

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

В. О. Кузнєцова
Г. В. Чернова

МАТРИЦІ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. ВЕКТОРИ

Методичні рекомендації до виконання
розрахункової роботи з дисципліни «Вища математика»
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

Електронне видання

Харків – 2023

Рецензенти:

О. О. Аршава – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент закладу вищої освіти кафедри вищої математики та інформатики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна;

В. О. Золотарьов – доктор фізико-математичних наук, професор, провідний науковий співробітник Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Веркіна Національної академії наук України, Харків.

*Затверджено до розміщення в мережі Інтернет рішенням Науково-методичної ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 3 від 19 грудня 2023 року)*

Кузнєцова В. О.

К 89

Матриці. Системи лінійних рівнянь. Вектори : методичні рекомендації до виконання розрахункової роботи з дисципліни «Вища математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти [Електронне видання] / В. О. Кузнєцова, Г. В. Чернова. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. – (PDF 52 с.)

Методичні рекомендації містять теоретичний матеріал, приклади розв'язку типових задач, зразки виконання розрахункових контрольних робіт з Тем 1 «Матриці. Системи лінійних рівнянь» та Тем 2 «Вектори», питання для самоконтролю, завдання для самостійної роботи, рекомендовану літературу.

Навчальне видання призначається для здобувачів вищої освіти факультету комп'ютерних наук першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, які вивчають дисципліну «Вища математика».

УДК 512.643.8+512.644+514.742.2](072)

© Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 2023

© Кузнєцова В. О., Чернова Г. В., 2023

ЗМІСТ

Вступ	4
1. Тема 1 «Матриці. Системи лінійних рівнянь».....	5
1.1. Матриці. Лінійні операції над матрицями.....	5
1.2. Визначники	10
1.3. Системи лінійних рівнянь та методи їх розв'язку	17
1.4. Приклад виконання обов'язкового завдання розрахункової контрольної роботи з теми 1 «Матриці. Системи лінійних рівнянь»	22
1.5. Завдання за темою 1 для самостійної роботи.....	30
2. Тема 2 «Вектори»	31
2.1. Вектори у просторі. Поняття базису.....	31
2.2. Добутки векторів. Запис добутків у координатах	35
2.3. Розкладання вектора за базисом трьох векторів у просторі .	41
2.4. Приклад виконання обов'язкового завдання розрахункової контрольної роботи до теми 2 «Вектори»	42
2.5. Завдання за темою 2 для самостійної роботи.....	48
Рекомендована література.....	50

ВСТУП

Сучасний розвиток комп'ютерних технологій вимагає якісної підготовки фахівців, які мають ґрунтовні та глибокі математичні знання, здатні якісно застосувати математичний апарат у своїй професійній діяльності та вдосконалювати сучасні розробки в сфері ІТ технологій. Тож актуальним є формування у здобувачів вищої освіти комп'ютерних спеціальностей широкого спектра математичних знань, умінь та навичок, якими вони здатні широко, осмислено та вправно користуватися при вирішенні фахових задач.

Дані методичні рекомендації розроблено на основі дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти факультету комп'ютерних наук, який читається викладачами кафедри вищої математики та інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. У навчальне видання увійшли матеріали з Тем 1 «Матриці. Системи лінійних рівнянь» та Тем 2 «Вектори», які можуть бути використані здобувачами вищої освіти для підготовки до аудиторних занять, при самостійному вивченні відповідного матеріалу, а також для підготовки до виконання розрахункових контрольних робіт з вказаних тем. Навчальне видання містить теоретичний матеріал, приклади розв'язку типових задач, зразки виконання розрахункових контрольних робіт з Тем 1 «Матриці. Системи лінійних рівнянь» та Тем 2 «Вектори», питання для самоконтролю, завдання для самостійної роботи, а також список рекомендованої літератури [1-6] для поглибленого вивчення навчального матеріалу.

Крім того, зазначимо, що підготовка до виконання розрахункових контрольних робіт з тем «Матриці. Системи лінійних рівнянь. Вектори» має за мету набуття здобувачами вищої освіти загальних та фахових компетентностей щодо методів лінійної та векторної алгебри, а саме: застосування лінійних операції над матрицями, знаходження оберненої матриці, використання правил розкриття визначників другого та третього порядків, розв'язування систем лінійних рівнянь методами Крамера, Гаусса, Жордана–Гаусса та матричним методом; застосування лінійних операції над векторами, знаходження скалярного, векторного та мішаного добутків векторів, вивчення властивостей добутків, усвідомлення умов колінеарності та компланарності векторів; оперування поняттями лінійної комбінації векторів, лінійної залежності/незалежності векторів, базису векторів; здійснення розкладання вектора за базисними векторами.

1. ТЕМА 1 «Матриці. Системи лінійних рівнянь»

1.1. Матриці. Лінійні операції над матрицями.

Визначення: Матрицею називається прямокутна таблиця

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Кажуть, що матриця має m рядків і n стовпчиків, а розмір матриці $m \times n$. Матриці, як правило, позначають великими латинськими літерами $A, B, C, D, \dots$.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Елементи a_{ij} , що присутні в записі матриці, називаються *елементами матриці* A . Індеси елемента a_{ij} показують, що елемент a_{ij} розміщений на перетині i -го рядка та j -го стовпчика. У випадку, коли $m = 1$, тобто матриця складається з одного рядка

$$\tilde{A} = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}),$$

таку матрицю називають *матриця-рядок* або *рядок*. Так саме й у випадку, коли $n = 1$, відповідно, *матриця-стовпчик* або *стовпчик*,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Матриця, у якої $m = n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

називається *квадратною матрицею*.

Елементи квадратної матриці $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ утворюють *головну діагональ* квадратної матриці.

Квадратна матриця, у якій всі елементи по один бік від головної діагоналі дорівнюють нулю, називається *трикутною матрицею*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо квадратна матриця така, що всі її елементи головної діагоналі не дорівнюють нулю, а всі інші – дорівнюють, то така матриця називається *діагональною матрицею*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця, у якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, називається *одиничною матрицею розміру $n \times n$* ,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Зауваження:

1. Нехай A – квадратна матриця розміру $n \times n$, і одинична матриця E також має розмір $n \times n$, тоді $A \cdot E = E \cdot A = A$.

2. Матриця B – матриця-стовпчик розміру $n \times 1$, E – одинична матриця розміру $n \times n$, тоді $E \cdot B = B$.

3. Матриця C – матриця-рядок розміру $1 \times n$, E – одинична матриця розміру $n \times n$, тоді $C \cdot E = C$.

Матриці A та B називають *рівними* (пишуть $A=B$), якщо вони мають однаковий розмір та відповідні елементи матриць рівні

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}.$$

$$A = B \Leftrightarrow m = p, n = q \text{ та } \forall i, j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n: a_{ij} = b_{ij}.$$

Операції над матрицями

1. **Додавання матриць** відбувається поелементно для матриць одного розміру:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.1.1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A + B = ?$

Розв'язок: Матриці A та B мають однаковий розмір 2×3 , відповідно існує матриця $A + B$, яка дорівнює

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 0 & 0 + 4 & 2 + (-2) \\ 3 + (-1) & -2 + 3 & 5 + 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

тож маємо

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. **Множення матриці на число** $\lambda \in \mathbb{R}$ відбувається поелементно:

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.1.2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \lambda = -3, \lambda \cdot A = ?$

Розв'язок:

$$\lambda \cdot A = -3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot (-1) & -3 \cdot (0) & -3 \cdot 2 \\ -3 \cdot 3 & -3 \cdot (-2) & -3 \cdot 5 \end{pmatrix},$$

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -9 & 6 & -15 \end{pmatrix}.$$

3. **Множення матриць.** Матриці A та B можна множити тоді і тільки тоді, коли кількість стовпчиків першої матриці, A , дорівнює кількості рядків другої матриці, B . Тобто якщо матриця A має розмір $t \times n$, а матриця B — розмір $q \times p$, тоді існує добуток $A \cdot B$, якщо $n = q$, відповідно, матриця $A \cdot B$ має розмір $t \times p$. Якщо кількість стовпчиків першої матриці не дорівнює кількості рядків другої матриці (тобто $n \neq q$), тоді добуток матриць $A \cdot B$ не існує. Тож, якщо існує $A \cdot B$, відповідно, пере-

множити $B \cdot A$ можна не у всіх випадках. Також потрібно зауважити, якщо матриці A та B — квадратні та мають однаковий розмір, то завжди існують добутки $A \cdot B$ та $B \cdot A$.

Якщо існує добуток матриці A розміру $m \times n$ та матриці B розміру $n \times p$, то дорівнює матриці C (тобто $C = A \cdot B$) розміру $m \times p$, причому:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix},$$

тоді елементи c_{ij} матриці C знаходимо за правилом «рядок на стовпчик»:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Зауваження: Для квадратних матриць A та B добуток $A \cdot B$ існує, якщо матриці A та B однакового розміру. В частинному випадку, коли матриці A та B мають розмір 2×2 ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

їх добуток має вигляд:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.1.3. Обчислити $A \cdot B$ та $B \cdot A$, де це можливо.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}.$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$

Розв'язок:

a) A та B — квадратні матриці розміру 2×2 , відповідно існують обидва добутки, $A \cdot B$ та $B \cdot A$:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 7 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) \\ 3 \cdot 2 + 5 \cdot 7 & 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 7 \\ 41 & -12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 \\ 7 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 & 7 \cdot (-2) + (-3) \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -29 \end{pmatrix}.$$

b) Матриця A має розмір 2×3 , а матриця B — 3×2 , тобто кількість стовпчиків першої матриці, A , дорівнює кількості рядків другої матриці, B , відповідно, існує добуток $A \cdot B$. Щодо добутку $B \cdot A$: кількість стовпчиків першої матриці, B , дорівнює кількості рядків другої матриці A , відповідно, й добуток $B \cdot A$ також існує:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) \\ -4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + (-6) \cdot 3 & -4 \cdot (-2) + 5 \cdot 4 + (-6) \cdot (-5) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -9 \\ -13 & 58 \end{pmatrix}.$$

Добуток $B \cdot A$ пропонуємо обчислити самостійно.

с) Матриця A має розмір 3×1 , а матриця B — розмір 1×3 , тобто кількість стовпчиків першої матриці, A , дорівнює кількості рядків другої матриці, B , відповідно існує добуток $A \cdot B$. Щодо добутку $B \cdot A$: кількість стовпчиків першої матриці, B , дорівнює, кількості рядків другої матриці, A , відповідно й добуток $B \cdot A$ також існує. Тож, обчислюємо:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot (-1 \quad 4 \quad 7) = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 7 \\ (-2) \cdot (-1) & (-2) \cdot 4 & (-2) \cdot 7 \\ 11 \cdot (-1) & 11 \cdot 4 & 11 \cdot 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 12 & 21 \\ 2 & -8 & -14 \\ -11 & 44 & 77 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = (-1 \quad 4 \quad 7) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} = ((-1) \cdot 3 + 4 \cdot (-2) + 7 \cdot 11) = (66).$$

4. Транспонована матриця A^T до матриці A , яку отримують, змінивши місцями відповідні рядки та стовпчики:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{тоді} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.1.4. Дано $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Записати A^T .

Розв'язок: Міняємо місцями стовпчики та рядки матриці A , зараз стовпчики мають вигляд:

$$\begin{matrix} -1, & 0, & 2, \\ 3, & -2, & 5, \end{matrix}$$

записуємо матрицю A^T , де стовпчики стають рядками, відповідно:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = A^T.$$

5. Елементарні перетворення над рядками (стовпчиками) матриці – це виконання наступних дій над рядками або стовпчиками матриць:

- поміняти місцями паралельні ряди (стовпчики) матриці;
- помножити всі елементи ряду (стовпчика) на одне і те саме дійсне число;
- додати до елементів ряду (стовпчика) лінійну комбінацію відповідних елементів паралельного ряду (стовпчика).

Кажуть, що *матриця B еквівалентна до матриці A* , якщо матрицю B було отримано з матриці A шляхом елементарних перетворень над рядками або стовпчиками матриці A . Позначається наступним чином: $A \sim B$.

Приклад 1.1.5. Розглянемо дві матриці A та B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок: Матрицю B можна отримати з матриці A за допомогою елементарного перетворення, а саме, якщо до всіх елементів першого рядка матриці A додати відповідні елементи 2 рядка матриці A , помножені на 4, елементи першого рядка матриці A залишаємо без змін:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 + 4 \cdot 1 & 5 + 4 \cdot 2 & -6 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & 6 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

Тобто матриця A перетворилася на матрицю B . Таким чином, матриці A та B є еквівалентними, тобто $A \sim B$.

1.2. Визначники

Визначення: Кожній квадратній матриці A , яка має розмір $n \times n$, можна поставити у відповідність дійсне число $\det A$, яке називається *визначником (або детермінантом)* матриці A та дорівнює:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Кажуть, що $\det A$ – визначник n -го порядку.

За визначенням, якщо квадратна матриця A має розмір 1×1 , тобто $A = (a_{11})$, то визначник першого порядку дорівнює:

$$\det A = |a_{11}| \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}.$$

Якщо квадратна матриця A має розмір 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

тоді визначник другого порядку за визначенням дорівнює:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Обчислення визначника другого порядку можна проілюструвати схемою:

Розглянемо випадок, коли квадратна матриця має розмір $n \times n$.

Мінором m_{ij} елемента a_{ij} матриці A називається визначник $(n-1)$ -го порядку, який отримано з визначника матриці A шляхом викреслення i -го рядка та j -го стовпчика.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці A називається відповідний мінор m_{ij} , який беремо зі знаком $(+)$, якщо сума індексів $i + j$ є парне число, та зі знаком $(-)$, якщо сума індексів $i + j$ – непарне число:

$$A_{ij} = \begin{cases} +m_{ij}, & \text{якщо } i + j = 2k \\ -m_{ij}, & \text{якщо } i + j = 2k - 1, k \in N. \end{cases}$$

Твердження (розкладання визначника за елементами рядка або стовпчика)

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}, \forall j: 1 \leq j \leq n \text{ (за елементами рядка),}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}, \forall i: 1 \leq i \leq n \text{ (за елементами стовпчика).}$$

Зауваження: Якщо матриця A має розмір 3×3 , то можна обчислити визначник $\det A$ розкладанням, наприклад, за елементами першого рядка:

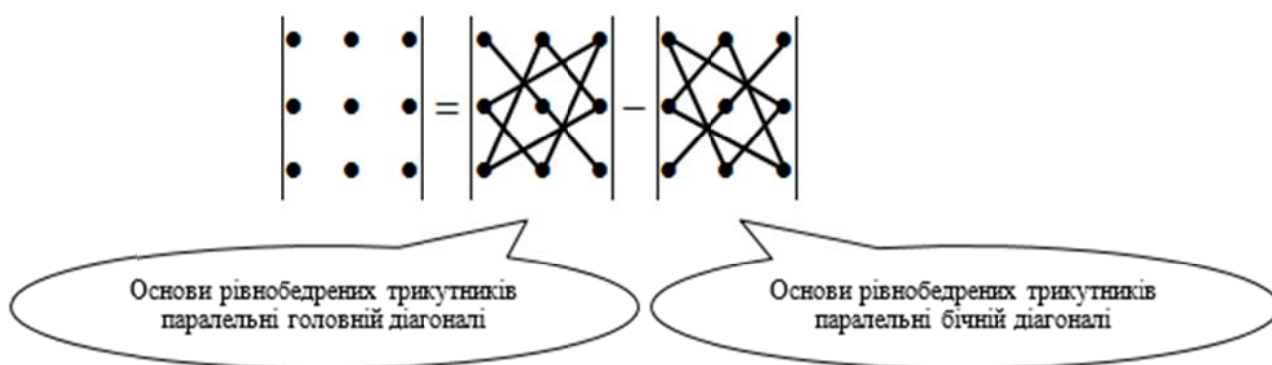
$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \\ &= a_{11}m_{11} + a_{12}(-m_{12}) + a_{13}m_{13} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Приклад 1.2.1. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, обчислити $\det A$.

Розв'язок:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = [\text{розкладаємо за елементами першого рядка}] = \\ &= -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= -3 \cdot (-1 \cdot 7 - 5 \cdot 4) - 1 \cdot (0 \cdot 7 - (-2) \cdot 4) + 2 \cdot (0 \cdot 5 - (-2) \cdot (-1)) = \\ &= -3 \cdot (-27) - 8 + 2 \cdot (-2) = 81 - 8 - 4 = 69. \end{aligned}$$

Зауваження: Визначники третього порядку можна обчислювати за допомогою «методу трикутників», який символічно можна записати так:



Так, обчисливши $\det A$, можна побачити, що три доданки в перших дужках містять добуток елементів головної діагоналі та добутки елементів, які утворюють відповідні вершини рівнобедрених трикутників з основами, паралельними головній діагоналі, а три доданки у других дужках містять добуток елементів бічної діагоналі та добутки елементів, які утворюють відповідні вершини рівнобедрених трикутників з основами, паралельними бічній діагоналі.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}) -$$

$$- (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}).$$

Приклад 1.2.2. Знайдемо $\det A$, де матриця A з попереднього прикладу 1.2.1.

Розв'язок:

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = (-3 \cdot (-1) \cdot 7 + (-2) \cdot 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \cdot 2) -$$

$$- ((-2) \cdot (-1) \cdot 2 + (-3) \cdot 5 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \cdot 7) = 21 - 8 + 0 - 4 + 60 - 0 = 69.$$

Якщо матриця A така, що $\det A \neq 0$, тоді матрицю A називають *невиродженою*. У випадку, коли $\det A = 0$, кажуть, що матриця A — *вироджена*.

Нехай матриця A — квадратна матриця розміру $n \times n$, тоді матриця A^{-1} називається *оберненою матрицею до матриці A* , якщо виконано:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

де матриця E — одинична матриця такого ж розміру, як і матриця A .

Матриця A^* називається *приєднаною (союзною) матрицею до матриці A* та має вигляд:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Твердження. Нехай матриця A — невивроджена ($\det A \neq 0$) квадратна матриця розміру $n \times n$, тоді існує обернена матриця A^{-1} до матриці A , і до того ж тільки одна, та обчислюється за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*,$$

де A^* — приєднана (союзна) матриця до матриці A .

Приклад 1.2.3. Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, обчислити A^{-1} .

Зробити перевірку.

Розв'язок: Обчислюємо $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9.$$

Згадаємо, що оскільки $\det A \neq 0$, то існує обернена матриця до матриці A , яка дорівнює:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*.$$

Обчислюємо приєднану (союзну) матрицю A^* . Для цього знаходимо алгебраїчні доповнення A_{ij} всіх елементів матриці A . Нагадаємо, що

$$A_{ij} = \begin{cases} +m_{ij}, i+j = 2k \\ -m_{ij}, i+j = 2k-1 \end{cases}, k \in \mathbb{N},$$

де m_{ij} – мінор елемента a_{ij} матриці A , який є визначником $(n-1)$ -го порядку, отриманий з $\det A$ шляхом закреслення i -го рядка та j -го стовпчика:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 0) = -6,$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3.$$

Так само обчислюємо інші алгебраїчні доповнення:

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Записуємо приєднану (союзну) матрицю:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Далі отримаємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Робимо перевірку: $A \cdot A^{-1} = E$ або $A^{-1} \cdot A = E$. Перевіримо, наприклад, $A \cdot A^{-1} = E$:

$$\begin{aligned}
A \cdot A^{-1} &= A \cdot \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{\det A} A \cdot A^* = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \\
&= -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 - 12 + 0 & -4 + 4 + 0 & 2 - 2 + 0 \\ 9 - 12 + 3 & -12 + 4 - 1 & 6 - 2 - 4 \\ 0 - 6 + 6 & 0 + 2 - 2 & 0 - 1 - 8 \end{pmatrix} = \\
&= -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.
\end{aligned}$$

Зауваження: Якщо матриця A – невироджена ($\det A \neq 0$) квадратна матриця розміру $n \times n$, то існує обернена матриця A^{-1} , яку також можна знаходити за допомогою *методу Гаусса*. Для цього потрібно записати розширену матрицю $\bar{A}$ у вигляді:

$$\bar{A} = (A|E),$$

де матриця E – одинична матриця такого ж розміру, що й матриця A .

Наприклад, нехай матриця A має розмір 3×3 , тоді розширена матриця має вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Далі, застосовуючи елементарні перетворення до рядків розширеної матриці (зміна рядків місцями, домноження на одне і те саме число всіх елементів рядка, додавання до елементів одного рядка лінійної комбінації відповідних елементів іншого рядка (рядків)), маємо привести розширену матрицю $\bar{A}$ до наступного виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ 0 & 1 & 0 & \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ 0 & 0 & 1 & \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} \end{array} \right).$$

Тоді матриця, яка знаходиться в лівій частині розширеної матриці, й буде оберненою матрицею A^{-1} до матриці A , тобто:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} \end{pmatrix}.$$

Але, зауважимо, що й у цьому випадку потрібно обов'язково зробити перевірку, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Приклад 1.2.4. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ із прикладу 1.2.3 обчис-

лити A^{-1} методом Гаусса. Зробити перевірку.

Розв'язок: Запишемо розширену матрицю та зробимо наступні елементарні перетворення з рядками розширеної матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + I \cdot (-3) + II \cdot 4} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & | & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{III: 9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \sim \\ \xrightarrow{II - 2 \cdot III} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \xrightarrow{I - 2 \cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, обернена матриця має вигляд,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Перевірку $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ наведено у попередньому прикладі 1.2.3.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називають матрицею?
2. Як визначити розмір матриці?
3. Які види матриць Ви знаєте?
4. Яка матриця називається транспонованою?
5. Сформулюйте правила: додавання матриць, віднімання матриць, множення матриці на число.
6. За яким правилом виконується множення двох матриць?
7. Які матриці називають еквівалентними?
8. Для яких матриць існує поняття «визначник»?
9. Що називають визначником матриці?
10. Як обчислювати визначники другого та третього порядків?
11. Сформулюйте основні властивості визначників матриці.
12. Яку матрицю називають оберненою до даної?

13. Яку матрицю називають приєднаною (союзною) матрицею?
14. Сформулюйте умову існування оберненої матриці.
15. За якою формулою знаходиться обернена матриця?

1.3. Системи лінійних рівнянь та методи їх розв'язку

Визначення: Система лінійних рівнянь – це система, яка має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (1.3.1)$$

де a_{ij} , b_i – дійсні числа, x_i – невідомі ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$).

Нехай матриці A , B , X мають вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тоді система (1.3.1) може бути записана у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B.$$

Матриця A називається *матрицею системи* (1.3.1) (або *основною матрицею системи* (1.3.1)), матриця-стовпчик B – матрицею неоднорідностей, матриця-стовпчик X – матрицею невідомих.

Зазначимо, що системи лінійних рівнянь класифікують за схемою, представленою на рис. 1.



Рис. 1

Розглянемо випадок, коли система лінійних рівнянь задається квадратною матрицею системи, тоді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Матричний метод розв'язку систем лінійних рівнянь.

Запишемо систему (1.3.2) у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B.$$

Припустимо, що матриця A — невироджена ($\det A \neq 0$), тоді існує обернена матриця A^{-1} до матриці A . Помножимо вираз $A \cdot X = B$ ліворуч на A^{-1} . Потрібно зауважити, що відповідні добутки за правилом множення матриць існують. Отже, маємо:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

$$A^{-1} \cdot A = E \text{ (за визначенням)}, E \cdot X = X.$$

Відповідно, маємо:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Тож матричний метод розв'язку систем лінійних рівнянь полягає у наступному:

- 1) Перевірити, чи матриця системи є невиродженою ($\det A \neq 0$). Якщо це виконано, тоді обчислити обернену матрицю до матриці системи.
- 2) Обчислити добуток $A^{-1} \cdot B$, записати матрицю $X = A^{-1} \cdot B$.

Твердження. У разі, якщо матриця A системи (1.3.2) — невироджена ($\det A \neq 0$), тоді система (1.3.2) має тільки один розв'язок — матрицю X , де $X = A^{-1} \cdot B$. Отже, ця система є сумісною та визначеною.

Метод Крамера розв'язку систем лінійних рівнянь.

Нехай матриця A системи (1.3.2) — невироджена ($\det A \neq 0$), тоді позначимо $\det A =: \Delta$, де Δ — визначник системи (1.3.2).

Розглянемо наступні визначники Δ_j — допоміжні (додаткові) визначники, які мають вигляд:

$$\Delta_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \mathbf{b_1} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots \mathbf{b_2} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots \mathbf{b_n} \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

j-ий стовпчик

У визначнику Δ замінили j -й стовпчик на стовпчик $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Тоді невідомі $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ визначаємо за формулами:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, 1 \leq j \leq n.$$

Ці формули для знаходження розв'язків системи лінійних рівнянь (1.3.2) називаються *формулами Крамера*. Тож метод Крамера полягає в наступному:

- 1) Перевірити, чи матриця системи є невиродженою ($\det A \neq 0$).
- 2) Якщо це виконано, обчислити допоміжні визначники Δ_j , де $1 \leq j \leq n$.
- 3) Обчислити x_j ($1 \leq j \leq n$) за допомогою формул Крамера та записати X .

Метод Гаусса (метод елементарних перетворень).

Випишемо розширену матрицю системи $\bar{A}$ у вигляді:

$$\bar{A} = (A|B),$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right).$$

Спочатку здійснюємо *прямий хід* методу Гаусса, що полягає в перетворенні матриці $\bar{A}$ до ступеневого вигляду за допомогою елементарних перетворень над рядками матриці $\bar{A}$, а саме: заміна рядків місцями, множення на одне і те саме число всіх елементів рядка, додавання до елементів одного рядка лінійну комбінацію відповідних елементів іншого рядка (рядків). У результаті отримаємо наступне перетворення:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} & \hat{b}_1 \\ 0 & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} & \hat{b}_2 \\ 0 & 0 & \hat{a}_{33} & \hat{b}_3 \end{array} \right).$$

Після цього потрібно здійснити *зворотній хід* методу Гаусса, а саме переписати систему у вигляді:

$$\begin{cases} \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \hat{a}_{13}x_3 = \hat{b}_1 \\ \hat{a}_{22}x_2 + \hat{a}_{23}x_3 = \hat{b}_2 \\ \hat{a}_{33}x_3 = \hat{b}_3 \end{cases}.$$

Далі, з третього рівняння системи знаходимо x_3 :

$$x_3 = \frac{\hat{b}_3}{\hat{a}_{33}}, (\hat{a}_{33} \neq 0).$$

Потім x_3 підставляємо у друге рівняння та знаходимо x_2 :

$$\hat{a}_{22}x_2 + \hat{a}_{23}\frac{\hat{b}_3}{\hat{a}_{33}} = \hat{b}_2, \quad x_2 = \frac{\hat{b}_2 - \hat{a}_{23}\frac{\hat{b}_3}{\hat{a}_{33}}}{\hat{a}_{22}}, (\hat{a}_{22} \neq 0).$$

Далі x_3 та x_2 підставляємо в перше рівняння системи, щоб знайти x_1 . Так, отримаємо розв'язок:

$$\begin{cases} \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \hat{a}_{13}x_3 = \hat{b}_1 \\ x_2 = \frac{\hat{b}_2 - \hat{a}_{23}\frac{\hat{b}_3}{\hat{a}_{33}}}{\hat{a}_{22}}, \hat{a}_{22} \neq 0 \\ x_3 = \frac{\hat{b}_3}{\hat{a}_{33}}, \hat{a}_{33} \neq 0 \end{cases}.$$

Зауваження: При розв'язуванні систем лінійних рівнянь методом Гаусса не потрібна перевірка, чи є матриця системи невинродженою ($\det A \neq 0$). Отже, система може бути довільною, тобто або сумісною, або несумісною. При виконанні елементарних перетворень над рядками розширеної матриці системи можуть виникати наступні випадки:

1). Наприклад, в ході елементарних перетворень з рядками матриці $\bar{A}$ вона отримала вигляд:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} & \hat{b}_1 \\ 0 & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} & \hat{b}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\hat{b}_3} \end{array} \right).$$

Тоді це завершує прямий хід методу Гаусса, оскільки останній рядок відповідає рівнянню:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = \hat{b}_3, \hat{b}_3 \neq 0,$$

яке неможливе. Отже, відповідна система розв'язків не має, тобто є несумісною.

2). Інша ситуація, коли в ході елементарних перетворень з рядками матриці $\bar{A}$ вона отримала вигляд:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} & \hat{b}_1 \\ 0 & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} & \hat{b}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right).$$

Останній рядок відповідає рівнянню,

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0,$$

що виконується для будь-яких $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Це означає, що система має безліч розв'язків, тобто є сумісною та невизначеною. В цьому випадку останній рядок розширеної матриці $\bar{A}$ викреслюють та переходять до системи виду:

$$\begin{cases} \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \hat{a}_{13}x_3 = \hat{b}_1 \\ \hat{a}_{22}x_2 + \hat{a}_{23}x_3 = \hat{b}_2 \end{cases}.$$

Далі, нехай $x_3 \in \mathbb{R}$ – будь-яка фіксована змінна. Далі відбувається зворотній хід методу Гаусса. Спочатку виражаємо невідомий x_2 :

$$\begin{cases} \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \hat{a}_{13}x_3 = \hat{b}_1 \\ x_2 = \frac{\hat{b}_2 - \hat{a}_{23}x_3}{\hat{a}_{22}}, \hat{a}_{22} \neq 0 \end{cases},$$

а потім підставляємо отриманий вираз у перше рівняння для отримання невідомого x_1 :

$$\begin{aligned} \hat{a}_{11}x_1 &= \hat{b}_1 - \hat{a}_{12} \cdot \frac{\hat{b}_2 - \hat{a}_{23}x_3}{\hat{a}_{22}} - \hat{a}_{13}x_3, \hat{a}_{22} \neq 0, \\ x_1 &= \frac{1}{\hat{a}_{11}} \left(\hat{b}_1 - \hat{a}_{12} \cdot \frac{\hat{b}_2 - \hat{a}_{23}x_3}{\hat{a}_{22}} - \hat{a}_{13}x_3 \right), \hat{a}_{22} \neq 0, \hat{a}_{11} \neq 0. \end{aligned}$$

Безліч розв'язків системи можна записати у вигляді:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{a}_{11}} \left(\hat{b}_1 - \hat{a}_{12} \cdot \frac{\hat{b}_2 - \hat{a}_{23}x_3}{\hat{a}_{22}} - \hat{a}_{13}x_3 \right) \\ \frac{\hat{b}_2 - \hat{a}_{23}x_3}{\hat{a}_{22}} \\ x_3 \end{pmatrix}, \forall x_3 \in \mathbb{R}.$$

Метод Жордана–Гаусса.

Припустимо, що матриця A – невинроджена ($\det A \neq 0$). Метод Жордана–Гаусса полягає в переході розширеної матриці $\bar{A}$ за допомогою елементарних перетворень її рядків (а саме: заміна рядків місцями,

множення на одне і те саме число усіх елементів рядка, додавання до елементів одного рядка лінійної комбінації відповідних елементів іншого рядка (рядків)) до матриці наступного виду:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \hat{b}_1 \\ 0 & 1 & 0 & \hat{b}_2 \\ 0 & 0 & 1 & \hat{b}_3 \end{array} \right).$$

Тоді розв'язок системи записуємо у вигляді: $x_i = \hat{b}_i$, де $i = 1, 2, 3$.

Отже, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix}.$

Зауваження: Використання усіх зазначених вище методів представлено у прикладі розрахункової контрольної роботи за Темою 1 (див. п. 1.4).

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Які існують різновиди систем лінійних рівнянь?
2. В якому випадку система є сумісною та визначеною?
3. Якою має бути матриця системи, щоб система була сумісною та визначеною?
4. Які системи можна розв'язати за допомогою матричного методу або методу Крамера?
5. У чому полягає суть методу Гаусса?
6. Розкрийте суть методу Жордана–Гаусса.

1.4. Приклад виконання обов'язкового завдання розрахункової контрольної роботи з Тем 1 «Матриці. Системи лінійних рівнянь»

Нехай задано дві матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$

У розрахунковій контрольній роботі запис завдання має вигляд:

А	В
1 5 -4	-5
2 -3 1	2
4 1 -3	-4

1. Обчислити матриці $C = B^T \cdot B$, $D = B \cdot B^T$, $G = A \cdot D + A^T$.

2. Знайти обернену матрицю A^{-1} . Обов'язково зробити перевірку.

3. Записати матричне рівняння $A \cdot X = B$, де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, у вигляді

системи лінійних рівнянь.

4. Розв'язати отриману систему лінійних рівнянь за допомогою матричного методу.

5. Розв'язати отриману систему лінійних рівнянь за допомогою методу Крамера.

6. Розв'язати отриману систему лінійних рівнянь за допомогою методу Гаусса.

7. Розв'язати отриману систему лінійних рівнянь за допомогою методу Жордана–Гаусса.

Розв'язок:

1. Обчислимо матриці $C = B^T \cdot B$, $D = B \cdot B^T$, $G = A \cdot D + A^T$.

Зауважимо, що додавати можна лише матриці однакового розміру. Добуток матриць A та B можливий за умови, коли кількість стовпців матриці A однакова з кількістю рядків матриці B .

Знайдемо матрицю B^T , записавши відповідний стовпчик рядочком: $B^T = (-5 \quad 2 \quad -4)$. Матриця-рядок B^T має розмір 1×3 , а матриця-стовпчик B має розмір 3×1 , тому добутки матриць $B \cdot B^T$ та $B^T \cdot B$ існують.

Обчислимо відповідні добутки матриць:

$$D = B \cdot B^T = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot (-5 \quad 2 \quad -4) = \begin{pmatrix} 25 & -10 & 20 \\ -10 & 4 & -8 \\ 20 & -8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$C = B^T \cdot B = (-5 \quad 2 \quad -4) \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = (25 + 4 + 16) = (45)$$

Для обчислення матриці $G = A \cdot D + A^T$ спочатку знайдемо добуток матриць $A \cdot D$, який існує, оскільки матриці A та D мають однаковий розмір 3×3 :

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & -10 & 20 \\ -10 & 4 & -8 \\ 20 & -8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -105 & 42 & -84 \\ 100 & -40 & 80 \\ 30 & -12 & 24 \end{pmatrix}.$$

Запишемо A^T :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Далі, обчислюємо матрицю $G = A \cdot D + A^T$:

$$G = A \cdot D + A^T = \begin{pmatrix} -105 & 42 & -84 \\ 100 & -40 & 80 \\ 30 & -12 & 24 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -104 & 44 & -80 \\ 105 & -43 & 81 \\ 26 & -11 & 21 \end{pmatrix}.$$

Отримали матриці виду:

$$C = (45), \quad D = \begin{pmatrix} 25 & -10 & 20 \\ -10 & 4 & -8 \\ 20 & -8 & 16 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -104 & 44 & -80 \\ 105 & -43 & 81 \\ 26 & -11 & 21 \end{pmatrix}.$$

2. Знайдемо обернену матрицю A^{-1} до матриці A . Спочатку потрібно переконатися, чи виконується умова існування оберненої матриці. Для цього маємо обчислити визначник матриці A :

Обчислимо визначник за допомогою методу трикутників:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (1 \cdot (-3) \cdot (-3) + 4 \cdot 5 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 \cdot 1) -$$

$$- (4 \cdot (-3) \cdot (-4) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \cdot 5) = 9 + 20 - 8 - 48 - 1 + 30 = 2.$$

Зауваження: Можна також розкласти визначник за першим рядком, а саме:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

де A_{11} , A_{12} , A_{13} – алгебраїчні доповнення елементів a_{11} , a_{12} , a_{13} відповідно.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14,$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot \left(-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \right) + (-4) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 8 + 5 \cdot 10 - 4 \cdot 14 = 2.$$

Маємо, що $\det A = 2 \neq 0$, відповідно матриця A є невиродженою. Отже, матриця A має обернену матрицю A^{-1} , яка дорівнює:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*, \text{ де } A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Обчислимо обернену матрицю A^{-1} . Для цього знайдемо приєднану (союзну) матрицю A^* до матриці A . Так, знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} до елементів a_{ij} матриці A :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 10, & A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 11, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 13, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 19, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -7, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо приєднану матрицю A^* виду:

$$A^* = \begin{pmatrix} 8 & 11 & -7 \\ 10 & 13 & -9 \\ 14 & 19 & -13 \end{pmatrix}.$$

Відповідно, обернена матриця A^{-1} дорівнює:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 11 & -7 \\ 10 & 13 & -9 \\ 14 & 19 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{11}{2} & -\frac{7}{2} \\ 5 & \frac{13}{2} & -\frac{9}{2} \\ 7 & \frac{19}{2} & -\frac{13}{2} \end{pmatrix}, \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} 4 & \frac{11}{2} & -\frac{7}{2} \\ 5 & \frac{13}{2} & -\frac{9}{2} \\ 7 & \frac{19}{2} & -\frac{13}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Робимо обов'язкову перевірку $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & \frac{11}{2} & -\frac{7}{2} \\ 5 & \frac{13}{2} & -\frac{9}{2} \\ 7 & \frac{19}{2} & -\frac{13}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 11 & -7 \\ 10 & 13 & -9 \\ 14 & 19 & -13 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 + 50 - 56 & 11 + 65 - 76 & -7 - 45 + 52 \\ 16 - 30 + 14 & 22 - 39 + 19 & -14 + 27 - 13 \\ 32 + 10 - 42 & 44 + 13 - 57 & -28 - 9 + 39 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Зауваження: Обернену матрицю можна також знайти за допомогою методу Гаусса. Для цього потрібно записати розширену матрицю у вигляді:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Далі, застосовуючи елементарні перетворення до рядків розширеної матриці (заміна рядків місцями, множення на одне і те саме число усіх елементів рядка, додавання до елементів одного рядка лінійну комбінацію відповідних елементів іншого рядка (рядків)), маємо перетворити її на наступну матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ 0 & 1 & 0 & \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ 0 & 0 & 1 & \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} \end{array} \right).$$

Тоді матриця, що знаходиться в лівій частині розширеної матриці, й буде оберненою матрицею A^{-1} до матриці A , тобто:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} \end{pmatrix}.$$

Зауважемо, що і в цьому випадку потрібно обов'язково зробити перевірку $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

3. Запишемо матричне рівняння $A \cdot X = B$, де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, у вигляді системи лінійних рівнянь. Для цього обчислимо добуток матриць A та X та дорівнюємо до матриці B :

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 5x_2 - 4x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix} = B = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Таким чином, отримаємо систему лінійних рівнянь виду:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}.$$

4. Розв'яжемо отриману систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

матричним методом.

Запишемо систему лінійних рівнянь у матричному вигляді $A \cdot X = B$. Дана система має єдиний розв'язок, тоді і тільки тоді, коли матриця A є невиродженою квадратною матрицею, причому розв'язок системи має вигляд:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Обернену матрицю A^{-1} знайдено у п. 2 розрахункової контрольної роботи з Теми 1 «Матриці. Системи лінійних рівнянь». Випишемо її:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{11}{2} & -\frac{7}{2} \\ 5 & \frac{13}{2} & -\frac{9}{2} \\ 7 & \frac{19}{2} & -\frac{13}{2} \end{pmatrix}.$$

Для зручності перепишемо A^{-1} у вигляді:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 11 & -7 \\ 10 & 13 & -9 \\ 14 & 19 & -13 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо X :

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot B &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 11 & -7 \\ 10 & 13 & -9 \\ 14 & 19 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -40 + 22 + 28 \\ -50 + 26 + 36 \\ -70 + 38 + 52 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ або можна записати, що } x_1 = 5, x_2 = 6, x_3 = 10.$$

5. Розв'яжемо отриману систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases},$$

використовуючи **метод Крамера**.

Метод Крамера можна застосувати тільки у випадку, коли матриця системи лінійних рівнянь є невиродженою квадратною матрицею. Наша система саме така, оскільки $\det A = 2$ (обчислено у п. 2 розрахункової контрольної роботи з Теми 1 «Матриці. Системи лінійних рівнянь»).

Отже, визначник матриці системи $\det A = \Delta = 2$. Далі потрібно обчислити допоміжні визначники $\Delta_j, j = 1, 2, 3$.

Знаходження розв'язку $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ системи лінійних рівнянь здійснюється за допомогою формул Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \text{ де } j = 1, 2, 3.$$

Обчислимо Δ_j , де $j = 1, 2, 3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 12,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 20.$$

Отже, розв'язок x_i , $i = 1, 2, 3$ системи має вид:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{2} = 5, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12}{2} = 6, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{20}{2} = 10.$$

Відповідь має вигляд: $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $x_3 = 10$ або $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$.

6. Розв'яжемо отриману систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

за допомогою *методу Гаусса*.

Для цього потрібно записати розширену матрицю $\bar{A}$ системи:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right).$$

Нагадаємо, що прямий хід методу Гаусса полягає в перетворенні матриці $\bar{A}$ до ступеневого вигляду за допомогою елементарних перетворень над рядками матриці $\bar{A}$ (а саме, заміна рядків місцями, множення на одне і те саме число усіх елементів рядка, додавання до елементів одного рядка лінійну комбінацію відповідних елементів іншого рядка (рядків)):

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} & \hat{b}_1 \\ 0 & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} & \hat{b}_2 \\ 0 & 0 & \hat{a}_{33} & \hat{b}_3 \end{array} \right).$$

Після цього потрібно здійснити зворотній хід. Для цього перепишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \hat{a}_{13}x_3 = \hat{b}_1 \\ \hat{a}_{22}x_2 + \hat{a}_{23}x_3 = \hat{b}_2 \\ \hat{a}_{33}x_3 = \hat{b}_3 \end{cases}.$$

Далі з третього рівняння знаходимо x_3 . Потім x_3 підставляємо у друге рівняння та отримуємо x_2 , далі x_3 та x_2 підставляємо в перше рівняння для знаходження x_1 .

В нашому прикладі розширена матриця $\bar{A}$ має вигляд,

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{array} \right),$$

Приведемо цю матрицю до ступеневого вигляду за допомогою елементарних перетворень рядків:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{array} \right) &\xrightarrow{\text{III} - 2 \cdot \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -5 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} - 2 \cdot \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -13 & 9 & 12 \\ 0 & 7 & -5 & -8 \end{array} \right) \sim \\ &13 \cdot \text{II} + 7 \cdot \text{III} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -13 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & -20 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Далі здійснюємо зворотній хід, для цього перепишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ -13x_2 + 9x_3 = 12 \\ -2x_3 = -20 \end{cases}.$$

З третього рівняння отримуємо, що $x_3 = 10$, підставляємо його у друге рівняння та маємо:

$$-13x_2 + 9x_3 = 12, x_3 = 10 \Rightarrow x_2 = 6.$$

Далі підставляємо x_2 та x_3 в перше рівняння системи:

$$x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5, x_3 = 10, x_2 = 6,$$

отримуємо, що $x_1 = 5$.

Таким чином, маємо наступний розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 10 \end{cases} \text{ або } X = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

7. Розв'язати отриману систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

за допомогою *методу Жордана–Гаусса*.

Нагадаємо, що метод Жордана–Гаусса можна застосувати лише, коли матриця системи лінійних рівнянь є невинродженою квадратною матрицею ($\det A \neq 0$). Тож спочатку потрібно обчислити визначник матриці системи та переконатися, що він не дорівнює нулю: $\det A \neq 0$. Наша система саме така, оскільки $\det A = 2 \neq 0$, що обчислено у п. 2 розрахункової контрольної роботи з Теми 1 «Матриці. Системи лінійних рівнянь».

Далі приведемо матрицю $\bar{A}$ за допомогою елементарних перетворень над її рядками (зміна рядків місцями, добуток на одне і те саме число усіх елементів рядка, додавання до елементів одного рядка лінійної комбінації відповідних елементів іншого рядка (рядків)), до наступного виду:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \hat{b}_1 \\ 0 & 1 & 0 & \hat{b}_2 \\ 0 & 0 & 1 & \hat{b}_3 \end{array} \right).$$

Після цього записуємо розв'язок системи: $x_i = \hat{b}_i$, де $i = 1, 2, 3$.

Використаємо результати, які отримали в п. 6 розрахункової контрольної роботи з Теми 1 «Матриці. Системи лінійних рівнянь»:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -13 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & -20 \end{array} \right) \text{III} \cdot \widetilde{4,5} + \text{II} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -13 & 0 & -78 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right) \text{II} : (-13) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right) \sim \\ &\quad \text{I} - 5 \cdot \widetilde{\text{II}} + 4 \cdot \text{III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right), \end{aligned}$$

Отже, маємо відповідь $x_1 = 5, x_2 = 6, x_3 = 10$ або $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$.

1.5. Завдання за темою 1 для самостійної роботи

Задано дві матриці A та B .

1. Обчислити $C = B^T \cdot B, D = B \cdot B^T, G = A \cdot D + A^T$.

2. Знайти обернену матрицю A^{-1} . Обов'язково зробити перевірку.

3. Записати матричне рівняння $A \cdot X = B$, де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, у вигляді

системи лінійних рівнянь.

4. Розв'язати отриману систему лінійних рівнянь матричним методом.
5. Розв'язати отриману систему лінійних рівнянь за допомогою методу Крамера.
6. Розв'язати отриману систему лінійних рівнянь за допомогою методу Гаусса.
7. Розв'язати отриману систему лінійних рівнянь за допомогою методу Жордана–Гаусса.

Варіанти завдань:

№	A	B	№	A	B
1.	2 1 3 1 1 -2 3 4 -1	1 -3 -4	6.	-3 0 2 8 3 -6 4 2 -3	-2 2 -1
2.	1 1 2 3 0 4 2 -1 -2	9 5 0	7.	-2 1 4 3 1 1 -3 5 6	-1 6 -5
3.	2 -1 1 5 3 -3 3 -2 4	5 7 10	8.	2 -1 1 1 -6 -4 2 -1 -3	11 0 11
4.	1 -1 5 0 6 -6 3 1 1	7 0 11	9.	4 -3 2 2 5 -3 5 6 -2	1 7 11
5.	2 -1 1 3 -7 -3 2 -1 -3	11 22 11	10.	-3 0 2 4 1 -3 4 2 -3	-2 3 -1

2. ТЕМА 2 «Вектори»

2.1. Вектори у просторі. Поняття базису

Визначення: Вектор – це направлений відрізок прямої. Відповідно кожен вектор визначається своєю довжиною та напрямом. Вектори позначаються маленькими латинськими літерами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \dots$ або їх можна позначати як $\overrightarrow{AB}$, тоді кажуть, що точка A – початок (початкова точка) вектора $\overrightarrow{AB}$, а точка B – кінець (кінцева точка) вектора $\overrightarrow{AB}$. Довжина вектора позначається $|\vec{a}|$ або $|\overrightarrow{AB}|$.

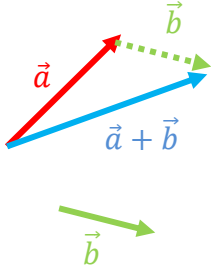
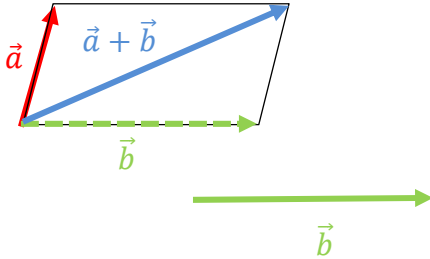
Нульовий вектор $\vec{0}$ – це вектор нульової довжини, тобто $|\vec{0}| = 0$. Напрямок такого вектора не визначено.

Одиничний вектор $\vec{e}$ – це вектор довжини одиниця, тобто $|\vec{e}| = 1$. Такий вектор може мати будь-який напрям.

Множення вектора на число. Нехай λ – довільне дійсне число $\lambda \in \mathbb{R}$. Вектор $\lambda\vec{a}$ – це вектор довжини $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, напрям якого збігається

з напрямом вектора $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ та протилежний напрям вектора $\vec{a}$ при $\lambda < 0$. Якщо $\vec{a} = 0$ або $\lambda = 0$, тоді вектор $\lambda\vec{a} = 0$.

Додавання векторів. Вектори можна додавати за правилом трикутника або правилом паралелограма:

«Правило трикутника»	«Правило паралелограма»
	

Два вектори називаються *рівними* $\vec{a} = \vec{b}$, якщо вони мають рівні довжини $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ та однакові напрями.

Два вектори називаються *колінеарними* $\vec{a} \parallel \vec{b}$, якщо вони розташовані або на паралельних прямих, або на одній прямій.

Твердження. Для того, щоб два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ($\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$) були колінеарними $\vec{a} \parallel \vec{b}$, необхідно і достатньо, щоб знайшлося таке $\lambda \neq 0$, що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ у просторі називаються *компланарними*, якщо вони лежать на одній площині або на паралельних площинах.

Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ називається вираз виду:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Система векторів $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n\}$ називається *лінійно залежною*, якщо:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = 0,$$

де хоча б одне λ_i не дорівнює нулю ($1 \leq i \leq n$).

Твердження. Для того, щоб система векторів $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n\}$ була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб один з векторів можна було записати у вигляді лінійної комбінації усіх інших векторів.

Тобто система $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n\}$ – лінійно залежна, якщо, наприклад, можна знайти такі дійсні μ_i , $2 \leq i \leq n$, що виконано

$$\vec{a}_1 = \sum_{i=2}^n \mu_i \vec{a}_i.$$

Система векторів $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n\}$ називається *лінійно незалежною*, якщо:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = 0$$

тільки тоді, коли всі λ_i дорівнюють нулю ($1 \leq i \leq n$).

Кажуть, що система векторів $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n\}$ утворює *базис*, якщо це максимальна лінійно незалежна система векторів.

Твердження:

1. Будь-які три вектори на площині є лінійно залежними. Будь-які чотири вектори у просторі є лінійно залежними.
2. Будь-які два неколінійні вектори на площині утворюють базис.
3. Будь-які три некомпланарні вектори у просторі утворюють базис.

Наслідки:

1. Якщо у просторі задано чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, тоді вони є лінійно залежними.
2. Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарні, тоді вони утворюють базис $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ у просторі. Отже, четвертий вектор $\vec{d}$ завжди можна розкласти за базисом векторів $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, тобто знайти такі дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, що $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$.

Зауваження: Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ називаються *координати вектора* $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$ у базисі векторів $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Розглянемо декартову систему координат у просторі. На координатних вісях задамо наступні вектори:

- 1) вектор $\vec{i}$, який знаходиться на координатній осі Ox (вісь абсцис), збігається з додатнім напрямом цієї осі та має довжину $|\vec{i}| = 1$, відповідно, має координати $\vec{i} (1; 0; 0)$;
- 2) вектор $\vec{j}$, який знаходиться на координатній осі Oy (вісь ординат), напрям цього вектора збігається з додатнім напрямом осі Oy та $|\vec{j}| = 1$, відповідно, має координати $\vec{j} (0; 1; 0)$;
- 3) вектор $\vec{k}$, який знаходиться на координатній осі Oz (вісь аплікат), його напрям збігається з додатнім напрямом осі Oz та $|\vec{k}| = 1$, відповідно, має координати $\vec{k} (0; 0; 1)$.

Можна записати, що вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — попарно ортогональні, тобто взаємно перпендикулярні:

$$\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{k} \perp \vec{j}, \vec{k} \perp \vec{i}.$$

Вектори $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ утворюють базис у просторі, який називається *ортонормованим базисом*.

Будь-який вектор $\vec{a}$ у просторі можна записати у вигляді розкладання за базисом цих векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Коефіцієнти a_x, a_y, a_z називаються *координатами вектора $\vec{a}$* . Значення a_x, a_y, a_z є відповідними проекціями вектора $\vec{a}$ на координатні осі.

Довжина вектора $\vec{a}$ задається наступним чином:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}.$$

Напрям вектора $\vec{a}$. Нехай вектор $\vec{a}$ утворює з віссю Ox кут α , а з осями Oy та Oz — кути β та γ відповідно. Тоді мають місце наступні рівності:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — *направляючі косинуси вектора $\vec{a}$* .

Вектор $\vec{a}_e = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}$ називається *напрямом вектора $\vec{a}$* . Вектор $\vec{a}_e$ є одиничним вектором, тобто $|\vec{a}_e| = 1$. Відповідно, для направляючих косинусів $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ виконується рівність:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Рівність векторів. Два вектори $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ та $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ є рівними $\vec{a} = \vec{b}$ тоді і тільки тоді, коли $a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$. Тобто рівні вектори мають відповідні рівні координати.

Множення вектора на дійсне число λ . Нехай $\vec{a}$ є вектор $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ та $\lambda \in \mathbb{R}$, тоді вектор $\lambda \vec{a}$ має вид:

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}.$$

Колінеарність векторів. Нагадаємо, що два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні, $\vec{a} \parallel \vec{b}$, якщо знайдеться таке ненульове число λ , що $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

Якщо $\vec{a}$ є вектори:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

та вони колінеарні $\vec{a} \parallel \vec{b}$, тоді $\lambda a_x = b_x, \lambda a_y = b_y, \lambda a_z = b_z$. Отже, можна записати, що

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.$$

Тож колінеарні вектори мають пропорційні координати.

Зауваження: Якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ задається координатами початку – точкою $A(x_1; y_1; z_1)$ та кінця – точкою $B(x_2; y_2; z_2)$, тоді вектор $\overrightarrow{AB}$ можна записати у вигляді:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

2.2. Добутки векторів.

Запис добутків у координатах

Скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$ та задається рівністю:

$$\vec{a}\vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Властивості скалярного добутку векторів:

- 1). $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- 2). $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$;
- 3). $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Зауваження:

1. Якщо вектор $\vec{a}$ ортогональний вектору $\vec{b}$, тобто $\vec{a} \perp \vec{b}$, тоді $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Відповідно, для добутків ортів координатних осей $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ мають місце рівності:

$$\vec{i}\vec{j} = 0, \quad \vec{k}\vec{j} = 0, \quad \vec{k}\vec{i} = 0.$$

2. Якщо розглянути добуток вектора $\vec{a}$ на самого себе, тоді отримуємо, що:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Відповідно, однойменні добутки координатних ортів наступні:

$$\vec{i}\vec{i} = 1, \quad \vec{j}\vec{j} = 1, \quad \vec{k}\vec{k} = 1.$$

Запис скалярного добутку в координатах. Дано два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, де $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, тоді їх скалярний добуток дорівнює:

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Геометричне тлумачення. Нехай φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, тоді за допомогою визначення скалярного добутку косинус цього кута можна обчислити за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Зауваження: Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ та проекція $\vec{b}$ на $\vec{a}$ визначаються наступним чином:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi, \quad \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Якщо врахувати, що $\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, тоді проекції дорівнюватимуть:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}, \quad \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

Приклад 2.2.1. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Обчислити проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, де $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

Розв’язок. Спочатку обчислюємо скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ за формулою:

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \\ \vec{a}\vec{b} &= 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 1 = 11. \end{aligned}$$

Далі знаходимо довжини векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ за формулою:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}, \\ |\vec{a}| &= \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}, \\ |\vec{b}| &= \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}. \end{aligned}$$

Знаходимо кут φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \quad \cos \varphi = \frac{11}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{11}{14}, \quad \varphi = \arccos \frac{11}{14}.$$

Далі обчислюємо проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ за формулою:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}, \quad \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{11}{\sqrt{14}} = \frac{11\sqrt{14}}{14}.$$

Векторний добуток двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Векторний добуток векторів позначається $\vec{a} \times \vec{b}$.

Визначення. Векторний добуток двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ — це вектор $\vec{c}$, який має наступні властивості (див. рис. 2):

1. $|\vec{c}| = S_{\vec{a}, \vec{b}}$, де $S_{\vec{a}, \vec{b}}$ — площа паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, тобто $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, де φ — кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

2. Вектор $\vec{c}$ — ортогональний до площини векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

3. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють «праву трійку векторів» (якщо з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки).

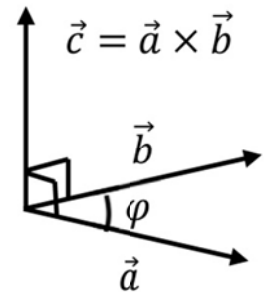


Рис. 2

Зауважимо, що в протилежному випадку трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається «лівою трійкою».

Властивості векторного добутку векторів:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2. $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$;
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Зауваження:

1). Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ — колінеарні, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b}$, тоді $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

У частинному випадку, якщо помножити вектор сам на себе, тоді маємо: $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

Також наступні властивості можна записати для добутків ортів координатних осей $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0.$$

2). Векторні добутки координатних ортів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ дорівнюють:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}, \\ \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j}, & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i}. \end{aligned}$$

Запис векторного добутку в координатах. Дано два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, де $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, тоді координати вектора, що дорівнює векторному добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, обчислюємо за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Визначник обчислюємо розкладанням за елементами першого рядка.

Геометричний зміст векторного добутку – це площа паралелограма, побудованого на векторах, які утворюють векторний добуток, тобто:

$$S_{\vec{a}, \vec{b}} = |\vec{a} \times \vec{b}|,$$

де $S_{\vec{a}, \vec{b}}$ – площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Тоді площа трикутника буде обчислюватися також через векторний добуток векторів, а саме:

$$S_{\Delta \vec{a}, \vec{b}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|,$$

де $S_{\Delta \vec{a}, \vec{b}}$ – площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Приклад 2.2.2. Знайти вектор $\vec{c}$, що дорівнює векторному добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

Розв’язок. Спочатку запишемо координати вектора $\vec{c}$, який дорівнює векторному добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, за формулою:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k},$$

$$\vec{c} = 5\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}.$$

Далі обчислимо площу паралелограма за формулою, $S_{\vec{a}, \vec{b}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$, тобто $S_{\vec{a}, \vec{b}} = |\vec{c}|$. Тож знаходимо довжину знайденого вектора $\vec{c}$:

$$|\vec{c}| = \sqrt{(c_x)^2 + (c_y)^2 + (c_z)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2 + (-7)^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3},$$

$$S_{\vec{a}, \vec{b}} = |\vec{c}| = 5\sqrt{3} \text{ (кв. од.)}.$$

Мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Мішаний добуток векторів позначається $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Визначення. Мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ визначається як орієнтований об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} \stackrel{\text{def}}{=} \pm V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}},$$

де знак визначається трійкою, яку утворюють вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, а саме: якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — утворюють «праву трійку», тоді обирають знак «+»; якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — утворюють «ліву трійку», тоді обирають знак «-».

Зазначимо, що трійка некопланарних (вектори, які не лежать в одній площині або в паралельних площинах) векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in$ «*правою трійкою*», якщо з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки. У протилежному випадку трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається «*лівою трійкою*».

Геометричний зміст мішаного добутку векторів — це об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, який можна обчислити за формулою:

$$V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}} = \begin{cases} \vec{a}\vec{b}\vec{c}, & \text{якщо } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — "права трійка" векторів,} \\ -\vec{a}\vec{b}\vec{c}, & \text{якщо } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — "ліва трійка" векторів.} \end{cases}$$

Об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, можна обчислити за формулою:

$$V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}} = \begin{cases} +\frac{1}{6} \vec{a}\vec{b}\vec{c}, & \text{якщо } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — "права трійка" векторів,} \\ -\frac{1}{6} \vec{a}\vec{b}\vec{c}, & \text{якщо } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — "ліва трійка" векторів.} \end{cases}$$

Властивості мішаного добутку векторів:

1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$;
2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$;
3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.

Зауваження: Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, — *компланарні* (тобто вектори, які лежать в одній площині або в паралельних площинах), то маємо:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0.$$

Критерій некопланарності трьох векторів. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, — некопланарні тоді і тільки тоді, коли мішаний добуток цих векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не дорівнює нулю, тобто $\vec{a}\vec{b}\vec{c} \neq 0$.

Запис векторного добутку в координатах. Дано три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, де $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$, тоді мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обчислюємо за формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приклад 2.2.3. З'ясувати, чи будуть три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарними, якщо $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Розв'язок. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні, якщо мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обчислимо за формулою, що наведена вище:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 10 + 14 + 6 + 10 - 14 = 0.$$

Отже, оскільки $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні.

Приклад 2.2.4. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Розв'язок. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, знаходиться за формулою:

$$V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}} = \begin{cases} \vec{a}\vec{b}\vec{c}, & \text{якщо } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ – "права трійка" векторів,} \\ -\vec{a}\vec{b}\vec{c}, & \text{якщо } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ – "ліва трійка" векторів.} \end{cases}$$

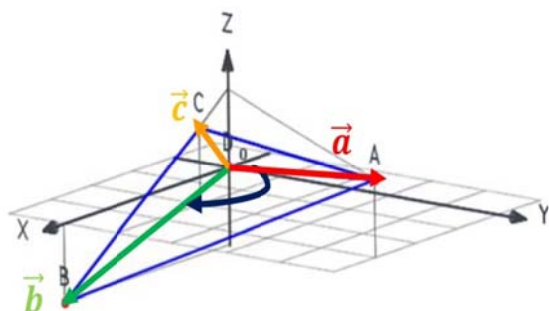


Рис. 3

Тому насамперед потрібно побудувати вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ у декартовій системі координати та визначити, яку трійку вони утворюють. На рис. 3 бачимо, що вектори утворюють «ліву трійку», відповідно в формулі обираємо знак «-»:

$$V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Далі обчислюємо мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ за формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 10 + 4 - 0 + 3 - 20 = -23.$$

Відповідно, об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює:

$$V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -(-23) = 23 \text{ (куб. од.)}.$$

2.3. Розкладання вектора за базисом трьох векторів у просторі

Як вже було зазначено вище, якщо у просторі задано чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, то вони є лінійно залежними. Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некопланарні, тоді вони утворюють у просторі базис $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Отже, четвертий вектор $\vec{d}$ можна розкласти за базисом векторів $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, тобто знайти такі дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, що $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$.

Для знаходження таких чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ маємо скласти наступну рівність:

$$\lambda_1 \vec{a}^T + \lambda_2 \vec{b}^T + \lambda_3 \vec{c}^T = \vec{d}^T,$$

$$\text{де } \vec{a}^T = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \vec{b}^T = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \vec{c}^T = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}.$$

Відповідно, цей вираз можна записати у вигляді системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x = d_x \\ \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y = d_y \\ \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z = d_z \end{cases}$$

Потрібно зауважити, що оскільки $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – базис, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є лінійно незалежними у просторі, а відповідно вони є некопланарними векторами, тож їх мішаний добуток не дорівнює нулю: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} \neq 0$. А це означає, що

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отже, визначник системи лінійних рівнянь ненульовий, оскільки:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким чином, система лінійних рівнянь для визначення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ є сумісною та визначеною, а, відповідно, існує тільки один набір чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, що задовольняє цій системі.

Зазначимо, що розв'язувати задану систему лінійних рівнянь можна за допомогою будь-якого з методів, що було наведено в п. 1.3.

Зауваження: Обчислювати координати $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ можна також за допомогою наступних формул:

$$\lambda_1 = \frac{\vec{d}\vec{b}\vec{c}}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}, \quad \lambda_2 = \frac{\vec{a}\vec{d}\vec{c}}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}, \quad \lambda_3 = \frac{\vec{a}\vec{b}\vec{d}}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}.$$

Приклад розкладання вектора $\vec{d}$ за базисом векторів $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ наведено у п. 2.4 «Приклад виконання обов'язкового завдання розрахункової контрольної роботи до теми 2 «Вектори»» (завдання 6).

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що таке вектор?
2. Як визначаються одиничний та нульовий вектори?
3. Які вектори називають рівними? Колінеарними? Компланарними?
4. За якими геометричними правилами можна додавати два вектори?
5. Як помножити вектор на дійсне число?
6. Що являють собою координати вектора у просторі?
7. Як визначити напрям та довжину вектора у просторі?
8. Як пов'язані координати рівних векторів та координати колінеарних векторів?
9. Як визначити координати вектора, який задано початковою та кінцевою точками?
10. Як визначається скалярний добуток, його властивості, геометричний зміст?
11. Як визначається векторний добуток, його властивості, геометричний зміст?
12. Як визначається мішаний добуток, його властивості, геометричний зміст?
13. Яка система векторів називається лінійно залежною, а яка – лінійно незалежною?
14. Яка максимальна кількість лінійно незалежних векторів є на площині, а яка у просторі?
15. Коли кажуть, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис?

2.4. Приклад виконання обов'язкового завдання розрахункової контрольної роботи до теми 2 «Вектори»

Дано координати вершин піраміди $ABCD$:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
(2;0;0)	(0;3;0)	(0;0;6)	(2;3;8)

За допомогою методів векторної алгебри виконати наступні завдання:

1. Обчислити скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; кут між ребрами AB та AC ; проєкцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$. Зробити рисунок.

2. Обчислити площу грані ABC . Зробити рисунок та вказати вектори, що було обрано для обчислення площі.

3. Обчислити довжину медіани AM трикутника $\triangle ABC$. Зробити рисунок.

4. Знайти направляючі косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$.

5. Обчислити об'єм піраміди $ABCD$. Побудувати піраміду в декартовій системі координат; обов'язково зобразити вектори, що було обрано для обчислення об'єму, а також вказати трійку, яку утворюють ці вектори.

6. Записати розкладання вектора $\overrightarrow{AB}$ за базисом векторів $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\}$. Обов'язково перевірити, що вектори $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ утворюють базис. Зробити рисунок.

Розв'язок:

Позначимо точки A, B, C, D у декартовій системі координат у просторі та побудуємо піраміду $ABCD$ (див. рис. 4).

1. Обчислимо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; знайдемо кут між ребрами AB та AC ; обчислимо проєкцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

Будуємо вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, для цього відмічаємо в декартовій системі координат у просторі точки A, B, C . Далі знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$.

Якщо координати точок $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$, тоді вектор $\overrightarrow{AB}$ має наступні координати:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Отже, для точок $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$ та $C(0; 0; 6)$ маємо:

$$\overrightarrow{AB} = (0 - 2)\vec{i} + (3 - 0)\vec{j} + (0 - 0)\vec{k} = -2\vec{i} + 3\vec{j} \text{ або } \overrightarrow{AB} (-2; 3; 0),$$

$$\overrightarrow{AC} = (0 - 2)\vec{i} + (0 - 0)\vec{j} + (6 - 0)\vec{k} = -2\vec{i} + 6\vec{k} \text{ або } \overrightarrow{AC} (-2; 0; 6).$$

Координатний запис скалярного добутку векторів $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ та $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ має вигляд:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Відповідно, в нашому випадку маємо:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 6 = 4, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4.$$

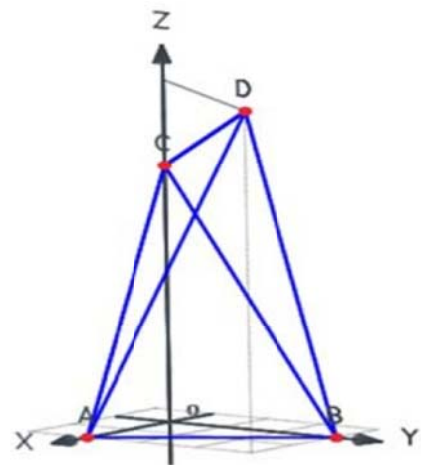


Рис. 4

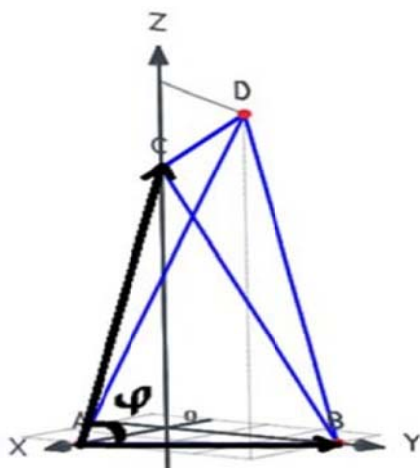


Рис. 5

Далі обчислимо кут φ між ребрами AB та AC . Його можна знайти як кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ (див. рис. 5).

Нагадаємо, що кут φ між векторами $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ та $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, визначаємо за формулою для $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Зауважимо, що $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ – довжини векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, які шукаються за формулами

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \text{ та } |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}.$$

Скалярний добуток векторів знайдено вище: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$. Тепер обчислимо довжину кожного вектора:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{13},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{40}.$$

$$\text{Отже, } \cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{40}} = \frac{2}{\sqrt{130}} = \frac{\sqrt{130}}{65}, \text{ а } \varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{130}}{65}\right).$$

Нагадаємо, що проєкція вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ дорівнює:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

В нашому прикладі потрібно знайти проєкцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$, тож маємо:

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{4}{\sqrt{40}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

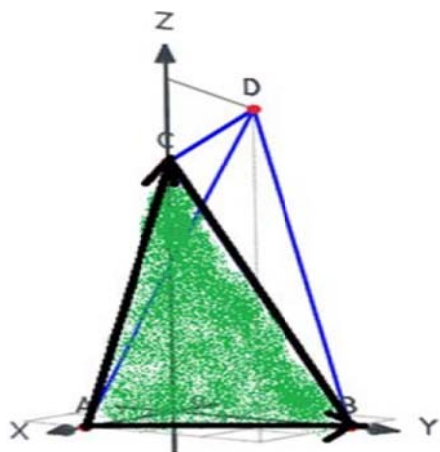


Рис. 6

2. Обчислимо площу грані ABC . Будуємо трикутник $\triangle ABC$ на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ (див. рис. 6).

Площу трикутника будемо знаходити за формулою:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|,$$

де $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ – векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$.

Нагадаємо, що координатний запис вектора, який є векторним добутком векторів $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ та $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, визначаємо за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 18\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k},$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 6(3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}).$$

Знайдемо довжину отриманого векторного добутку векторів:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 6\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = 6\sqrt{14}.$$

Відповідно, площа $S_{\Delta ABC}$ трикутника ΔABC дорівнює:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} 6\sqrt{14} = 3\sqrt{14} \text{ (кв.од.)}.$$

3. Знайдемо довжину медіани AM трикутника ΔABC . Побудуємо точку M – середину відрізка BC та обчислимо її координати:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2}, \quad z_M = \frac{z_B + z_C}{2}.$$

$$x_M = \frac{0+0}{2}, \quad y_M = \frac{0+3}{2}, \quad z_M = \frac{6+0}{2}.$$

Відповідно маємо точку $M(0; \frac{3}{2}; 3)$.

Далі побудуємо вектор $\overrightarrow{AM}$ та знайдемо його координати та довжину:

$$\overrightarrow{AM} = (0 - 2)\vec{i} + \left(\frac{3}{2} - 0\right)\vec{j} + (3 - 0)\vec{k} = -2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} + 3\vec{k}, \quad \overrightarrow{AM} \left(-2; \frac{3}{2}; 3\right).$$

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad AM = \frac{\sqrt{61}}{2}.$$

4. Знайдемо направляючі косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$ за формулами:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

$$\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + 3\vec{j}, \quad \text{або} \quad \overrightarrow{AB} (-2; 3; 0), \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$$

$$\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \cos \gamma = 0.$$

5. Обчислимо об'єм піраміди $ABCD$. Для цього побудуємо піраміду $ABCD$ та позначимо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ й $\overrightarrow{AD}$, як показано на рис. 7.

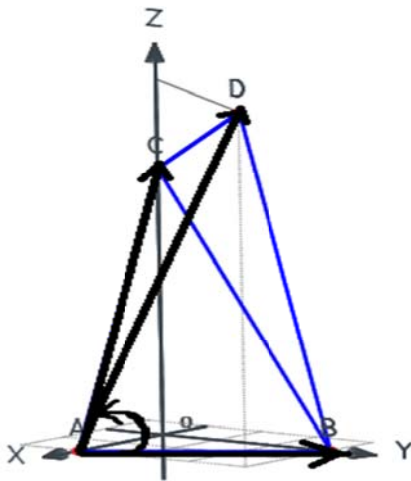


Рис. 7

Нагадаємо, що об'єм піраміди, побудованої на векторах:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}, \\ \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k},$$

визначаємо за формулою:

$$V_{abc} = \pm \frac{1}{6} \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$$

де $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ – мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, що береться зі знаком «+», якщо $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють «праву трійку векторів», та зі знаком «-», якщо «ліву трійку векторів». Мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ знаходимо за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Зауважимо, що вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ утворюють «праву трійку векторів».

Координати векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ було знайдено в п. 1 розрахункової контрольної роботи до теми 2 «Вектори»:

$$\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + 3\vec{j} \text{ або } \overrightarrow{AB} (-2; 3; 0), \\ \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + 6\vec{k} \text{ або } \overrightarrow{AC} (-2; 0; 6).$$

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AD} = (2 - 2)\vec{i} + (3 - 0)\vec{j} + (8 - 0)\vec{k} = 3\vec{j} + 8\vec{k} \text{ або } \overrightarrow{AD} (0; 3; 8).$$

Далі обчислимо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 84.$$

Вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$ утворюють «праву трійку векторів», тоді в формулі для обчислення об'єму піраміди $ABCD$ обираємо знак «+»:

$$V_{ABCD} = + \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{6} \cdot 84 = 14 \text{ (куб. од.)}.$$

6. Знайдемо розкладання вектора $\overrightarrow{AB}$ за базисом векторів $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\}$ та перевіримо,

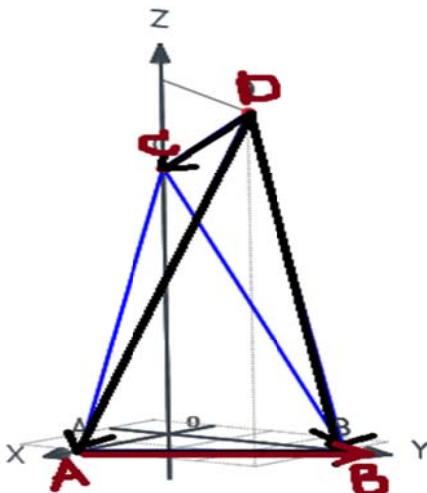


Рис. 8

що вектори $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ утворюють базис. Для цього побудуємо вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ (див. рис. 8) та визначимо їхні координати. Нехай:

$$\vec{d} := \overrightarrow{AB}, \vec{d} = -2\vec{i} + 3\vec{j},$$

$$\vec{a} := \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}, \vec{a} = -3\vec{j} - 8\vec{k},$$

$$\vec{b} := \overrightarrow{DB} = (0 - 2)\vec{i} + (3 - 3)\vec{j} + (0 - 8)\vec{k} = -2\vec{i} - 8\vec{k},$$

$$\vec{c} := \overrightarrow{DC} = (0 - 2)\vec{i} + (0 - 3)\vec{j} + (6 - 8)\vec{k} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k},$$

Тож маємо $\vec{d}(-2; 3; 0)$, $\vec{a}(0; -3; -8)$, $\vec{b}(-2; 0; -8)$, $\vec{c}(-2; -3; -2)$.

Розкладемо вектор $\overrightarrow{AB}$ за базисом векторів $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\}$. Для цього необхідно записати вектор $\vec{d}$ у вигляді:

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}: \vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}.$$

Спочатку обов'язково маємо перевірити, чи утворюють вектори $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ базис.

Нагадаємо, що вектори $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ утворюють базис у метричному просторі $\mathbb{R}^3$, якщо $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є лінійно незалежними векторами. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є лінійно незалежними векторами тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$, тобто вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не є компланарними.

Тож обчислимо мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -8 \\ -2 & 0 & -8 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -84 \neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є лінійно незалежними, тож утворюють базис $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ в $\mathbb{R}^3$. До того ж, можемо записати, що:

$$\exists! \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}: \vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}.$$

Нагадаємо, що для знаходження $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ необхідно перейти до системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_x \lambda_1 + b_x \lambda_2 + c_x \lambda_3 = d_x \\ a_y \lambda_1 + b_y \lambda_2 + c_y \lambda_3 = d_y \\ a_z \lambda_1 + b_z \lambda_2 + c_z \lambda_3 = d_z \end{cases}$$

Зауважимо, що визначник $\det A$ матриці цієї системи дорівнює:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

$$\det A = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Вище було показано, що якщо $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ утворюють базис в $\mathbb{R}^3$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$. Отже, відповідно й $\det A \neq 0$. А це означає, що наведена система лінійних рівнянь має тільки один розв'язок:

$$\exists! \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

та може бути розв'язана за допомогою будь-якого методу розв'язку систем лінійних рівнянь: матричний метод, метод Крамера, метод Гаусса, метод Жордана–Гаусса.

У нашому прикладі система лінійних рівнянь має наступний вид:

$$\begin{cases} -2\lambda_2 - 2\lambda_3 = -2 \\ -3\lambda_1 - 3\lambda_3 = 3 \\ -8\lambda_1 - 8\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Застосуємо метод Гаусса, який описано в п. 1.3 «Системи лінійних рівнянь та методи їх розв'язку». Для цього запишемо розширену матрицю системи $\bar{A}$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ -8 & -8 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Виконуючи низку елементарних перетворень з рядками матриці $\bar{A}$ (прямий хід), маємо:

$$\begin{aligned} \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ -8 & -8 & -2 & 0 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -4 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Здійснимо зворотній хід, записавши систему у виді:

$$\begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 = -1 \end{cases}.$$

Відповідно, маємо $\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b}$ або $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$.

2.5. Завдання за темою 2 для самостійної роботи

Дано точки A, B, C, D . За допомогою методів векторної алгебри виконати наступні завдання:

I. Обчислити скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; кут між ребрами AB та AC ; проєкцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$. Зробити рисунок.

2. Обчислити площу грані ABC . Зробити рисунок та вказати вектори, які було обрано для обчислення площі.

3. Обчислити довжину медіани AM трикутника $\triangle ABC$. Зробити рисунок.

4. Знайти направляючі косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$.

5. Обчислити об'єм піраміди $ABCD$. Побудувати піраміду в декартовій системі координат; обов'язково зобразити вектори, що було обрано для обчислення об'єму, а також вказати трійку, яку утворюють ці вектори.

6. Записати розкладання вектора $\overrightarrow{AB}$ за базисом векторів $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\}$. Обов'язково перевірити, що вектори $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ утворюють базис. Зробити рисунок.

Варіанти завдань:

N°	A	B	C	D
1.	(2;1;2)	(-2;3;4)	(-6;-3;3)	(4;5;-1)
2.	(6;3;3)	(-4;5;1)	(-2;1;-2)	(2;3;-4)
3.	(2;4;6)	(-2;5;3)	(-2;3;3)	(1;4;-3)
4.	(1;4;3)	(-2;4;6)	(-2;5;-3)	(2;3;-3)
5.	(2;3;3)	(-1;4;3)	(-2;4;-6)	(2;5;-3)
6.	(2;5;3)	(-2;3;3)	(-1;4;-3)	(2;4;-6)
7.	(6;2;5)	(-2;4;1)	(-3;4;-2)	(6;3;-1)
8.	(6;3;1)	(-6;2;5)	(-2;4;-1)	(3;4;-2)
9.	(3;4;2)	(-6;3;1)	(-6;2;-5)	(2;4;-1)
10.	(2;4;1)	(-3;4;2)	(-6;3;-1)	(6;2;-5)

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Гаврильченко Х. І., Полушкін С. П., Кропив'янський П. С. Вища математика : збірник задач у 2 ч. Ч. 1 : Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення : навч. посіб. для студ. вищ. техн. навч. закл. / за заг. ред. П. П. Овчинникова. Київ : Техніка, 2003. 279 с.
2. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посібник. Київ : А.С.К., 2011. 648 с.
3. Дубовик В. П., Юрик І. І., Вовкодав І. П. Вища математика : збірник задач : навч. посіб. / за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. Київ : А.С.К., 2005. 480 с.
4. Завало С. Т. Курс алгебри. К. : Вища школа, 1985. 503 с.
5. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика : підручник у 2 ч. Ч. 1 : Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. / за заг. ред. П. П. Овчинникова. 3-тє вид., випр. Київ : Техніка, 2002. 600 с.
6. Рубіш В. В. Конспект лекцій з курсу «Вища математика» : Ч. 1. Ужгород : ДВНЗ УжНУ, 2015. 96 с.

Для нотаток

Електронне навчальне видання комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимі

Кузнєцова Вікторія Олександрівна
Чернова Ганна Вікторівна

**МАТРИЦІ.
СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. ВЕКТОРИ**

Методичні рекомендації до виконання
розрахункової роботи з дисципліни «Вища математика»
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

Коректор *О. В. Анцибора*
Комп'ютерне верстання *В. Кузнєцова, Г. Чернова*

Підписано до розміщення 19.12.2023. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 2,98. Обсяг 0,832 Мб. Зам. № 228/23.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.2009.
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна