УДК 512.547

Э. М. ЖМУДЬ

О ЯДРАХ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Введение. Дополним и уточним некоторые из результатов статьи [3]. Напомним определение введенного в [3] понятия H-мультипликатора конечной группы G. Пусть Π — класс ассоциированных систем факторов комплексных проективных представлений группы G. (Иначе говоря, Π — элемент мультипликатора Шура $M(G)$ группы G). Нормальный делитель H группы G называется Π-*ядром* группы G, ли он является ядром комплексного проективного представления группы G, принадлежащего к системе факторов $\pi \in \Pi$. Множество $M_H(G) = \{\Pi \in M(G) \mid H — \Pi\text{-ядро}\}$ (являющееся, как можно показать, подгруппой группы $M(G)$) называется *H-мультипликатором* группы G. Одним из основных результатов настоящей работы является теорема 2.12, в силу которой $M_H(G) \cong M(G/H)/N$, где $N \cong H \cap G'/[H, G]$ (G' — коммутант группы G, $[H, G]$ — взаимный коммутант H и G). Доказательство теоремы 2.12 основывается на рассмотрении некоторой последовательности групп и гомоморфизмов. Пусть $\mathrm{Lin}(G)$ — группа комплексных линейных характеров группы G, $\mathrm{Lin_{inv}}(H)$ — группа G-инвариантных линейных характеров подгруппы H. Естественно определяются гомоморфизмы $\varphi: \mathrm{Lin}(G) \to \mathrm{Lin_{inv}}(H)$, $\tau: \mathrm{Lin_{inv}}(H) \to M(G/H)$, $\sigma: M(G/H) \to M_H(G)$. Теорема 2.12 является следствием теоремы 2.8, из которой вытекает, что последовательность $\mathrm{Lin}(G) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Lin_{inv}}(H) \xrightarrow{\tau} M(G/H) \xrightarrow{\sigma} M_H(G) \to 1$ точна.

Работа состоит из двух параграфов. В § 1 дается пополненное некоторыми новыми фактами изложение результатов статьи [3], относящихся к ядрам проективных представлений. В § 2 доказываются теоремы 2.8 и 2.12. На протяжении всей работы G — конечная группа, $\boldsymbol{C}$ — поле комплексных чисел, $\boldsymbol{C}^*$ — мультипликативная группа поля $\boldsymbol{C}$; под проективными представлениями группы G всегда понимаются представления над $\boldsymbol{C}$. Если X — группа, то $Y \leqslant X$ означает, что Y — подгруппа группы X; $Y \trianglelefteq X$ означает, что Y — нормальный делитель группы X.

§ 1. **Проективные представления и их ядра.** 1. Напомним определения некоторых понятий, относящихся к проективным представлениям конечных групп.

Определение 1.1. *Функция $\pi: G \times G \to \boldsymbol{C}^*$ называется 2-коциклом группы G над $\boldsymbol{C}^*$ (при тривиальном действии G на $\boldsymbol{C}^*$), если для любых $x, y, z \in G$*

$$\pi(x, y)\,\pi(xy, z) = \pi(y, z)\,\pi(x, yz). \tag{1.1}$$

Из (1.1) вытекает, что при любом $g \in G$

$$\pi(g, 1) = \pi(1, g) = \pi(1, 1). \tag{1.2}$$

Если $\pi(1, 1) = 1$, 2-коцикл π называется *нормализованным.*

Множество $Z^2(G) = Z^2(G, \boldsymbol{C}^*)$ всех 2-коциклов группы G над $\boldsymbol{C}$ является абелевой группой относительно поточечного умножения. Пусть $\boldsymbol{F}[G]$ — множество всех функций $\lambda: G \to \boldsymbol{C}^*$. Если $\lambda \in \boldsymbol{F}[G]$, то функция $\pi: G \times G \to C^*$, заданная равенством $\pi(s, t) = \dfrac{\lambda(s)\,\lambda(t)}{\lambda(st)} \times (s, \quad t \in G)$, является 2-коциклом. Такие 2-коциклы (*2-кограницы* группы G над $\boldsymbol{C}^*$) образуют подгруппу $B^2(G) = B^2(G, \boldsymbol{C})$ группы $Z^2(G)$. Смежные классы группы $Z^2(G)$ по $B^2(G)$ будем в дальнейшем называть просто классами 2-коциклов группы G; класс 2-коцикла π обозначим $[\pi]$. Если $\pi, \pi' \in Z^2(G)$ и $[\pi] = [\pi']$, 2-коциклы π и π' называются *ассоциированными* (Обозначение: $\pi \sim \pi'$). Коциклы π и π'

ассоциированы тогда и только тогда, когда $\pi'(s, t) = \frac{\lambda(s)\lambda(t)}{\lambda(st)}\pi(s, t)$ $(s, t \in G)$, где $\lambda \in F[G]$. Если $\alpha \in \boldsymbol{C}^*$ и $\lambda(g) = \alpha$ при всех $g \in G$, то $\pi' = \alpha\pi$, т. е. $\alpha\pi \sim \pi$. Полагая $\alpha = \pi^{-1}(1, 1)$, получим нормализованный коцикл $\pi^{-1}(1, 1)\pi$, ассоциированный с π. Это позволяет в дальнейшем иметь дело только с нормализованными 2-коциклами.

Определение 1.2. *Группа $H^2(G, \boldsymbol{C}^*) = Z^2(G)/B^2(G)$ классов 2-коциклов группы G (2-я группа когомологий группы G над $\boldsymbol{C}^*$) называется мультипликатором Шура группы G и обозначается $M(G)$. Эта группа, как можно показать, всегда конечна.*

Определение 1.3. *Отображение $P: G \to \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{C})$ (n — натуральное число) называется матричным проективным представлением группы G, если существует такая функция $\pi: G \times G \to \boldsymbol{C}^*$, что*

$$P(s)P(t) = \pi(s, t)P(st) \quad (s, t \in G). \tag{1.3}$$

Функция π называется системой факторов проективного представления P, $n = \deg P$ — степень P. Проективные представления с системой факторов π в дальнейшем называются π-представлениями. Множество всех проективных представлений группы G обозначим $\boldsymbol{P}(G)$, множество всех π-представлений — через $\boldsymbol{P}_\pi(G)$.

Из ассоциативности умножения в группе G следует, что системы факторов проективных представлений группы G являются 2-коциклами. Обратно, каждый 2-коцикл $\pi \in Z^2(G)$ является системой факторов проективных представлений группы G. Доказательство основывается на рассмотрении скрещенной групповой алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$ группы G над полем $\boldsymbol{C}$, отвечающей коциклу π. Алгебра $\boldsymbol{C}^\pi G$ имеет базис $\{u_g\}^*_{g \in G}$ с таблицей умножения

$$u_s u_t = \pi(s, t)u_{st} \quad (s, t \in G). \tag{1.4}$$

Каждый элемент алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$ однозначно записывается в виде суммы $\sum\limits_{g \in G} \xi(g)u_g$, где ξ — комплекснозначная функция на группе G. Из (1.1), (1.2) и (1.4) вытекает, что $\boldsymbol{C}^\pi G$ — ассоциативная алгебра с единицей $\pi^{-1}(1, 1)u_1$. Можно доказать (см. [2] и [3]), что эта алгебра полупроста и, следовательно, все её линейные представления вполне приводимы. Пусть $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{C}^\pi G)$ — множество всех линейных представлений алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$. Представлением $L \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{C}^\pi G)$ порождается π-представление P_L группы G: по определению $P_L(g) = L(u_g)$ $(g \in G)$. Таким образом, каждый коцикл $\pi \in Z^2(G)$ является системой факторов проективных представлений группы G. Каждое π-представление P группы G порождается некоторым линейным представлением L алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$: если $x = \sum \xi(g)u_g \in \boldsymbol{C}^\pi G$, то $L(x) = \sum \xi(g)P(g)$. Таким образом, возникает взаимно однозначное соответствие $L \leftrightarrow P$ между линейными представлениями алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$ и π-представлениями группы G.

---

* Группа G предполагается фиксированным образом упорядоченной.

Пусть $P \in \boldsymbol{P}_\pi(G)$, $\deg P = n$, $T \in \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{C})$. Полагая $P'(g) = T^{-1}P(g)\,T$ $(g \in G)$, получим π-представление P группы G линейно квивалентное π-представлению P (Обозначение: $P \overset{\mathrm{Lin}}{\sim} P'$). Пусть $\in \boldsymbol{F}[G]$. Определим отображение $\lambda P : G \to \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{C})$, полагая $P)(g) = \lambda(g)\,P(g)$ $(g \in G)$. Легко видеть, что $\lambda P \in \boldsymbol{P}_{\pi'}(G)$, где $\pi'(s, t) = \frac{\lambda(s)\,\lambda(t)}{\lambda(st)}\,\pi(s, t)$ $(s, t \in G)$ и, следовательно, $\pi \sim \pi'$. Проективные редставления P и P' группы G называются эквивалентными $(P \sim P')$, ли $P' \overset{\mathrm{Lin}}{\sim} P$, где $\lambda \in F[G]$. Если $P \in \boldsymbol{P}_\pi(G)$, $P' \in \boldsymbol{P}_{\pi'}(G)$ и $P \sim P'$, $\pi \sim \pi'$, т. е. $[\pi] = [\pi']$. Отправляясь от линейной эквивалентности представлений, обычным образом определяют для них понятия придимости, неприводимости, полной приводимости. Рассмотрение устаеленного выше соответствия между $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{C}^\pi G)$ и $\boldsymbol{P}_\pi(G)$ позволяет, частности, заключить, что 1) π-представления группы G вполне иводимы; 2) число классов линейно эквивалентных неприводимых редставлений группы G равно числу классов неприводимых линейх представлений алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$ и, следовательно, равно размерности тра $Z(\boldsymbol{C}^\pi G)$ алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$. С целью нахождения этой размерности тавим в соответствие коциклу $\pi \in Z^2(G)$ функцию $\omega_\pi : G \times G \to \boldsymbol{C}^*$, анную равенством

$$\omega_\pi(s, t) = \frac{\pi(s, t)}{\pi(t, s^t)} \quad (s, t \in G), \tag{1.5}$$

е $s^t = t^{-1}st$. Из (1.4) следует, что

$$u_t^{-1} u_s u_t = \omega_\pi(s, t)\, u_{s^t}. \tag{1.6}$$

лее, если $P \in \boldsymbol{P}_\pi(G)$, то

$$P(t)^{-1}\, P(s)\, P(t) = \omega_\pi(s, t)\, P(s^t t). \tag{1.7}$$

з (1.4), (1.6) вытекает следующее свойство функции ω_π:

$$\omega_\pi(s, t_1 t_2) = \omega_\pi(s, t_1)\, \omega_\pi(s^{t_1}, t_2) \quad (s, t_1, t_2 \in G). \tag{1.8}$$

Пусть $s \in G$ и $C_G(s)$ — централизатор элемента s в группе G. пределим функцию $\chi_s^{(\pi)} : C_G(s) \to \boldsymbol{C}^*$, полагая $\chi_s^{(\pi)}(t) = \omega_\pi(s, t)$ $\in C_G(s))$. Из (1.8) вытекает, что $\chi_s^{(\pi)} \in \mathrm{Lin}\,(C_G(s))$.

Определение 1.4. *Элемент $s \in G$ называется π-элементом, ли $\chi_s^{(\pi)}$ — главный характер подгруппы $C_G(s)$, т. е. $\omega_\pi(s, t) = 1$ и любом $t \in C_G(s)$.*

Обозначим через G_π множество всех π-элементов группы G. Легко казать, что вместе с каждым элементом $s \in G_\pi$ в G_π входят все элеинты, сопряженные с s. Классы сопряженных π-элементов называтся ***π-классами***. Число всех π-классов группы G обозначим r_π.

Определение 1.5. *Функцию $\xi : G \to \boldsymbol{C}$ назовем π-центральй, если*

$$\xi(s^t) = \omega_\pi(s, t)\, \xi(s) \quad (s, t \in G). \tag{1.9}$$

Лемма 1.1. *π-центральные функции исчезают на $G \setminus G_\pi$.*

Доказательство. Если $s \in G \setminus G_\pi$, то $\omega_\pi(s, t) \neq 1$ для некоторого $t \in C_G(s)$, откуда следует, ввиду (1.9), что $\xi(s) = 0$.

Лемма 1.2. *Элемент $x = \sum_{g \in G} \xi(g) u_g$ алгебры $\mathbf{C}^\pi G$ (ξ — комплекснозначная функция на G) содержится в $Z(\mathbf{C}^\pi G)$ тогда и только тогда, когда ξ — π-центральная функция.*

Доказательство. $x \in Z(\mathbf{C}^\pi G)$ тогда и только тогда, когда $u_t^{-1} x u_t = x$ для всех $t \in G$. Утверждение теперь легко получается с помощью (1.4).

Пусть $C_1, \ldots, C_{r_\pi}$ — π-классы группы G, $s_i \in C_i$ $(i = 1, \ldots, r_\pi)$. Положим $k_i^{(\pi)} = |C_G(s_i)|^{-1} \sum_{t \in G} u_t^{-1} u_{s_i} u_t$ $(i = 1, \ldots, r_\pi)$. При помощи лемм 1.1 и 1.2 нетрудно показать (см. [3]), что элементы $k_i^{(\pi)}$ образуют базис алгебры $Z(\mathbf{C}^\pi G)$. Отсюда следует, в частности, что $\dim Z(C^\pi G) = r_\pi$.

2. Определение 1.6. *Ядром представления $P \in \boldsymbol{P}(G)$ называется множество $\mathrm{KER}\, P = \{g \in G \mid P(g)$ — скалярная матрица$\}$. Ядра π-представлений группы G называются π-ядрами.*

Из (1.1), (1.7) следует, что $\mathrm{KER}\, P \trianglelefteq G$.

В дальнейшем $H \trianglelefteq G$, $\pi \in Z^2(G)$.

Определение 1.7. *Функцию $\lambda \in \boldsymbol{F}[G]$, удовлетворяющую условиям*

$$\lambda(s)\lambda(t) = \pi(s, t)\lambda(st) \quad (s, t \in H); \tag{1.10}$$

$$\lambda(s^t) = \omega_\pi^{-1}(s, t)\lambda(s) \quad (s \in H, t \in G), \tag{1.11}$$

назовем π-характером подгруппы H. Множество всех π-характеров подгруппы H обозначим $X_\pi(H)$.

Пусть $\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) = \{\psi \in \mathrm{Lin}(H) \mid \psi(s^t) = \psi(s)$ для всех $s \in H, t \in G\}$ — группа G-инвариантных линейных характеров подгруппы H.

Из (1.10), (1.11) вытекает.

Лемма 1.3. *Если $X_\pi(H) \neq \emptyset$ и $\lambda_0 \in X_\pi(H)$, то $X_\pi(H) = \lambda_0 \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$.*

Следствие 1.4. *Если $X_\pi(H) \neq \emptyset$, то $|X_\pi(H)| = |\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)| = |H/[H, G]|$.*

В предположении, что $X_\pi(H) \neq \emptyset$, поставим в соответствие π-характеру $\lambda \in X_\pi(H)$ элемент $j_H^{(\lambda)} \in \mathbf{C}^\pi G$, полагая

$$j_H^{(\lambda)} = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} \lambda^{-1}(g) u_g. \tag{1.12}$$

Лемма 1.5. *Если $X_\pi(H) \neq \emptyset$, то элементы $j_H^{(\lambda)}$ $(\lambda \in X_\pi(H))$ образуют ортогональную систему ненулевых идемпотентов алгебры $Z(\mathbf{C}^\pi G)$.*

Доказательство. Если $\lambda \in X_\pi(H)$, то, как видно из (1.12), $j_H^{(\lambda)} \neq 0$. Положим $\xi(g) = \lambda^{-1}(g)$, если $g \in H$ и $\xi(g) = 0$ при $g \in G \setminus H$. Из (1.11) следует, что ξ — π-центральная функция. В силу леммы 1.2 $j_H^{(\lambda)} = |H|^{-1} \sum_{g \in G} \xi(g) u_g \in Z(C^\pi G)$. Далее, при помощи (1.4), (1.10) легко доказывается, что

$$u_s j_H^{(\lambda)} = \lambda(s)\, j_H^{(\lambda)}. \tag{1.13}$$

Если λ, $\mu \in X_\pi(H)$, то по лемме 1.3 $\lambda^{-1}\mu = \psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$. Полагая $\delta_{\lambda,\mu} = 1$ при $\lambda = \mu$ и $\delta_{\lambda,\mu} = 0$ при $\lambda \neq \mu$, получаем $|H|^{-1} \sum_{s \in H} \psi(s) = \delta_{\lambda,\mu}$. В силу (1.13) имеем $j_H^{(\lambda)} \cdot j_H^{(\mu)} = |H|^{-1} \sum_{s \in H} \lambda^{-1}(s)\, u_s j_H^{(\mu)} = |H|^{-1} \times \sum_{s \in H} \lambda^{-1}(s)\, \mu(s)\, j_H^{(\mu)} = |H|^{-1} \sum_{s \in H} \psi(s)\, j_H^{(\mu)} = \delta_{\lambda,\mu} j_H^{(\mu)}$. *Утверждение* доказано.

Определение 1.8. *Пусть e — ненулевой идемпотент алгебры $Z(C^\pi G)$. Множество $K_e = \{g \in G \mid u_g e \in C^* e\}$ назовем ядром идемпотента e.*

Из (1.6) вытекает, что $K_e \trianglelefteq G$.

Лемма 1.6. *K_e — π-ядро группы G.*

Доказательство. Пусть L — линейное представление алгебры, порожденное левым (на самом деле он двусторонний) идеалом $C^\pi Ge$. Если $P \in \boldsymbol{P}_\pi(G)$ и $L \leftrightarrow P$, то, очевидно, $K_e = \mathrm{KER}\, P$, откуда следует, что K_e — π-ядро.

Из определения 1.7 вытекает существование такой функции $\lambda_e : K_e \to C^*$, что $u_g e = \lambda_e(g)\, e$ для всех $g \in K_e$.

Лемма 1.7. $\lambda_e \in X_\pi(K_e)$.

Доказательство. С помощью (1.4), (1.6) легко проверяется, что функция $\lambda = \lambda_e$ удовлетворяет условиям (1.10), (1.11) (при $H = K_e$).

Теорема 1.8. *Подгруппа H является π-ядром тогда и только тогда, когда $X_\pi(H) \neq \emptyset$.*

Доказательство. **1°.** Допустим, что H — π-ядро, $P \in \boldsymbol{P}_\pi(G)$, $\mathrm{KER}\, P = H$. Тогда $P(g) = \lambda(g) E_n\ (g \in H)$, где $\lambda \in \boldsymbol{F}[G]$, $n = \deg P$, E_n — единичная матрица n-го порядка. Если s, $t \in \mathrm{H}$, то $P(s) P(t) = \lambda(s) \lambda(t) E_n$, $P(st) = \lambda(st) E_n$, откуда в силу (1.3) вытекает равенство (1.10). Пусть $s \in H$, $t \in G$. Так как $P(s^t) = \omega_\pi(s, t)\, P(t)^{-1} P(s) \times P(t)$ и $P(s) = \lambda(s) E_n$, $P(s^t) = \lambda(s^t) E_n$, выполняется (1.11). Поэтому $\lambda \in X_\pi(H)$, т. е. $X_\pi(H) \neq \emptyset$.

2°. Допустим, что $X_\pi(H) \neq \emptyset$ и $\lambda \in X_\pi(H)$. Тогда по лемме 1.5 $e = j_H^{(\lambda)}$ — ненулевой идемпотент алгебры $Z(C^\pi G)$. Если $s \in H$, то в силу (1.13) $u_s e = \lambda(s)\, e$, откуда следует, что $s \in K_e$. Таким образом, $H \leqslant K_e$. Пусть теперь $s \in K_e$. Тогда $u_s e = \lambda_e(s)\, e$, где по лемме 1.7 $\lambda_e \in X_\pi(K_e)$. Поэтому $\sum_{g \in H} \lambda^{-1}(g)\, u_s u_g = u_s e = \lambda_e(s)\, e = \lambda_e(s) \sum_{g \in H} \lambda^{-1}(g)\, u_g$. В силу (1.1) отсюда следует: $\sum_{g \in H} \lambda^{-1}(g)\, \pi(s, g)\, u_{sg} = \lambda_e(s) \sum_{g \in H} \lambda^{-1}(g)\, u_g$.

Поэтому $sg \in H$ при любом $g \in H$; в частности, $s \in H$. Таким образом $K_e \leqslant H$. Итак, $H = K_e$, откуда следует по лемме 1.6, что H—π-ядро.

Следствие 1.9. *Если H — π-ядро, то $H \subseteq G_\pi$.*

Доказательство. По теореме 1.8 $X_\pi(H) \neq \emptyset$. Пусть $\lambda \in X_\pi(H)$. Если $s \in H$, $t \in C_G(s)$, то в силу (1.11) $\omega_\pi(s, t) = 1$. Поэтому $s \in G_\pi$. Таким образом, $H \subseteq G_\pi$.

Следствие 1.10. *Если H — π-ядро, $K \trianglelefteq G$, $K \leqslant H$, то K — π-ядро.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in X_\pi(H)$. Тогда, как видно из (1.10) и (1.11), $\lambda|_k \in X_\pi(K)$. Таким образом, $X_\pi(K) \neq \emptyset$ и, следовательно, по теореме 1.8 K — π-ядро.

Следствие 1.10 показывает, что множество $L_\pi(G)$ всех π-ядер группы G является полурешеткой. Если H_1, $H_2 \in L_\pi(G)$, то, вообще говоря, $H_1 \cdot H_2 \notin L_\pi(G)$. Представляет интерес найти условия, при которых из H_1, $H_2 \in L_\pi(G)$ следует $H_1 \cdot H_2 \in L_\pi(G)$. Пусть $H \in L_\pi(G)$, $\lambda \in X_\pi(H)$. Найдем, прежде всего, представление идемпотента $j_H^{(\lambda)}$ в виде суммы минимальных идемпотентов алгебры $Z(C^\pi G)$. Пусть Δ_π — множество всех минимальных идемпотентов алгебры $Z(C^\pi G)$, $\Delta_{\pi,\lambda}(H) = \{e \in \Delta_\pi \mid K_e \geqslant H,\ \lambda_e|_H = \lambda\}$.

Лемма 1.11. *Если $H \in L_\pi(G)$ и $\lambda \in X_\pi(H)$, то $j_H^{(\lambda)} = \sum\limits_{e \in \Delta_{\pi,\lambda}(H)} e$.*

Доказательство. Если $e \in \Delta_\pi$, $ej_H^{(\lambda)} = e$, $g \in H$, то $u_g e = u_g(ej_H^{(\lambda)}) = e(u_g j_H^{(\lambda)}) = e(\lambda(g) j_H^{(\lambda)}) = \lambda(g) e$, откуда следует, что $g \in K_e$ и $\lambda_e(g) = \lambda(g)$. Таким образом, $K_e \geqslant H$ и $\lambda_e|_H = \lambda$. Поэтому $e \in \Delta_{\pi,\lambda}(H)$. Пусть, обратно, $e \in \Delta_{\pi,\lambda}(H)$. Так как $H \leqslant K_e$ и $\lambda = \lambda_e|_H$, то $u_g e = \lambda_e(g) e = \lambda(g) e$ для любого $g \in H$. Поэтому $ej_H^{(\lambda)} = j_H^{(\lambda)} e = |H|^{-1} \sum\limits_{g \in H} \lambda^{-1}(g) u_g e = |H|^{-1} \sum\limits_{g \in H} \lambda^{-1}(g) \lambda(g) e = e$. Итак, $\Delta_{\pi,\lambda}(H) = \{e \in \Delta_\pi \mid ej_H^{(\lambda)} = e\}$, откуда и вытекает утверждение леммы.

Положим теперь

$$j_H = \begin{cases} 0, \text{ если } H \notin L_\pi(G); \\ \sum\limits_{\lambda \in X_\pi(H)} j_H^{(\lambda)}, \text{ если } H \in L_\pi(G). \end{cases} \tag{1.14}$$

Из леммы 1.5 следует, что j_H — идемпотент алгебры $Z(C^\pi G)$. Положим $\Delta_\pi(H) = \{e \in \Delta_\pi \mid K_e \geqslant H\}$.

Лемма 1.12. *Пусть $H \trianglelefteq G$. Тогда $j_H = \sum\limits_{e \in \Delta_\pi(H)} e$.*

Доказательство. Из леммы 1.6. и следствия 1.10 вытекает, что $\Delta_\pi(H) = \emptyset$, если $H \notin L_\pi(G)$. Если же $H \in L_\pi(G)$, то имеет место разбиение $\Delta_\pi(H) = \bigcup\limits_{\lambda \in X_\pi(H)} \Delta_{\pi,\lambda}(H)$. Утверждение леммы вытекает из этих двух замечаний, леммы 1.11 и (1.14).

Лемма 1.13. *Пусть $H_i \trianglelefteq G$ $(i = 1, 2)$. Тогда $j_{H_1} \cdot j_{H_2} = j_{H_1 H_2}$.*

Доказательство. Так как $\Delta_\pi(H_1H_2) = \Delta_\pi(H_1) \bigcap \Delta_\pi(H_2)$ и идемпотенты $e \in \Delta_\pi$ взаимно ортогональны, по лемме 1.12 $j_{H_1} \cdot j_{H_2} =$

$$\sum_{e_1 \in \Delta_\pi(H_1)} e_1 \cdot \sum_{e_2 \in \Delta_\pi(H_2)} e_2 = \sum_{e \in \Delta_\pi(H_1) \bigcap \Delta_\pi(H_2)} e = \sum_{e \in \Delta_\pi(H_1H_2)} e = j_{H_1H_2}.$$

Следствие 1.14. *Если H_1 и H_2 — π-ядра, то $H_1 \cdot H_2$ является π-ядром тогда и только тогда, когда $j_{H_1} \cdot j_{H_2} \neq 0$.*

Доказательство. В силу леммы 1.12 $H = H_1H_2 \in \boldsymbol{L}_\pi(G)$ тогда и только тогда, когда $j_H \neq 0$. Остается использовать лемму 1.13.

Лемма 1.15. *Пусть H — π-ядро, $\lambda \in X_\pi(H)$. Тогда ограничение функции λ на $[H, G]$ не зависит от выбора λ.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 1.3.

Ограничение π-характера $\lambda \in X_\pi(H)$ на $[H, G]$ обозначим $\sigma_{(H)}$. Очевидно $\sigma_{(H)} \in X_\pi([H, G])$.

Лемма 1.16. *Пусть $e = \sum \xi(g) u_g$ — идемпотент алгебры $C^\pi G$. Тогда условия $e = 0$ и $\xi(1) = 0$ равносильны.*

Доказательство. Пусть R — матричное регулярное представление алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$, отнесенное к ее стандартному базису $\{u_g\}$. Условимся индексировать строки и столбцы матриц представления R элементами группы G. Тогда будем иметь $R(u_g) = (\alpha_{s,t}(g))$, где $\alpha_{s,t}(g) = \delta_{s,gt}\pi(g, t)$. Вычисление следа дает: $\operatorname{tr} R(u_g) = \sum_{s \in G} \alpha_{ss}(g) =$ $\sum_{s \in G} \delta_{s,gs}\pi(g, s) = |G|\delta_{1,g}\pi(1.1)$. Поэтому $\operatorname{tr} R(e) = \sum \xi(g) \operatorname{tr} R(u_g) =$ $|G|\xi(1)\pi(1, 1)$. Равносильность условий $e = 0$ и $\xi(1) = 0$ вытекает теперь из идемпотентности матрицы $R(e)$ и точности представления R.

Лемма 1.17. *Пусть $H \in \boldsymbol{L}_\pi(G)$ и $\lambda \in X_\pi(H)$. Тогда*

$$j_H = \frac{1}{|[H, G]|} \sum_{g \in [H, G]} \lambda^{-1}(g) u_g = \frac{1}{|[H, G]|} \sum_{g \in [H, G]} \sigma_{(H)}^{-1}(g) u_g. \qquad (1.15)$$

Доказательство. Ввиду (1.14), (1.12) и леммы 1.3 $j_H =$

$$= \sum_{\mu \in X_\pi(H)} j_H^{(\mu)} = |H|^{-1} \sum_{\mu \in X_\pi(H)} \sum_{g \in H} \mu^{-1}(g) u_g = |H|^{-1} \sum_{g \in H} \Big(\sum_{\mu \in X_\pi(H)} \mu^{-1}(g) \Big) u_g =$$

$$= |H|^{-1} \sum_{g \in H} \Big(\sum_{\psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)} (\lambda\psi)^{-1}(g) \Big) u_g = \sum_{g \in H} \lambda^{-1}(g) \Big(\sum_{\psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)} \psi^{-1}(g) \Big) u_g.$$

Так как $\sum_{\psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)} \psi^{-1}(g) = |\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)| = |H/[H,G]|$, если $g \in [H, G]$, и $\sum_{\psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)} \psi^{-1}(g) = 0$, если $g \notin [H, G]$, то $j_H = |H|^{-1} \sum_{g \in [H, G]} \lambda^{-1}(g) |H/[H, G]| = |[H, G]|^{-1} \sum_{g \in [H, G)} \lambda^{-1}(g) u_g$. Тем самым доказано первое из равенств (1.15). Второе равенство вытекает из первого и определения функции $\sigma_{(H)}$.

Теорема 1.18. *Пусть $H_i \in \boldsymbol{L}_\pi(G)$, $\lambda_i \in X_\pi(H_i)$ $(i = 1, 2)$. Положим $D = [H_1, G] \bigcap [H_2, G]$. Тогда следующие условия равносильны:* а) $H_1H_2 \in \boldsymbol{L}_\pi(G)$; б) $\lambda_1|_D = \lambda_2|_D$.

Доказательство. В силу следствия 1.14 а) равносильно условию $j_{H_1} \cdot j_{H_2} \neq 0$. Пользуясь леммой 1.17, получаем $j_{H_1} \cdot j_{H_2} = |[H_1, G]|^{-1} \cdot |[H_2, G]|^{-1} \sum_{s \in [H_1, G], t \in [H_2, G]} \lambda_1^{-1}(s) \lambda_2^{-1}(t) u_s u_t = |[H_1 H_2, G]|^{-1} \sum_{s \in [H_1, G], t \in [H_2, G]} \lambda_1^{-1}(s) \lambda_2^{-1}(t) \pi(s, t) u_{st}$. Пусть $j_{H_1} j_{H_2} = \sum_{g \in G} \xi(g) u_g$ — разложение $j_{H_1} \cdot j_{H_2}$ по базису $\{u_g\}$ алгебры $C^\pi G$. Тогда $\xi(1) = |[H_1 H_2, G]|^{-1} \sum_{s \in [H_1, G], t \in [H_2, G], st=1} \lambda_1^{-1}(s) \lambda_2^{-1}(t) \pi(s, t) = |[H_1 H_2, G]|^{-1} \sum_{s \in D} \lambda_1^{-1}(s) \lambda_2^{-1}(s^{-1}) \pi(s, s^{-1})$. Пусть $\lambda_i|_D = \mu_i$ $(i=1, 2)$. Так как $\mu_i \in X_\pi(D)$ $(i = 1, 2)$, то $\mu_2 = \mu_1 \psi$, где $\psi \in \mathrm{Lin_{inv}}(D)$. Поэтому $\xi(1) = |[H_1 H_2, G]|^{-1} \sum_{s \in D} \mu_1^{-1}(s) \mu_2^{-1}(s^{-1}) \pi(s, s^{-1}) = |[H_1 H_2, G]|^{-1} \times \sum_{s \in D} (\mu_1(s) \mu_1(s^{-1}))^{-1} \psi(s) \pi(s, s^{-1})$. Так как $\mu_1(s) \mu_1(s^{-1}) = \pi(s, s^{-1}) \times \mu_1(s \cdot s^{-1}) = \pi(s, s^{-1}) \mu_1(1)$, то $\xi(1) = |[H_1 H_2, G]|^{-1} \mu_1^{-1}(1) \sum_{s \in D} \psi(s)$. Следовательно, $\xi(1) = |[H_1 H_2, G]|^{-1} \mu_1^{-1}(1) |D|$, если $\psi = 1_D$, и $\xi(1) = 0$, если $\psi \neq 1_D$. Иначе говоря, $\xi(1) = \delta_{\mu_1, \mu_2} |[H_1 H_2, G]|^{-1} \mu_1^{-1}(1) \times |D|$. В частности, $\xi(1) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mu_1 = \mu_2$. Ввиду леммы 1.16 отсюда следует, что $j_{H_1} \cdot j_{H_2} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mu_1 = \mu_2$. Таким образом, условия а) и б) равносильны.

Следствие 1.19. *Если H_i $(i = 1, 2)$ — π-ядра и $[H_1, G] \cap [H_2, G] = 1$, то $H_1 H_2$ — π-ядро. В частности, если $H_1 \cap H_2 = 1$, то $H_1 \times H_2$ — π-ядро.*

Доказательство. В рассматриваемом случае $D = 1$. Поэтому $\lambda_1|_D = \lambda_2|_D = \pi(1, 1)$.

Определение 1.9. *Минимальными π-ядрами группы G будем называть те ее минимальные нормальные делители, которые являются π-ядрами. Произведение $\mathrm{Sc}_\pi(G)$ всех минимальных π-ядер группы G назовем π-цоколем группы G. Если группа G не содержит π-ядер, отличных от 1, полагаем $\mathrm{Sc}_\pi(G) = 1$.*

Так как $\mathrm{Sc}_\pi(G)$ является прямым произведением некоторого числа минимальных π-ядер, либо $\mathrm{Sc}_\pi(G) = 1$, в силу следствия 1.19 $\mathrm{Sc}_\pi(G)$ — π-ядро. Очевидно, $\mathrm{Sc}_\pi(G)$ — наибольшее π-ядро группы G, содержащееся в ее цоколе.

Из следствия 1.19 вытекает, что для нахождения всех π-ядер группы G достаточно знать её *максимальные* π-*ядра*, т. е. максимальные элементы частично упорядоченного множества $L_\pi(G)$.

Теорема 1.20. *Пусть H_i $(i = 1, \ldots, m)$ — максимальные π-ядра группы G. Тогда* а) *подгруппы H_i являются ядрами неприводимых π-представлений группы G;* б) *выполняется неравенство $\sum 1/|[H_i, G]| \leqslant 1$; равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\{H_1, \ldots, H_m\}$ — полная система ядер неприводимых π-представлений группы G;* в) $\bigcap H_i \geqslant \mathrm{Sc}_\pi(G)$; *в частности, если $m > 1$, то $\bigcap H_i > 1$.*

Доказательство. а. Пусть $H_i = \mathrm{KER}\, P_i$, где $P_i \in \boldsymbol{P}_\pi(G)$. Так как P_i вполне приводимо, $P_i \overset{\mathrm{Lin}}{\sim} P_{i1} + \cdots + P_{il_i}$, где P_{ij} — неприводимые π-представления. Так как $H_i = \mathrm{KER}(P_{i1} + \cdots + P_{il_i}) \leqslant \leqslant \bigcap_j \mathrm{KER}\, P_{ij}$, то $H_i \leqslant \mathrm{KER}\, P_{ij}$ $(j = 1, \ldots, l_i)$, откуда следует, так как $\mathrm{KER}\, P_{ij}$ — π-ядро, что $H_i = \mathrm{KER}\, P_{ij}$. Таким образом, H_i — ядро неприводимого π-представления P_{ij} $(j = 1, \ldots, l_i)$.

б. Можно, очевидно, считать, что $m > 1$. Так как $H_i H_j$ не является π-ядром при $i \neq j$, в силу следствия 1.14 идемпотенты j_{H_i} ($i = 1, \ldots, m$) взаимно ортогональны. Поэтому $\sum j_{H_i} = v$ — идемпотент алгебры $Z(\boldsymbol{C}^\pi G)$. Если R — регулярное представление алгебры $C^\pi G$, то $\mathrm{tr}\, R(v) =$ рангу матрицы $R(v)$. Поэтому $\mathrm{tr}\, R(v) \leqslant |G|$. С другой стороны, $\mathrm{tr}\, R(v) = \sum_i \mathrm{tr}\, R(j_{H_i})$. Ввиду леммы 1.17 имеем

$$\mathrm{tr}\, R(j_{H_i}) = |[H_i, G]|^{-1} \sum_{s \in [H_i, G]} \sigma^{-1}_{(H_i)}(s)\, \mathrm{tr}\, R(u_s).$$

Так как $\sigma_{(H_i)}(1) = \pi(1, 1)$ и $\mathrm{tr}\, R(u_s) = \delta_{1,s} |G| \pi(1, 1)$, то $\mathrm{tr}\, R(j_{H_i}) = = |[H_i, G]|^{-1} \sigma_{(H_i)}(1)\, \mathrm{tr}\, R(u_1) = |G/[H_i, G]|$. Следовательно, $\sum |G/[H_i, G]| \leqslant |G|$, откуда и вытекает требуемое неравенство. Допустим, что $\sum 1/|[H_i, G]| = 1$. Тогда ранг $R(v) = \mathrm{tr}\, R(v) = |G|$, откуда $R(v) = = E_{|G|}$ и, следовательно, $v = 1$. Далее, так как H_i — максимальное π-ядро, то $\Delta_\pi(H_i) = \{e \in \Delta_\pi \mid K_e = H_i\}$, откуда следует, что $\Delta_\pi(H_i) \cap \cap \Delta_\pi(H_j) = \varnothing$ при $i \neq j$. Так как по лемме 1.12 $j_{H_i} = \sum_{e \in \Delta_\pi(H_i)} e$ и $\sum j_{H_i} = 1$, то $\bigcup \Delta_\pi(H_i) = \Delta_\pi$ — множество всех минимальных идемпотентов алгебры $Z(\boldsymbol{C}^\pi G)$. Пусть P — любое неприводимое π-представление группы G и L — порождающее его линейное представление алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$. Тогда существует $e \in \Delta_\pi$ такой, что L порождается минимальным левым идеалом входящим в простую компоненту $A_e = = \boldsymbol{C}^\pi Ge$ алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$. Так как $\Delta_\pi = \bigcup \Delta_\pi(H_i)$, найдется такой номер i, что $e \in \Delta_\pi(H_i)$. Тогда $K_e = H_i$. Пусть L_e — представление алгебры $C^\pi G$, порожденное идеалом A_e, и пусть P_e — соответствующее π-представление группы G. Тогда, как легко видеть, $\mathrm{KER}\, P_e = K_e$. Так как L — неприводимая компонента представления L_e, то P — неприводимая компонента π-представления P_e. Поэтому $\mathrm{KER}\, P \geqslant \mathrm{KER}\, P_e = = K_e = H_i$, откуда $\mathrm{KER}\, P = H_i$. Таким образом, система $\{H_1, \ldots, H_m\}$ содержит ядра всех неприводимых π-представлений группы G. Обратно, если последнее имеет место, то $\Delta_\pi = \bigcup_i \Delta_\pi(H_i)$ и, следовательно, $\sum j_{H_i} = 1$, откуда вытекает равенство $\sum 1/|[H_i, G]| = 1$.

в. Пусть F — минимальное π-ядро группы G. Если $F \nleqslant \bigcap H_i$, то для некоторого номера i будет $F \nleqslant H_i$. Но тогда в силу следствия 1.9 $H_i F = H_i \times F$ — π-ядро, что противоречит максимальности π-ядра H_i. Таким образом, $\bigcap H_i$ содержит все минимальные π-ядра группы G, откуда следует, что $\bigcap H_i \geqslant \mathrm{Sc}_\pi(G)$. Если $m > 1$, то $H_i > 1$ для всех i. Поэтому $\mathrm{Sc}_\pi(G) > 1$ и, следовательно, $\bigcap H_i > 1$.

Следствие 1.21. *Если G абелева и $\pi \in Z^2(G)$, то группа G имеет единственное максимальное π-ядро (которое, таким образом, является наибольшим π-ядром группы G).*

Доказательство. В обозначениях теоремы 1.20 $\sum 1/|[H_i, G]| \leqslant 1$. Так как $|[H_i, G]| = 1$ $(i = 1, \ldots, m)$, то $m = 1$.

Примечание. Тот же результат можно доказать при помощи леммы Шура (см., например, [3]).

§ 2. *H*-**мультипликатор.** В этом параграфе H — фиксированный нормальный делитель группы G.

Лемма 2.1. *Пусть π, $\pi' \in Z^2(G)$, $\pi \sim \pi'$. Тогда $\boldsymbol{L}_\pi(G) = \boldsymbol{L}_{\pi'}(G)$.*

Доказательство. Допустим, что $H \in \boldsymbol{L}_\pi(G)$. Тогда $H = \mathrm{KER}\, P$, где $P \in \boldsymbol{P}_\pi(G)$. Так как $\pi \sim \pi'$, то $P \sim P'$, где $P' \in \boldsymbol{L}_{\pi'}(G)$. Так как $\mathrm{KER}\, P = \mathrm{KER}\, P'$, то $H \in \boldsymbol{L}_{\pi'}(G)$. Таким образом, $\boldsymbol{L}_\pi(G) \subseteq \boldsymbol{L}_{\pi'}(G)$. Аналогично $\boldsymbol{L}_{\pi'}(G) \subseteq \boldsymbol{L}_\pi(G)$. Поэтому $\boldsymbol{L}_\pi(G) = \boldsymbol{L}_{\pi'}(G)$.

Из леммы 2.1 вытекает корректность следующего определения.

Определение 2.1. *Пусть $\Pi \in M(G)$. Подгруппа H называется Π-ядром, если H — π-ядро, где $\pi \in \Pi$.*

Лемма 2.2. *Если $\Pi \in M(G)$ и H — Π-ядро, то H — Π^{-1}-ядро.*

Доказательство. Пусть $\pi \in \Pi$ и $H = \mathrm{KER}\, P$, где $P \in \boldsymbol{P}_\pi(G)$. Положим $P_1(g) = \{P(g)'\}^{-1}$ (штрих обозначает транспонирование). Тогда $P_1 \in \boldsymbol{P}_{\pi^{-1}}(G)$. Так как $\mathrm{KER}\, P_1 = \mathrm{KER}\, P = H$, то H — Π^{-1}-ядро.

Лемма 2.3. *Если Π_1, $\Pi_2 \in M(G)$ и H — Π_i-ядро $(i = 1, 2)$, то H — $\Pi_1\Pi_2$-ядро.*

Доказательство. Пусть $\pi_i \in \Pi_i$ $(i = 1, 2)$. Так как H — π_i-ядро, по теореме 1.8 $X_{\pi_i}(H_i) \neq \emptyset$. Пусть $\lambda_i \in X_{\pi_i}(H)$ $(i = 1, 2)$. Тривиальная проверка показывает, что $\lambda = \lambda_1\lambda_2 \in X_{\pi_1\pi_2}(H)$. Поэтому $X_{\pi_1\pi_2}(H) \neq \emptyset$, откуда следует по теореме 1.8, что H — $\pi_1\pi_2$-ядро, а потому и $\Pi_1\Pi_2$-ядро.

Следствие 2.4. *Множество $M_H(G) = \{\Pi \in M(G) \mid H$ — Π-ядро$\}$ является подгруппой группы $M(G)$.*

Определение 2.2. *Группу $M_H(G)$ назовем H-мультипликатором группы G.*

Без труда доказываются следующие свойства отображения $H \to M_H(G)$ решетки нормальных делителей группы G в решетку подгрупп группы $M(G)$.

Теорема 2.5. *Пусть H_1, $H_2 \trianglelefteq G$. Тогда а) $M_{H_1 \cap H_2}(G) \geqslant M_{H_1}(G) \times M_{H_2}(G)$, $M_{H_1H_2}(G) \leqslant M_{H_1}(G) \cap M_{H_2}(G)$; в частности, если $H_1 \cap H_2 = 1$, то $M_{H_1H_2}(G) = M_{H_1}(G) \cap M_{H_2}(G)$; если $H_1 \leqslant H_2$, то $M_{H_1}(G) \geqslant M_{H_2}(G)$; б) $M_G(G) = 1$, $M_{\{1\}}(G) = M(G)$.*

Определение 2.3. *Коцикл $\pi \in Z^2(G)$ назовем согласованным с H, если из $sH = s'H$, $tH = t'H$ $(s, t, s', t' \in G)$ следует $\pi(s, t) = \pi(s', t')$.*

Примечание. 1) если π согласован с H и нормализован, то $\pi(s, t) = 1$ при $s \in H$ или $t \in H$; 2) если π согласован с H, то $\pi' =$

$=\pi(1,\ 1)^{-1}\pi$ также согласован с H; кроме того, он нормализован, причем $\pi' \sim \pi$.

Лемма 2.6. *Если* $\Pi \in M(G)$, *то* H *является* Π-*ядром тогда и только тогда, когда* $\Pi = [\pi]$, *где* π — *коцикл, согласованный с* H.

Доказательство. 1°. Допустим, что H — Π-ядро и $\Pi = [\pi_0]$, где $\pi_0 \in Z^2(G)$. Пусть $P \in \boldsymbol{P}_{\pi_0}(G)$, $\mathrm{KER}\, P = H$. Тогда $P(g) = \lambda(g) E_n$, где $\lambda \in \boldsymbol{F}[G]$ и $n = \deg P$. Пусть $\Gamma = G/H$ и $G = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} g_\alpha H$ — такое разложение G на левые смежные классы по H, что $g_1 = 1$, $g_\alpha g_\beta = g_{\alpha\beta} p(\alpha,\ \beta)$, где $p(\alpha,\ \beta) \in H\ (\alpha,\ \beta \in \Gamma)$. Если $g \in G$, $gH = g_\gamma H\ (\gamma \in \Gamma)$, положим $\Phi(g) = P(g_\gamma)$. Пусть $s,\ t \in G$, $sH = g_\alpha H$, $tH = g_\beta H\ (\alpha,\ \beta \in \Gamma)$. Как легко проверить, $\Phi(s)\Phi(t) = \pi(s,\ t)\Phi(st)$, где $\pi(s,\ t) = \pi_0(g_\alpha,\ g_\beta)\pi_0^{-1}(g_{\alpha\beta},\ p(\alpha,\ \beta))\lambda(p(\alpha,\ \beta))$. Отсюда следует, что $\pi \in Z^2(G)$ и $\Phi \in \boldsymbol{P}_\pi(G)$. Из определения коцикла π видно, что он согласован с H. Далее, если $g \in G$, $gH = g_\gamma H\ (\gamma \in \Gamma)$, то $g = g_\gamma h$, где $h \in H$ и, следовательно, $P(g) = P(g_\gamma h) = \pi_0^{-1}(g_\gamma,\ h) P(g_\gamma) P(h) = \pi_0^{-1}(g_\gamma,\ h)\lambda(h) \times \Phi(g) = \mu(g)\Phi(g)$, где $\mu \in \boldsymbol{F}[G]$. Поэтому $P \sim \Phi$, откуда следует, что $\pi_0 \sim \pi$, т. е. $\Pi = [\pi]$, где π согласован с H.

2°. Допустим, что $\Pi = [\pi]$, где $\pi \in Z^2(G)$ согласован с H. Коцикл π будем считать нормализованным (см. примечание после определения 2.3). Пусть $\lambda \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$. Тогда, как легко видеть, $\lambda \in X_\pi(H)$. Поэтому $X_\pi(H) \neq \emptyset$, откуда следует в силу теоремы 1.8, что H — π-ядро, а потому и Π-ядро. Лемма доказана.

Пусть G и Γ — конечные группы, $f: G \to \Gamma$ — эпиморфизм, $H = \mathrm{Ker}\, f$. Тогда $\Gamma \cong G/H$. Тройку $(G,\ f,\ H)$ будем называть *расширением группы* Γ *при помощи* H. Пусть $\alpha \in \Gamma$, $g_\alpha \in f^{-1}(\alpha)$, т. е. $f(g_\alpha) = \alpha$. Дополнительно примем $g_1 = 1$. При этих предположениях получаем разложение

$$G = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} g_\alpha H \tag{2.1}$$

группы G на левые смежные классы по H, причем

$$g_\alpha g_\beta = g_{\alpha\beta} p(\alpha,\ \beta), \tag{2.2}$$

где $p(\alpha,\ \beta) \in H\ (\alpha,\ \beta \in \Gamma)$. Отображение $p: G \times G \to H$ — *система факторов расширения* $(G,\ f,\ H)$. Легко проверить, что

$$p(\alpha\beta, \gamma)\, p(\alpha, \beta)^\gamma = p(\alpha, \beta\gamma)\, p(\beta, \gamma), \tag{2.3}$$

где $s^\gamma = g_\gamma^{-1} s g_\gamma\ (s \in H)$. Заметим, что, ввиду $g_1 = 1$, для любого $\alpha \in \Gamma$ имеет место $p(\alpha, 1) = p(1, \alpha) = p(1, 1) = 1$.

Определим гомоморфизмы φ: $\mathrm{Lin}(G) \to \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$, τ: $\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \to M(\Gamma)$, σ: $M(\Gamma) \to M_H(G)$ следующим образом. Пусть $\chi \in \mathrm{Lin}(G)$, χ_H — ограничение χ на H. Тогда $\chi_H \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$. Под φ понимаем отображение ограничения $\chi \to \chi_H\ (\chi \in \mathrm{Lin}(G))$. Если $\psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$, полагаем

$$\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta) = \psi(p(\alpha, \beta)) \quad (\alpha, \beta \in \Gamma), \tag{2.4}$$

При помощи (2.3) легко проверить, что $\eta^{(\psi)} \in Z^2(\Gamma)$. Коцикл $\eta^{(\psi)}$ нормализован, так как $\eta^{(\psi)}(1, 1) = \psi(p(1, 1)) = \psi(1) = 1$. Отображение $\psi \to [\eta^{(\psi)}]$ очевидно является гомоморфизмом $\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$ в $M(\Gamma)$. Обозначив его через τ, получим

$$\tau(\psi) = [\eta^{(\psi)}] \ (\psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)). \tag{2.5}$$

Гомоморфизм τ: $\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \to M(\Gamma)$, как легко видеть, не зависит от выбора трансверсали $\{g_\gamma\}$.

Пусть $\rho \in Z^2(\Gamma)$, ρ нормализован. Положим для $s, t \in G$

$$\pi_\rho(s, t) = \rho(f(s), f(t)). \tag{2.6}$$

Легкая проверка показывает, что $\pi_\rho \in Z^2(G)$. Из (2.6) вытекает, что коцикл π_ρ нормализован и согласован с H. В силу леммы 2.6 $[\pi_\rho] \in M_H(G)$. Заметим, что класс $[\pi_\rho]$ коцикла π_ρ вполне определяется классом $[\rho]$ коцикла ρ. Благодаря этому корректно определяется отображение σ: $M(\Gamma) \to M_H(G)$:

$$\sigma([\rho]) = [\pi_\rho]. \tag{2.7}$$

Отображение σ, очевидно, является гомоморфизмом $M(\Gamma)$ в $M_H(G)$.

Лемма 2.7. *Пусть* $\psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$, $\lambda \in \boldsymbol{F}[\Gamma]$ *и функция* $\chi \in \boldsymbol{F}[G]$ *задается равенством*

$$\chi(g_\alpha h) = \lambda(\alpha)\psi(h) \ (\alpha \in \Gamma, h \in H). \tag{2.8}$$

Тогда для $s, t \in G$, $\alpha = f(s)$, $\beta = f(t)$

$$\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta) = \frac{\lambda(\alpha)\lambda(\beta)}{\lambda(\alpha\beta)}\left\{\frac{\chi(s)\chi(t)}{\chi(st)}\right\}^{-1}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Положим $s = g_\alpha h_1$, $t = g_\beta h_2$, где $h_i \in H$ $(i = 1, 2)$. Тогда, как легко видеть, $st = g_{\alpha\beta}p(\alpha, \beta) \ h_1^\beta h_2$, откуда вытекает, что $\chi(st) = \lambda(\alpha\beta)\psi(p(\alpha, \beta) h_1^\beta h_2) = \lambda(\alpha\beta)\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta)\psi(h_1)\psi(h_2)$. Так как $\chi(s)\chi(t) = \lambda(\alpha)\psi(h_1)\lambda(\beta)\psi(h_2) = \lambda(\alpha)\lambda(\beta)\psi(h_1)\psi(h_2)$, то $\frac{\chi(st)}{\chi(s)\chi(t)} = \frac{\lambda(\alpha\beta)}{\lambda(\alpha)\lambda(\beta)}\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta)$, откуда и вытекает (2.9).

Теорема 2.8. *Последовательность*

$$\mathrm{Lin}(G) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \xrightarrow{\tau} M(\Gamma) \xrightarrow{\sigma} M_H(G) \to 1 \tag{2.10}$$

точна.

Доказательство. 1°. Если $\psi \in \mathrm{Im}\,\varphi$, то $\psi = \chi_H$, где $\chi \in \mathrm{Lin}(G)$. Из (2.2) следует $\chi(g_\alpha)\chi(g_\beta) = \chi(g_{\alpha\beta})\psi(p(\alpha, \beta)) = \chi(g_{\alpha\beta})\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta)$. Поэтому $\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta) = \frac{\lambda(\alpha)\lambda(\beta)}{\lambda(\alpha\beta)}$ $(\alpha, \beta \in \Gamma)$, где $\lambda(\gamma) = \chi(g_\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma)$. Следовательно, $\eta^{(\psi)} \sim 1$, т.е. $\tau(\psi) = [\eta^{(\psi)}] = 1$. Таким образом, $\psi \in \mathrm{Ker}\,\tau$. Итак, $\mathrm{Im}\,\varphi \leqslant \mathrm{Ker}\,\tau$. Пусть $\psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$, $\psi \in \mathrm{Ker}\,\tau$. Тогда $[\eta^{(\psi)}] = \tau(\psi) = [1]$, т. е. $\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta) = \frac{\lambda(\alpha)\lambda(\beta)}{\lambda(\alpha\beta)}$ $(\alpha, \beta \in \Gamma)$, где $\lambda \in \boldsymbol{F}[\Gamma]$. Определим функцию $\chi \in \boldsymbol{F}[G]$, полагая $\chi(s) = \lambda(\alpha)\psi(h)$ для $s = g_\alpha h$ ($\alpha \in \Gamma$, $h \in H$). Из леммы 2.7 следует, что $\chi(st) = \chi(s)\chi(t)$, т. е. $\chi \in \operatorname{Lin}(G)$. Если $h \in H$, то $\chi(h) = \chi(g_1 h) = \lambda(1)\psi(h) = \psi(h)$, ибо $\lambda(1) = \eta^{(\psi)}(1, 1) = 1$. Таким образом, $\chi_H = \psi$, т. е. $\psi \in \operatorname{Im}\varphi$. Итак, $\operatorname{Ker}\tau \leqslant \operatorname{Im}\varphi$. Тем самым доказано, что

$$\operatorname{Ker}\tau = \operatorname{Im}\varphi. \tag{2.11}$$

2°. Пусть $\rho \in Z^2(\Gamma)$, $[\rho] \in \operatorname{Im}\tau$. Тогда $[\rho] = \tau(\psi) = [\eta^{(\psi)}]$, где $\psi \in \operatorname{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$. Определим функцию $\chi \in \boldsymbol{F}[G]$, полагая $\chi(s) = \psi(h)$, если $s = g_\alpha h$ ($\alpha \in \Gamma$, $h \in H$). Представив последнее равенство в виде $\chi(s) = \lambda(\alpha)\psi(h)$, где $\lambda = 1_\Gamma$, по лемме 2.7 при $\alpha = f(s)$, $\beta = f(t)$, получим $\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta) = \left\{\dfrac{\chi(s)\chi(t)}{\chi(st)}\right\}^{-1} = \dfrac{\chi^{-1}(s)\chi^{-1}(t)}{\chi^{-1}(st)}$. Так как в силу (2.6) $\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta) = \eta^{(\psi)}(f(s), f(t)) = \pi_{\eta^{(\psi)}}(s, t)$, то $\pi_{\eta^{(\psi)}} \sim 1$, т. е. $\sigma([\rho]) = \sigma([\eta^{(\psi)}]) = [\pi_{\eta^{(\psi)}}] = 1$. Таким образом, $[\rho] \in \operatorname{Ker}\sigma$. Итак, $\operatorname{Im}\tau \leqslant \operatorname{Ker}\sigma$. Допустим теперь, что $\rho \in Z^2(\Gamma)$ нормализован и $[\rho] \in \operatorname{Ker}\sigma$. Тогда $[\pi_\rho] = 1$, т. е. $\pi_\rho(s, t) = \dfrac{\chi(s)\chi(t)}{\chi(st)}$ ($s, t \in G$), где $\chi \in \boldsymbol{F}[G]$. Положим $\psi = \chi_H$, $\lambda(\alpha) = \chi(g_\alpha)$ ($\alpha \in \Gamma$). Так как коцикл π_ρ согласован с H, при $h \in H$, $t \in G$ имеем $\chi(th) = \dfrac{\chi(t)\chi(h)}{\pi_\rho(t, h)} = \chi(t)\chi(h) = \chi(t)\psi(h)$, $\chi(ht) = \dfrac{\chi(h)\chi(t)}{\pi_\rho(h, t)} = \chi(h)\chi(t) = \psi(h)\chi(t)$. Таким образом,

$$\chi(th) = \chi(ht) = \chi(t)\psi(h) \quad (t \in G,\ h \in H). \tag{2.12}$$

Полагая в (2.12) $t = h_1$, $h = h_2$ ($h_1, h_2 \in H$), получаем $\psi(h_1 h_2) = \chi(h_1 h_2) = \chi(h_1)\psi(h_2) = \psi(h_1)\psi(h_2)$. Далее, при $h \in H$, $t \in G$ имеем $\psi(h)\chi(t) = \chi(ht) = \chi(th^t) = \chi(t)\psi(h^t)$. Поэтому $\psi(h^t) = \psi(h)$, т. е. $\psi \in \operatorname{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$. Полагая в (2.12) $t = g_\alpha$, получаем $\chi(g_\alpha h) = \chi(g_\alpha)\psi(h)$, т. е. функция χ удовлетворяет условию леммы 2.7. В силу этой леммы при $s, t \in G$, $\alpha = f(s)$, $\beta = f(t)$ имеем $\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta) = \dfrac{\lambda(\alpha)\lambda(\beta)}{\lambda(\alpha\beta)}\pi_\rho^{-1}(s, t) = \dfrac{\lambda(\alpha)\lambda(\beta)}{\lambda(\alpha\beta)}\rho^{-1}(f(s), f(t)) = \dfrac{\lambda(\alpha)\lambda(\beta)}{\lambda(\alpha\beta)}\rho^{-1}(\alpha, \beta)$. Поэтому $\rho \sim (\eta^{(\psi)})^{-1}$, т. е. $[\rho] = [\eta^{(\psi)}]^{-1} = \tau(\psi)^{-1} = \tau(\psi^{-1}) \in \operatorname{Im}\tau$. Следовательно, $\operatorname{Ker}\sigma \leqslant \operatorname{Im}\tau$. Тем самым доказано, что

$$\operatorname{Ker}\sigma = \operatorname{Im}\tau. \tag{2.13}$$

3°. Докажем, что σ — эпиморфизм. Пусть $\Pi \in M_H(G)$. Тогда по лемме 2.6 $\Pi = [\pi]$, где $\pi \in Z^2(G)$ согласован с H и нормализован. Определим функцию $\rho\colon \Gamma \times \Gamma \to \boldsymbol{C}^*$, полагая $\rho(\alpha, \beta) = \pi(g_\alpha, g_\beta)$ ($\alpha, \beta \in \Gamma$). Пользуясь согласованностью коцикла π с H, легко проверим, что $\rho \in Z^2(\Gamma)$. Так как $\rho(1, 1) = \pi(g_1, g_1) = \pi(1, 1) = 1$, коцикл ρ нормализован. Пусть $s, t \in G$, $s = g_\alpha h_1$, $t = g_\beta h_2$, где $\alpha, \beta \in \Gamma$

и $h_1, h_2 \in H$. Тогда $\pi(s, t) = \pi(g_\alpha, g_\beta) = \rho(\alpha, \beta) = \rho(f(s), f(t)) = \pi_\rho(s, t)$, т. е. $\pi = \pi_\rho$. Поэтому $\Pi = [\pi] = [\pi_\rho] = \sigma([\rho])$. Таким образом, $\operatorname{Im}\sigma = M_H(G)$, т. е. σ — эпиморфизм. Тем самым точность последовательности (2.10) доказана.

Пусть X — конечная группа, $Y \trianglelefteq X$. Положим $\operatorname{Lin}_Y(X) = \{\chi \in \operatorname{Lin}(X) \mid \operatorname{Ker}\chi \geqslant Y\}$. Очевидно $\operatorname{Lin}_Y(X) \leqslant \operatorname{Lin}(X)$ и $\operatorname{Lin}_Y(X) \cong \operatorname{Lin}(X/Y)$. Если $Y \leqslant Z \trianglelefteq X$, то очевидно $\operatorname{Lin}_Z(X) \leqslant \operatorname{Lin}_Y(X)$.

Лемма 2.9. *Пусть X — конечная группа, X' — ее коммутант, причем $X' \leqslant Y \leqslant Z \leqslant X$. Тогда*

$$\operatorname{Lin}_Y(X)/\operatorname{Lin}_Z(X) \cong Z/Y. \tag{2.14}$$

Доказательство. Определим гомоморфизм $\theta\colon \operatorname{Lin}_Y(X) \to \operatorname{Lin}_Y(Z)$, полагая $\theta(\psi) = \psi|_Z$ ($\psi \in \operatorname{Lin}_Y(X)$). Так как $\operatorname{Ker}\theta = \operatorname{Lin}_Z(X)$, то $\operatorname{Im}\theta \cong \operatorname{Lin}_Y(X)/\operatorname{Lin}_Z(X)$. Отсюда следует, ввиду абелевости групп X/Y и Z/Y, что

$$|\operatorname{Im}\theta| = \frac{|\operatorname{Lin}_Y(X)|}{|\operatorname{Lin}_Z(X)|} = \frac{|\operatorname{Lin}(X/Y)|}{|\operatorname{Lin}(X/Z)|} = \frac{|X/V|}{|X/Z|} = |Z/Y| = |\operatorname{Lin}_Y(Z)|.$$

Поэтому $\operatorname{Im}\theta = \operatorname{Lin}_Y(Z)$, откуда следует, что $\operatorname{Lin}_Z(X)/\operatorname{Lin}_Y(X) \cong \operatorname{Lin}_Y(Z) \cong Z/Y$.

Следствие 2.10. *Если $X' \leqslant Z \leqslant X$, то* $\operatorname{Lin}(X)/\operatorname{Lin}_Z(X) \cong Z/X'$.

Доказательство. Полагаем в (2.14) $Y = X'$.

Теорема 2.11. *Пусть (G, f, H) — расширение группы Γ. Тогда*

$$M_H(G) \cong M(\Gamma)/N, \tag{2.15}$$

где $N \leqslant M(\Gamma)$, $N \cong H \cap G'/[H, G]$.

Доказательство. В силу теоремы 2.8 $\operatorname{Ker}\sigma = \operatorname{Im}\tau \cong \operatorname{Lin}_{\text{inv}}(H)/\operatorname{Ker}\tau = \operatorname{Lin}_{\text{inv}}(H)/\operatorname{Im}\varphi$. С другой стороны, $\operatorname{Im}\varphi \cong \operatorname{Lin}(G)/\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Lin}(G)/\operatorname{Lin}_H(G) = \operatorname{Lin}(G)/\operatorname{Lin}_{HG'}(G)$. Так как $G' \leqslant HG' \leqslant G$, в силу следствия 2.10 $\operatorname{Lin}(G)/\operatorname{Lin}_{HG'}(G) \cong HG'/G' \cong H/H \cap G' \cong \operatorname{Lin}_{H\cap G'}(H)$.
Поэтому $|\operatorname{Im}\varphi| = |\operatorname{Lin}_{H\cap G'}(H)|$. Так как $\operatorname{Im}\varphi \leqslant \operatorname{Lin}_{H\cap G'}(H)$, отсюда вытекает, что $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Lin}_{H\cap G'}(H)$. Замечая, что $\operatorname{Lin}_{\text{inv}}(H) = \operatorname{Lin}_{[H,G]}(H)$, получаем $\operatorname{Ker}\sigma \cong \operatorname{Lin}_{\text{inv}}(H)/\operatorname{Lin}_{H\cap G'}(H) = \operatorname{Lin}_{[H,G]}(H)/\operatorname{Lin}_{H\cap G'}(H)$. Так как $H' \leqslant [H, G] \leqslant H \cap G' \leqslant H$, в силу леммы 2.9 ($X = H$, $Y = [H, G]$, $Z = H \cap G'$), получаем $\operatorname{Ker}\sigma \cong H \cap G'/[H, G]$. Остается заметить, что, ввиду эпиморфности σ, $M_H(G) \cong M(\Gamma)/N$, где $N = \operatorname{Ker}\sigma$.

Теорема 2.12.

$$M_H(G) \cong M(G/H)/N, \tag{2.16}$$

где $N \leqslant M(G/H)$, $N \cong H \cap G'/[H, G]$.*

Доказательство. Полагаем в (2.15) $\Gamma = G/H$, f — естественный гомоморфизм группы G на Γ.

* В [3] ошибочно утверждалось, что $M_H(G) \cong M(G/H)$.

Следствие 2.13. *Следующие условия равносильны:* а) $M_H(G) \cong M(G/H)$; б) $H \cap G' = [H, G]$; в) *все G-инвариантные линейные рактеры подгруппы H продолжаемы до линейных характеров групп G.*

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). В силу (2.16) $M_H(G) \cong M(G/H) \Rightarrow N = 1 \Rightarrow H \cap G' = [H, G]$.

б) $\Rightarrow$ в) $H \cap G' = [H, G] \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\sigma \cong H \cap G'/[H, G] = 1 \Rightarrow \mathrm{Im}\,\tau = 1 \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\tau = \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \Rightarrow \mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \Rightarrow \mathrm{Lin}_{\mathrm{prol}}(H) = \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$, е $\mathrm{Lin}_{\mathrm{prol}}(H) = \mathrm{Im}\,\varphi$ — подгруппа G-инвариантных линейных характеров подгруппы H, продолжаемых на G.

в) $\Rightarrow$ а). $\mathrm{Lin}_{\mathrm{prol}}(H) = \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \Rightarrow \mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\tau = \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \Rightarrow \mathrm{Im}\,\tau = 1 \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\sigma = 1 \Rightarrow \sigma$ — изоморфизм.

Следствие 2.14. *Если $M(G) = 1$, т.е. группа G замкнута в смысле Шура, то для любого $H \trianglelefteq G$ имеет место $M(G/H) \cong H \cap G'/[H, G]$.*

Определение 2.4. *Расширение (G, f, H) группы Γ назовем чным, если τ — мономорфизм.*

Следствие 2.15. *Расширение (G, f, H) точно тогда и только гда, когда $H \leqslant G'$. При выполнении этого условия $H/[H, G]$ изофна подгруппе группы $M(\Gamma)$.*

Доказательство. (G, f, H) точно $\leftrightarrow \mathrm{Ker}\,\tau = 1 \leftrightarrow \mathrm{Im}\,\varphi = 1 \leftrightarrow \mathrm{Lin}_{\mathrm{prol}}(H) = 1 \leftrightarrow \mathrm{Lin}_{H \cap G'}(H) = 1 \leftrightarrow H/H \cap G' = 1 \leftrightarrow H \leqslant G'$. Если $f, H)$ точно, то τ: $\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \to M(\Gamma)$ — мономорфизм, откуда слеет, что $\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \cong$ подгруппе группы $M(\Gamma)$. Остается заметить, о $\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \cong H/[H, G]$.

Определение 2.5. *Расширение (G, f, H) назовем накрывающим, ли τ — эпиморфизм,*

Следствие 2.16. *Следующие утверждения равносильны:* а) (G, H) — *накрывающее расширение;* б) $M_H(G) = 1$; в) $M(\Gamma) \cong H \cap G'/[H, G]$.

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). $\mathrm{Im}\,\tau = M(\Gamma) \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\sigma = M(\Gamma) \Rightarrow \mathrm{Im}\,\sigma = 1 \Rightarrow M_H(G) = 1$. б) $\Rightarrow$ в). $M_H(G) = 1 \Rightarrow M(\Gamma) = N \Rightarrow M(\Gamma) \cong H \cap G'/[H, G]$. в) $\Rightarrow$ а). $M(\Gamma) \cong H \cap G'/[H, G] \Rightarrow M_H(G) = 1 \Rightarrow \mathrm{Im}\,\sigma = 1 \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\sigma = M(\Gamma) \Rightarrow \mathrm{Im}\,\tau = M(\Gamma) \Rightarrow (G, f, H)$ — накрывающее расширение.

Классические результаты И. Шура о центральных расширениях и уппах представлений являются частными случаями изложенных ыше общих результатов.

исок литературы: 1. *Schur J.* Über die Darstellund der endlicher Gruppen durch brochene lineare Substitutionen // J. Reine Angew. Math. 1904. 127. P. 20—50 2. *Кэртис Ч, Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциатих алгебр. М., 1969, С. 1—230. 3. *Жмудь Э. М.* Об изоморфных неприводимых оективных представлениях конечных групп // Зап. мат. отд.-ние физ.- мат. ф-та ГУ и Харьк. мат. о-ва. 1960. Сер. 4. 26. С. 333—372.

Поступила в редколлегию 15.07.88