепмена-Колмогорова и соответствующих им алгебраических уравнений, что освобождает исследователя от кропотливых операций в ходе получения аналитического описания моделей и открывает возможности исследования процессов существенно более сложных, чем те, которые известны в классических марковских системах массового обслуживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / Под ред. Б. В. Гнеденко. – М.: Физматгиз, 1963. – 236 с.
2. Вентцель Е. С. Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1972. – 552 с.
3. Шахбазов А. Обслуживание неординарного потока // Докл. АН СССР. – т. 145 – №2.

Периодическое продолжение функций и решение уравнения колебаний струны в системах символьной математики

П. Г. Доля

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The formulas of periodic extension of function from segment to full real axis are proposed. They are used to construction of an explicit solution of the first boundary value problem for the one-dimensional wave equation for the finite string. Formulas of primitives of piecewise continuous functions are given.

1. Введение

Периодические функции играют в математике значительную роль. Однако использование их ограничено нашими конструктивными возможностями, связанными со сложностью построения формул произвольных периодических функций. Появление систем компьютерной математики, содержащих множество “неклассических” элементарных функций и умеющих выполнять сложные математические преобразования, облегчает решение этой задачи. В настоящей работе предложено несколько формул, расширяющих наши возможности по конструированию таких функций.

Полученные формулы находят свое применение во многих областях прикладной математики и геометрического моделирования. Здесь мы затрагиваем только одну из возможных областей их применения – решение одномерного волнового уравнения методом продолжения [1]. Основная его идея применительно к первой краевой задаче для конечного отрезка состоит в построении нечетного периодического продолжения начальных функций на всю вещественную ось, и затем подстановка их в формулу Даламбера. Обычно такое продолжение выполняется не с помощью формул, а алгоритмически – построением разных формул в различных областях изменения аргументов. В связи с этим применение метода ограничено из-за сложности анализа получаемого решения. Построение явных формул периодического продолжения начальных функций значительно расширяет возможности и доступность метода.

2. Периодическое продолжение функции с отрезка

Для моделирования периодических функций мы будем использовать несколько функций. Одна из них элементарная функция $Mod(x, y)$ – взятие остатка от деления числа x на число y . Такая встроенная функция имеется в пакете Mathematica. В системе символьной математики Maple аналогичной функции нет, но она может быть реализована с помощью формулы

$Mod(x, y) = x - y \cdot \left[\frac{x}{y} \right] \quad (y \neq 0)$, где квадратные скобки $[z]$ обозначают функцию

взятия ближайшего целого не превосходящего z . Функция $[z]$ имеется в Maple ($\text{floor}(z)$) и она может быть использована для создания функции Mod .

Функция $\text{Mod}(x, L)$ является периодической по переменной x функцией с периодом L ($L > 0$), на полуинтервале $0 \leq x < L$ она совпадает с линейной функцией $y=x$, и в точках $x = k \cdot L$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) имеет разрывы первого рода.

Мы также часто будем использовать непрерывную пилообразную функцию. Дадим ей специальное имя $\text{Stc}(x, w)$ и определим следующим образом:

$$\text{Stc}(x, w) = \left| \text{Mod}\left(x - \frac{w}{2}, w\right) - \frac{w}{2} \right|. \quad (2.1)$$

Это непрерывная четная периодическая по переменной x функция с периодом w , которая на отрезке $0 \leq x \leq \frac{w}{2}$ совпадает с линейной функцией $y=x$.

Рассмотрим задачу построения периодического продолжения функции $\varphi(x)$, заданной на полуинтервале $[a, b)$, на всю вещественную ось ($a < b$ — конечные числа). Функцию $\varphi(x)$ на этом полуинтервале будем считать кусочно-гладкой непрерывной функцией.

Периодическое продолжение функции $\varphi(x)$ с полуинтервала $[a, b)$ может быть получено с помощью следующей формулы:

$$f(x) = \varphi(a + \text{Mod}(x - a, b - a)). \quad (2.2)$$

Доказательство. Для $x \in [a, b)$, $0 \leq x - a < b - a$ и $\text{Mod}(x - a, b - a) = x - a$. Тогда $f(x) = \varphi(a + \text{Mod}(x - a, b - a)) = \varphi(a + (x - a)) = \varphi(x)$ и $f(x)$ совпадает с $\varphi(x)$ на полуинтервале $[a, b)$. Т.к. $\text{Mod}(x + L, L) = \text{Mod}(x, L)$, то имеем $f(x + (b - a)) = \varphi(a + \text{Mod}(x - a + (b - a), b - a)) = \varphi(a + \text{Mod}(x - a, b - a)) = f(x)$, и функция $f(x)$ является периодической с периодом $b - a$.

Если непрерывная функция $\varphi(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает одинаковые значения $\varphi(a) = \varphi(b)$, то результирующее периодическое продолжение $f(x)$, построенное по формуле (2.2), будет непрерывной функцией. Очевидно, что достаточно проверить непрерывность только в точке b . Имеем $f(b - 0) = \varphi(b - 0) = \varphi(b) = \varphi(a) = \varphi(a + 0) = f(a + (b - a) + 0) = f(b + 0)$. Здесь выражение $f(x \pm 0)$ означает вычисление правого или левого предела функции $f(x)$ в точке x .

Часто перед тем, как функцию продолжить периодически, на нее накладывается условие четности или нечетности.

Для функции $\varphi(x)$ заданной на отрезке $[0, L]$ ($L > 0$), продолженной четно на отрезок $[-L, 0]$ и затем периодически на всю ось с периодом $2L$, формула продолжения имеет следующий вид:

$$F(x) = \varphi(\text{Stc}(x, 2L)) \quad (2.3)$$

Доказательство. Если $x \in [0, L]$, то $\text{Stc}(x, 2L) = x$. Поэтому $F(x) = \varphi(\text{Stc}(x, 2L)) = \varphi(x)$, т.е. на отрезке $[0, L]$ функция $F(x)$ совпадает с $\varphi(x)$. Если $x \in [-L, 0]$, то $\text{Stc}(x, 2L) = -x = |x|$ и $F(x) = \varphi(-x)$ является четной копией функции $\varphi(x)$ с отрезка $[0, L]$ на отрезок $[-L, 0]$. Т.к. функция $\text{Stc}(x, 2L)$

совпадает с $|x|$ на отрезке $[-L, L]$ и периодична с периодом $2L$, то выражение $F(x) = \varphi(\text{Stc}(x, 2L))$ будет повторять значения функции $\varphi(x)$ с отрезка $[-L, L]$ с периодом $2L$ на всю ось. Как легко заметить, если функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0, L]$, то результирующая функция $F(x)$ будет непрерывной на всей оси.

Для функции $\varphi(x)$, заданной на отрезке $[0, L]$ и обращающейся в ноль на его концах $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$, нечетное периодическое продолжение на всю ось может быть построено по следующей формуле:

$$(1.5) \quad F(x) = (-1)^{\left[\frac{x}{L}\right]} \varphi(\text{Stc}(x, 2L)), \quad (2.4)$$

где квадратные скобки $[x]$ означают взятие ближайшего целого, не превосходящего данное число x .

Доказательство. Если $x \in (0, L)$, то $(-1)^{\left[\frac{x}{L}\right]} = 1$, $\text{Stc}(x, 2L) = x$ и $F(x) = \varphi(\text{Stc}(x, 2L)) = \varphi(x)$. Если $x \in (-L, 0)$, то $\text{Stc}(x, 2L) = -x = |x|$, $(-1)^{\left[\frac{x}{L}\right]} = -1$ и $F(x) = -\varphi(-x)$. Кроме того, $F(L) = F(-L) = -\varphi(L) = 0$ и $F(0) = \varphi(0) = 0$. Т.е. $F(x)$ на отрезке $[0, L]$ совпадает с $\varphi(x)$, а на отрезке $[-L, 0]$ является нечетной копией функции $\varphi(x)$ с отрезка $[0, L]$. Поскольку имеют место соотношения

$$F(x + 2L) = (-1)^{\left[\frac{x+2L}{L}\right]} \varphi(\text{Stc}(x + 2L, 2L)) = (-1)^{\left[\frac{x}{L} + 2\right]} \varphi(\text{Stc}(x, 2L)) = F(x),$$

то функция $F(x)$ является также периодической с периодом $2L$.

Полученная таким образом функция $F(x)$ является непрерывной на всей оси, если $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0, L]$. Непрерывность функции $F(x)$ в 0 обеспечивается условием $\varphi(0) = 0$, поскольку имеют место равенства $F(0-0) = -\varphi(-0) = 0 = \varphi(+0) = F(0+0)$. Непрерывность в точке $x=L$ следует из условия $\varphi(L) = 0$, т.к. в силу нечетности и периодичности функции $F(x)$ имеем $F(L-0) = \varphi(L-0) = 0 = -\varphi(-L+0) = F(-L+0) = F(L+0)$.

Формула (2.4) отличается от формулы (2.3) множителем, который меняет знак результирующей функции на отрезках, на которых пилообразная функция убывает и, тем самым, превращает ее в нечетную периодическую функцию с периодом $2L$.

3. Решение уравнения колебаний струны с закрепленными концами

Используем формулу (2.4) в методе продолжения при решении первой краевой задачи для однородного одномерного волнового уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (3.1)$$

на конечном отрезке $[0, L]$ при начальных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t'(x, 0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq L) \quad (3.2)$$

и граничных условиях

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(L, t) = \mu_2(t) \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

Решение этой задачи находится в виде суммы двух функций $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Первая из них удовлетворяет уравнению (3.1), начальным условиям (3.2) и однородным граничным условиям ($\mu_1(t) = 0, \mu_2(t) = 0$). Вторая удовлетворяет уравнению (3.1), нулевым начальным условиям ($\varphi(x) = 0, \psi(x) = 0$) и граничным условиям (3.3). Сейчас мы будем заниматься первой задачей – решением уравнения колебаний конечной струны с закрепленными концами.

Для этой задачи хорошо известен метод продолжения, который в нашем случае можно представить следующим образом. Выполним нечетное продолжение начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с отрезка $[0, L]$ на отрезок $[-L, 0]$ и затем периодическое продолжение полученных функций с отрезка $[-L, L]$ на всю вещественную ось. Такое продолжение выполняется с помощью формулы (2.4)

$$\Gamma(x) = (-1)^{\left[\frac{x}{L}\right]} \varphi(\text{Stc}(x, 2L)), \quad \Psi(x) = (-1)^{\left[\frac{x}{L}\right]} \psi(\text{Stc}(x, 2L)) \quad (3.4)$$

Полученные (непрерывные, т.к. $\varphi(0) = \varphi(L) = 0, \psi(0) = \psi(L) = 0$) нечетные периодические функции $\Gamma(x)$ и $\Psi(x)$ подставляем в формулу Даламбера для бесконечной струны

$$u(x, t) = \frac{\Gamma(x + at) + \Gamma(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha. \quad (3.5)$$

Построенная функция $u(x, t)$ на интервале $(0, L)$ удовлетворяет начальным условиям (3.2) и на его концах однородным граничным условиям. Это значит, что конечная струна с закрепленными концами колеблется как участок $0 \leq x \leq L$ бесконечной струны с начальными условиями $\Gamma(x)$ и $\Psi(x)$. В результате решение задачи о колебании конечной струны с закрепленными концами определяется следующей формулой:

$$u(x, t) = \frac{(-1)^{\left[\frac{x+at}{L}\right]} \varphi(\text{Stc}(x + at, 2L)) + (-1)^{\left[\frac{x-at}{L}\right]} \varphi(\text{Stc}(x - at, 2L))}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} (-1)^{\left[\frac{\alpha}{L}\right]} \psi(\text{Stc}(\alpha, 2L)) d\alpha \quad (3.6)$$

Если начальная скорость $\psi(x)$ точек струны равна 0, то формула (3.6) дает удобное решение краевой задачи в замкнутом виде. Если функция $\psi(x)$ не равна 0, то вычисление интеграла в формуле (3.6) вызывает некоторые сложности. Исследуем этот интеграл $I(x, t) = \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha$.

Относительно функции $\Psi(x)$ мы знаем, что она нечетная, периодическая с периодом $2L$ функция, которая на отрезке $[0, L]$ совпадает с функцией $\psi(x)$ и на его концах обращается в ноль.

Лемма 1. Для любого z и любой нечетной периодической с периодом $2L$ функции $f(z)$ выполняется равенство $\int_{\text{Stc}(z, 2L)}^z f(\xi) d\xi = 0$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку вещественной оси z , расположенную на отрезке возрастания функции $Stc(z, 2L)$, например, в положении $z = z_1$ (см. Рис. 1).

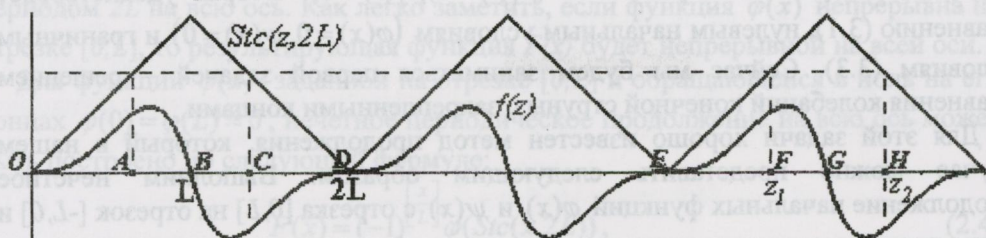


Рис. 1.

Координата точки А равна $Stc(z_1, 2L)$, и мы имеем $\int_{Stc(z_1, 2L)}^{z_1} = \int_A^C + \int_C^D + \int_D^E + \int_E^F$. Но

для нечетной периодической функции имеют место равенства $\int_A^C f(\xi) d\xi = 0$,

$\int_C^D f(\xi) d\xi + \int_E^F f(\xi) d\xi = 0$ и $\int_D^E f(\xi) d\xi = 0$ как интеграл по некоторому количеству периодов (одному, нескольким или ни одному). Следовательно, для выбранного

расположения точки $z = z_1$ получаем $\int_{Stc(z_1, 2L)}^{z_1} f(\xi) d\xi = 0$. Пусть теперь точка z

расположена на отрезке убывания функции $Stc(z, 2L)$, например, в положении $z = z_2$ (см. Рис. 1). Тогда имеем $\int_{Stc(z_2, 2L)}^{z_2} = \int_A^B + \int_B^D + \int_D^E + \int_E^G + \int_G^H$. Но для нечетной

периодической функции имеют место равенства $\int_A^B f(\xi) d\xi + \int_G^H f(\xi) d\xi = 0$,

$\int_B^D f(\xi) d\xi + \int_E^G f(\xi) d\xi = 0$ и $\int_D^E f(\xi) d\xi = 0$ как интеграл по некоторому количеству периодов. Следовательно, для выбранного расположения точки z также

получаем $\int_{Stc(z_2, 2L)}^{z_2} f(\xi) d\xi = 0$. Рассматриваемый интеграл $\int_{Stc(z, 2L)}^z f(\xi) d\xi$ также будет

равен нулю, если точка z расположена на отрезке OB или BD . Аналогично показывается, что этот интеграл равен нулю, если точка z расположена левее отрезка $[0, L]$, т.е. для $z < 0$. Т.о. утверждение леммы доказано.

Теперь для интеграла $I(x, t)$ можно записать цепочку равенств

$$\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha = \int_{x-at}^{Stc(x-at, 2L)} \Psi(\alpha) d\alpha + \int_{Stc(x-at, 2L)}^{Stc(x+at, 2L)} \Psi(\alpha) d\alpha + \int_{Stc(x+at, 2L)}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha = \int_{Stc(x-at, 2L)}^{Stc(x+at, 2L)} \Psi(\alpha) d\alpha$$

Здесь мы воспользовались предыдущей леммой, из которой следует, что для любых x и t имеют место равенства $\int_{x-at}^{Stc(x-at, 2L)} \Psi(\alpha) d\alpha = 0$ и $\int_{x+at}^{Stc(x+at, 2L)} \Psi(\alpha) d\alpha = 0$. В оставшемся интеграле нечетную периодическую функцию $\Psi(\alpha)$ мы заменили функцией $\psi(\alpha)$, поскольку для этого интеграла отрезок интегрирования целиком принадлежит отрезку $[0, L]$, на котором функция $\Psi(\alpha)$ совпадает с $\psi(\alpha)$. Следовательно, формулу (3.6) можно переписать в следующем виде:

$$u(x, t) = \frac{(-1)^{\left[\frac{x+at}{L}\right]} \varphi(Stc(x+at, 2L)) + (-1)^{\left[\frac{x-at}{L}\right]} \varphi(Stc(x-at, 2L))}{2} + \frac{1}{2a} \int_{Stc(x-at, 2L)}^{Stc(x+at, 2L)} \psi(\alpha) d\alpha \quad (3.7)$$

Эта формула дает явное решение задачи о колебании конечной струны с закрепленными концами.

Замечание. Формула Даламбера (3.5) для бесконечной струны дает решение волнового уравнения, если $\Psi(x)$ непрерывно-дифференцируемая, а $\Gamma(x)$ дважды непрерывно-дифференцируемая функции. Переходя к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, мы должны потребовать [1] выполнение дополнительного условия $\varphi''(0) = \varphi''(L) = 0$. Если это не так, то решение, получаемое с помощью формулы (3.5) и, следовательно, с помощью формул (3.6) и (3.7), нужно рассматривать как обобщенное.

4. Решение волнового уравнения для кусочных начальных условий

Начальные значения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ часто бывают заданными как кусочные функции. Если $\varphi(x)$ кусочно-гладкая непрерывная функция и на различных отрезках изменения аргумента представима различными формулами, то ее уравнение можно записать единым выражением [3], в котором при подстановке в формулу (3.7) надо выполнить замену аргумента x на $Stc(x \pm at, 2L)$. Если для функции $\psi(x)$ первообразная $\Phi(x)$ известна, то вычисление интеграла в (3.7) также сводится к подстановке в формулу $\Phi(x)$ верхнего и нижнего пределов интегрирования и вычисления их разности. Но вычисление первообразной кусочно-непрерывной функции $\psi(x)$ требует некоторых преобразований.

Рассмотрим случай непрерывной кусочно-линейной функции $\psi(x)$. В [3] показано, что если даны координаты узлов ломаной $\{(x_0, \psi_0), (x_1, \psi_1), \dots, (x_n, \psi_n)\}$ ($x_k < x_{k+1}$), то ее уравнение на отрезке $[x_0, x_n]$ можно представить в виде:

$$\psi(x) = \psi_0 + \sum_{k=1}^n (\psi_k - \psi_{k-1}) P(x, x_{k-1}, x_k - x_{k-1}), \quad (4.1)$$

где функция $P(x, a, w)$ определяется формулой

$$P(t, a, w) = \frac{1}{2w} (w + |t-a| - |t-a-w|) \quad (w \neq 0). \quad (4.2)$$

Возьмем достаточно большое по модулю отрицательное число $t_0 < a$ и вычислим интеграл $IP(t, a, w) = \int_{t_0}^t P(\tau, a, w) d\tau$, ($w > 0$). Для $t < a$ получаем, что

$$\int_{t_0}^t P(\tau, a, w) d\tau = 0. \text{ При } a \leq t \leq a + w \text{ имеем } \int_{t_0}^t P(\tau, a, w) d\tau = \int_a^t \frac{\tau - a}{w} d\tau = \frac{(t - a)^2}{2w}.$$

$$\text{При } t > a + w \text{ имеем } \int_{t_0}^t P(\tau, a, w) d\tau = \int_a^{a+w} \frac{\tau - a}{w} d\tau + \int_{a+w}^t 1 \cdot d\tau = t - a - \frac{w}{2}.$$

Можно заметить, что этот интеграл представим в виде единого выражения следующего вида $\frac{1}{2}((t - a)P(t, a, w) + Q(t, a + w))$, где

$$Q(t, a) = \frac{1}{2}(t - a + |t - a|). \quad (4.3)$$

Действительно, рассматривая это выражение на частях вещественной оси $t < a$, $a \leq t \leq a + w$ и $t > a + w$, мы получаем такие же значения, что и выше для интеграла. Таким образом, первообразная функции $P(t, a, w)$ может быть представлена в следующем виде:

$$IP(t, a, w) = \int_{t_0}^t P(\tau, a, w) d\tau = \frac{1}{2}((t - a)P(t, a, w) + Q(t, a + w)). \quad (4.4)$$

$IP(t, a, w)$ является непрерывно-дифференцируемой функцией как первообразная непрерывной функции. При $t < a$ функция $IP(t, a, w)$ равна нулю, на отрезке $a \leq t \leq a + w$ она является параболой, а при $t > a + w$ является линейной функцией.

С учетом (4.4) первообразная произвольной ломаной, задаваемой формулой (4.1), с точностью до константы будет определяться формулой:

$$\Psi(x) = \int_{x_0}^x \psi(\tau) d\tau = \psi_0 \cdot (x - x_0) + \sum_{k=1}^n (\psi_k - \psi_{k-1}) IP(x, x_{k-1}, x_k - x_{k-1}). \quad (4.5)$$

Рассмотрим теперь случай кусочно-непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции. Пусть отрезок разбит на части точками $\{x_i\}$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, и на каждом внутреннем полуинтервале $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) функция $f(x)$ задается гладкой функцией $f_i(x)$, которая непрерывна на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Пусть также вне отрезка при $x < x_0$ функция $f(x)$ задается функцией $f_0(x)$, а при $x \geq x_n$ она определяется функцией $f_{n+1}(x)$.

Пусть первообразные $\Phi_i(x)$ каждой из функций $f_i(x)$ известны. Тогда первообразная $\Phi(x)$ кусочно-непрерывной функции $f(x)$ с точностью до константы определяется следующей формулой:

$$\Phi(x) = \Phi_0(x_0 + Q_1(x, x_0)) + (\Phi_{n+1}(x_n + Q(x, x_n)) - \Phi_{n+1}(x_n)) + \sum_{i=1}^n \{\Phi_i(x_{i-1} + (x_i - x_{i-1})P(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1})) - \Phi_i(x_{i-1})\}, \quad (4.6)$$

где функции $P(x, a, w)$ и $Q(x, a)$ определяются формулами (4.2) и (4.3), а $Q_l(x, a)$ определяется формулой $Q_l(t, a) = \frac{1}{2}(t - a - |t - a|)$.

Доказательство. Для доказательства нужно показать, что функция $\Phi(x) = \int_{\alpha}^x f(\tau) d\tau + C$ (α произвольное достаточно большое по модулю отрицательное число $\alpha < a$) при некотором C совпадает с правой частью формулы (4.6). Обозначим выражение, стоящее в правой части (4.6), через $I(x)$.

При $x < a$ будем иметь $\Phi(x) = \int_{\alpha}^x f(\tau) d\tau + C = \int_{\alpha}^x f_0(\tau) d\tau = \Phi_0(x) - \Phi_0(\alpha) + C$.

Выберем константу C равной $\Phi_0(\alpha)$. В этом случае ($x < x_0$) имеем $Q_l(x, x_0) = x - x_0$, $Q(x, x_n) = 0$, $P(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1}) = 0 \quad \forall i \geq 1$. Т.о. в выражении для $I(x)$ все слагаемые, кроме первого, обращаются в 0. Поэтому получаем $I(x) = \Phi_0(x) = \Phi(x)$. Для случая $x_0 \leq x < x_1$ имеем

$$\Phi(x) = \int_{\alpha}^x f(\tau) d\tau + C = \int_{\alpha}^{x_0} f_0(\tau) d\tau + \int_{x_0}^x f_1(\tau) d\tau + C = \Phi_0(x_0) + (\Phi_1(x) - \Phi_1(x_0))$$

Но в этом случае в выражении для $I(x)$ имеем $P(x, x_0, x_1 - x_0) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$,

$Q_l(x, x_0) = 0$, $Q(x, x_n) = 0$ и $P(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1}) = 0 \quad \forall i \geq 2$. Поэтому второе слагаемое в правой части (4.6) и все слагаемые в сумме, начиная со второго, обращаются в 0 и мы получаем, что $I(x) = \Phi_0(x_0) + (\Phi_1(x) - \Phi_1(x_0)) = \Phi(x)$.

Для случая $x_{k-1} \leq x < x_k$ ($k = 2, 3, \dots, n$) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^x f(\tau) d\tau &= \int_{\alpha}^{x_0} f_0(\tau) d\tau + \int_{x_0}^{x_1} f_1(\tau) d\tau + \int_{x_1}^{x_2} f_2(\tau) d\tau + \dots + \int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} f_{k-1}(\tau) d\tau + \int_{x_{k-1}}^x f_k(\tau) d\tau = \\ &= \Phi_0(x_0) - \Phi_0(\alpha) + \sum_{i=1}^{k-1} (\Phi_i(x_i) - \Phi_i(x_{i-1})) + (\Phi_k(x) - \Phi_k(x_{k-1})). \end{aligned}$$

Для этого же полуинтервала изменения аргумента в выражении для $I(x)$ имеем

$$P(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1}) = 1 \quad \forall i \leq k-1, \quad P(x, x_{k-1}, x_k - x_{k-1}) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \quad \text{и} \quad \forall i \geq k+1$$

$P(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1}) = 0$. Кроме того, $Q_l(x, x_0) = 0$, $Q(x, x_n) = 0$. В результате второе слагаемое в (4.6) и все слагаемые в сумме, начиная с $(k+1)$ -го, обращаются в 0, а слагаемые в сумме до $(k-1)$ -го дают $\sum_{i=1}^{k-1} (\Phi_i(x_i) - \Phi_i(x_{i-1}))$.

Остается также k -е слагаемое в виде $\Phi_k(x) - \Phi_k(x_{k-1})$. В итоге мы получаем то же выражение для $I(x)$, что и для первообразной, т.е. в этом случае также имеем равенство $I(x) = \Phi(x)$. Случай $x \geq x_n$ отличается от предыдущего при $k = n$ тем, что $Q(x, x_n) = x - x_n$, и второе слагаемое в правой части (4.6) принимает вид

$\Phi_{n+1}(x) - \Phi_{n+1}(x_n)$. В результате и в этом случае получаем, что $\Phi(x) = I(x)$. Т.о. для всех участков изменения аргумента выражения $\Phi(x)$ и $I(x)$ совпадают.

Отметим, что значение исходной кусочно-непрерывной функции в точках разбиения x_i не существенно, поскольку изменение значения функции $f_i(x)$ на концах отрезка интегрирования $[x_{i-1}, x_i]$ не влияет на значение интеграла. Поэтому значения первообразных $\Phi_i(x_{i-1})$, стоящие в формуле (4.6), можно рассматривать как соответствующие предельные значения. Кроме того, эти константы в формуле для первообразной $\Phi(x)$ вообще могут быть отброшены.

Приведем один частный случай формулы (4.6). Часто начальная скорость струны задается как кусочно-постоянная функция $g(x)$, принимающая на полуинтервалах $x_{i-1} \leq x < x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) постоянные значения g_i и нулевое значение вне отрезка $[x_0, x_n]$. Тогда первообразные констант g_i , очевидно, имеют вид $\Phi_i(x) = g_i \cdot x$, $\Phi_0 = \Phi_{n+1} = 0$, и соответствующие слагаемые в сумме (4.6) принимают вид

$$g_i \cdot (x_{i-1} + (x_i - x_{i-1})P(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1})) - g_i x_{i-1} = g_i \cdot (x_i - x_{i-1})P(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1})$$

В результате мы приходим к формуле вычисления первообразной $G(x)$ кусочно-постоянной функции

$$G(x) = \sum_{i=1}^n g_i (x_i - x_{i-1}) P(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1}) \quad (4.7)$$

Вернемся к решению волнового уравнения. Большинство начальных функций $\psi(x)$ (начальная скорость) являются либо кусочно-непрерывными, либо кусочно-гладкими непрерывными функциями, которые на различных участках изменения аргумента от x_{i-1} до x_i задаются разными функциями $\psi_i(x)$. Использование формулы (4.6) позволяет записать для них единое формульное выражение для первообразной $\Phi(x)$ через первообразные $\Phi_i(x)$ составляющих функций $\psi_i(x)$.

Таким образом, имея первообразную $\Phi(x)$ кусочно-непрерывной функции $\psi(x)$, построенную с помощью формулы (4.6) (или (4.5), (4.7)), можно записать явное решение задачи колебания струны с закрепленными концами

$$u(x, t) = \frac{(-1)^{\left[\frac{x+at}{L}\right]} \varphi(\text{Stc}(x + at, 2L)) + (-1)^{\left[\frac{x-at}{L}\right]} \varphi(\text{Stc}(x - at, 2L))}{2} + \frac{1}{2a} (\Phi(\text{Stc}(x + at, 2L)) - \Phi(\text{Stc}(x - at, 2L))) \quad (4.8)$$

Формула (4.8) содержит только суперпозицию начальных функций и их первообразных с элементарными функциями $[x], |x|, \text{Mod}(x, y)$ (пилообразная функция $\text{Stc}(x, w)$ выражается через эти функции) и может рассматриваться как явное решение соответствующей задачи.

5. Учет граничных значений

Рассмотрим теперь задачу о распространении граничного режима. Общее решение приведено в [1, 2]. Если задано граничное значение только на левом конце $u(0,t) = \mu_l(t)$, ($u(L,t) = 0, u(x,0) = 0, u'_l(x,0) = 0$), то решение имеет вид [1]:

$$u_l(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\mu}_l(t - \frac{x}{a} - i\frac{2L}{a}) - \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}_l(t + \frac{x}{a} - i\frac{2L}{a}), \quad (5.1)$$

где функция $\bar{\mu}_l(t)$ совпадает с $\mu_l(t)$ при $t > 0$ и равна нулю при $t < 0$. При этом формула (5.1) для любой точки (x,t) содержит конечное число слагаемых.

Представим формулу (5.1) в форме удобной для реализации в системах символьной математики. Будем считать, что граничная функция $u(0,t) = \mu_l(t)$ согласуется с начальным условием $u(x,0) = \varphi(x) = 0$, т.е. выполняется условие $u(0,0) = \mu_l(0) = 0$. Учитывая это, замечаем, что функция $\bar{\mu}(t)$, совпадающая с $\mu_l(t)$ для $t > 0$, и равная 0 при $t < 0$, будет непрерывной в 0. Такую функцию можно представить в виде $\bar{\mu}(t) = \mu_l(Q(t,0))$, где функция $Q(t,a)$ определяется формулой (4.3). Действительно, при $t < 0$ имеем $Q(t,0) = 0$ и $\bar{\mu}(t) = \mu_l(0) = 0$. При $t \geq 0$ имеем $Q(t,0) = t$ и $\bar{\mu}(t) = \mu_l(t)$. Т.о. функция $\mu_l(Q(t,0))$ автоматически обнуляется при отрицательных значениях аргумента t .

Определим теперь, сколько слагаемых в сумме (5.1) следует брать. Легко видеть, что в первой сумме (5.1) положительные значения аргумента $t - \frac{x}{a} - i\frac{2L}{a}$

функции $\bar{\mu}$ могут быть только для $i < \left[\left(t - \frac{x}{a} \right) / \left(\frac{2L}{a} \right) \right] = \left[\frac{at - x}{2L} \right] \leq \left[\frac{at}{2L} \right]$. Во

второй сумме (5.1) аргументы $t + \frac{x}{a} - i\frac{2L}{a} > 0$ положительны при

$i < \left[\left(t + \frac{x}{a} \right) / \left(\frac{2L}{a} \right) \right] = \left[\frac{at + x}{2L} \right] \leq \left[\frac{at + L}{2L} \right]$. Количество членов в суммах мы можем

взять равным большей из двух полученных верхних оценок, т.е. $n_l = \left[\frac{at + L}{2L} \right]$.

Тогда выражение (5.1) можно переписать в виде:

$$u_l(x,t) = \mu_l(Q(t - \frac{x}{a}, 0)) + \sum_{i=1}^{n_l} \mu_l(Q(t - \frac{x}{a} - i\frac{2L}{a}, 0)) - \mu_l(Q(t + \frac{x}{a} - i\frac{2L}{a}, 0)), \quad (5.2)$$

где n_l определено выше и при любом фиксированном $t > 0$ конечно.

Если задано граничное значение только на правом конце $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = \mu_r(t)$, то, аналогично предыдущему, формула, приведенная в [1], может быть преобразована к более удобному для вычислений виду

$$u_r(x,t) = \sum_{i=0}^{n_r} \mu_r(Q(t + \frac{x}{a} - \frac{L}{a} - i\frac{2L}{a}, 0)) - \mu_r(Q(t - \frac{x}{a} - \frac{L}{a} - i\frac{2L}{a}, 0)), \quad (5.3)$$

где $n_r = \left[\frac{at}{2L} \right]$ и предполагается, что $\mu_r(0) = 0$.

Для первой краевой задачи, когда начальные и граничные условия согласованы на концах струны в 0-й момент времени, но не равны нулю, т.е. $\mu_l(0) = \varphi(0) \neq 0$ и $\mu_r(0) = \varphi(L) \neq 0$, общее решение можно получить следующим образом. Рассмотрим вспомогательную функцию $w(x, t) = u(x, t) - f(x)$, где $f(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi(L) - \varphi(0)}{L}x$. Тогда $w(x, t)$ будет удовлетворять волновому уравнению (3.1), начальным условиям $w(x, 0) = \varphi(x) - f(x) = \varphi_1(x)$, $w'_t(x, 0) = \psi(x)$, и граничным условиям $w(0, t) = \mu_l(t) - \varphi(0) = \mu_l^0(t)$ и $w(L, t) = \mu_r(t) - \varphi(L) = \mu_r^0(t)$. В результате будут выполняться условия $\varphi_1(0) = \mu_l^0(0) = 0$ и $\varphi_1(L) = \mu_r^0(0) = 0$, которые обеспечивают справедливость формулы (3.7) и формул (5.2), (5.3). Подставляя в эти формулы новые начальные и граничные функции, и складывая их, мы получим представление функции $w(x, t)$ и, следовательно, явное формульное решение первой краевой задачи для конечной струны $u(x, t) = w(x, t) + f(x)$.

6. Заключение.

Формулы (2.2) - (2.4) дают способ построения формул периодического или четного и нечетного периодического продолжения функции с отрезка на всю вещественную ось. Использование их в методе продолжения позволяет дать явное формульное решение (3.7), (5.2), (5.3) первой краевой задачи для однородного уравнения колебаний конечной струны. Для случая, когда начальное смещение является кусочно-гладкой, а начальная скорость $\psi(x)$ кусочно-непрерывной функциями, решение может быть получено в замкнутом виде, если первообразные кусков, составляющих функцию $\psi(x)$, известны. Формулы (4.5) - (4.7) вычисления первообразных кусочных функций позволяют в системах символьной математики с помощью формулы (4.8) генерировать решения задачи колебаний конечной струны для широкого класса начальных функций практически с любой степенью точности, не используя сложного программирования. Ряд примеров решения волнового уравнения, использующих формулы настоящей работы, приведены в пакете расширения *PscFunctions* системы символьной математики MAPLE, представленного на интернет сайте www.maplesoft.com/products/thirdparty/PscFunctions.

Метод продолжения применим для решения различных задач, например, при решении уравнения теплопроводности. Везде, где используется этот метод, будут полезны формулы периодического продолжения функций настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736с.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830с.
3. Доля П.Г. Моделирование кусочно-гладких непрерывных функций и кривых.// Вестник Харьк. нац. ун-та., - 2005.- № 661. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып.4. – С.97-103.