ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 9 1969

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, КОММУТИРУЮЩИЕ С АНТИУНИТАРНЫМИ

И. Е. Луценко

§ 1. АНТИУНИТАРНЫЕ И ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В задаче обращения времени в квантовой механике используют так называемый антиунитарный оператор, т. е. оператор K, переводящий все комплексное гильбертово пространство H на себя и такой, что для любых $f,\ g \in H$

$$(Kf,\ Kg) = \overline{(f,\ g)}. \tag{1}$$

Легко показать, что условие (1) эквивалентно следующему: оператор K сохраняет норму элементов ($\|Kf\| = \|f\|$) и является антилинейным (псевдолинейным: [5]) для любых $f,\ g \in H$

$$K(f+g) = Kf + Kg; \quad K(\lambda f) = \bar{\lambda}(Kf). \tag{2}$$

Очевидно, что антиунитарный оператор K сохраняет ортогональность элементов и что существует обратный оператор K^{-1}, также антиунитарный, причем для любых $f,\ g \in H$

$$(Kf,\ g) = (f,\ K^{-1}g). \tag{3}$$

В квантовой механике [1, 3, 4] оператор K обычно обладает еще одним свойством: $K^2 = \pm E$ (E — единичный оператор). Если $K^2 = E$, то K называется *инволюцией* [6] или *оператором сопряжения* [7]. Если же $K^2 = -E$, то K будем называть *антиинволюцией* (или *оператором обращения*). Заметим кстати, что если J — анволюция, то $e^{i\alpha}z\ (\alpha = \bar{\alpha})$ — также инволюция, а если S — антиинволюция, то $e^{i\alpha}S$ — также антиинволюция.

Неподвижные векторы инволюции J называют J-вещественными векторами. Из (I) следует, что скалярное произведение любой пары J-вещественных векторов вещественно, поэтому множество всех J-вещественных векторов пространства H образует вещественное гильбертово пространство H_j, вложенное в H.

Лемма 1. *Если $G \subset H$ — такое множество векторов, что скалярное произведение любой пары из G вещественно, то существует такая инволюция J, что все элементы G будут J-вещественны. Если в H не существует вектора, ортогонального G, то эта инволюция определяется однозначно.* Для доказательства достаточно построить H_G-замкнутую вещественную оболочку множества G, выбрать в H_G ортонормированный базис и дополнить его до базиса $\{e_n\}$ во всем H. Тогда инволюцию можно задать так:

$$z\left(\sum_n x_n e_n\right) = \sum_n \bar{x}_n e_n.$$

Антиинволюция S переводит любой вектор в ортогональный ему:

$$(Sf,\ f) = \overline{(S^2 f,\ Sf)} = -\overline{(f,\ Sf)} = -(Sf,\ f), \text{ так что}$$

$$(Sf,\ f) = 0. \tag{4}$$

Отсюда легко получить, что *в конечномерных пространствах нечетной размерности не может существовать антиинволюция.*

Заметим еще, что примером антиинволюции может служить оператор [2]

$$S[x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots] = [-\bar{x}_2, \bar{x}_1, -\bar{x}_4, \bar{x}_3, \ldots],$$

а примером антиунитарного оператора

$$K[x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots] = [e^{i\alpha_1}\bar{x}_2, e^{-i\alpha_1}\bar{x}_1, e^{i\alpha_2}\bar{x}_4, e^{-i\alpha_2}\bar{x}_3, \ldots],$$

причем, если $\alpha_k = \frac{\pi}{2}$, то K — антиинволюция, а если $\alpha_k = 0$, то K — инволюция.

Если линейный оператор T коммутирует с инволюцией J, то он называется J-вещественным [6, 7]. Для ограниченного оператора J-вещественность означает существование такого ортонормированного базиса, в котором он задается вещественной матрицей. Примером неограниченного J-вещественного оператора служит любой самосопряженный оператор [8, 9], а также любой симметрический с индексом дефекта (1, 1) [10]. Как известно [11], любой симметрический J-вещественный оператор имеет равные индексы дефекта (n, n), но обратное неверно, если $n > 1$ [12].

В квантовой механике рассматривают также операторы, коммутирующие с антиинволюцией S [3, 4]. Такие операторы будем называть S-вещественными. Обобщая эти понятия, введем следующие определение:

Линейный оператор T будем называть K-вещественным, если существует такой антиунитарный оператор K, что

$$KT = TK \text{ или } KTK^{-1} = T. \tag{5}$$

Заметим, что перестановочность даже неограниченного оператора T с инволюцией J или антиинволюцией S означает выполнение равенств $JT = TJ$ или $ST = TS$, поэтому условие (5) будет означать K-вещественность и для неограниченных операторов. Так, например, K-вещественным оператором будет унитарный оператор $U = K^2$.

Пусть T — любой K-вещественный оператор, а f — его собственный вектор $(Tf = \lambda f)$, тогда $T(Kf) = KTf = K(\lambda f) = \bar{\lambda}(Kf)$, откуда получим

Лемма 2. *Дискретный спектр K-вещественного оператора T симметричен относительно вещественной оси. Если $N_\lambda(T)$ — собственное подпространство T, то*

$$KN_\lambda(T) = N_{\bar{\lambda}}(T). \tag{6}$$

В частотности, если $\lambda = \bar{\lambda}$, то $N_\lambda(T)$ инвариантно относительно K. Как будет показано ниже (пример 2), симметрия и даже вещественность спектра не достаточна для K-вещественности оператора.

Антиунитарный оператор Q будем называть зеркальным, если ни в каком инвариантном подпространстве Q не является ни инволюцией, ни антиинволюцией. Зеркальность оператора K означает, что унитарный оператор $U = K^2$ не имеет ни 1, ни —1 своим собственным значением. В силу (1) всякое инвариантное для K подпространство приводит K (т. е. ортогональное дополнение также инвариантно относительно K). Отсюда, используя лемму 2, получим

Лемма 3. *Всякий антиунитарный оператор распадается в ортогональную сумму инволюции, антиинволюции и зеркального оператора.*

Разумеется, некоторые из этих составляющих могут отсутствовать. Так, например, из (4) и леммы 2 легко получить, что в двухмерном пространстве любой антиунитарный оператор является либо инволюцией, либо антиинволюцией, либо зеркальным оператором. Заметим еще, что в силу леммы 2 зеркальный оператор не может существовать в конечномерных пространствах нечетных размерностей, так что в этих пространствах любой антиунитарный оператор либо инволюция, либо ортогональная сумма инволюции и антиунитарного оператора.

Пусть T — произвольный K-вещественный оператор. Тогда T коммутирует с $U=K^2$, и поэтому $N_{+1}(U)$ и $N_{-1}(U)$ приводят T, откуда получим

Теорема 1. *Всякий K-вещественный оператор распадается в ортогональную сумму J-вещественного, S-вещественного и Q-вещественного оператора (некоторые из этих слагаемых могут отсутствовать).*

Интересно отметить, что в двухмерном пространстве любой K-вещественный оператор будет также и J-вещественным: если оператор T коммутирует с K $(K^2 \neq E)$, то он коммутирует и с некоторой инволюцией J (обратное неверно — см. ниже пример 1, *в*). Действительно, пусть $KT=TK$ и $K^2 \neq E$. Если T имеет вещественное собственное значение λ, то в силу леммы 2 $T=\lambda E$, так что T коммутирует с любой инволюцией. Если же T имеет невещественное собственное значение $Te_1=\lambda e_1$, то в силу леммы 2$Te_2=\bar{\lambda}e_2$, где $e_2=Ke_1$, причем $(e_1, e_2)=0$. Но тогда T коммутирует с инволюцией J, задаваемой выражением $J(x_1e_1+x_2e_2)=$ $=\bar{x}_1e_2+\bar{x}_2e_1$.

Ниже приводятся примеры K вещественных операторов в конечномерных пространствах. При этом доказывается, что существуют такие K-вещественные операторы. что любой коммутирующий с ними антиунитарный оператор является инволюцией (антиинволюцией). При этом совокупность коммутирующих с линейным оператором инволюций может быть как бесконечной, так и состоящей из одной инволюции (разумеется, эта инволюция определяется с точностью до числового множителя $e^{i\alpha}$ — если T коммутирует с K, то он коммутирует и с $e^{i\alpha}K$).

Пример 1. Рассмотрим ограниченный линейный оператор T, имеющий полную систему собственных векторов, $Te_n=\lambda_n e_n$ $(\lambda_n=\bar{\lambda}_n)$;

а) если векторы e_n можно выбрать так, что все скалярные произведения (e_n, e_k) вещественны, то в силу леммы 1 существует такая инволюция J, что $Je_n=e_n$, а тогда $JTJ=T$;

б) если к тому же все собственные значения имеют первую кратность, то в силу леммы 2 любой коммутирующий с T антиунитарный оператор K удовлетворяет условию

$$Ke_n=e^{i\alpha_n}e_n \quad (\alpha_n=\bar{\alpha}_n). \tag{7}$$

Но тогда $K^2e_n=e_n$, так что K — инволюция;

в) если в условии а) все векторы e_n ортогональны, то оператор T коммутирует с семейством инволюций, задаваемых условием

$$J\left(\sum_n x_n e_n\right)=\sum_n e^{i\alpha_n}\bar{x}_n e_n \quad (\alpha_n=\bar{\alpha}_n);$$

г) если же в условии а) векторы e_n не ортогональны, то может оказаться лишь одна (с точностью до скалярного множителя) инволюция, коммутирующая с T. Зададим, например, в двухмерном пространстве оператор T условием

$$Tg_k=\lambda_k g_k \quad (k=1,\ 2;\ \lambda_k=\bar{\lambda}_k;\quad \lambda_1 \neq \lambda_2),$$

где $g_1=[1;\ 0]$; $g_2=[1;\ 1]$.

В силу а) существует инволюция J, коммутирующая с T. Если антиунитарный оператор K коммутирует с T, то в силу (7)

$$Kg_1=e^{i\alpha}g_1,\ Kg_2=e^{i\beta}g_2.$$

Но тогда в силу (1)

$$(Kg_1, Kg_2) = e^{i(\alpha-\beta)} (g_1 g_2) = \overline{(g_1, g_2)} = 1,$$

т. е.

$$e^{i\alpha} = e^{i\beta}, \ K = e^{i\alpha} J.$$

Пример 2. Построим в трехмерном пространстве оператор T с вещественным спектром, не коммутирующий ни с одним антиунитарным оператором. Пусть $e_1 = [1;\ 0;\ 0]$; $e_2 = [1;\ 0;\ i]$; $e_3 = [1;\ 1;\ 1]$. Зададим T условием $Te_k = \lambda_k e_k$, где $\lambda_k = \overline{\lambda}_k$ и все λ_k различны. Если $TK = KT$, то K — инволюция и выполнено условие (10). Но тогда в силу (1)

$$(Ke_1, Ke_2) = e^{i(\alpha_1-\alpha_2)} (e_1, e_2) = \overline{(e_1, e_2)} = 1,$$

$$(Ke_1, Ke_3) = e^{i(\alpha_1-\alpha_3)} (e_1, e_3) = \overline{(e_1, e_3)} = 1,$$

откуда $e^{i\alpha_1} = e^{i\alpha_2} = e^{i\alpha_3}$, и потому $(Ke_2, Ke_3) = \overline{(e_2, e_3)} = (e_2, e_3)$, что невозможно.

Пример 3. Построим в четырехмерном пространстве такой S-вещественный оператор, что любой коммутирующий с ним антиунитарный оператор K имеет вид $K = e^{i\alpha} S$. Зададим антиинволюцию S выражением

$$S[x_1, x_2, x_3, x_4] = \left[-\overline{x}_2, \overline{x}_1, -\overline{x}_4, \overline{x}_3\right]$$

и введем обозначения $e_1 = [1;\ 0;\ 0;\ 0]$, $g_1 = [1;\ 1;\ 1;\ 1]$,

$$e_2 = Se_1 = [0;\ 1;\ 0;\ 0];\ g_2 = Sg_1 = [-1;\ 1;\ -1;\ 1].$$

Определим оператор T условиями

$$Te_1 = \lambda e_1;\ Te_2 = \overline{\lambda} e_2;\ Tg_1 = \mu g_1;\ Tg_2 = \overline{\mu} g_2,$$

где λ, $\overline{\lambda}$, μ, $\overline{\mu}$ попарно различны. Непосредственно проверяется, что $ST = TS$ на векторах e_1, e_2, g_1, g_2, а значит и всюду. Пусть $KT = TK$, тогда в силу (6)

$$Ke_1 = e^{i\alpha} e_2;\ Kg_1 = e^{i\beta} g_2;\ Ke_2 = e^{i\alpha_1} e_1;\ Kg_2 = e^{i\beta_1} g_1,$$

откуда

$$(Ke_1, Kg_1) = e^{i(\alpha-\beta)} (e_2, g_2) = \overline{(e_1, g_1)},$$

так что $e^{i\alpha} = e^{i\beta}$. Но

$$(Ke_2, Kg_2) = e^{i(\alpha_1-\beta_1)} (e_1, g_1) = \overline{(e_2, g_2)},$$

откуда $e^{i\alpha_1} = e^{i\beta_1}$. Кроме того,

$$(Ke_2, Kg_1) = e^{i(\alpha_1-\alpha)} (e_1, g_2) = \overline{(e_2, g_1)},$$

так что $e^{i\alpha_1} = -e^{i\alpha}$, и окончательно

$$Ke_1 = e^{i\alpha} e_2;\ Kg_1 = e^{i\alpha} g_2;\ Ke_2 = -e^{i\alpha} e_1;$$

$Kg_2 = -e^{i\alpha} g_1$, т. е. $K = e^{i\alpha} S$ на векторах e_1, e_2, g_1, g_2, а значит, и на всем пространстве.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР, КОММУТИРУЮЩИЙ С ИНВОЛЮЦИЕЙ И АНТИИНВОЛЮЦИЕЙ

Если T — линейный K-вещественный оператор, то по теореме 1 $T = T_1 \oplus T_{-1} \oplus T_0$, где T_1 — J-вещественный, T_{-1} — S-вещественный, а T_0 — Q-вещественный оператор. При этом операторы T_1 и T_{-1} могут быть такими, которые не коммутируют ни с одним антиунитарным оператором, кроме $e^{i\alpha}K$ (примеры 1, 3 § 1). Оператор же T_0 этим свойством не обладает — основным результатом § 2 является следующее утверждение:

Теорема 2. *Если линейный оператор T коммутирует с зеркальным оператором Q, то существует такая инволюция J и такая антиинволюция S, с которыми T также коммутирует. Наоборот, если линейный оператор T коммутирует с инволюцией J и с антиинволюцией S, то существует такой зеркальный оператор Q, с которым T также коммутирует.*

Так как ортогональная сумма двух инволюций также инволюция, то из теорем 1 и 2 получим такое следствие:

Любой K-вещественный оператор распадается в ортогональную сумму J-вещественного и S-вещественного оператора (либо сам является J-вещественным или S-вещественным оператором).

Доказательство теоремы 2 опирается на ряд лемм.

Лемма 4. *Если Q — зеркальный оператор, а $E(\varphi)$ — спектральная функция унитарного оператора $U = Q^2$, то $E(\varphi)$ симметрична относительно вещественной оси в следующем смысле: в любой точке непрерывности $E(\varphi)$*

$$QE(\varphi)Q^{-1} = E - E(2\pi - \varphi) = Q^{-1}E(\varphi)Q \tag{8}$$

Действительно, так как $QUQ^{-1} = U$, то, учитывая (3), получим

$$(Uf, g) = (QUQ^{-1}f, g) = \overline{(UQ^{-1}f, Q^{-1}g)} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \overline{e^{i\varphi} d(E(\varphi)Q^{-1}f, Q^{-1}g)} = \int_0^{2\pi} e^{-i\varphi} d(QE(\varphi)Q^{-1}f, g),$$

полагая в этом интеграле $\varphi = 2\pi - \lambda$ и учитывая, что в точках $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ $E(\varphi)$ непрерывна (в силу зеркальности Q), получим

$$(Uf, g) = \int_{2\pi}^{0} e^{i(\lambda - 2\pi)} d(QE(2\pi - \lambda)Q^{-1}f, g) =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} d(Q[E - E(2\pi - \lambda)]Q^{-1}f, g).$$

Если функцию $Q[E - E(2\pi - \lambda)]Q^{-1}$ перенормировать в точках разрыва и учесть ее непрерывность на концах ($\lambda = 0$, $\lambda = 2\pi$), то эта функция окажется спектральной функцией оператора U, так что в точках непрерывности $E(\lambda)$ выполняется равенство $E(\lambda) = Q[E - E(2\pi - \lambda)]Q^{-1}$. Аналогично доказывается левая часть (8).

Лемма 5. *Если Q — зеркальный оператор, а унитарный оператор $V = \sqrt{Q^{-2}}$ определяется выражением*

$$V = \int_0^{2\pi} e^{-i\frac{\varphi}{2}} dE(\varphi),$$

где $E(\varphi)$ — спектральная функция оператора $U = Q^2$, то V удовлетворяет условию $QVQ^{-1} = -V$, т. е.

$$QV = -VQ. \tag{9}$$

Действительно,

$$(QVQ^{-1}f, g) = \overline{(VQ^{-1}f, Q^{-1}g)} =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{i\frac{\varphi}{2}} \overline{d(E(\varphi)Q^{-1}f, Q^{-1}g)} = \int_0^{2\pi} e^{i\frac{\varphi}{2}} d(QE(\varphi)Q^{-1}f, g).$$

Учитывая лемму 4 и заменяя в этом интеграле φ на $2\pi - \lambda$, получим

$$(QVQ^{-1}f, g) = -\int_{2\pi}^{0} e^{\left(\pi - \frac{\lambda}{2}\right)} d(E(\lambda)f, g) = -\int_0^{2\pi} e^{-i\frac{\lambda}{2}} d(E(\lambda)f, g),$$

т. е. $QVQ^{-1} = -V$, что и доказывает лемму.

Пусть T — Q-вещественный оператор. Тогда он коммутирует как с Q, так и с Q^2, а значит и с $V = \sqrt{Q^{-2}}$. Полагая $S = QV$, получим, что T коммутирует и с антиунитарным оператором S. Докажем, что S — антиинволюция: в силу (9) получим

$$S^2 = QVQV = -VQ^2V = -V^2Q^2 = -E.$$

Построим теперь инволюцию, коммутирующую с Q-вещественным оператором T. Так как Q — зеркальный оператор, то спектральная функция оператора Q^2 непрерывна в точке $\varphi = \pi$, и поэтому равенство (8) справедливо в этой точке.

Обозначая $P_1 = E(\pi)$ и $P_2 = E - E(\pi)$, из (8) получим

$$QP_1 = P_2Q; \quad QP_2 = P_1Q. \tag{10}$$

Рассмотрим два изометрических оператора

$$V_1 = P_1V = VP_1, \quad V_2 = P_2V = VP_2. \tag{11}$$

Их сумма и разность — унитарные операторы: $V_1 + V_2 = V(P_1 + P_2) = V$, а $V_1 - V_2 = V(P_1 - P_2)$, где $P_1 - P_2$, очевидно, унитарный оператор. Полагая $W = V_1 - V_2$, получим

$$W^2 = V(P_1 - P_2)V(P_1 - P_2) = V^2(P_1^2 + P_2^2) = V^2,$$

т. е.

$$W^2 = V^2 = Q^{-2}. \tag{12}$$

Из соотношений (11), (10) и (9) следует, что

$$QV_1 = -V_2Q, \quad QV_2 = -V_1Q, \tag{13}$$

откуда получим $QW = QV_1 - QV_2 = -V_2Q + V_1Q = WQ$. Но тогда антиунитарный оператор $z = QW$ будет инволюцией:

$$z^2 = QWQW = WQ^2W = Q^2W^2 = E.$$

Так как Q — вещественный оператор T коммутирует с унитарным оператором Q^2, то он коммутирует и с функциями этого оператора V, P_1, P_2, а значит, и с V_1, V_2, W. Но тогда T коммутирует и с инволюцией $j = QW$. Таким образом, доказана первая часть теоремы 2.

Доказательство второй части теоремы 2 основано на следующих вспомогательных утверждениях:

Лемма 6. *Пусть $E(\varphi)$ — спектральная функция унитарного оператора U. Тогда спектральная функция $E_1(\varphi)$ оператора $zU^{-1}z$ имеет вид*

$$E_1(\varphi) = zE(\varphi)z, \tag{14}$$

а спектральная функция оператора $(-U)$ определяется выражением

$$E_2(\varphi) = \begin{cases} E(\varphi + \pi) - E(\pi) & (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi) \\ E - E(\pi) + E(\varphi - \pi) & (\pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi). \end{cases} \tag{15}$$

Используя (1) и (2), получим

$$(zU^{-1}zf, g) = \overline{(U^{-1}zf, zg)} =$$
$$= \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\,\overline{(E(\varphi)zf, zg)} = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\,(zE(\varphi)zf, g).$$

Так как очевидно $zU^{-1}z$ — унитарный оператор, а $zE(\varphi)z$ обладает всеми свойствами спектральной функции, то в силу единственности ее и выполнено (14). Для доказательства (15) заметим, что $E_2(\varphi)$ обладает всеми свойствами спектральной функции, и поэтому определяет некоторый унитарный оператор. Найдем его

$$\int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d(E_1(\varphi) f, g) = \int_0^{\pi} e^{i\varphi} d(E(\varphi+\pi) f, g) + \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\varphi} d(E(\varphi-\pi) f, g) =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} e^{i(\lambda-\pi)} d(E(\lambda) f, g) + \int_0^{\pi} e^{i(\lambda+\pi)} d(E(\lambda) f, g) =$$

$$= -\int_0^{2\pi} e^{i\lambda} d(E(\lambda) f, g) = (-Uf, g),$$

что и доказывает лемму.

Лемма 7. *Пусть z — произвольная инволюция, а S — произвольная антиинволюция. Тогда пространство H можно разложить в такую сумму двух ортогональных подпространств $H = H_1 \oplus H_2$, что операторы j и S переводят их друг в друга:*

$$zH_1 = H_2,\ zH_2 = H_1,\ SH_1 = H_2,\ SH_2 = H_1. \tag{16}$$

Действительно, если $U = zS$, то $zU^{-1}z = -U$, так как $S^{-1} = -S$ Но тогда в силу леммы 6 $E_1(\varphi) = E_2(\varphi)$, что при $\varphi = \pi$ дает $zE(\pi)z = E - E(\pi)$. Отсюда, вводя обозначения $P_1 = E(\pi)$, $P_2 = E - P_1$, получим

$$zP_1 = P_2 z,\ zP_2 = P_1 z. \tag{17}$$

Таким образом, если $H_k = P_k H$, то $zH_1 = H_2$, $zH_2 = H_1$. Кроме того, $UP_k = P_k U$, а $S = zU$, поэтому $SP_1 = zUP_1 = zP_1 U = P_2 zU = P_2 S$, и значит, $SH_1 = H_2$, $SP_2 = H_1$, что и доказывает лемму.

Переходим теперь к доказательству второй части теоремы 2. Пусть T — линейный оператор, коммутирующий с z и S, тогда он коммутирует и с $U = zS$, а значит, и с P_1, P_2 из леммы 7. Оператор $Q = z(P_1 + e^{i\varphi}P_2)$ также коммутирует с T. Так как $P_1 + e^{i\varphi}P_2$ — унитарный оператор, то Q — антиунитарный. Используя (17) докажем, что Q — зеркальный оператор:

$$Q = z(P_1 + e^{i\varphi}P_2) = (P_2 + e^{-i\varphi}P_1) z,$$

поэтому

$$Q^2 = (P_2 + e^{-i\varphi}P_1) z^2 (P_1 + e^{i\varphi}P_2) = e^{-i\varphi}P_1 + e^{i\varphi}P_2,$$

и если $\varphi \neq k\pi$, то Q — зеркальный оператор, что полностью доказывает теорему 2.

§ 3. МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНТИУНИТАРНЫХ И ВЕЩЕСТВЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ограниченный антилинейный оператор A допускает матричное представление [1]: если $\{e_n\}$ ортонормированный базис, то оператор A переводит вектор $f = \sum_n x_n e_n$ в вектор

$$Af = \sum_k \left(\sum_n a_{kn} \overline{x_n} \right) e_k,$$

где $a_{kn} = (Ae_n e_k)$. В этом случае говорят, что матрица $M(A) = (a_{kn})$ задает оператор A в базисе $\{e_n\}$. Нетрудно проверить [1], что если A и B — антилинейные операторы, а C — линейный оператор, то

$$M(AB) = M(A)\overline{M(B)}, \tag{18}$$

$$M(AC) = M(A)\overline{M(C)},\ M(CA) = M(C)M(A). \tag{19}$$

Для каждого ограниченного антилинейного оператора A можно определить сопряженный оператор $A^{\times}$ условием

$$(Af, g) = \overline{(f, A^{\times}g)} = (Ag, f). \tag{20}$$

Легко видеть, что A^x — также ограниченный антилинейный оператор. Антиунитарный оператор можно определить, как антилинейный оператор K^x, удовлетворяющий условию $K^xK = KK^x = E$. Отсюда, используя (18) и замечая, что матрица оператора A^x образуется из матрицы A транспонированием, получим: *для того, чтобы антилинейный оператор был антиунитарным, необходимо и достаточно, чтобы он задавался унитарной матрицей в любом ортонормированном базисе.*

Так как $z^{-1} = z$, а $S^{-1} = -S$, то из условия (1) и (20) получим: *инволюция есть антиунитарный оператор K, удовлетворяющий условию $K^x = K$, а антиинволюция — условию $K^x = -K$.* Отсюда следствие: *для того, чтобы антилинейный оператор был инволюцией (антиинволюцией), необходимо и достаточно, чтобы он задавался унитарной симметричной (кососимметричной) матрицей в любом ортонормированном базисе.* Отсюда получим достаточность следующего утверждения:

Лемма 8. *Для того, чтобы антилинейный оператор был инволюцией), (антиинволюцией) необходимо и достаточно, чтобы существовал ортонормированный базис, в котором он задается соответственно матрицей*

$$M_1 = \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Докажем теперь необходимость этого утверждения. Пусть z и S — произвольные инволюция и антиинволюция. Согласно лемме 7 существует пара подпространств H_1, H_2 $(H_1 \oplus H_2 = H)$, которые z и S переводят друг в друга. Выберем в H_1 произвольный ортонормированный базис $\{e_n\}$, а в H_2 зададим два базиса $e'_n = ze_n$, $e''_n = Se_n$. Тогда z задается в базисе $\{e_n, e'_n\}$ матрицей M_1, а S — в базисе $\{e_n, e''_n\}$ матрицей M_2.

Как известно, для того, чтобы ограниченный линейный оператор был z-вещественным, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой ортонормированный базис, в котором он задавался бы вещественной матрицей (базис при этом будет z-вещественным). Кроме того, z-, S- и Q-вещественность оператора характеризуется еще некоторой симметричной формой матричного представления.

Теорема 3. *Для того, чтобы линейный ограниченный оператор T был z-, S- или Q-вещественным, необходимо и достаточно, чтобы существовал ортонормированный базис, в котором он задавался бы соответственно матрицей*

$$M_3 = \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}, \qquad M_4 = \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}, \qquad M_5 = \begin{pmatrix} A & O \\ O & \overline{A} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть T — z-вещественный оператор. Выберем базис, в котором z задается матрицей M_1. В этом базисе T задается клеточной матрицей $M(T) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Так как $zT = Tz$, то в силу (19) $M(z)\overline{M(T)} = M(T)M(z)$. Отсюда, учитывая (21), получим $C = \overline{B}$, $D = \overline{A}$. Наоборот, если оператор задается матрицей M_3 в некотором базисе, то, задавая в этом же базисе инволюцию j матрицей M_1, получим $M(z)\overline{M(T)} = M(T)M(z)$, т. е. $M(zT) = M(Tz)$. Так же просто получается и S вещественность оператора.

Пусть теперь T — Q-вещественный оператор. По теореме 2 он коммутирует с некоторой инволюцией z и некоторой антиинволюцией S, а значит, и с $U = zS$. Если базис выбрать так, как в доказательстве леммы 8, то соответствующие подпространства H_1 и H_2 приводят U, а значит, и T, поэтому в матрице M_3 или M_4 $B = 0$. Наоборот, если оператор T в некотором базисе задается матрицей M_5, то по доказанному он будет z-вещественным и S-вещественным, а значит, по теореме 2 и Q-вещественными.

§ 4. K-САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В работах И. М. Глазмана [13] и Н. А. Жихаря по дифференциальным операторам изучаются z-самосопряженные операторы, т. е. такие линейные операторы T, что $zT = T^*z$. *Будем называть оператор T K-самосопряженным, если существует такой антиунитарный оператор K, что $KT = T^*K$.* В этом случае T коммутирует с унитарным оператором K^2, откуда легко получить, что всякий K-самосопряженный оператор распадается в ортогональную сумму z-, S- и Q-самосопряженных операторов. Если T — Q-самосопряженный оператор, то так же, как и в теореме 2, можно построить антиинволюцию $S = QV$ и инволюцию $z = Q(V_1 - V_2)$, где V, V_1, V_2 — коммутирующие с T операторы. Но тогда $ST = KVT = KTV = T^*KV = T^*S$, $zT = T^*z$. Так же просто повторяется доказательство обратного утверждения. Поэтому справедлива.

Теорема 4. *Для того, чтобы оператор T был Q-самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы он был и z- и S-самосопряженным.*

Перейдем теперь к матричной характеристике K-самосопряженных операторов. Если $zT = T^*z$, то в силу (19) $M(z)\overline{M(T)} = M(T^*)M(z)$, и если выбрать z-вещественный базис, так что $M(z) = \mathrm{I}$, то получим $M(T^*) = \overline{M(T)}$, т. е.: *для того, чтобы ограниченный линейный оператор T был j-самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой ортонормированный базис, в котором T задается симметричной матрицей* (совпадающей с транспонированной). Если же выбирать базис таким, как в теореме 3, и применить аналогичные рассуждения, то получим утверждение:

Теорема 5. *Для того, чтобы оператор T был j-, S- или Q-вещественным, необходимо и достаточно, чтобы существовал ортонормированный базис, в котором он задается соответственно матрицей*

$$M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & A_1' \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & A_2' \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} A_3 & O \\ O & A_3' \end{pmatrix},$$

где A' означает транспонированную матрицу, B_1 и C_1 — симметричные матрицы ($B_1' = B_1$, $C_1' = C_1$), а B_2 и C_2 — косометричные ($B_2' = -B_2$, $C_2' = -C_2$).

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Вигнер. Теория групп. ИЛ. М., 1961.
2. P. Wigner, Normal form of antiunitary operators, Jornal of Mat. Phys. V I, № 5, 1960.
3. В. Хайне. Теория групп в квантовой механике. ИЛ, М., 1963.
4. М. И. Петрашень, Е. Д. Трифонов. Применение теории групп в квантовой механике. «Наука», М., 1967.
5. А. И. Плеснер. Спектральная теория линейных операторов. «Наука», М., 1965.
6. M. H. Stone. Linear tranformations in Hilbert space, New Jork, 1932.
7. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман. Теория линейных операторов. «Наука», М., 1966.
8. И. Е. Луценко. Инволюции ограниченных операторов. Труды Одесского гидромет. ин-та, вып. XX, 1959.
9. В. И. Годич и И. Е. Луценко. О представлении унитарного оператора в виде произведения двух инволюций. УМН, т. XX, вып. 6, 1965.
10. М. С. Лившиц. Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве. Матем. сб. 19 (61)-: 2, (1946), 236—260.
11. Ф. Рисс и Б. С. Надь. Лекции по функциональному анализу. ИЛ, М., 1954.
12. И. Е. Луценко. Об инволюциях линейных операторов. НДВШ № 6, 1958, 99—103.
13. И. М. Глазман, ДАН, 117 № 2 (1957).

Поступила 21 мая 1968 г.