Полиномы, ортогональные на круге, и их приложения

Я. Л. Геронимус

§ 1.

Введение.

Теория полиномов, ортогональных на круге, разработана значительно меньше, чем теория полиномов, ортогональных на вещественной оси; первая работа в этом направлении принадлежит G. Szegö [1] [1]) и появилась в 1921 году; при дальнейшей разработке этой теории G. Szegö ([4]—[6]) обнаружил, что полиномы, ортогональные на конечном отрезке вещественной оси, весьма просто выражаются через полиномы, ортогональные на круге; из асимптотических формул для случая круга вытекают, как простое следствие, аналогичные формулы для вещественной оси.

Кроме того — при решении так называемой тригонометрической проблемы моментов полиномы, ортогональные на круге, играют такую же важную роль, какую для степенной проблемы моментов играют полиномы, ортогональные на вещественной оси; и, наконец, исследование целого ряда свойств аналитических функций, регулярных внутри круга и ограниченных, или псевдоположительных в этой области, также требуют разработки теории полиномов, ортогональных на круге.

Все эти соображения побудили меня заняться разработкой этой теории и ее применений к указанным проблемам. Настоящая статья является конспектом ряда докладов, читанных в Научно-исследовательском институте математики и механики ХГУ; в ней систематически изложены основные результаты исследований автора в этой области за последние пять лет — некоторые из них уже опубликованы ([1] — [3]), другие появляются впервые.

Статья предполагает знакомство читателя с названными работами G. Szegö, с его исчерпывающей монографией по ортогональным полиномам [6], подводящей итоги всему, сделанному в этой области по 1939 год, а также с прекрасной книгой Н. Ахиезера и М. Крейна [1] по теории моментов.

§ 2.

Обобщенные моменты и ортогональные полиномы.

Рассмотрим последовательность комплексных чисел $\{c_k\}_0^n$, подчиненную условиям

$$(2.1)\quad \Delta_k = \left| c_{i-j} \right|_0^k = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \ldots \ldots c_k \\ c_{-1} & c_0 \ldots \ldots c_{k-1} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{-k} & c_{-k+1} \ldots c_0 \end{vmatrix} \neq 0;\ c_{-k} = \bar{c}_k,\ (k = 0, 1, \ldots, n);$$

1) Цифры в квадратных скобках относятся к указателю литературы в конце статьи.

построим систему полиномов $\{P_k(z)\}_0^n$

$$(2.2)\quad P_k(z)=\frac{1}{\Delta_{k-1}}\begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \dots & c_{-k}\\ c_1 & c_0 & \dots & c_{-k+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_{-1}\\ 1 & z & \dots & z^k \end{vmatrix}=z^k+\dots,\quad (k=0,1,\dots,n);\quad \Delta_{-1}=1.$$

Рассмотрим линейный функционал σ, полагая

$$(2.3)\qquad \sigma\left\{\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k z^k\right\}=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k\, c_{-k}.$$

Теорема 2.1 [2]). Полиномы $\{P_k(z)\}_0^n$ ортогональны относительно последовательности $\{c_k\}_0^n$, т. е.

$$(2.4)\qquad \sigma\left\{P_k(z)\overline{P}_m\left(\frac{1}{z}\right)\right\}=\begin{cases}0, & k\neq m, \quad (k,m=0,1,\dots,n)\\ h_k=\dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}\neq 0, & k=m.\end{cases}$$

Для доказательства достаточно заметить, что

$$(2.5)\quad \sigma\left\{P_k(z)\,z^{-\nu}\right\}=\frac{1}{\Delta_{k-1}}\begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \dots & c_{-k}\\ c_1 & c_0 & \dots & c_{-k+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_{-1}\\ c_\nu & c_{\nu-1} & \dots & c_{\nu-k} \end{vmatrix}=\begin{cases}0, & 0\leqslant\nu\leqslant k-1;\\ h_k, & \nu=k.\end{cases}$$

Примечание. В том частном случае, когда вместо (2.1) мы имеем $\{\Delta_k\}_0^n>0$, последовательность $\{c_k\}_0^n$ допускает представление [3])

$$(2.6)\qquad c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ik\theta}\,d\sigma(\theta),\quad (k=0,1,\dots,n),$$

где $\sigma(\theta)$ — ограниченная неубывающая функция, имеющая в $[0,2\pi]$ по крайней мере $n+1$ точек роста; в этом случае полиномы $\{P_k(z)\}_0^n$ ортогональны на единичном круге.

$$(2.7)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_k\left(e^{i\theta}\right)\overline{P_m\left(e^{i\theta}\right)}\,d\sigma(\theta)=\begin{cases}0, & k\neq m,\ (k,m=0,1,\dots,n)\\ h_k=\dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}>0, & k=m,\end{cases}$$

относительно обложения $d\sigma(\theta)$.

§ 3.

Параметры $\{a_k\}_0^{n-1}$ и рекуррентные формулы.

Введем последовательность параметров $\{a_k\}_0^{n-1}$, являющихся обобщенными коэфициентами Фурье функци $\frac{1}{z}$, т. е.

---

[2]) См. Н. Ахиезер и М. Крейн [1], гл. I.

[3]) См. 1. с. [2]); см. также § 10 настоящей статьи; благодаря соотношению (2.6) мы называем числа $\{c_k\}_0^n$ в общем случае обобщенными тригонометрическими моментами.

$$(3.1)\qquad a_k h_k = \sigma\left\{\frac{1}{z}\bar{P}_k\left(\frac{1}{z}\right)\right\},\quad (k=0,1,\ldots,n-1);$$

воспользовавшись формулой (2.2), мы легко получим следующую формулу, выражающую параметры через обобщенные моменты

$$(3.2)\qquad (-1)^k a_k = \frac{|c_{l-j+1}|_0^k}{|c_{l-j}|_0^k} = \frac{1}{\Delta_k}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \ldots & c_{k+1} \\ c_0 & c_1 \ldots & c_k \\ c_{-1} & c_0 \ldots & c_{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{-k+1} & c_{-k+2} \ldots & c_1 \end{vmatrix},\ (k=0,1,\ldots \ldots n-1).$$

Теорема 3.1. Ортогональные полиномы $\{P_k(z)\}_0^n$ связаны соотношением[4])

$$(3.3)\ P_{k+1}(z) = z P_k(z) - \bar{a}_k P_k^*(z),\quad P_k^*(z) = z^k P_k\left(\frac{1}{z}\right); (k=0,1\ldots,n-1);$$

имеет место трехчленная рекуррентная формула

$$(3.4)\qquad \bar{a}_k P_{k+2}(z) = (\bar{a}_k z + \bar{a}_{k+1}) P_{k+1}(z) - \bar{z} a_{k+1}(1-|a_k|^2) P_k(z),$$
$$(k=0,1,\ldots,n-2);\ P_0 = 1,\ P_1(z) = z - \bar{a}_0.$$

Для вывода (3.3) запишем полином $P_k(z)$ таким образом

$$(3.5)\qquad \frac{P_k(z) - z^k}{z^{k-1}} = \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i^{(k)} \bar{P}_i\left(\frac{1}{z}\right);$$

отсюда, пользуясь (3.1), мы находим для $\nu \leqslant k-1$

$$\sigma\left\{\frac{P_k(z)\ P_\nu(z)}{z^{k-1}}\right\} - \sigma\{z P_\nu(z)\} = -\bar{a}_\nu h_\nu = \mu_\nu^{(k)} h_\nu;$$

таким образом, мы имеем

$$P_k(z) = z^k - \sum_{\nu=0}^{k-1} \bar{a}_\nu\, z^{k-1}\, P_\nu\left(\frac{1}{z}\right),$$

откуда вытекает (3.3).

Для вывода (3.4) запишем (3.3) в такой форме

$$(3.6)\qquad P_{k+1}^*(z) = P_k^*(z) - z a_k P_k(z),\ (k=0,1,\ldots,n-1);$$

в таком случае имеем

$$\bar{a}_k P_{k+2}(z) = \bar{a}_k\{z P_{k+1}(z) - \bar{a}_{k+1} P_{k+1}^*(z)\} = \bar{a}_k z P_{k+1}(z) -$$
$$- \bar{a}_k \bar{a}_{k+1} P_k^*(z) + a_{k+1}|a_k|^2 z P_k(z).$$

Подставляя вместо $\bar{a}_k P_k^*(z)$ его значение из (3.3), приходим к (3.4).

[4]) G. Szegö ([6], § 11,4); см. также Я. Л. Геронимус [1].

§ 4.

Ортогональность полиномов, удовлетворяющих рекуррентному соотношению.

Умножая обе части (3.4) на z^{-k-1} и пользуясь (2.4), мы получим соотношение

(4.1) $$h_{k+1}=h_k(1-|a_k|^2),\ (k=0,1,\ldots,n-1);\ h_0=c_0,$$

весьма важное для всего дальнейшего; отсюда вытекает

(4.2) $$h_{k+1}=\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}=c_0\prod_{\nu=0}^{k}(1-|a_\nu|^2),\ (k=0,1,\ldots,n-1);$$

пользуясь (2.4), мы находим отсюда

(4.3) $$\frac{\Delta_{k+1}\Delta_{k-1}}{\Delta_k^2}=1-|a_k|^2;$$

$$|a_k|=\frac{\sqrt{\Delta_k^2-\Delta_{k+1}\Delta_{k-1}}}{\Delta_k},\ (k=0,1,\ldots,n-1).$$

Это соотношение вытекает также непосредственно из свойств миноров взаимных определителей.

Отсюда вытекает, что условия $\{\Delta_k\}_0^n\neq 0$ эквивалентны условиям $\{|a_k|\}_0^{n-1}\neq 1$, а условия $\{\Delta_k\}_0^n>0$ эквивалентны условиям $\{|a_k|\}_0^{n-1}<1$.

Теорема 4.1. Система полиномов $\{P_k(z)\}_0^n$, построенная по формуле (3.3), или (3.4), при условиях $\{|a_k|\}_0^{n-1}\neq 1$, ортогональна относительно последовательности $\{c_k\}_0^n$, которая определяется (вплоть до множителя) из соотношения (3.2).

Мы имеем из (3.3) при $\nu\leqslant k$

(4.4) $$\sigma\left\{\frac{P_{k+1}(z)}{z^\nu}\right\}=\sigma\left\{\frac{P_k(z)}{z^{\nu-1}}\right\}-\bar a_k\sigma\left\{z^{k-\nu}\bar P_k\left(\frac{1}{z}\right)\right\};$$

если положить по (3.2) $c_1=c_0a_0$, то соотношение

(4.5) $$\sigma\left\{\frac{P_k(z)}{z^{\nu-1}}\right\}=0$$

справедливо при $0<\nu\leqslant k\leqslant 1$; допустим его справедливость при $0<\nu\leqslant k\leqslant m<n$, причем моменты $\{c_k\}_0^m$ найдены из (3.2); из (4.4) вытекает справедливость (4.5) для $0<\nu\leqslant k\leqslant m+1$; при $\nu=0$ правая часть (4.4) равна нулю по (3.1)

$$\sigma\{zP_k(z)\}-\bar a_k\sigma\left\{z^k\bar P_k\left(\frac{1}{z}\right)\right\}=\sigma\{z P_k(z)\}-\bar a_k h_k=0,$$

если найти c_{m+1} из (3.2); при $\nu = k+1$ снова получим (4.1). Покажем теперь, что из (3.4) вытекает (3.3); положим

$$P_{k+1}(z) = z P_k(z) - \bar{a}_k R_k(z), \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{4.6}$$

где $R_k(z)$ — полином k-ой степени. Из (3.4) имеем

$$R_{k+1}(z) = R_k(z) - z a_k P_k(z), \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{4.7}$$

откуда вытекает

$$R_0(z) = 1, \qquad R_1(z) = 1 - a_0 z = P_1^*(z).$$

Предположим, что $\left\{ R_k(z) \equiv P_k(z) \right\}_0^m$; мы имеем по (4.6)

$$P_{m+1}(z) = z P_m(z) - \bar{a}_m P_m^*(z), \qquad P_{m+1}^*(z) = P_m^*(z) - a_m z P_m(z), \tag{4.8}$$

а из (4,7) находим

$$R_{m+1}(z) = P_m^*(z) - z a_m P_m(z),$$

откуда

$$R_{m+1}(z) \equiv P_{m+1}^*(z).$$

§ 5.

Полиномы второго рода.

Полиномы $\left\{ \Omega_k(y) \right\}_0^n$, определяемые формулой

$$\Omega_k(y) = \frac{1}{c_0} \sigma \left\{ \frac{z+y}{z-y} \left[P_k(z) - P_k(y) \right] \right\} = y^k + \ldots\ldots, \quad (k = 1, 2 \ldots, n), \tag{5.1}$$

$$\Omega_0 = 1,$$

будем называть полиномами второго рода; по (3,2) имеем

$$\Omega_1(y) = \frac{1}{c_0} \sigma \left\{ \frac{z+y}{z-y} (z-y) \right\} = y + \bar{a}_0. \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. Полиномы второго рода связаны рекуррентным соотношением

$$\Omega_{k+1}(z) = z \Omega_k(z) + \bar{a}_k \Omega_k^*(z), \quad (k = 0, 1, \ldots\ldots, n-1), \tag{5.3}$$

или трехчленной рекуррентной формулой

$$\bar{a}_k \Omega_{k+2}(y) = (\bar{a}_k y + \bar{a}_{k+1}) \Omega_{k+1}(y) - \bar{a}_{k+1} y (1 - |a_k|^2) \Omega_k(y), \tag{5.4}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-2),$$

$$\Omega_0 = 1, \qquad \Omega_1(y) = y + \bar{a}_0.$$

Для доказательства составляем выражение

$$\bar{a}_k \Omega_{k+2}(y) - (\bar{a}_k y + \bar{a}_{k+1}) \Omega_{k+1}(y) + \bar{a}_{k+1} y (1 - |a_k|^2) \Omega_k(y) =$$

$$= \frac{1}{c_0} \sigma \left\{ \frac{z+y}{z-y} [\bar{a}_k P_{k+2}(z) - (\bar{a}_k y + \bar{a}_{k+1}) P_{k+1}(z) + \right. \tag{5.5}$$

$$\left. + \bar{a}_{k+1} y (1 - |a_k|^2) P_k(z)] \right\} =$$

$$= \frac{1}{c_0} \sigma \left\{ (z+y) [\bar{a}_k P_{k+1}(z) - \bar{a}_{k+1} (1 - |a_k|^2) P_k(z)] \right\};$$

пользуясь (3.1) находим, что при $k \geqslant 1$ это выражение равно нулю, ибо по (4.1) имеем

$$\frac{1}{c_0} \left[\bar{a}_k \bar{a}_{k+1} h_{k+1} - \bar{a}_k \bar{a}_{k+1} (1 - |a_k|^2) h_k \right] = 0;$$

при $k \neq 0$ имеем по (4.1)

$$\bar{a}_0 \mathfrak{Q}_2(y) - (\bar{a}_0 y + \bar{a}_1)\mathfrak{Q}_1(y) = \frac{1}{c_0}\sigma\{(z+y)[\bar{a}_0 P_1(z) - \bar{a}_1(1-|a_0|^2)]\} =$$

$$= \frac{\bar{a}_0\bar{a}_1 h_1}{c_0} - \bar{a}_1(1-|a_0|^2)\frac{c_1}{c_0} - \bar{a}_1 y(1-|a_0|^2) = -a_1 y(1-|a_0|^2),$$

т. е. (5.4) справедливо и при $k=0$.

Из (5.4) выводим (5.3) тем же путем, как в § 3.

Отметим соотношение

$$P_k^*(z)\mathfrak{Q}_k(z) + P_k(z)\mathfrak{Q}_k^*(z) = \frac{2h_k z^k}{c_0}, \quad (k=0, 1, \ldots, n); \tag{5.6}$$

оно весьма просто выводится из (3.3) и (5.3) и сыграет очень важную роль во всем дальнейшем изложении.

Теорема 5.2. Если $\{|a_k|\}_0^{n-1} \neq 1$ и $\neq 0$, то непрерывная дробь

$$K_n(z) = 1 + \frac{2a_0 z}{|1 - a_0 z} - \frac{\frac{a_1}{a_0}z(1-|a_0|^2)|}{|1 + \frac{a_1}{a_0}z} - \ldots\ldots - \frac{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}z(1-|a_{n-2}|^2)|}{|1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}z} \tag{5.7}$$

имеет подходящими дробями выражения

$$K_m(z) = \frac{\mathfrak{Q}_m^*(z)}{P_m^*(z)}. \tag{5.8}$$

По общей теории непрерывных дробей, числители и знаменатели удовлетворяют уравнению в конечных разностях

$$u_{k+2} = \left(1 + \frac{a_{k+1}}{a_k}z\right)u_{k+1} - \frac{a_{k+1}}{a_k}z(1-|a_k|^2)u_k, \quad (k=0,1,\ldots, n-2); \tag{5.9}$$

из (3.4) и (5.4) ясно, что независимыми частными решениями его являются $\mathfrak{Q}_k^*(z)$ и $P_k^*(z)$, причем

$$K_1(z) = \frac{1+a_0 z}{1-a_0 z} = \frac{\mathfrak{Q}_1^*(z)}{P_1^*(z)}.$$

§ 6.

Ряд, соответствующий непрерывной дроби.

Докажем следующую теорему:

Теорема 6.1. Если заданы параметры $\{|a_k|\}_0^{n-1} \neq 1$ [5]), то при всех значениях параметра $a_n \neq 0$ имеем (в достаточно малой окрестности точки $z=0$) разложение[6])

$$-\frac{c_0}{2}\frac{\mathfrak{Q}_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)} = -\frac{c_0}{2}\cdot\frac{z\mathfrak{Q}_n(z) + \bar{a}_n\mathfrak{Q}_n^*(z)}{zP_n(z) - \bar{a}_n P_n^*(z)} = \tag{6.1}$$

$$= \frac{c_0}{2} + c_1 z + \ldots\ldots + c_n z^n + (z^{n+1}).$$

---

[5]) Можно вместо параметров задать моменты $\{c_k\}_0^n$, причем $\{\Delta_k\}_0^n \neq 0$.

[6]) (z^{n+1}) обозначает совокупность членов с z^{n+1}, z^{n+2} и т. д.

Рассмотрим сперва случай $\frac{1}{a_n}=0$, т. е. разложение функции

(6.2) $$\frac{c_0}{2}\cdot\frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k z^k;$$

так как $P_n^*(0)=1$, то оно сходится в некоторой области $|z|<r$;

пусть $P_n(y)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i y^i$; в таком случае имеем

$$P_n^*(y)=\sum_{i=0}^{n}\bar{\alpha}_i y^{n-i};\qquad \Omega_n^*(y)=-\frac{1}{c_0}\sigma\left\{\frac{z+y}{z-y}\left[\frac{y^n}{z^n}P_n^*(z)-P_n^*(y)\right]\right\}=$$

(6.3) $$=\frac{1}{c_0}\sum_{i=0}^{n}\alpha_{n-i}\,\sigma\left\{y^i\left(1+\frac{y}{z}\right)\left[1+\frac{y}{z}+\ldots\ldots+\frac{y^{n-i+1}}{z^{n-i+1}}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{c_0}\sum_{i=0}^{n}\bar{\alpha}_{n-i}(c_0y^i+2c_1y^{i+1}+\ldots\ldots+2c_{n-i-1}y^{n-1}+c_{n-i}y^n).$$

Приравнивая друг другу коэфициенты при $\{y^k\}_0^n$ полиномов

$\frac{c_0}{2}\Omega_n^*(y)$ и $P_n^*(y)\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k y^k$, находим

$$\gamma_0=\frac{c_0}{2};\ \sum_{s=1}^{k}c_s\bar{\alpha}_{n-k+s}+\frac{1}{2}c_0\bar{\alpha}_{n-k}=\gamma_0\alpha_{n-k}+$$

$$+\sum_{s=1}^{k}\gamma_s\bar{\alpha}_{n-k+s},\ (k=1,2,\ldots,n),$$

откуда $\left\{\gamma_k=c_k\right\}_1^n$.

Пусть теперь $\frac{1}{a_n}\neq 0$ и $a_n\neq 0$; так как

$$-P_k(0)=\Omega_k(0)=\bar{a}_{k-1},\ (k=1,2,\ldots,n+1),$$

то функция $\frac{\Omega_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)}$ регулярна при $z=0$; пользуясь (6.1) и (5.6), находим

(6.4) $$-\frac{c_0}{2}\cdot\frac{\Omega_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)}-\frac{c_0}{2}\cdot\frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}=-\frac{z^{n+1}}{P_{n+1}(z)P_n^*(z)};$$

так как $P_{n+1}(0)P_n^*(0)=-\bar{a}_n\neq 0$, то отсюда вытекает, что функции (6.1) и (6.2) имеют $n+1$ одинаковых первых коэфициентов ряда Маклорена.

§ 7.

Полиномы $\left\{ P_k(z;\lambda) \right\}$ и их ортогональность.

Пусть $|\lambda|=1$; рассмотрим последовательность параметров

$$a'_k=\lambda a_k, \quad (k=0,1,\ldots,n-1), \tag{7.1}$$

и построим систему полиномов $\{P_k(z;\lambda)\}_0^n$ по формуле

$$P_{k+1}(z;\lambda)=z\,P_k(z;\lambda)-\bar{a}'_k\,P_k^*(z;\lambda), \quad (k=0,1,\ldots,n-1); \tag{7.2}$$

$$P_0(z;\lambda)=1.$$

Теорема 7.1. Полиномы $\{P_k(z;\lambda)\}_0^n$ являются наиболее общим полиномиальным решением уравнения в конечных разностях

$$\bar{a}_k u_{k+2}=\left(\bar{a}_k z+\bar{a}_{k+1}\right)u_{k+1}-\bar{a}_{k+1}z\left(1-|a_k|^2\right)u_k \tag{7.3}$$

при условии, что u_k является полиномом k-ой степени и $\frac{u_1}{u_0}=z-a$, $|a|<1$; они выражаются через $P_k(z)$ и $\Omega_k(z)$ формулой

$$P_k(z;\lambda)=\frac{1+\bar{\lambda}}{2}P_k(z)+\frac{1-\bar{\lambda}}{2}\Omega_k(z), \quad (k=0,1,\ldots,n), \tag{7.4}$$

и ортогональны относительно последовательности $\{c'_k\}_0^n$, причем

$$c'_0=c_0,\ c'_1=\lambda c_1;\ c'_k=\lambda c_k-\frac{1-\lambda}{c_0}\sum_{i=1}^{k-1}c_i c'_{k-i}, \tag{7.5}$$

$$(k=2,3,\ldots,n).$$

Действительно, сокращая все $\{u_k\}_1^n$ на u_0 и пользуясь тем же методом, как в § 4, мы видим, что из (7.3) вытекает

$$u_{k+1}(z)=z\,u_k(z)-\bar{a}''_k\,u_k^*(z), \quad (k=0,1,\ldots,n-1);\quad a''_0=a; \tag{7.6}$$

при этом должны быть соблюдены условия

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a''_{k+1}}{a''_k}, \quad (k=0,1,\ldots,n-2), \tag{7.7}$$

$$|a_k|=|a''_k|, \quad (k=0,1,\ldots,n-1),$$

откуда ясно, что $a''_k=\lambda a_k=a'_k$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$, причем $|\lambda|=1$. Так как $P_k(z)$ и $\Omega_k(z)$ являются линейно независимыми частными решениями (7.3), то

$$P_k(z;\lambda)=A\,P_k(z)+B\,\Omega_k(z), \quad (k=0,1,\ldots,n);$$

полагая $k=0$ и $k=1$ и находя A и B, мы приходим к (7.4). На основании теоремы 4.1, полиномы $\{P_k(z;\lambda)\}_0^n$ ортогональны относительно некоторой последовательности $\{c_k\}_0^n$, причем по теореме 6.1 имеем

$$(7.8)\qquad \frac{c_0'}{2}\cdot\frac{\Omega_n^*(z;\lambda)}{P_n^*(z;\lambda)}=\frac{c_0'}{2}+c_1'z+\ldots\ldots+c_n'z^n+(z^{n+1}),\ |z|<r;$$

так как из (7.4) находим

$$(7.9)\qquad P_n^*(z;\lambda)=\frac{1+\lambda}{2}P_n^*(z)+\frac{1-\lambda}{2}\Omega_n^*(z);$$

$$\Omega_n^*(z;\lambda)=\frac{1-\lambda}{2}P_n^*(z)+\frac{1+\lambda}{2}\Omega_n^*(z),$$

то (7.8) можно записать еще таким образом

$$(7.10)\qquad \frac{c_0'}{2}\,\frac{(1-\lambda)+(1+\lambda)\dfrac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}}{(1+\lambda)+(1-\lambda)\dfrac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}}=\frac{c_0'}{2}+c_1'z+\ldots\ldots+c_n'z^n+(z^n+1).$$

Пользуясь (6.1) мы находим

$$\frac{c_0'}{2}\Big\{c_0+(1+\lambda)\sum_{k=1}^{n}c_kz^k+(z^n+1)\Big\}=\Big\{c_0+(1-\lambda)\sum_{k=1}^{n}c_kz^k+(z^{n+1})\Big\}\cdot$$

$$\cdot\Big\{\frac{c_0'}{2}+\sum_{k=1}^{n}c_k'z^k+(z^n+1)\Big\};$$

приравнивая друг другу коэфициенты при $\{z^k\}_0^n$, в обеих частях равенства, мы приходим к (7.5).

§ 8.

Формула Кристоффеля—Дарбу.

Теорема 8.1. Для полиномов $\{P_k(z)\}_0^n$, ортогональных относительно числовой последовательности $\{c_k\}_0^n$, имеет место формула[7])

$$(8.1)\qquad K_m(x,y)=\sum_{k=0}^{m}\frac{P_k(x)\overline{P_k(y)}}{h_k}=\frac{P_m^*(x)\overline{P_m^*(y)}-x\bar{y}\,P_m(x)\overline{P_m(y)}}{h_m(1-\bar{x}y)},$$

$$(m=0,1,\ldots,n),$$

аналогичная формуле Кристоффеля-Дарбу.
Справедливость этой формулы при $m=0$ очевидна; для вывода её при любом $m\leqslant n-1$ находим

$$\frac{P_m^*(x)\overline{P_m^*(y)}-x\bar{y}\,P_m(x)\overline{P_m(y)}}{h_m(1-x\bar{y})}-$$

[7]) Формула (8.1) впервые получена G. Szegö ([6], § 11.4); см. также Я. Л. Геронимус [1].

$$\frac{P^*_{m-1}(x)\overline{P^*_{m-1}(y)} - x\bar{y}\,P_{m-1}(x)\overline{P_{m-1}(y)}}{h_{m-1}(1-x\bar{y})};$$

пользуясь (4.1) и (4.3), мы легко находим, что это выражение имеет следующую величину

$$\frac{\left[x P_{m-1}(x) - \bar{a}_{m-1} P^*_{m-1}(x)\right]\left[\bar{y}\,\overline{P_{m-1}(y)} - a_{m-1}\overline{P^*_{m-1}(y)}\right]}{h_m} =$$

$$= \frac{P_m(x)\,\overline{P_m(y)}}{h_m},$$

откуда следует (8.1).

Отметим два частных случая (8.1):

$$(8.2)\quad K_m(x,x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{|P_k(x)|^2}{h_k} = \frac{|P^*_m(x)|^2 - |x P_m(x)|^2}{h_m(1-|x|^2)}, \quad (m=0,1,\ldots,n);$$

$$(8.3)\quad K_m(x,0) = \sum_{k=0}^{m} \frac{P_k(x)\overline{P_k(0)}}{h_k} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{a_{k-1}P_k(x)}{h_k} + \frac{1}{c_0} = \frac{P^*_m(x)}{h_m},$$

$$(m=0,1,\ldots,n).$$

Отметим также аналогичную формулу

$$(8.4)\quad \sum_{k=0}^{m} \frac{P_k(x)\,\overline{\Omega_k(x)}}{h_k} = \frac{2}{c_0(1-|x|^2)} - \frac{P^*_m(x)\overline{\Omega^*_m(x)} + |x|^2 P_m(x)\overline{\Omega_m(x)}}{h_m(1-|x|^2)}$$

$$(m=0,1,\ldots,n);$$

она выводится без труда тем же методом, что и формула (8.1).

§ 9.

Свойства корней полиномов $\{P_k(z)\}_0^n$ при $\{|a_k|\}_0^n < 1$.

До сих пор мы подчиняли параметры $\{|a_k|\}_0^{n-1}$ условиям $\{|a_k|\}_0^{n-1} \neq 1$; впредь мы ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая

$$(9.1)\qquad |a_k| < 1,\ (k=0,1,\ldots,n-1).$$

Как мы показали в § 4, эти условия эквивалентны таким[8])

$$(9.2)\qquad \Delta_k > 0,\ (k=0,1,\ldots,n).$$

Теорема 9.1. При условии $\{|a_k|\}_0^{n-1} < 1$ все корни полиномов $\{P_k(z)\}_0^n$, построенных по формуле (3.3) или (3.4)

[8]) Последовательности $\{c_k\}_0^n$, удовлетворяющие этим условиям, называются позитивными; они подробно рассмотрены в книге Н. Ахиезера и М. Крейна [1] (гл. I—II).

лежат в области $|z|<1$[9]; если $a_k \neq 0$, то полиномы $P_k(z)$ и $P_{k+1}(z)$ не имеют общих корней.

При $|a_n|=1$ все корни полинома $P_{n+1}(z)$ простые и лежат на круге $|z|=1$.

Так как $|a_0|<1$, то полином $P_1(z)$, имеет свой единственный корень в области $|z|<1$; пусть полином $P_k(z)$, $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ имеет все свои корни в области $|z|<1$ — покажем, что полином $P_{n+1}(z)$ обладает этим же свойством.

Из формулы

$$(9.3)\qquad P^*_{k+1}(z)=P^*_k(z)-za_k P_k(z)$$

получаем

$$\left|\frac{P^*_{k+1}(z)-P^*_k(z)}{P^*_k(z)}\right|=\left|z a_k \frac{P_k(z)}{P^*_k(z)}\right|;$$

обозначая корни полинома $P_k(z)$ через $\{\beta_\nu\}_1^k$, мы имеем

$$\frac{P_k(z)}{P^*_k(z)}=\prod_{\nu=1}^{k}\frac{z-\beta_\nu}{1-\bar\beta_\nu z};\qquad \{|\beta_\nu|\}_1^k<1;$$

так как при $|z|\leqslant 1$ имеем $\left|\dfrac{z-\beta_\nu}{1-z\bar\beta_\nu}\right|\leqslant 1$, то в замкнутой области $|z|\leqslant 1$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{P^*_{k+1}(z)-P^*_k(z)}{P^*_k(z)}\right|=\left|z a_k \frac{P_k(z)}{P^*_k(z)}\right|<1.$$

Из теоремы Rouché вытекает, что полином $P^*_{k+1}(z)$ имеет в области $|z|<1$ столько же корней, как и $P^*_k(z)$, т. е. ни одного; если предположить, что $P^*_{k+1}(e^{i\alpha})=0$, то мы имели бы

$$|a_k|=\left|\frac{P^*_k(e^{i\alpha})}{P_k(e^{i\alpha})}\right|=1,$$

что противоречит условию.

Если бы $P_k(z)$ и $P_{k+1}(z)$ имели общий корень z_0, то мы имели бы

$$a_k P^*_k(z_0)=0,$$

что невозможно при $a_k \neq 0$, ибо $|z_0|<1$ и поэтому $P^*_k(z_0)\neq 0$.

Пусть теперь $a_n=-e^{i\beta}$; мы имеем из (3.3)

$$P_{n+1}(e^{i\theta})=e^{i\theta}P_n(e^{i\theta})+e^{-i\beta}e^{in\theta}\overline{P_n(e^{i\theta})};$$

вводя обозначение

$$P_n(e^{i\theta})=Re^{i\psi},\qquad R>0,$$

[9]) См. G. Szegö [1], [3]; теорема справедлива, очевидно, и для полиномов $\{P_k(z;\lambda)\}_1^n$ и $\{\mathfrak{Q}_k(z;\lambda)\}_1^n$, если $|\lambda|=1$.

мы находим

$$(9.4)\qquad P_{n+1}(e^{i\theta}) = 2Re^{i\left(\frac{n+1}{2}\theta - \frac{\beta}{2}\right)} \cos\left(\psi - \frac{n-1}{2}\theta + \frac{\beta}{2}\right);$$

при увеличении θ на 2π аргумент ψ увеличивается на $2\pi n$, а весь аргумент косинуса на $(n+1)\pi$; следовательно, все корни полинома $P_{n+1}(z)$ простые и лежат на круге $|z|=1$.

Примечание. Нетрудно видеть, что, вместо задания параметра $|a_n|=1$ можно задать один корень $e^{i\alpha}$ полинома $P_{n+1}(z)$ — в таком случае находим

$$(9.5)\qquad \bar{a}_n = \frac{e^{i\alpha} P_n(e^{i\alpha})}{P_n^*(e^{i\alpha})}; \qquad |a_n| = 1;$$

$$P_{n+1}(z) = z P_n(z) - \frac{e^{i\alpha} P_n(e^{i\alpha})}{P_n^*(e^{i\alpha})} P_n^*(z),$$

и, следовательно, все остальные корни полинома $P_{n+1}(z)$ лежат на круге $|z| = 1$[10]).

Теорема 9.2. Если за полином $P_n(z)$ взять произвольный полином степени n, все корни которого лежат в области $|z|<1$, то этим однозначно определяются параметры $\{a_k\}_0^{n-1}$, причем $\{|a_k|\}_0^{n-1} < 1$[11]).

Пусть

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k), \qquad \{|\alpha_k|\}_1^n < 1;$$

находим прежде всего a_{n-1}

$$(9.6)\quad \bar{a}_{n-1} = -P_n(0) = (-1)^{n-1}\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n; \qquad |a_{n-1}| < 1;$$

далее, находим полином $P_{n-1}(z)$ по формуле

$$(9.7)\qquad zP_{n-1}(z) = \frac{P_n(z) + \bar{a}_{n-1} P_n^*(z)}{1 - |a_{n-1}|^2},$$

вытекающей из (3.3) и (9.3).

При $|z| \leqslant 1$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{(1 - |a_{n-1}|^2)P_{n-1}^*(z) - P_n^*(z)}{P_n^*(z)}\right| = \left|a_{n-1}\frac{P_n(z)}{P_n^*(z)}\right| < 1;$$

из теоремы Rouché вытекает, что все корни полинома $P_{n-1}^*(z)$ лежат в области $|z| \geqslant 1$; если бы $P_{n-1}^*(e^{i\alpha}) = 0$, то и $P_{n-1}(e^{i\alpha}) = 0$, а, следовательно, и $P_n(e^{i\alpha}) = 0$, что невозможно. Таким образом мы

---

10) Это свойство аналогично основному свойству так называемых квази-ортогональных полиномов M. Riesz'a; см. J. Shohat and J. Tamarkin [1], гл. II.

11) А, следовательно, определяется и вся ортогональная система $\{P_k(z)\}_0^n$.

находим последовательно все полиномы $\left\{P_k(z)\right\}_0^{n-1}$ и все параметры

$$\left\{|a_k|\right\}_0^{n-1} < 1.$$

Примечание. Для полиномов, ортогональных на вещественной оси, всю ортогональную систему $\left\{p_k(x)\right\}_0^n$ можно определить, если взять произвольно полиномы $P_n(x)$ и $P_{n+1}(x)$, причем все корни этих полиномов должны быть простыми, вещественными и перемежающимися[12]).

§ 10.

Укороченная тригонометрическая проблема моментов.

Теорема 10.1. Для того, чтобы комплексные числа $\left\{c_k\right\}_0^n$ допускали представление

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\, d\sigma_n(\theta), \qquad (k=0,1,\ldots\ldots, n), \tag{10.1}$$

где $\sigma_n(\theta)$ ограниченная неубывающая функция, имеющая в $[0,2\pi]$ по крайней мере $n+1$ точек роста, необходимы и достаточны условия $\left\{|a_k|\right\}_0^{n-1} < 1$.

Необходимость условий $\left\{|a_k|\right\}_0^{n-1} < 1$ вытекает из следующих соображений: для всякого полинома $G_m(z) = \sum_{k=0}^{m} x_k z^k$ степени $m \leqslant n$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |G_m(z)|^2\, d\sigma_n(\theta) = \sum_{i,j=0}^{m} c_{i-j}\, x_i\, \bar{x}_j > 0;$$

следовательно, все формы Toeplitz'a

$$\sum_{i,j=0}^{m} c_{i-j}\, x_i\, \bar{x}_j \qquad (m=1,2\ldots\ldots, n)$$

являются определенными положительными — поэтому их дискриминанты должны быть положительны, т. е. $\left\{\Delta_k\right\}_0^n > 0$; отсюда, благодаря (4.2) вытекает, что $\left\{|a_k|\right\}_0^{n-1} < 1$.

Для доказательства достаточности мы построим две функции $\sigma_n^{(1)}(\theta)$ и $\sigma_n^{(2)}(\theta)$, играющие важную роль во всем дальнейшем.

1) Рассмотрим разложение (6.1)

$$\frac{c_0}{2}\cdot\frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)} = \frac{c_0}{2} + c_1 z + \ldots\ldots + c_n z^n + (z^{n+1}); \tag{10.2}$$

так как при условии $\left\{|a_k|\right\}_0^{n-1} < 1$ все корни $P_n^*(z)$ лежат в области $|z| > 1$, то это разложение справедливо при $|z| \leqslant 1$. Из (5.6) мы находим

[12]) См. G. Szegö [2], акад. С. Н. Бернштейн [1], Я. Л. Геронимус [4], [6].

$$\overline{P_n^*(e^{i\theta})}\,\Omega_n^*(e^{i\theta})+P_n^*(e^{i\theta})\,\overline{\Omega_n^*(e^{i\theta})}=\frac{2h_n}{c_0}\tag{10.3}$$

поэтому мы имеем из (10.2)

$$\frac{c_0}{2}\left(\frac{\Omega_n^*(e^{i\theta})}{P_n^*(e^{i\theta})}+\frac{\overline{\Omega_n^*(e^{i\theta})}}{\overline{P_n^*(e^{i\theta})}}\right)=\frac{h_n}{|P_n^*(e^{i\theta})|^2}=\tag{10.4}$$

$$=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}(c_k e^{ik\theta}+c_{-k}e^{-ik\theta}),$$

откуда

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h_n e^{-ik\theta}\,d\theta}{|P_n^*(e^{i\theta})|^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ik\theta}\,d\sigma_n^{(1)}(\theta),\ (k=0,1,\ldots,n),\tag{10.5}$$

где $\sigma_n^{(1)}(\theta)$ абсолютно непрерывная функция

$$\sigma_n^{(1)}(\theta)=\int_0^{\theta}\frac{h_n\,d\varphi}{|P_n^*(e^{i\varphi})|^2}.\tag{10.6}$$

2) Положим теперь $|a_n|=1$ и рассмотрим дробь

$$-\frac{\Omega_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)}=-1+\frac{R_n(z)}{P_{n+1}(z)}=-1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{m_k}{e^{i\Theta_k}-z},\tag{10.7}$$

$$P_{n+1}(z)=\prod_{k=1}^{n+1}(z-e^{i\Theta_k}),$$

где $R_n(z)$ полином степени n, причем

$$m_k=-\frac{R_n(z_k)}{P'_{n+1}(z_k)}=\frac{\Omega_{n+1}(z_k)}{P'_{n+1}(z_k)},\ z_k=e^{i\Theta_k},\ (k=1,\,2,\ldots,n+1).\tag{10.8}$$

Так как

$$\frac{1}{e^{i\Theta_k}-z}=\frac{1}{2}e^{-i\Theta_k}+\frac{e^{i\Theta_k}}{2}\cdot\frac{e^{i\Theta_k}+z}{e^{\Theta_k}-z},$$

то мы имеем

$$-\frac{\Omega_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)}=-1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}m_k e^{-i\Theta_k}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}m_k e^{-i\Theta_k}\frac{e^{i\Theta_k}+z}{e^{i\Theta_k}-z};$$

при $z=0$ имеем

$$-\frac{\Omega_{n+1}(0)}{P_{n+1}(0)}=1=-1+\sum_{k=1}^{n+1}m_k e^{-i\Theta_k},$$

откуда окончательно

$$(10.9)\qquad -\frac{\Omega_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)}=\frac{1}{2\pi c_0}\sum_{k=1}^{n+1}\mu_k\frac{e^{i\theta_k}+z}{e^{i\theta_k}-z},\quad \mu_k=\frac{\pi c_0}{z_k}\cdot\frac{\Omega_{n+1}(z_k)}{P'_{n+1}(z_k)}.$$
$$(k=1,2,\ldots,n+1).$$

Разлагая в ряд Маклорена в области $|z|<1$ и пользуясь (6.1), мы имеем

$$-\frac{c_0}{2}\cdot\frac{\Omega_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)}=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{n+1}\mu_k(1+ze^{-i\theta_k})(1+ze^{-i\theta_k}+\ldots)=$$
$$=\frac{c_0}{2}+c_1z+\ldots+c_nz^n+(z^{n+1})$$

откуда

$$(10.10)\qquad c_k=\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{n+1}\mu_s e^{-ik\theta_s},\ (k=0,1,\ldots,n).$$

Покажем, что все массы $\{\mu_s\}_1^{n+1}$ положительны; если бы только $m\leqslant n$ из них были положительны, то можно было бы построить полином $G_m(z)$, обращающийся в нуль в точках $\{z_{\nu_k}=e^{i\theta_{\nu_k}}\}_{\nu_k=1}^{m}$, для которых $\{\mu_{\nu_k}\}_1^m>0$; полагая

$$(10.11)\qquad G_m(z)=\sum_{k=0}^{m}\alpha_kP_k(z),\ \alpha_m\neq 0,$$

мы имели бы

$$(10.12)\qquad \sigma\{|G_m(z)|^2\}=\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{n+1}\mu_s|G_m(e^{i\theta_s})|^2=\sum_{k=0}^{m}|\alpha_k|^2h_k\leqslant 0,$$

что невозможно[13]).

Таким образом имеем

$$(10.13)\qquad c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ik\theta}d\sigma_n^{(2)}(\theta),\ (k=0,1,\ldots,n),$$

где $\sigma_n^{(2)}(\theta)$ ступенчатая функция, имеющая в точках $\{z_k=e^{i\theta_k}\}_1^{n+1}$, являющихся нулями полинома $P_{n+1}(z)$, скачки

$$(10.14)\qquad \sigma_n^{(2)}(\theta_k+0)-\sigma_n^{(2)}(\theta_k-0)=\mu_k=\frac{\pi c_0}{z_k}\cdot\frac{\Omega_{n+1}(z_k)}{P'_{n+1}(z_k)}>0,$$
$$(k=1,2,\ldots,n+1).$$

Примечание 1. Из того, что $\{\mu_k\}_1^{n+1}>0$ вытекает, что корни полиномов $P_{n+1}(z)$ и $\Omega_{n+1}(z)$ перемежаются.

[13]) Аналогично доказывается, что при $\{|a_k|\}_0^{n-1}<1$ функция $\sigma_n(\theta)$ не может иметь меньше $n+1$ точек роста в $[0,2\pi]$.

Примечание 2. Ортогональную систему $\{P_k(z)\}_0^n$ можно однозначно определить, если задать произвольно массы $\{\mu_k\}_1^{n+1}>0$ и точки их концентрации $\{\Theta_k\}_1^{n+1}$; вместо этого можно произвольно задать нули полиномов $P_{n+1}(z)$ и $\Omega_{n+1}(z)$ — лишь бы они были простыми, лежали на круге $|z|=1$ и перемежались.

Примечание 3. Если мы определим всю бесконечную последовательность моментов $\{c_k\}_0^\infty$ формулой

$$(10.15)\qquad c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\,d\sigma_n^{(2)}(\theta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n+1}\mu_s e^{-ik\theta_s},\quad (k=0,1,2,\ldots),$$

то будем иметь $\{\Delta_r\}_{n+1}^\infty=0$; действительно, отсюда вытекает, что Δ_k является определителем матрицы, полученной перемножением двух матриц (Чезаро [1], § 29)

$$(10.16)\qquad \begin{Vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_{n+1} \\ \mu_1\bar z_1 & \mu_2\bar z_2 & \ldots & \mu_{n+1}\bar z_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1\bar z_1^k & \mu_2\bar z_2^k & \ldots & \mu_{n+1}\bar z_{n+1}^k \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^k & z_2^k & \ldots & z_{n+1}^k \end{Vmatrix};$$

если $k\geqslant n+1$, то $\{\Delta_k\}_{n+1}^\infty=0$; если же $k\geqslant n$, то Δ_k равен сумме членов такого типа

$$\mu_{i_1}\mu_{i_2}\ldots\mu_{i_{k+1}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \bar z_{i_1} & \bar z_{i_2} & \ldots & \bar z_{i_{k+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar z_{i_1}^k & \bar z_{i_2}^k & \ldots & \bar z_{i_{k+1}}^k \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_{i_1} & z_{i_2} & \ldots & z_{i_{k+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{i_1}^k & z_{i_2}^k & \ldots & z_{i_{k+1}}^k \end{vmatrix}=$$

$$=\mu_{i_1}\ldots\mu_{i_{k+1}}\prod_{r,s=1}^{k+1}|z_{i_r}-z_{i_s}|^2,$$

т. е. $\{\Delta_k\}_0^n>0$.

Таким образом, если $\sigma_n(\theta)$ имеет $n+1$ точек роста, то ранг формы Toeplitz'а

$$(10.17)\qquad \sum_{i,j=1}^{\infty} c_{i-j}x_i\bar x_j$$

равен $n+1$, ибо $\{\Delta_k\}_0^n>0$, $\{\Delta_k\}_{n+1}^\infty=0$[14]); это эквивалентно условиям $\{|a_k|\}_0^{n-1}<1$, $|a_n|=1$; следовательно, номер первого параметра, модуль которого обращается в единицу, на единицу меньше ранга формы Toeplitz'а (10.17); из теоремы 10.1 вытекает справедливость обратного заключения.

§ 11.

Функции второго рода и C-функция.

Пусть $\sigma(\theta)$ ограниченная, неубывающая в $[0,2\pi]$ функция с бесчисленным множеством точек роста; такую функцию будем называть функцией распределения; введем функции второго рода[15])

[14]) См. также I. с.[8]).

[15]) По аналогии с функциями второго рода для полиномов, ортогональных на вещественной оси.

$$(11.1)\qquad Q_k(z)=\frac{1}{2\pi c_0}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}P_k(e^{i\theta})d\sigma(\theta),\ (k=0,1\ldots\ldots)$$

где $\{P_k(z)\}_0^\infty$ система полиномов, ортогональная относительно обложения $d\sigma(\theta)$

$$(11.2)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_k(e^{i\theta})\overline{P_m(e^{i\theta})}\,d\sigma(\theta)=\begin{cases}0, & k\neq m,\\ h_k=\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, & k=m.\end{cases}$$

В области $|z|<1$ наши функции $\{Q_k(z)\}_0^\infty$ регулярны и имеют разложения

$$(11.3)\qquad Q_k(z)=\frac{2h_k}{c_0}z^k+(z^{k+1}).\qquad (k=1,2,\ldots\ldots)$$

Имеет место очевидное соотношение

$$(11.4)\qquad Q_0(z)P_n(z)=-\mathfrak{Q}_n(z)+Q_n(z),\qquad (n=1,2,\ldots\ldots),$$

откуда ясно, что $u_k=Q_k(z)$ также является решением уравнения в конечных разностях (7.3).

Особый интерес для всего дальнейшего представляет функция

$$(11.5)\qquad Q_0(z)=\frac{1}{2\pi c_0}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\sigma(\theta),\qquad |z|<1;$$

в области $|z|<1$ она регулярна и псевдоположительна, т. е. имеет в этой области положительную вещественную часть.

Действительно, при $z=re^{i\alpha}$, $r<1$, имеем

$$RQ_0(z)=\frac{1}{2\pi c_0}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\alpha)+r^2}d\sigma(\theta)>0;$$

обратно, G. Herglotz [1] показал, что всякая функция $F(z)$, регулярная и псевдоположительная в области $|z|<1$, нормированная условием $F(0)=1$, допускает представление (11.5), где $\sigma(\theta)$ — функция распределения; такую функцию $F(z)$ будем называть функцией Carathèodory или короче С-функцией.[16])

Отметим некоторые свойства С-функций:

1) в области $|z|<1$ имеет место разложение

$$(11.6)\qquad \frac{c_0}{2}F(z)=\frac{c_0}{2}+c_1z+\ldots\ldots+c_nz^n+\ldots\ldots;$$

2) С-функция $F(z)$ имеет почти всюду на единичной окружности конечные предельные значения по всем некасательным путям;

[16]) Систематическое изложение свойств С-функций читатель найдет в книгах: Н. Ахиезер и М. Крейн [1] гл. II; И. Привалов [1], гл. III и IV; Р. Неванлинна [1], гл. VII.

3) функция $\sigma(\theta)$ однозначно определяется по C—функции $F(z)$ при помощи формулы обращения

$$(11.7)\qquad \frac{\sigma(\theta+0)+\sigma(\theta-0)}{2}=\mathrm{Const}+c_0 \lim_{r\to 1-0}\int_0^{\theta} R\,F(re^{i\varphi})\,d\varphi .$$

Таким образом тригонометрическая проблема моментов, т. е. нахождение условий необходимых и достаточных, которые надо наложить на моменты $\{c_k\}_0^{\infty}$, чтобы имело место представление

$$(11.8)\qquad c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\,d\sigma(\theta),\ (k=0,1,\dots),$$

где $\sigma(\theta)$ — некоторая функция распределения, эквивалентна проблеме построения C-функции $Q_0(z)$; эту проблему впервые рассмотрел C. Carathéodory [1], [2], а затем O. Toeplitz [1], E. Fischer [1], G. Herglotz [1] и F. Riesz [1].

Примечание. Если заданы параметры $\{|a_k|\}_0^{n-1}<1$, то функция $\dfrac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}$ является по теореме 10.1 C-функцией; если, кроме того, $|a_n|=1$, то C-функцией (выродившейся) является также функция $-\dfrac{\Omega_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)}$.

§ 12.

Область значений функции $Q_0(z)$ при задании моментов $\{c_k\}_0^n$.

Теорема 12.1. Если заданы параметры $\{|a_k|\}_0^{n-1}<1$, и если функция $\sigma_n(\theta)$ пробегает все решения укороченной тригонометрической проблемы моментов (10.1), то точка

$$(12.1)\qquad w=Q_0(z)=\frac{1}{2\pi c_0}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\sigma_n(\theta),\ |z|<1,$$

не выходит за пределы круга $K_n(z)$ с центром $C_n(z)$ и радиусом $r_n(z)$

$$(12.2)\qquad C_n(z)=\frac{\overline{P_n^*(z)}\,\Omega_n^*(z)+|z|^2\,\overline{P_n(z)}\,\Omega_n(z)}{|P_n^*(z)|^2-|z\,P_n(z)|^2},$$

$$r_n(z)=\frac{2}{c_0}\cdot\frac{h_n|z|^{n+1}}{|P_n^*(z)|^2-|z\,P_n(z)|^2};$$

если $|a_n|<1$, то окружность $K_{n+1}(z)$ лежит целиком внутри $K_n(z)$; при $|a_n|=1$ точка w лежит на окружности $K_n(z)$ [17]).

[17]) Для степенной проблемы окружность $K_{n+1}(z)$ всегда касается $K_n(z)$ изнутри (см. Н. Ахиезер [1]; J. Shohat and J. Tamarkin [1], гл II); метод, применяемый нами при доказательстве этой теоремы, почти ничем не отличается от метода Н. Ахиезера [1] § 4, восходящего еще к Stieltjes'у.

Рассмотрим минимум интеграла

$$(12.3)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{c_0}\cdot\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\overline{P_k(e^{i\theta})}\right|^2 d\sigma_n(\theta),\ |z|<1;$$

условия минимума дают

$$\lambda_k h_k=\frac{1}{2\pi c_0}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}P_k(e^{i\theta})\,d\sigma_n(\theta)=Q_k(z),\ (k=0,1,\ldots,n),$$

откуда вытекает неравенство

$$(12.4)\qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{|Q_k(z)|^2}{h_k}\leqslant\frac{1}{2\pi c_0^2}\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right|^2 d\sigma_n(\theta)=\frac{1}{c_0}\cdot\frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}\cdot$$

$$\cdot\left\{Q_0(z)+\overline{Q_0(z)}\right\}-\frac{1}{c_0};$$

вводя обозначения $w=Q_0(z)$ и, пользуясь (11.4), находим

$$(12.5)\qquad A_n|w|^2+2R(w\bar{B}_n)+D_n-\frac{2}{c_0}\cdot\frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}Rw\leqslant 0,$$

где мы имеем по (8.2) и (8.4)

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{|P_k(z)|^2}{h_k}=\frac{|P_n^*(z)|^2-|zP_n(z)|^2}{h_n(1-|z|^2)};$$

$$(12.6)$$

$$D_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{|\Omega_k(z)|^2}{h_k}=\frac{|\Omega_n^*(z)|^2-|z\Omega_n(z)|^2}{h_n(1-|z|^2)};$$

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{P_k(z)}\,\Omega_k(z)}{h_k}=\frac{1}{c_0}\cdot\frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}-\frac{\overline{P_n^*(z)}\,\Omega_n^*(z)+|z|^2\,\overline{P_n(z)}\,\Omega_n(z)}{h_n(1-|z|^2)};$$

после несложных преобразований находим центр $C_n(z)$ и радиус $r_n(z)$ окружности $K_n(z)$ (12.5); неравенство (12.4) соответствует замкнутой области $|w-C_n(z)|\leqslant r_n(z)$.

Так как

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{|Q_k(z)|^2}{h_k}\leqslant\sum_{k=0}^{n+1}\frac{|Q_k(z)|^2}{h_k},$$

то всякая точка внутри круга $K_{n+1}(z)$ лежит одновременно и внутри $K_n(z)$. Если у $K_n(z)$ и $K_{n+1}(z)$ есть общая точка, то

$$(12.7)\qquad Q_{n+1}(z)=Q_0(z)P_{n+1}(z)+\Omega_{n+1}(z)=0,\ Q_0(z)=-\frac{\Omega_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)}.$$

Так как

$$(12.8)\qquad \left|-\frac{\Omega_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)}-C_n(z)\right| = \left|\frac{P^*_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)}r_n(z)\right| \geqslant r_n(z),$$

то при $|a_n|=1$ точка w лежит на окружности $K_n(z)$.

Примечание. Из (12.4) вытекает существование предела

$$(12.9)\qquad \lim_{n\to\infty} Q_n(z) = \lim_{n\to\infty}\left\{Q_0(z)P_n(z)+\Omega_n(z)\right\}=0,\ |z|<1.$$

Теорема 12.2. Если заданы параметры $\{|a_k|\}_0^{n-1}<1$, то при всевозможных значениях параметра a_n из области $|a_n|<1$ точка

$$(12.10)\qquad w_{n+1}=\frac{\Omega^*_{n+1}(z)}{P^*_{n+1}(z)}=\frac{\Omega^*_n(z)+a_n z\,\Omega_n(z)}{P^*_n(z)-a_n z P_n(z)},\ |z|<1,$$

лежит внутри окружности $K_n(z)$, а точка

$$(12.11)\qquad w'_{n+1}=-\frac{\Omega_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)}=-\frac{z\,\Omega_n(\bar z)+\bar a_n\Omega^*_n(z)}{z P_n(z)-\bar a_n P^*_n(z)},\ |z|<1,$$

лежит вне ее; если точка a_n описывает окружность $|a_n|=1$, то точки w_{n+1} и w'_{n+1} совпадают и описывают окружность $K_n(z)$.

При фиксированном z (из области $|z|<1$) и переменном a_n функция w'_{n+1} является дробно-линейной функцией, переводящей окружность $|a_n|=1$ в некоторую окружность $K'_n(z)$; эта последняя совпадает с $K_n(z)$, ибо при $|a_n|=1$ имеем из (12,8)

$$(12.12)\qquad |w'_{n+1}-C_n(z)|=r_n(z);$$

при $|a_n|<1$ точка w'_{n+1} лежит вне $K_n(z)$.

Формула (12.10) для w_{n+1} получается из (12.11) заменой $\bar a_n$ на $\frac{1}{a_n}$ — отсюда ясно, что w_{n+1} лежит внутри $K_n(z)$.

Примечание 1. Окружность $K_n(z)$ может быть представлена в более простом виде, как окружность Аполлония, ибо из (12.10) имеем

$$(12.13)\qquad \left|\frac{w-w_n}{w-w'_n}\right| \leqslant \left|\frac{z P_n(z)}{P^*_n(z)}\right|.$$

Примечание 2. Если $\{|a_k|\}_0^{n-1}=1$, $|a_n|=1$, то по (10.9) имеем

$$(12.14)\qquad Q_0(z)=-\frac{\Omega_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)}=\frac{1}{2\pi c_0}\sum_{k=1}^{n+1}\mu_k\frac{e^{i\Theta_k}+z}{e^{i\Theta_k}-z}=$$

$$=\frac{1}{2\pi c_0}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\,d\sigma_n^{(2)}(\Theta);$$

эти значения w, лежащие на окружности $K_n(z)$, соответствуют экстремальным решениям в случае степенной проблемы моментов (см. Н. Ахиезер [1], § 5).

§ 13.

Аппроксимация С-функции и предельный переход

Из доказанных теорем вытекает следующая

Теорема 13.1. Функция $\frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}$ осуществляет в области $|z|<1$ аппроксимацию С-функции $Q_0(z)$ порядка не ниже $0(|z|^n)$.

Действительно, мы имеем при $|z|<1$.

$$\left|Q_0(z)-\frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}\right|\leqslant 2r_n(z)=\frac{4}{c_0}\cdot\frac{|z|^{n+1}}{(1-|z|^2)\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{|P_k(z)|^2}{h_k}}< \tag{13.1}$$

$$<\frac{4|z|^{n+1}}{1-|z|^2}=0(|z|^n);$$

в случае расходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|P_k(z)|^2}{h_k}$$

порядок аппроксимации повышается[18]).

Из этой теоремы легко вывести условия, необходимые и достаточные для построения С-функции $Q_0(z)$, что эквивалентно разрешимости проблемы моментов.

Теорема 13.2. Для того, чтобы ряд

$$\frac{2}{c_0}\left(\frac{c_0}{2}+c_1z+\ldots\ldots+c_nz^n+\ldots\right) \tag{13.2}$$

сходился в области $|z|<1$ и являлся рядом Маклорена С-функции $F(z)$ необходимо и достаточно, чтобы или последовательность моментов была позитивна $\{\Delta_k\}_0^\infty>0$, т. е. $\{|a_k|\}_0^\infty<1$, или же чтобы

$$\{\Delta_k\}_0^n>0,\ \{\Delta_k\}_{n+1}^\infty=0,$$

т. е. $\{|a_k|\}_0^{n-1}<1, |a_n|=1$; в этом последнем случае $F(z)$ является рациональной функцией (12.14).

Для того, чтобы непрерывная дробь

$$K(z)=1+\frac{2a_0z}{|1-a_0z}\,\overline{|}\,-\frac{\frac{a_1}{a_0}z(1-|a_0|^2)|}{|1+\frac{a_1}{a_0}z}-\ldots\ldots \tag{13.3}$$

---

[18]) В § 21 будет показано, что этот ряд расходится во всех точках области $|z|<1$ одновременно с числовым рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|^2$.

$$-\frac{\frac{a_{n+1}}{a_n} z (1-|a_n|^2)|}{|\; 1+\frac{a_{n+1}}{a_n} z} - \ldots, \{a_k\}_0^\infty \neq 0,$$

сходилась в области $|z|<1$ и выражала С-функцию $F(z)$, необходимы и достаточны те же условия $\{|a_k|\}_0^\infty < 1$.

Если $F(z)$ является С-функцией, то мы имеем при любом m[19])

$$(13.4)\quad \lim \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{c_0}{2}\left\{F(re^{i\theta})+\overline{F(re^{i\theta})}\right\}\left|\sum_{i=0}^{m} x_i z^i\right|^2 d\theta = \sum_{i,j=0}^{m} c_{i-j}\bar{x}_i x_j \geqslant 0,$$
$$z=e^{i\theta};$$

предположение, что форма Toeplitz'a $\sum_{i,j=0}^{\infty} c_{i-j}\bar{x}_i x_j$ имеет конечный ранг $n+1$, приводит к случаю вырождения (12.14).

Обратно, если $\{|a_k|\}_0^\infty < 1$, то мы можем построить бесконечную последовательность С-функций $\left\{\frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}\right\}_0^\infty$; по теореме 12.2 имеем

$$(13.5)\qquad \left|\frac{\Omega_{n+1}^*(z)}{P_{n+1}^*(z)} - \frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}\right| \leqslant 2r_n(z) = O(|z|^n),\ |z|<1;$$

откуда вытекает для $|z| \leqslant r < 1$ равномерная сходимость последовательности к некоторой аналитической функции $F_0(z)$, регулярной в области $|z|<1$; так как $R\left\{\frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}\right\}_0^\infty > 0$ при $|z|<1$, то $RF_0(z) \geqslant 0$ в той же области, причем знак равенства может иметь место только на круге $|z|=1$.

По (6.1) и (13.1) при $|z|<1$ имеем

$$(13.6)\qquad \frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)} = \frac{c_0}{2} + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \varepsilon_n,$$
$$\left|F_0(z) - \frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}\right| \leqslant \varepsilon'_n,$$

причем $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = \lim_{n\to\infty}\varepsilon'_n = 0$; таким образом, при условиях $\{|a_k|\}_0^\infty < 1$ построена С-функция $F_0(z)$, имеющая данные коэфициенты разложения Маклорена.

Для доказательства сходимости дроби $K(z)$ (13.3) достаточно вспомнить, что её подходящие дроби выражаются формулой (5.8).

Теорема 13.3. Условия $\{|a_k|\}_0^\infty < 1$, или эквивалентные условия $\{\Delta_k\}_0^\infty > 0$, необходимы и достаточны для разрешимости тригонометрической проблемы моментов, т. е. для представления последовательности $\{c_k\}_0^\infty$ в виде

[19]) См. l. c.[8]) стр. 97.

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\, d\sigma(\theta),\quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{13.7}$$

где $\sigma(\theta)$ функция распределения, однозначно определяемая по заданным моментам.

Необходимость условий очевидна; для доказательства достаточности рассмотрим последовательность функций $\{\sigma_n^{(1)}(\theta)\}_1^\infty$ (§ 10)

$$\sigma_n^{(1)}(\theta) = h_n \int\limits_0^{\theta} \frac{d\varphi}{|P_n^*(e^{i\varphi})|^2},\quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\, d\sigma_n^{(1)}(\theta), \tag{13.8}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots);$$

так как эта последовательность равномерно ограничена, то, применяя первую теорему Helly, можно из нее извлечь подпоследовательность $\{\sigma_{n_r}^{(1)}(\theta)\}$, которая сходится в основном [20] к некоторой функции распределения $\sigma(\theta)$; на основании второй теоремы Helly вытекает, что для всех k

$$\lim_{n_r\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\, d\sigma_{n_r}^{(1)}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\, d\sigma(\theta) = c_k. \tag{13.9}$$

Единственность решения вытекает из того, что круг $K_n(z)$ стягивается в точку при $n\to\infty$; таким образом получается единственная C-функция и по формуле обращения единственная функция распределения $\sigma(\theta)$.

Примечание. Доказательство осталось бы в силе, если бы мы взяли последовательность любых решений $\{\sigma_n(\Theta)\}$ укороченной проблемы моментов; можно было бы взять $\{\sigma_n^{(2)}(\Theta)\}$, как это сделано в книге Н. Ахиезера и М. Крейна [1] [21]; мы взяли именно функции $\{\sigma_n^{(1)}(\theta)\}$ по двум причинам: во-первых, в то время, как они стремятся к предельной функции $\sigma(\theta)$, функции $\left\{\frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}\right\}$, с которыми функции $\sigma_n^{(1)}(\theta)$ связаны соотношением

$$\sigma_n^{(1)}(\theta) = \int\limits_0^{\theta} R\left\{\frac{\Omega_n^*(e^{i\varphi})}{P_n^*(e^{i\varphi})}\right\} d\varphi, \tag{13.10}$$

стремятся к предельной C-функции $Q_0(z)$; во-вторых, в дальнейшем мы рассмотрим некоторые частные случаи решения проблемы моментов, в которых существует не только предел

$$\lim_{n_r\to\infty} \int\limits_0^{\theta} \frac{h_{n_r}\, d\varphi}{|P_{n_r}^*(e^{i\varphi})|^2} = \sigma(\theta), \tag{13.11}$$

---

[20]) Т. е. на всюду плотном множестве.

[21]) См. стр. 44-5, откуда взято доказательство теоремы 13.3.

но даже существует почти всюду предел (§ 21)

$$\lim_{r \to 1-0} \left\{ \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{h_n}}{P_n^*(re^{i\theta})} \right\}, \tag{13.12}$$

или даже существует предел в замкнутой области $|z| \leqslant 1$ (§ 26)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{h_n}}{P_n^*(z)}. \tag{13.13}$$

Отметим сейчас же некоторые простые теоремы относительно сходимости последовательности $\{\sigma_n^{(1)}(\theta)\}$.

Теорема 13.4. Если функции $\{\sigma_n^{(2)}(\theta)\}$ образуют семейство функций равностепенно абсолютно непрерывных на отрезке $[0,2\pi]$, то можно извлечь подпоследовательность $\{\sigma_{n_k}^{(1)}(\theta)\}$, равномерно сходящуюся на отрезке $[0,2\pi]$ к некоторой абсолютно непрерывной функции $\sigma(\theta)$

$$\lim_{n_k \to \infty} \sigma_{n_k}^{(1)}(\theta) = \lim_{n_k \to \infty} \int_0^\theta \frac{h_{n_k}\, d\varphi}{|P_{n_k}^*(e^{i\varphi})|^2} = \sigma(\theta) = \int_0^\theta p(\varphi)\, d\varphi. \tag{13.14}$$

Условие равностепенной абсолютной непрерывности заключается, как известно, в том, что для всякого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно найти η такое, чтобы иметь для всех n

$$\int_E d\sigma_n^{(1)}(\theta) = \int_E \frac{h_n\, d(\theta)}{|P_n^*(e^{i\theta})|^2} < \varepsilon, \tag{13.15}$$

если $\operatorname{mes} E < \eta$, где $E \subset [0, 2\pi]$ любое измеримое множество.

Доказательство вытекает из теоремы Arzelá (См. Привалов [1], гл. I), ибо наши функции равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на $[0, 2\pi]$.

Теорема 13.5. Если при всех n справедливы оценки

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h_n^2\, d\theta}{|P_n^*(e^{i\theta})|^4} \leqslant M, \tag{13.16}$$

то функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна, причем $p(\theta) \in L_2$.

Для доказательства рассмотрим пространство L_2, т. е. совокупность функций $f(\theta)$ на отрезке $[0, 2\pi]$, для которых существует интеграл Лебега

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2\, d\theta; \tag{13.17}$$

введем скалярное произведение (f, g) двух функций $f(\Theta)$ и $g(\Theta)$ и норму $\| f \|$

(13.18)
$$(f, g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\Theta)\overline{g(\Theta)}\,d\,\Theta, \quad \|f\|=\sqrt{(f, f)}.$$

Из условия (13.16) вытекает

(13.19)
$$\left\|\frac{h_n}{|P_n^*(e^{i\Theta})|^2}\right\|\leqslant\sqrt{M};$$

на основании слабой компактности пространства L_2 (см. А. Плесснер [1], § 3) отсюда вытекает, что можно выделить подпоследовательность функций $\left\{\frac{h_{n_k}}{|P_{nk}(e^{i\Theta})|^2}\right\}$, слабо сходящуюся к некоторой предельной функции $p(\Theta)\in L_2$, т. е.

(13.20)
$$\lim_{n_k\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h_{n_k}e^{-ir\Theta}}{|P_{n_k}^*(e^{i\Theta})|^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ir\Theta}\,p(\Theta)\,d\Theta, \ (r=0, 1, 2, \ldots);$$

отсюда на основании (10,5) вытекает представление

(13.21)
$$c_r=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ir\Theta}\,p(\Theta)\,d\Theta, \ (r=0, 1, \ldots).$$

Если, в частности, существует такая бесконечная подпоследовательность чисел натурального ряда $\{n_\nu\}$, что справедливы оценки

(13.22)
$$\frac{|P_{n\nu}^*(e^{i\Theta})|}{\sqrt{h_{n\nu}}}\geqslant m>0, \ 0\leqslant\Theta\leqslant2\pi,$$

то из теоремы 13.4 или 13.5 вытекает, что функция распределения $\sigma(\Theta)$ абсолютно - непрерывна; если же справедливы двусторонние оценки

(13.23)
$$0<m\leqslant\frac{|P_{n_\nu}^*(e^{i\Theta})|}{\sqrt{h_{n_\nu}}}\leqslant M$$

то функция $p(\Theta)$ к тому же положительна на отрезке $[0,2\pi]$.

§ 14.

Положительные тригонометрические полиномы и гармонические функции.

Рассмотрим один частный случай, который нас приведет к некоторым интересным результатам

Теорема 14.1. Если заданы параметры $\{|a_k|\}_0^{n-1}<1$, $\{a_k\}_n^\infty=0$, то имеем при $k=1, 2, \ldots$.

(14.1)
$$P_{n+k}(z)=z^k P_n(z); \ P_{n+k}^*(z)=P_n^*(z);$$
$$\Omega_{n+k}(z)=z^k\,\Omega_n(z); \ \Omega_{n+k}^*(z)=\Omega_n^*(z);$$

(14.2) $$Q_{n+k}(z) = z^k\, Q_n(z) = \frac{2h_n z^{n+k}}{c_0 P_n^*(z)}.$$

Равенства (14.1) вытекают из (3.3) и (5.3); отсюда по (13.1) и (10.6)

(14.3) $$Q_0(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Omega_m^*(z)}{P_m^*(z)} = \frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)};\quad \sigma(\Theta) = \int_0^{\Theta} \frac{h_n\, d\varphi}{|P_n^*(e^{i\varphi})|^2};$$

следовательно по (11.1) имеем

$$Q_{n+k}(z) = \frac{1}{2\pi c_0}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z} P_{n+k}(e^{i\Theta})\, d\sigma(\Theta) = \frac{h_n}{2\pi i c_0}\int_{|y|=1} \frac{(y+z)y^{k-1}\,dy}{(y-z)\overline{P}_n\left(\frac{1}{y}\right)} =$$

(14.4) $$= \frac{h_n}{2\pi i c_0}\int_{|y|=1} \frac{(y+z)\,y^{n+k-1}\,dy}{(y-z)\,P_n^*(y)} = \frac{2h_n z^{n+k}}{c_0 P_n^*(z)}.$$

Примечание. Мы выразили условие теоремы 14.1 через параметры $\{a_k\}_0^{\infty}$; через детерминанты $\{\Delta_k\}_0^{\infty}$ оно выразится следующим образом

(14.5) $$\{\Delta_k\}_0^n > 0;\qquad \Delta_{n+s} = \Delta_n\left(\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)^s,\quad (s = 1, 2, \ldots\ldots).$$

Действительно, условия $\{|a_k|\}_0^{n-1} < 1$ и $\{\Delta_k\}_0^{n} > 0$ эквивалентны; из формулы (4.3) при $a_k = 0$ вытекает

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = \ldots\ldots,$$

т. е. определители $\{\Delta_{n+s}\}$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.

Выразим условие через моменты $\{c_k\}_0^{\infty}$; из формулы (3.2) и условий $\{|a_k|\}_0^{n-1} < 1$ вытекает, что каждая точка $\{c_k\}_0^n$ должна быть взята внутри круга[22])

(14.6) $$|c_k - z_k| < r_k,\qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где

(14.7) $$z_k = \frac{(-1)^k}{\Delta_{k-2}}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \ldots\ldots & c_{k-1} & 0 \\ c_0 & c_1 \ldots\ldots & c_{k-2} & c_{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{-k+2} & c_{-k+3} \cdot & c_0 & c_1 \end{vmatrix},\qquad r = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_{k-2}};$$

точки $\{c_{n+s}\}_1^{\infty}$ должны быть взяты в центрах соответствующих кругов, т. е.

[22]) См. l. c. [8]), стр. 16—17, где (14.6) и (14.7) найдены другим методом.

(14.8) $$c_{n+s} = z_{n+s}, \qquad (s = 1, 2, \ldots).$$

Из теоремы 14.1 и примечания можно сделать несколько интересных заключений. Хорошо известно, что неотрицательный тригонометрический полином $H_n(\varphi)$ порядка n допускает представление (L. Fejér [1])

(14.9) $$H_n(\varphi) = \left|\pi_n\left(e^{i\varphi}\right)\right|^2,$$

где $\pi_n(z)$ — полином степени n, отличный от нуля при $|z| < 1$, причем $\pi_n(0) > 0$; он может быть найден по формуле (G. Szegö [6] § 10.2)

(14.10) $$\pi_n(z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \lg H_n(\varphi)\, d\varphi\right\}.$$

Если предположить, что полином $H_n(\varphi)$ не только неотрицателен при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, но даже положителен, то мы придем к другим методам нахождения $\pi_n(z)$ и к некоторым простым оценкам для $H_n(\varphi)$.

Теорема 14.2. Если $H_n(\varphi)$ положительный тригонометрический полином порядка n, нормированный условием

(14.11) $$\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg H_n(\varphi)\, d\varphi\right\} = 1,$$

то полином $\pi_n(z)$ (14.10) может быть найден по формуле

(14.12) $$\pi_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \ldots\ldots & c_n \\ c_{-1} & c_0 \ldots\ldots & c_{n-1} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} \ldots & c_1 \\ z^n & z^{n-1} \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ik\varphi}\, d\varphi}{H_n(\varphi)}, \qquad (k = 0, 1 \ldots n);$$

он может быть также найден (вплоть до постоянного множителя), как знаменатель дроби

(14.13) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \cdot \frac{d\varphi}{H_n(\varphi)}.$$

Имеют место оценки

(14.14) $$\prod_{k=0}^{n-1}\left\{1 - |a_k|\right\}^2 \leqslant H_n(\varphi) \leqslant \prod_{k=0}^{n-1}\left\{1 + |a_k|\right\}^2, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$

параметры $\{a_k\}_0^{n-1}$ могут быть найдены или при помощи рекуррентного процесса

$$(14.15)\qquad a_k = -\overline{P_{k+1}(0)}, \qquad z P_k(z) = \frac{P_{k+1}(z) + a_k P^*_{k+1}(z)}{1 - |a_k|^2},$$

$$(k = 0, 1 \ldots, n-1),$$

где $P^*_n(z) \equiv \pi_n(z)$, или по формулам (3.2) или (4.3).

Так как по теореме 9.2 полином $P_n(z)$ можно взять произвольно, лишь бы все его корни лежали в области $|z| < 1$, мы положим $P^*_n(z) \equiv \pi_n(z)$; условие $P^*_n(0) = \pi_n(0) = 1$ эквивалентно (14.11), благодаря (14.10). В таком случае из формулы (2.2) для $P_n(z)$ вытекает формула (14.12) для $\pi_n(z)$; по формуле (10.5) моменты $\{c_k\}_0^n$ могут быть выражены формулой

$$(14.16)\qquad c_k = \frac{h_n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}\, d\Theta}{\left|P^*_n\left(e^{i\theta}\right)\right|^2} = \frac{h_n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}\, d\Theta}{H_n(\Theta)};$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n);$$

так как в формулу для $\pi_n(z)$ входят только отношения моментов, то множитель h_n можно отбросить. Формула (14.13) вытекает из соотношения (14.3) и (11.5)

$$(14.17)\qquad Q_0(z) = \frac{\Omega^*_n(z)}{P^*_n(z)} = \frac{\Omega^*_n(z)}{\pi_n(z)} = \frac{h_n}{2\pi c_0}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \cdot \frac{d\Theta}{\left|P^*_n\left(e^{i\theta}\right)\right|^2} =$$

$$= \frac{h_n}{2\pi c_0}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \cdot \frac{d\Theta}{H_n(\Theta)}.$$

Чтобы вывести оценки (14.14), заметим, что из (3.6) вытекает

$$(14.18)\qquad P^*_k(z) \leqslant \prod_{\nu=0}^{k-1} \left\{1 - z a_\nu \frac{P_\nu(z)}{P^*_\nu(z)}\right\}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда при $|z| = 1$ имеем

$$(14.19)\qquad \prod_{\nu=0}^{k-1} \left\{1 - |a_\nu|\right\} \leqslant \left|P^*_k(z)\right| \leqslant \prod_{\nu=0}^{k-2} \left\{1 + |a_\nu|\right\},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Примечание 1. Для полинома

$$(14.20)\qquad H_n(\varphi) = 1 + \rho^2 - 2\rho\cos(n\varphi + \alpha), \qquad \rho < 1,$$

границы в (14.14) достигаются; в этом случае

$$\pi_n(z) = 1 - \rho e^{i\alpha} z^n, \qquad a_{n-1} = \rho e^{i\alpha}, \qquad \{a_k\}_0^{n-2} = 0.$$

Рассмотрим теперь гармоническую функцию

$$G(r, \varphi) = \frac{c_0}{2} + R \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \qquad z = re^{i\varphi}, \qquad 0 < r < 1; \tag{14.21}$$

при условиях $\{\Delta_k\}_0^{\infty} > 0$ она регулярна и положительна для $r < 1$.

Теорема 14.3. Для того, чтобы тригонометрический ряд

$$\frac{c_0}{2} + R \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik\varphi}$$

был рядом Fourier функции $\frac{1}{H_n(\varphi)}$, где $H_n(\varphi)$ положительный тригонометрический полином порядка n[23]), необходимы и достаточны условия

$$\{\Delta_k\}_0^n > 0, \qquad \Delta_{n+k} = \Delta_n \left(\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)^k, \qquad (k = 1, 2, \ldots); \tag{14.22}$$

при этом справедливы следующие оценки для $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

$$\frac{c_0}{2} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta_k - \sqrt{\Delta_k^2 - \Delta_{k+1}\Delta_{k-1}}}{\Delta_k + \sqrt{\Delta_k^2 - \Delta_{k+1}\Delta_{k-1}}} \leqslant \frac{c_0}{2} + \tag{14.23}$$

$$+ R \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik\varphi} \leqslant \frac{c_0}{2} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta_k + \sqrt{\Delta_k^2 - \Delta_{k+1}\Delta_{k-1}}}{\Delta_k - \sqrt{\Delta_k^2 - \Delta_{k+1}\Delta_{k-1}}};$$

Доказательство вытекает из примечания к теореме 14.1 и формул (14.19) и (4.3); надо учесть, что

$$H_n(\varphi) = \left| \frac{P_n^*(e^{i\varphi})}{\sqrt{h_n}} \right|^2$$

и вспомнить формулу (4.2).

§ 15.

Ограниченные функции; обобщение неравенства Julia.

Пусть $F(z)$ является C-функцией; рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{F(z) - \lambda}{F(z) + \bar{\lambda}}, \qquad R\lambda > 0; \tag{15.1}$$

[23]) Необязательно нормированный условием (14.11).

нетрудно видеть, что

$$\mathrm{R}F(z)=\frac{1-|f(z)|^2}{|1-f(z)|^2}\mathrm{R}\lambda; \tag{15.2}$$

поэтому условие $\mathrm{R}F(z)>0$ при $|z|<1$ эквивалентно условию $|f(z)|<1$.

Хотя ограниченная функция $f(z)$ так просто связана с C-функцией $F(z)$, а эта последняя — с тригонометрической проблемой моментов и ортогональными полиномами, однако ограниченные функции никогда не рассматривались в связи с указанными вопросами; чтобы проиллюстрировать пользу этой связи, покажем, как совершенно тривиальный факт в теории моментов приводит к интересному свойству ограниченных функций.

Теорема 15,1. Если функция $f(z)$ регулярна и ограничена в области $|z|<1$

$$|f(z)|<1,$$

и если существуют конечные пределы

$$\lim_{z\to z_\nu} f(z)=1,\qquad \lim_{z\to z_\nu}\frac{f(z)-1}{z-z_\nu}=\beta_\nu, \tag{15.3}$$

$$|z_\nu|=1\qquad(\nu=1,2,\ldots,s),$$

то при $|z|<1$ справедливы неравенства

$$\frac{1-|f(z)|^2}{|1-f(z)|^2}\geqslant \mathrm{R}\sum_{\nu=1}^{s}\frac{1}{\beta_\nu z_\nu}\cdot\frac{z_\nu+z}{z_\nu-z}; \tag{15.4}$$

в частности, при $s=1$, $z_1=1$ получим известное неравенство Julia

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2}\leqslant\beta\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2},\qquad |z|<1. \tag{15.5}$$

Рассмотрим C-функцию $F(z)$, для которой существуют пределы

$$\lim_{z\to z_\nu}\{F(z)(z-z_\nu)\}=m_\nu,\qquad z_\nu=e^{i\theta_\nu}, \tag{15.6}$$

$$(\nu=1,2,\ldots,s);$$

из формулы (11.1) ясно, что обложение $d\sigma(\theta)$ имеет в точках $\{\theta_\nu\}_1^s$ концентрированные массы

$$\mu_\nu=-\frac{\pi c_0 m_\nu}{z_\nu}>0,\qquad(\nu=1,2,\ldots,s), \tag{15.7}$$

а в остальных точках произвольно.

Построим функцию

$$f(z)=\frac{c_0F(z)-\lambda}{c_0F(z)+\bar\lambda},\qquad \mathrm{R}\lambda>0;\qquad |f(z)|<1,\qquad |z|<1; \tag{15.8}$$

легко видеть, что существование пределов (15.6) эквивалентно существованию пределов (15.3), причем

$$\beta_\nu = \frac{2\pi}{z_\nu \mu_\nu} R\lambda, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s) \tag{15.9}$$

Наряду с обложением $d\sigma(\Theta)$ рассмотрим обложение $d\sigma'(\Theta)$, состоящее только из масс $\{\mu_\nu\}_1^s \geqslant 0$, сконцентрированных в точках $\{\Theta_\nu\}_1^s$; построим соответствующую С-функцию $F'(z)$ и функцию $f'(z)$

$$c'_0 F'(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{s} \mu_\nu \frac{e^{i\Theta_\nu} + z}{e^{i\Theta_\nu} - z}\ ; \quad f'(z) = \frac{c'_0 F'(z) - \lambda}{c'_0 F'(z) + \lambda}\ ; \tag{15.10}$$

так как для всех $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ имеем

$$\int_0^\varphi d\sigma'(\varphi) \leqslant \int_0^\varphi d\sigma(\varphi),$$

то для $|z| \leqslant 1$ справедливо неравенство

$$R\{c_0 F(z)\} \geqslant R\{c'_0 F'(z)\} \tag{15.11}$$

откуда по (15.2) и (15.10) имеем

$$\frac{1 - |f(z)|^2}{|1 - f(z)|^2} \geqslant \frac{1}{R\lambda} R \left\{ c'_0 F'(z) \right\} = R \sum_{\nu=1}^{s} \frac{1}{\beta_\nu z_\nu} \cdot \frac{z_\nu + z}{z_\nu - z},\ |z| < 1;$$

знак равенства имеет место только для $f(z) \equiv f'(z)$ (15.10).

Во всем дальнейшем мы положим $\lambda = 1$; функцию

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{F(z) - 1}{F(z) + 1}, \tag{15.12}$$

удовлетворяющую в области $|z| < 1$ неравенству $|f(z)| < 1$, будем называть функцией Schur'а [24]), или короче S-функцией.

§ 16.

Соотношения между параметрами, коэфициентами и детерминантами для С- и S-функций.

Пусть $f(z)$ является S-функцией с разложением

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots\ldots + \alpha_n z^n + \ldots\ldots, |z| < 1\ ; \tag{16.1}$$

из соотношения (15.12) находим

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots\ldots = \frac{c_1 + c_2 z + \ldots\ldots}{c_0 + c_1 z + \ldots\ldots},\ |z| < 1, \tag{16.2}$$

откуда следует соотношение между коэфициентами С- и S-функций

[24]) I. Schur [1] решил проблему коэфициентов для ограниченных функций.

$$c_{k+1}=\sum_{\nu=0}^{k}\alpha_\nu c_{k-\nu},\ (k=0,1,\ldots) \tag{16.3}$$

отсюда находим для $k=0, 1, 2, \ldots$.

$$\alpha_k=\frac{(-1)^k}{c_0^{k+1}}\begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{k+1} & c_k & c_{k-1} & \ldots & c_1 \end{vmatrix}; \tag{16.4}$$

$$c_{k+1}=c_0\begin{vmatrix} \alpha_0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_k & \alpha_{k-1} & \alpha_{k-2} & \ldots & \alpha_0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом задание моментов $\{c_k\}_0^n$ однозначно определяет коэфициенты $\{\alpha_k\}_0^{n-1}$; наоборот, задание коэфициентов $\{\alpha_k\}_0^{n-1}$ определяет моменты $\{c_k\}_0^n$ вплоть до множителя.

Выразим теперь параметры $\{a_k\}_0^{n-1}$ через коэфициенты; если в формулу (3.2) подставить (16.3), то, после несложных преобразований определителей, мы получим

$$a_k=\frac{(-1)^{k+1}}{|A_{i\nu}|_0^{k-1}}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k \\ A_{00} & A_{01} & \ldots & A_{0,k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{k-2,0} & A_{k-2,1} & \ldots & A_{k-2,k-1} \end{vmatrix}, \tag{16.5}$$

$$(k=1,2,\ldots);\ a_0=\alpha_0,$$

где $\{A_{i\nu}\}_0^{n-1}$ даются формулой

$$A_{i\nu}=\delta_{i\nu}-\sum_{s=0}^{i}\bar{\alpha}_{i-s}\,\alpha_{\nu-s},\ (i\leqslant\nu); \tag{16.6}$$

иными словами, матрица $\|A_{i\nu}\|_0^{k-1}$ такова

$$\|A_{i\nu}\|_0^{k-1}=E_k-\bar{\bar{A}}'_{k-1}A_{k-1}\,[25], \tag{16.7}$$

где E_k — единичная матрица порядка k, а

$$A_{k-1}=\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-1} \\ 0 & \alpha_0 & \ldots & \alpha_{k-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_0 \end{vmatrix}. \tag{16.8}$$

Введем в рассмотрение детерминанты Schur'а $\{\delta_k\}$, являющиеся детерминантами матриц

---

[25]) A'_{k-1} — матрица, эрмитово-сопряженная с A_{k-1}.

(16.9) $$\left\|\begin{matrix} E_k & A_{k-1} \\ \bar{A}'_{k-1} & E_k \end{matrix}\right\|;$$

как показал I. Schur ([1], § 5) они являются детерминантами матриц

(16.10) $$\left\| E_k - \bar{A}'_{k-1} \cdot A_{k-1} \right\| = \left\| A_{i\nu} \right\|_0^{k-1},$$

т. е. выражаются следующими формулами

(16.11) $$\delta_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \ldots\ldots\ldots \alpha_{k-1} \\ 0 & 1 \ldots\ldots 0 & 0 & \alpha_0 \ldots\ldots\ldots \alpha_{k-2} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 \ldots\ldots 1 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots \alpha_0 \\ \bar{\alpha}_0 & 0 \ldots\ldots 0 & 1 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_0 \ldots\ldots 0 & 0 & 1 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{\alpha}_{k-1} & \bar{\alpha}_{k-2} \ldots \bar{\alpha}_0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 1 \end{vmatrix} = \left| A_{i\nu} \right|_0^{k-1}; \quad \delta_0 = 1.$$

Пользуясь соотношением (16.3) нетрудно показать, что

(16.12) $$\Delta_k = c_0^{k+1} \delta_k, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

и, таким образом, имеем [26])

(16.13) $$|a_k| = \frac{\sqrt{\Delta_k^2 - \Delta_{k+1}\Delta_{k-1}}}{\Delta_k} = \frac{\sqrt{\delta_k^2 - \delta_{k+1}\delta_{k-1}}}{\delta_k},$$

$$(k = 0, 1, \ldots\ldots, n-1); \quad \delta_{-1} = 1;$$

отсюда следует, что условия

(16.14) $$\{\Delta_k\}_0^n > 0, \quad \{\delta_k\}_0^n > 0, \quad \{|a_k|\}_0^{n-1} < 1$$

эквивалентны.

§ 17.

Свойства S-функций, выводимые из связи их с C-функциями.

Из основной формулы (15.12), выражающей S-функцию f(z) через C-функцию F(z), весьма просто выводится ряд свойств S-функций.

Теорема 17.1. Если заданы коэфициенты $\{\alpha_k\}_0^{n-1}$, то для того, чтобы функция

(17.1) $$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots, \qquad |z| < 1,$$

была S-функцией, необходимы и достаточны условия

$$\{|a_k|\}_0^{n-1} < 1,$$

или эквивалентные им условия $\{\delta_k\}_0^n > 0$; если при этом взять $|a_n| = 1$, то

(17.2) $$f(z) = \frac{p_n(z)}{p_n^*(z)},$$

[26]) Эта формула вытекает из рассуждений I. Schur'a (см. [1], § 4); в § 18 мы покажем еще одну формулу, выражающую параметры через коэфициенты S-функции.

где полином $p_n(z)$ степени n имеет все свои корни в области $|z|<1$; при этом

$$\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|=1; \qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

Первая половина теоремы вытекает из теоремы 10.1 для С-функций; при $|a_n|=1$ имеем по (12.14)

$$(17.3) \qquad F(z)=-\frac{\mathfrak{Q}_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)}, \qquad f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{P_{n+1}(z)+\mathfrak{Q}_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)-\mathfrak{Q}_{n+1}(z)};$$

так как

$$P_{n+1}(0)=-\mathfrak{Q}_{n+1}(0)=-a_n,$$

то благодаря тому, что при $|a_n|=1$ все корни полиномов $P_{n+1}(z)$ и $\mathfrak{Q}_{n+1}(z)$ лежат на круге $|z|=1$, мы имеем:

$$(17.4) \qquad P^*_{n+1}(z)=-a_n P_{n+1}(z); \qquad \mathfrak{Q}^*_{n+1}(z)=a_n\mathfrak{Q}_{n+1}(z);$$

$$f(z)=-\frac{a_n}{z}\cdot\frac{P_{n+1}(z)+\mathfrak{Q}_{n+1}(z)}{P^*_{n+1}(z)+\mathfrak{Q}^*_{n+1}(z)}.$$

Полагая

$$(17.5) \qquad p_n(z)=-i\sqrt{\bar{a}_n}\cdot\frac{P_{n+1}(z)+\mathfrak{Q}_{n+1}(z)}{z},$$

мы имеем

$$(17.6) \qquad p^*_n(z)=i\sqrt{\bar{a}_n}\left[P^*_{n+1}(z)+\mathfrak{Q}^*_{n+1}(z)\right],$$

откуда на основе (17.4) вытекает (17.2).

Далее, из (17.4), (17.5) и (17.6) следует:

$$(17.7) \qquad P_{n+1}(z)=\frac{i}{2\sqrt{\bar{a}_n}}\left\{zp_n(z)+p^*_n(z)\right\};$$

применяя тот же метод, как в § 9, мы убеждаемся, что все корни полинома $p_n(z)$ лежат в области $|z|<1$.

Теорема 17.2. Если заданы коэфициенты $\{\alpha_k\}_0^{n-1}$, удовлетворяющие условиям предыдущей теоремы, то все значения, принимаемые S-функцией

$$f(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_{n-1}z^{n-1}+\cdots, \qquad |z|<1,$$

в данной точке z области $|z|<1$ не выходят за границы окружности Аполлония.

$$(17.8) \qquad \left|\frac{v-v_n}{v-v'_n}\right|\leqslant\left|z\frac{P_n(z)-\mathfrak{Q}_n(z)}{P^*_n(z)+\mathfrak{Q}^*_n(z)}\right|; \quad v=f(z), \; v_n=\frac{\mathfrak{Q}^*_n(z)-P^*_n(z)}{z\left[\mathfrak{Q}^*_n(z)+P^*_n(z)\right]};$$

$$v'_n=\frac{p_n(z)}{p^*_n(z)};$$

при этом функция v_n осуществляет аппроксимацию функции $f(z)$ порядка не ниже $O\left(|z|^n\right)$.

Доказательство сразу вытекает из (12.13) и (15.12).

Примечание. Нетрудно найти центр $\gamma_n(z)$ и радиус $\rho_n(z)$ окружности (17.8):

$$\gamma_n(z)= \tag{17.9}$$

$$=\frac{\left[\overline{P_n^*(z)}+\overline{\Omega_n^*(z)}\right]\left[\Omega_n^*(z)-P_n^*(z)\right]+|z|^2\left[\overline{P_n(z)}-\overline{\Omega_n(z)}\right]\left[P_n(z)+\Omega_n(z)\right]}{\bar z\left\{\left|P_n^*(z)+\Omega_n^*(z)\right|^2-|z|^2\left|P_n(z)-\Omega_n(z)\right|^2\right\}}$$

$$\rho_n(z)=\frac{4h_n|z|^n}{h_0\left\{\left|P_n^*(z)+\Omega_n^*(z)\right|^2-|z|^2\left|P_n(z)-\Omega_n(z)\right|^2\right\}}. \tag{17.10}$$

Теорема 17.3. Для того чтобы функция

$$f(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_n z^n+\cdots,\qquad |z|<1,$$

была S-функцией, необходимо и достаточно, чтобы или $\left\{\delta_k\right\}_0^\infty>0$, т. е. $\left\{|a_k|\right\}_0^\infty<1$, или же чтобы

$$\left\{\delta_k\right\}_0^n>0,\qquad \left\{\delta_k\right\}_{n+1}^\infty=0, \tag{17.11}$$

т. е. $\left\{|a_k|\right\}_0^{n-1}<1$, $|a_n|=1$; в этом последнем случае $f(z)$ будет рациональной функцией (17.2).

Если $0<\left\{|a_k|\right\}_0^\infty<1$, то

$$f(z)=\frac{a_0|}{|1}-\frac{\frac{a_1}{a_0}z\left(1-|a_0|^2\right)|}{|1+\frac{a_1}{a_0}z}\cdots-\frac{\frac{a_n}{a_{n-1}}z\left(1-|a_{n-1}|^2\right)|}{|1+\frac{a_n}{a_{n-1}}z}-\cdots, \tag{17.12}$$

причем непрерывная дробь равномерно сходится в любой замкнутой области $|z|\leqslant r<1$.

Первая половина теоремы вытекает из теоремы (13.2). Так как мы имеем по (15.12) и (13.13):

$$F(z)=\frac{1+zf(z)}{1-zf(z)}=K(z)=1+\frac{2a_0 z}{1-a_0 z-K_1}, \tag{17.13}$$

$$K_1=\frac{\frac{a_1}{a_0}z\left(1-|a_0|^2\right)|}{|1+\frac{a_1}{a_0}z}-\cdots-\frac{\frac{a_n}{a_{n-1}}z\left(1-|a_{n-1}|^2\right)|}{|1+\frac{a_n}{a_{n-1}}z}-\cdots,$$

то легко находим:

$$\frac{1+z\,f(z)}{1-z\,f(z)}=\frac{1+a_0 z-K_1}{1-a_0 z-K_1},\qquad f(z)=\frac{a_0}{1-K_1}. \tag{17.14}$$

Примечание. Подходящая дробь порядка n непрерывной дроби (17.12) равна:

(17.15) $$v_n = \frac{1}{z} \cdot \frac{\Omega_n^*(z) - P_n^*(z)}{\Omega_n^*(z) + P_n^*(z)}\,.$$

и по теореме (17.2) осуществляет аппроксимацию $f(z)$ порядка не ниже $O(|z|^n)$.

§ 18.

Алгоритм и функции Schur'a.

Мы показали в теореме (17.1) решение проблемы коэфициентов для S-функций, опираясь на их связь с C-функциями. Эта проблема была впервые решена Schur'ом [1] независимо от C-функций при помощи следующего алгоритма:

Теорема 18.1. Если по заданной функции

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots, \quad |z| < 1,$$

построена система функций $\left\{f_\nu(z)\right\}_0^\infty$ по следующему алгоритму

(18.1) $$f_\nu(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{f_{\nu-1}(z) - f_{\nu-1}(0)}{1 - \overline{f_{\nu-1}(0)}\, f_{\nu-1}(z)}\,, \quad (\nu = 1, 2, \cdots); \quad f_0(z) \equiv f(z)$$

и найдена последовательность параметров

(18.2) $$\gamma_\nu = f_\nu(0), \qquad (\nu = 0, 1, \cdots),$$

то для того, чтобы функция $f(z)$ была S-функцией необходимо и достаточно, чтобы или

(18.3) $$\left\{|\gamma_k|\right\}_0^\infty < 1,$$

или же чтобы

(18.4) $$\left\{|\gamma_k|\right\}_0^{n-1} < 1, \qquad |\gamma_n| = 1;$$

в этом последнем случае $f(z)$ является рациональной функцией типа (17.2); в первом случае все функции $\left\{f_\nu(z)\right\}_0^\infty$ являются S-функциями.

Вместо того, чтобы доказать эту теорему Schur'a, мы покажем что его параметры $\left\{\gamma_k\right\}_0^\infty$ совпадают с ранее введенными нами параметрами $\left\{a_k\right\}_0^\infty$, играющими, как мы показали, такую важную роль в теории ортогональных полиномов.

Теорема 18,2. 1) Функции $\left\{f_\nu(z)\right\}_0^\infty$, построенные по алгоритму Schur'a (18.1), выражаются через заданную функцию $f_0(z)$ формулой:

(18.5) $$f_\nu(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{z f_0(z)\left[P_\nu^*(z) + \Omega_\nu^*(z)\right] + P_\nu^*(z) - \Omega_\nu^*(z)}{z f_0(z)\left[P_\nu(z) - \Omega_\nu(z)\right] + P_\nu(z) + \Omega_\nu(z)}\,,$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots\ldots),$$

а параметры Schur'a совпадают с параметрами $\left\{a_k\right\}_0^\infty$

(18.6) $$\gamma_\nu = f_\nu(0) = a_\nu, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots\ldots);$$

2) Все функции $\left\{f_\nu(z)\right\}_0^\infty$ будут S-функциями тогда и только тогда, когда

(18.7) $$|f_\nu(0)| = |a_\nu| < 1, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots\ldots);$$

если к тому же $\left\{a_\nu\right\}_0^\infty \neq 0$, то функции $\left\{f_\nu(z)\right\}_0^\infty$ могут быть разложены в непрерывные дроби:

(18.8) $$f_\nu(z) = \frac{a_\nu|}{|1} - \frac{\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} z(1-|a_\nu|^2)|}{|1+\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} z} - \frac{\frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu+1}} z(1-|a_{\nu+1}|^2)|}{|1+\frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu+1}} z} - \ldots\ldots,$$

которые равномерно сходятся при $|z| \leqslant r < 1$ [27]).

3) S-функция $f(z)$, имеющая заданные первые коэфициенты $\left\{\alpha_k\right\}_0^n$, допускает следующее представление

(18.9) $$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{\left[P_n(z) + \mathfrak{Q}_n(z)\right] z\varphi(z) - \left[P_n^*(z) - \mathfrak{Q}_n^*(z)\right]}{\left[P_n^*(z) + \mathfrak{Q}_n^*(z)\right] - \left[P_n(z) - \mathfrak{Q}_n(z)\right] z\varphi(z)},$$

где $\varphi(z)$ — произвольная S-функция.

Рассмотрим семейство функций $\left\{\varphi_\nu(z)\right\}_0^\infty$, где

(18.10) $$\varphi_\nu(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{Q_0(z) P_\nu^*(z) - \mathfrak{Q}_\nu^*(z)}{Q_0(z) P_\nu(z) + \mathfrak{Q}_\nu(z)}, \qquad (\nu = 0, 1, \ldots.);$$

воспользовавшись формулами (5.1) и (3.1), находим:

(18.11) $$Q_0(z) P_\nu^*(z) - \mathfrak{Q}_\nu^*(z) = \frac{z^\nu}{\pi c_0} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\Theta} \overline{P_\nu(e^{i\Theta})}}{e^{i\Theta} - z} d\sigma(\Theta) = \frac{2a_\nu h_\nu z^{\nu+1}}{c_0} + (z^{\nu+2}), \quad |z| < 1;$$

в то же время, в силу (11.3) и (11.4), имеем:

(18.12) $$Q_0(z) P_\nu(z) + \mathfrak{Q}_\nu(z) = Q_\nu(z) = \frac{2h_\nu z^\nu}{c_0} + (z^{\nu+1}), \quad |z| < 1,$$

откуда вытекает:

$$\varphi_\nu(0) = a_\nu, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots\ldots).$$

Пользуясь (3.3) и (5.3), мы показываем, что функции $\left\{\varphi_\nu(z)\right\}_0^\infty$ удовлетворяют соотношению

(18.13) $$\varphi_\nu(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{\varphi_{\nu-1}(z) - \varphi_{\nu-1}(0)}{1 - \varphi_{\nu-1}(0)\varphi_{\nu-1}(z)}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots\ldots),$$

$$\varphi_0(z) \equiv f_0(z),$$

т. е. совпадают с функциями Schur'a

---

[27]) Таким образом, переход от $f_\nu(z)$ к $f_{\nu+1}(z)$ сводится к замене каждого параметра $\left\{a_k\right\}_\nu^\infty$ на $\left\{a_{k+1}\right\}_\nu^\infty$.

(18.14) $$\varphi_\nu(z) \equiv f_\nu(z), \qquad (\nu = 0, 1, \ldots\ldots);$$

формула (18.5) получится из (18.10), если выразить С-функцию $F(z) \equiv Q_0(z)$ через S-функцию $f(z) \equiv f_0(z)$ по формуле (15.12).

Для доказательства (2) воспользуемся (12.10), (12.11) и (12.13):

(18.15) $$|\varphi_\nu(z)| = \left|\frac{P_\nu^*(z)}{\bar{z} P_\nu(\bar{z})}\right| \cdot \left|\frac{w - w_n}{w - w'_n}\right| \leqslant 1, \qquad w = Q_0(z), \quad |z| < 1$$

знак равенства возможен только при $|a_\nu| = 1$, $|z| = 1$.

Для вывода (18.8) заметим, что из (17.13) имеем:

(18.16) $$f(z) = \frac{a_0}{1 - K_1}, \qquad K_1 = \frac{\frac{a_1}{a_0} z (1 - |a_0|^2)}{1 + \frac{a_1}{a_0} z - K_2},$$

$$K_2 = \frac{\frac{a_2}{a_1} z (1 - |a_1|^2)}{\left| 1 + \frac{a_2}{a_1} z \right.} - \frac{\frac{a_3}{a_2} z (1 - |a_2|^2)}{\left| 1 + \frac{a_3}{a_2} z \right.} - \ldots\ldots;$$

откуда находим:

(18.17) $$f_1(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{f(z) - a_0}{1 - \bar{a}_0 f(z)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{a_0 K_1}{1 - |a_0|^2 - K_1} = \frac{a_1}{1 - K_2},$$

т. е. $f_1(z)$ выражается формулой (18.8). Применяя метод математической индукции, показываем, что она справедлива для всех ν. Для вывода (18.9) решаем (18.5) относительно $f_0(z)$ и заменяем $f_\nu(z)$ произвольной S-функцией $\varphi(z)$.

Примечание 1. Так как $\{a_\nu = \gamma_\nu\}_0^\infty$, то мы можем выразить параметры $\{a_\nu\}_2^\infty$ через коэфициенты по следующей формуле (I. Schur [1], § 4):

(18.18) $$a_\nu = \frac{1}{\delta_\nu} \begin{vmatrix} 0 & 0 \ldots 0 & \alpha_1 \; \alpha_2 \ldots \alpha_{\nu-1} & \alpha_\nu \\ 1 & 0 \ldots 0 & \alpha_0 \; \alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-2} & \alpha_{\nu-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots 1 & 0 \; 0 \ldots \alpha_0 & \alpha_1 \\ \bar{\alpha}_0 & 0 \ldots 0 & 1 \; 0 \ldots 0 & 0 \\ \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_0 \ldots 0 & 0 \; 1 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{\alpha}_{\nu-2} & \bar{\alpha}_{\nu-3} \; \bar{\alpha}_0 \ldots & 0 \; 0 \ldots 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$a_1 = \frac{\alpha_1}{1 - |\alpha_0|^2}, \quad a_0 = \alpha_0.$$

Примечание 2. Для С-функций имеет место теорема, аналогичная теореме (18.2), и может быть построен алгоритм, аналогичный (18.1)[28]).

[28]) См. Я. Л. Геронимус [3].

§ 19.

Исследование характера решения проблемы моментов по заданным параметрам.

Пользуясь теоремой, рассмотренной в предыдущих параграфах, мы сможем теперь подойти к решению такой задачи: исходя из заданной последовательности параметров $\left\{a_k\right\}_0^\infty$ исследовать множество E точек роста функции распределения $\sigma(\theta)$, являющейся решением тригонометрической проблемы моментов, а также изучить свойства соответствующих ортогональных полиномов, C- и S-функций[29]).

Обозначим через $\bar{E}$ замыкание множества E; пусть

$$T_n(z) = z^n + \ldots\ldots$$

будет так называемый полином Чебышева, т. е. тот из полиномов степени n со старшим коэфициентом, равным единице, который наименее уклоняется от нуля на замкнутом множестве $\bar{E}$; если через ε_n обозначить величину этого наименьшего уклонения, то, как показали G. Faber [1] и M. Fekete [1], существует предел

$$(19.1) \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\varepsilon_n} = d(\bar{E}),$$

где $d(\bar{E})$ — так называемый трансфинитный диаметр множества $\bar{E}$[30]).

Нетрудно видеть, что

$$h_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P_n(z)|^2 d\sigma(\theta) = \operatorname{Min}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |z^n + \ldots .|^2 d\sigma(\theta)\right\}, \quad z = e^{i\theta},$$

поэтому

$$h_n \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |T_n(z)|^2 d\sigma(\theta) < c_0 \varepsilon_n^2;$$

отсюда вытекает неравенство

$$(19.2) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{h_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\varepsilon_n^2} = d^2(\bar{E}).$$

Теорема 19.1. 1) Если параметры $\left\{a_k\right\}_0^\infty$ подчинены условию

$$(19.3) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}(1 - |a_k|^2)} = 1,$$

(в частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$), то множество E точек

---

[29]) В наших работах [2] и [5] подробно рассмотрен, например, тот частный случай, когда последовательность параметров периодична или предельно-периодична.

[30]) Систематическое изложение свойств трансфинитного диаметра можно найти в работах G. Szegö [7], G. Polya und G. Szegö [1], M. Fekete [2], а также в книге Р. Неванлинна [1], гл. V.

роста функции распределения $\sigma(\theta)$, являющейся решением проблемы моментов (13.7), всюду плотно в $[0, 2\pi]$.

2) Если параметры подчинены условию

$$(19.4) \qquad \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}(1-|a_k|^2} = \sin^2\alpha, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

то множество $E_1 \subset E$ точек, в которых производная[31]) $p(\Theta) = \sigma'(\Theta)$ положительна и непрерывна, не содержит ни одного интервала длиной $> 4\alpha$; если $\alpha = 0$ (в частности, при $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 1$), то множество E_1 разрывное.

Для доказательства (1) заметим, что из условия теоремы вытекает

$$(19.5) \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{h_n} = 1 \leqslant d^2(\bar{E});$$

для дуги Γ единичного круга с центральным углом φ трансфинитный диаметр равен $\sin\frac{\varphi}{4}$ (G. Szegö) [3], стр. 254); поэтому $d(\bar{E}) \leqslant 1$; сопоставляя с (19.5), находим: $d(E) = 1$, т. е. E всюду плотно в $[0, 2\pi]$.

Для доказательства (2) предположим, что функции $p(\Theta) = \sigma'(\Theta) > 0$ и непрерывна для таких значений Θ, при которых $z = e^{i\Theta} < \Gamma$; рассмотрим второе обложение $d^*(\Theta)$, совпадающее с $d\sigma(\Theta)$ для этих точек и равное нулю во всех остальных точках; тогда для всех $0 \leqslant \Theta \leqslant 2\pi$

$$(19.6) \qquad \int_0^\Theta d\sigma(\varphi) \geqslant \int_0^\Theta d\sigma^*(\varphi),$$

откуда вытекают неравенства

$$(19.7) \qquad h_n \geqslant h_n^*, \quad (n = 0, 1, \ldots);$$

но, по общей теории G. Szegö ([6], § 16.4) относительно полиномов, ортогональных на кривой, имеем

$$(19.8) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{h_n^*} = \sin^2\frac{\varphi}{4};$$

таким образом находим из (19.4) и (19.8)

$$(19.9) \qquad \sin^2\alpha = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{h_n} \geqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{h_n^*} = \sin^2\frac{\varphi}{4},$$

откуда вытекает $\varphi \leqslant 4\alpha$.

Примечание. Чтобы лучше представить себе характер ограничения, накладываемого условием (19.3) на параметры $\{a_k\}_0^\infty$, рассмотрим выражение

$$\frac{1}{n}\lg\frac{h_n}{h_0} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\lg\left(1-|a_k|^2\right);$$

[31]) Существующая, как известно, почти всюду в $[0, 2\pi]$.

введем ступенчатые функции $\psi_n(x)$, имеющие скачок $\frac{1}{n}$ в каждой точке $x=|a_k|^2$, $(k=0, 1, \ldots, n-1)$; тогда, так как $0\leqslant|a_n|<1$, то

$$\frac{1}{n}\lg\frac{h_n}{h_0}=\int_0^1 \lg(1-x)\,d\psi_n(x),\ (n=1, 2, \ldots); \tag{19.10}$$

из условия (19.3) вытекает существование такой подпоследовательности чисел $\{n_\nu\}$, что

$$\lim_{n_\nu\to\infty}\left\{\frac{1}{n_\nu}\lg\frac{h_{n_\nu}}{h_0}\right\}=0.$$

Применяя к последовательности функций $\{\psi_{n_\nu}(x)\}$ первую и вторую теоремы Helly, мы придем к равенству:

$$\int_0^1 \lg(1-x)\,d\psi(x)=0, \tag{19.11}$$

где $\psi(x)$ — некоторая предельная функция распределения. Итак, обложение $d\psi(x)$ на кривой $y=\lg(1-x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$ должно быть таким, чтобы центр тяжести лежал на оси Ox; поэтому обложение $d\psi(x)$ должно состоять из единственной массы, равной единице, сконцентрированной в точке $x=0$.

Следовательно, мы должны иметь $\underline{\lim}_{n\to 0}\ a_n=0$, причем последовательность $\{|a_n|\}_0^\infty$ может иметь и другие предельные точки; но, если обозначить через m_n число точек $x=|a_k|^2$, лежащих при данном n на любом, сколь угодно малом отрезке $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$, то мы должны иметь $\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{m_n}{n}=1$. Пусть, например,

$$a_k=\begin{cases}0, & k\neq n^2\\ a, & k=n^2,\end{cases}\qquad 0<a<1; \tag{19.12}$$

имеем две предельных точки 0 и a; имеем далее:

$$h_k=h_0(1-a^2)^n,\qquad n^2+1<k\leqslant(n+1)^2, \tag{19.13}$$

откуда

$$(1-a^2)^{\frac{n}{n^2+1}}<\sqrt[k]{\frac{h_k}{h_0}}\leqslant(1-a^2)^{\frac{n}{(n+1)^2}};\quad \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{h_k}{h_0}}=1. \tag{19.14}$$

Из теоремы (19.1) вытекает следующая теорема, позволяющая судить о предельных значениях C- и S-функций.

Теорема 19.2. 1) Если коэфициенты C-функции

$$\frac{c_0}{2}F(z)=\frac{c_0}{2}+c_1z+\cdots+c_nz^n+\cdots,\quad |z|<1, \tag{19.15}$$

подчинены условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}=1, \tag{19.16}$$

то на окружности $|z|=1$ нет ни одной дуги такой, чтобы предельные значения, принимаемые С-функцией $F(z)$ на этой дуге, лежали все на конечном отрезке мнимой оси плоскости $w=F(z)$.

2) Если коэфициенты S-функции

$$f(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_n z^n+\cdots, \qquad |z|<1, \tag{19.17}$$

подчинены условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}}=1, \tag{19.18}$$

то на окружности $|z|=1$ нет ни одной дуги такой, чтобы предельные значения, принимаемые S-функцией $f(z)$ на этой дуге, лежали все в плоскости $v=f(z)$ на окружности $v=e^{i\alpha}$, $0<\alpha<2\pi$.

Для доказательства заметим, что по формуле (11.7), интервал, свободный от точек роста функции $\sigma(\Theta)$, соответствует точкам на конечном отрезке мнимой оси плоскости w, следовательно, точкам окружности $|v|=1$; точка $v=1$ нами исключена, ибо она соответствует точке $w=\infty$, а w обращается, в частности, в бесконечность в точках концентрации масс.

Примечание. При рассмотрении (19.2) естественно возникает вопрос не будет ли всегда иметь место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{h_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\varepsilon_n^2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{M_n^2}=d^2(\bar{E}); \tag{19.19}$$

где

$$M_n=\operatorname{Max}\left|P_n^{*}(z)\right|, \qquad |z|\leqslant 1. \tag{19.20}$$

A. Edrei [1] показывает, что это не так и строит функции $\sigma(\Theta)$, для которых

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{h_n}=\tau d^2(\bar{E}), \tag{19.21}$$

где τ — наперед заданное число, причем $0\leqslant\tau\leqslant 1$ (теорема VII). Он называет функцию $\sigma(\Theta)$ регулярной, если справедливо (19.19), и дает некоторые достаточные условия регулярности (теорема VI); в нашей заметке [7] мы даем более общие условия регулярности; именно, пусть E_0 состоит из дуг $\{e_k\}_1^m$ длиной $\geqslant h$ и пусть $E=E_1+E_2$, где $\bar{E}_1=E_0$, а E_2 — изолированное счетное множество, предельные точки которого принадлежат E_0.

Введем вместе с J. Shohat'ом [2] модуль роста $a(\delta)$ функции $\sigma(\Theta)$ на E_0

$$a(\delta)=\operatorname{Inf}\{\sigma(\Theta+\delta)-\sigma(\Theta)\}, \tag{19.22}$$

$$\Theta,\Theta+\delta\in e_k, \qquad (k=1,2,\ldots,m).$$

В таком случае условие

$$\lim_{\delta\to 0}\left\{\sqrt{\delta}\,\lg a(\delta)\right\}=0 \tag{19.23}$$

достаточно для регулярности функции $\sigma(\theta)$, т. е. для выполнения (19.19).

§ 20.

Исследование функции $\rho(z)$.

Для рассмотрения дальнейших случаев нам окажет пользу функция

$$\rho_n(z)=\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{|P_k(z)|^2}{h_k}\right\}^{-1}=\left\{K_n(z,z)\right\}^{-1}= \tag{20.1}$$

$$=\frac{h_n(1-|z|^2)}{|P_n^*(z)|^2-|z\,P_n(z)|^2}.$$

Она естественно появляется при решении такой экстремальной задачи: найти минимум интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|G_n(z)|^2\,d\sigma_n(\theta),\qquad z=e^{i\theta}, \tag{20.2}$$

где $G_n(z)$—произвольный полиномом степени не выше n, подчиненный условию $G_n(\zeta)=1$.

Теорема 20.1. Для всякого полинома $G_n(z)$ имеет место неравенство (G. Szegő [6], § 11.3).

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|G_n(z)|^2\,d\sigma_n(\theta):|G_n(\zeta)|^2\geqslant\rho_n(\zeta); \tag{20.3}$$

если параметр a_n взять по формуле

$$a_n=\zeta\frac{P_n(\zeta)}{P_n^*(\zeta)},\qquad \zeta=e^{i\alpha}, \tag{20.4}$$

то $2\pi\,\rho_n(\zeta)$ дает величину той массы, которую имеет в точке α обложение $d\sigma_n^{(2)}(\theta)$ § 10; это наибольшая возможная масса, которую может иметь в точке α любое обложение $d\sigma_n(\theta)$[32]).

Полагая

$$G_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k P_k(z), \tag{20.5}$$

[32]) Это свойство аналогично свойству $\rho_n(z)$ для степенной проблемы моментов (см. I. Shohat and I. Tamarkin [1], ch. II).

имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |G_n(z)|^2 d\sigma_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} |\beta_k|^2 h_k ;$$

по неравенству Schwartz'a имеем

$$(20.6) \qquad 1 = \left|\sum_{k=0}^{n} \beta_k P_k(\zeta)\right|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} |\beta_k|^2 h_k \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{|P_k(\zeta)|^2}{h_k},$$

откуда вытекает (20.3); знак равенства имеет место только при $\left\{ \beta_k = \frac{\lambda P_k(\zeta)}{h_k} \right\}_0^n$, т. е. для полинома

$$(20.7) \qquad g_n(z) = \lambda \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(z)\overline{P_k(\zeta)}}{h_k} = \lambda K_n(z, \zeta).$$

Рассмотрим теперь случай

$$(20.8) \qquad \left\{ |a_k| \right\}_0^{n-1} < 1, \qquad |a_n| = 1 ;$$

мы имеем по (10.15)

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} d\sigma_n^{(2)}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{n+1} \mu_s e^{-ik\theta_s}, \quad (k = 0, 1, \ldots, n);$$

отсюда находим

$$(20.9) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |G_n(z)|^2 d\sigma_n^{(2)}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |G_n(z)|^2 d\sigma_n(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{n+1} \mu_s |G_n(e^{i\theta_s})|^2,$$

следовательно

$$(20.10) \qquad \frac{\mu_s}{2\pi} \leqslant \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |G_n(z)|^2 d\sigma_n(\theta);}{|G_n(e^{i\theta_s})|^2}$$

если положить

$$(20.11) \qquad G_n(z) = \frac{P_{n+1}(z)}{(z - z_s) P'_{n+1}(z_s)}, \; z_s = e^{i\theta_s}, \; P_{n+1}(z_s) = 0,$$

то мы получим

$$(20.12) \qquad \mu_s = 2\pi \rho_n(z_s), \qquad (s = 1, 2, \ldots, n+1)$$

Вместо задания $|a_n|=1$ можно, как это было показано в § 9, задать произвольно один корень $\zeta=e^{i\alpha}$ полинома $P_{n+1}(z)$ и найти a_n по формуле (20.4); отметим также, что полином (20.11) отличается от полинома (20.7) при $\zeta=z_s$ только постоянным множителем.

Покажем теперь, что

(20.13) $\sigma_n(\alpha+0)-\sigma_n(\alpha-0)\leqslant\sigma_n^{(2)}(\alpha+0)-\sigma_n^{(2)}(\alpha-0)=2\pi\rho_n(\zeta),\ \zeta=e^{i\alpha},$

где $\sigma_n(\theta)$ любое решение укороченной проблемы моментов.

Мы имеем неравенство (Н. Ахиезер и М. Крейн [2]),

(20.14) $$\sigma_n(\alpha+0)-\sigma_n(\alpha-0)\leqslant\int_0^{2\pi}|G_n(z)|^2\,d\sigma_n(\theta):|G_n(e^{i\alpha})|^2,$$

справедливое при любом полиноме $G_n(z)$; беря полином (20.7), мы придем к (20.13).

Исследуем теперь поведение функции $\rho_n(z)$ при $n\to\infty$.

Теорема 20.2. При $n\to\infty$ существует для всех z предел

(20.15) $$\lim_{n\to\infty}\rho_n(z)=\rho(z)\geqslant 0;$$

при $|z|>1$ имеем $\rho(z)\equiv 0$; при $|z|=1$, $\rho(z)=0$, за возможным исключением счетного множества точек $\left\{\zeta_\nu=e^{i\theta_\nu}\right\}$, причем, если $2\pi\rho(\zeta_\nu)>0$, то это есть масса, сконцентрированная в точке θ_ν; при $|z|<1$ функция $\rho(z)$ или тождественно равна нулю, или отлична от нуля[33]).

Так как $\rho_n(z)\geqslant\rho_{n+1}(z)>0$, то при всех z существует предел (20.15).

При $|z|>1$ имеем из (8.2)

$$h_0>\rho_n(z)=\frac{h_n(|z|^2-1)}{\left|zP_n(z)\right|^2-\left|P_n^*(z)\right|^2}\leqslant\frac{h_n(|z|^2-1)}{|z|^2\,|P_n(z)|^2},$$

откуда

$$\frac{|P_n(z)|^2}{h_n}>\frac{|z|^2-1}{h_0|z|^2},$$

т. е. ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|P_n(z)|^2}{h_n}$ расходится и $\rho(z)\equiv 0$.

Пусть теперь $z=\zeta=e^{i\alpha}$ и $\rho(\zeta)>0$; мы хотим показать, что

(20. 16) $$\sigma(\alpha+0)-\sigma(\alpha-0)=\mu=2\pi\rho(\zeta).$$

Построим последовательность функций $\left\{\sigma_n^{(2)}(\theta)\right\}$, имеющих точку α точкой роста; поскольку эта последовательность равномерно ограничена, то, по первой теореме Helly, мы можем из нее выделить подпоследовательность $\left\{\sigma_{n_r}^{(2)}(\theta)\right\}$, сходящуюся в основном к

[33]) Это последнее свойство вытекает из результатов М. Г. Крейна [1], относящихся к обобщенной проблеме моментов.

неубывающей функции $\sigma(\theta)$, дающей решения проблемы моментов так как (20.14) справедливо при любом n, то

$$(20.17)\qquad \sigma(\alpha+0)-\sigma(\alpha-0)\leqslant 2\pi\rho(\zeta);$$

с другой стороны, пусть $\delta>0$ таково, что $\alpha\pm\delta$ точки непрерывности функции $\sigma(\theta)$; тогда

$$\sigma(\alpha+\delta)-\sigma(\alpha-\delta)=\lim_{n_r\to\infty}\left\{\sigma_{n_r}^{(2)}(\alpha+\delta)-\sigma_{n_r}^{(2)}(\alpha-\delta)\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\lim_{n_r\to\infty}2\pi\rho_{n_r}(\zeta)=2\pi\rho(\zeta);$$

при $\delta\to 0$ получим

$$(20.18)\qquad \sigma(\alpha+0)-\sigma(\alpha-0)\geqslant 2\pi\rho(\zeta),$$

откуда, при сопоставлении с (20.17), вытекает (20.16). Множество таких точек концентрации масс, т. е. множество точек разрыва функции ограниченной вариации $\sigma(\theta)$, не более, чем счетно[34]).

Пусть теперь $|z|<1$; рассмотрим семейство аналитических функций $\left\{\frac{P_n^*(z)}{\sqrt{h_n}}\right\}_0^\infty$; внутри области $|z|<1$ они удовлетворяют неравенству

$$(20.19)\qquad \frac{P_n^*(z)}{\sqrt{h_n}}\geqslant\sqrt{\frac{1-|z|^2}{c_0}},\qquad (n=0,1,2,\ldots);$$

поэтому, по теореме Montel'я[35]) мы можем выделить подпоследовательность $\left\{\frac{P_{n_\nu}^*(z)}{\sqrt{h_{n_\nu}}}\right\}$, которая равномерно сходится внутри области $|z|<1$ к некоторой аналитической предельной функции

$$(20.20)\qquad \lim_{n_\nu\to\infty}\frac{P_{n_\nu}^*(z)}{\sqrt{h_{n_\nu}}}=\varphi(z),$$

(которая может быть тождественной бесконечностью), регулярной в области $|z|<1$; по известной теореме Hurwitz'a, $\varphi(z)\neq 0$ для $|z|<1$.

Так как из (8.2) вытекает неравенство

$$\rho_n(z)>\frac{(1-|z|^2)h_n}{|P_n^*(z)|^2},\qquad |z|<1,$$

справедливое при всех n, то

$$\varphi(z)\geqslant\frac{1-|z|^2}{|\varphi(z)|^2},\qquad |z|<1.$$

Если $\varphi(z)\not\equiv\infty$, то $\rho(z)>0$; если же $\varphi(z)\equiv\infty$ в области $|z|<1$ то из формулы

[34]) Свойство (20.16) функции $\rho(\zeta)$ имеет место и для степенной проблемы моментов; см. l. c. [32]), стр. 44-5, откуда взято приводимое нами доказательство.

[35]) См. P. Montel [1]. § 17.

$$\frac{|zP_{n_\nu}(z)|^2}{h_{n_\nu}}+\frac{1-|z|^2}{\rho_{n_\nu}(z)}=\frac{|P^*_{n_\nu}(z)|^2}{h_{n_\nu}}$$

вытекает, что $\rho(z)\equiv 0$ в области $|z|<1$.

Примечание. Для степенной проблемы моментов поведение функции $\rho(z)$ несколько иное: если проблема моментов определенная, т. е. имеет только одно решение, то $\rho(z)=0$ всюду за возможным исключением счетного множества точек концентрации масс; в случае неопределенности $\rho(z)>0$ для всех значений z [36]).

§ 21.

Решение проблемы моментов и асимптотическая формула для ортогональных полиномов в случае $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty$.

Рассмотрим теперь чрезвычайно интересный частный случай, когда сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2.$$

Теорема 21.1. Следующие семь условий эквивалентны:

I. сходимость числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2; \tag{21.1}$$

II. существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}; \tag{21.2}$$

III. сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|P_n(z)|^2}{h_n} \tag{21.3}$$

по крайней мере в одной точке области $|z|<1$;

IV. сходимость подпоследовательности

$$\left\{\frac{P^*_{n_\nu}(z)}{\sqrt{h_{n_\nu}}}\right\}$$

по крайней мере в одной точке области $|z|<1$;

V. справедливость асимптотической формулы

[36]) l. c. [32])

$$P_{n_\nu}(z) \simeq z^{n_\nu}\pi\left(\frac{1}{z}\right) \tag{21.4}$$

по крайней мере в одной точке области $|z|<1$, где $\pi(z)$ аналитическая функция, регулярная в области $|z|<1$;

VI. существование числа $M>0$ такого, чтобы по крайней мере в одной точке ζ области $|z|<1$ иметь

$$\max\left\{|G_{n_\nu}(\zeta)|^2 : \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|G_{n_\nu}\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 d\sigma(\theta)\right\} \leqslant M \tag{21.5}$$

при $n_\nu \to \infty$;

VII. существование интеграла Лебега

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg p(\theta)\,d\theta, \tag{21.6}$$

где $p(\theta)$ — существующая почти всюду производная функции $\sigma(\theta)$ [37]).

Примечание. Из справедливости III и IV по крайней мере в одной точке и для подпоследовательности $\{n_\nu\}$ вытекает их справедливость во всех точках соответствующих областей и для всех целых положительных чисел.

Так как

$$h_n = h_0 \prod_{k=0}^{n-1}(1-|a_k|^2) = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

то эквивалентность I и II очевидна.

Полагая в (8.3) $z=0$, мы находим

$$h_n = \rho_n(0), \tag{21.7}$$

откуда, на основании теоремы 20.2, вытекает, что I эквивалентно III.

Из формулы (3.6) вытекает формула

$$P_n^*(z) = 1 - z\sum_{k=0}^{n-1} \bar{a}_k P_k(z), \quad (n=1,2,\ldots); \tag{21.8}$$

отсюда при $m>n$ имеем

$$\left|P_m^*(z) - P_n^*(z)\right| = |z|\left|\sum_{k=n}^{m-1} \bar{a}_k P_k(z)\right| \leqslant |z|\sqrt{\sum_{k=n}^{m-1}\left|a_k\right|^2 h_k \sum_{k=n}^{m-1}\frac{|P_k(z)|^2}{h_k}}$$

[37]) Эквивалентность III и VII была доказана М. Крейном [2], который обнаружил также, что это утверждение содержится в несколько скрытой форме в одном из результатов акад. А. Н. Колмогорова [1]; см. также Н. И. Ахиезер [2]. Наше доказательство отличается от доказательства указанных авторов.

так как при условии I ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|P_k(z)|^2}{h_k}$ сходится (равномерно, как всякий ряд с положительными членами), то из I вытекает равномерная сходимость последовательности

$$\lim_{n\to\infty} P_n^*(z)=\pi(z), \qquad |z|\leqslant r<1, \tag{21.9}$$

где $\pi(z)$ — аналитическая функция, регулярная для $|z|<1$; обратно, из (20.23) вытекает, что ограниченность последовательности $\frac{|P_{n_\nu}^*(z)|}{\sqrt{h_{n_\nu}}}$ для точки $|z|<1$ и $n_\nu\to\infty$ влечет за собой сходимость ряда (21.3).

Условие V совпадает с IV; наконец, из (21.5) и (20.3) имеем

$$\frac{1}{\rho_n(\zeta)}\leqslant M,$$

откуда вытекает $\rho(z)>0$ в области $|z|<1$.

Примечание. Условие VI можно записать еще так

$$\min_{n_\nu\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\,1+\beta_1(z-\zeta)+\ldots+\beta_{n_\nu}(z-\zeta)^{n_\nu}\right|^2 d\sigma(\theta)\right\}>0, \tag{21.10}$$

$$z=e^{i\theta},$$

или еще иначе

$$\min_{n_\nu\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{z-\zeta}-R(z)\right|^2 d\sigma(\theta)\right\}>0, \qquad z=e^{i\theta}, \quad |\zeta|<1, \tag{21.11}$$

где $R(z)$ — многочлен степени $n_\nu-1$; таким образом функция $\frac{1}{z-\zeta}$ не может быть аппроксимирована в смысле взвешенного квадратического приближения посредством полиномов; система полиномов $\left\{P_n\left(e^{i\theta}\right)\right\}$ очевидно не полна относительно функции $\frac{1}{e^{i\theta}-\zeta}$ [38]), а, следовательно, относительно класса комплексно-значных функций $H(\theta)$ вещественного аргумента θ, для которых существует интеграл

$$\int_0^{2\pi}|H(\theta)|^2 d\sigma(\theta). \tag{21.12}$$

Следует отметить, что в то же время система полиномов $\{P_n(z)\}$ полна относительно функций $\psi(z)$, регулярных в области $|z|\leqslant 1$; действительно, для такой функции всегда можно построить полином $G_n(z)$ достаточно высокой степени, для которого

---

[38]) Это замечание о незамкнутости системы в случае сходимости (21.3) принадлежит М. Крейну; см. впрочем G. Szegö [1] (теорема XXXV) и J. Shohat and J. Tamarkin [1], стр. 64-5.

$$|\psi(z) - G_n(z)| < \varepsilon, \qquad |z| \leqslant 1; \tag{21.13}$$

в таком случае имеем (G. Szegö [1], теор. XXXIV)

$$\min_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \psi(z) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(z) \right|^2 d\sigma(\theta) \right\} = 0. \tag{21.14}$$

§ 22.

Эквивалентность условий I и VII.

Если VII имеет место, то мы имеем (G. Szegö [6], § 11.3)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| G_{n_\nu}(e^{i\theta}) \right|^2 d\sigma(\theta) \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| G_{n_\nu}(e^{i\theta}) \right|^2 p(\theta)\, d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \left| G_{n_\nu}(e^{i\theta}) \right|^2 d\theta \right\} \tag{22.1}$$

$$\exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg p(\theta)\, d\theta \right\} = \left| G_{n_\nu}(0) \right|^2 \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg p(\theta)\, d\theta \right\};$$

таким образом из VII вытекает V, а, следовательно, и I.

Пусть теперь справедливо I, т. е. пусть сходится произведен

$$h = \lim_{n \to 8} h_n^* = h_0 \prod_{k=0}^{\infty} (1 - |a_k|^2); \tag{22.2}$$

по (10.5) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h_n\, d\theta}{|P_n^*(e^{i\theta})|^2} = c_0, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{22.3}$$

вводя снова норму пространства L_2, как в § 13, мы имеем

$$\left\| \frac{1}{P_n^*(e^{i\theta})} \right\| = \sqrt{\frac{c_0}{h_n}} \leqslant \sqrt{\frac{c_0}{h}}, \qquad (n = 0, 1, \ldots); \tag{22.4}$$

мы можем из ограниченной последовательности (22.4) извлечь п последовательность $\left\{ \frac{1}{P_{n_\nu}^*(e^{i\theta})} \right\}$, слабо сходящуюся к некоторой п дельной функции $f(e^{i\theta}) \in L_2$ [39], т. е.

$$\lim_{n_\nu \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}\, d\theta}{P_{n_\nu}^*(e^{i\theta})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, e^{-ik\theta}\, d\theta, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots \tag{22.5}$$

[39]) См. А. Плесснер [1], § 3.

С другой стороны, мы имеем по (21.9) при $|z|<1$

$$\lim_{n_\nu\to\infty}\frac{1}{P^*_{n_\nu}(z)}=\frac{1}{\pi(z)}, \tag{22.6}$$

равномерно при $|z|\leqslant r<1$; вводя обозначение

$$\frac{1}{\pi(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k,\qquad |z|<1, \tag{22.7}$$

мы находим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ik\theta}\,d\theta}{P^*_{n_\nu}(e^{i\theta})}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{z^{-k-1}\,dz}{P^*_{n_\nu}(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{z^{-k-1}\,dz}{P^*_{n_\nu}(z)},$$

откуда вытекает для $k=0, 1, 2, \ldots\ldots$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})e^{-ik\theta}\,d\theta=\lim_{n_\nu\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{z^{-k-1}\,dz}{P^*_{n_\nu}(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{z^{-k-1}}{\pi(z)}dz=\beta_k, \tag{22.8}$$

и таким образом

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\beta_k|^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|^2\,d\theta<\infty. \tag{22.9}$$

Следовательно, аналитическая функция $\frac{1}{\pi(z)}$ принадлежит классу H_2 — поэтому она имеет почти для всех θ конечные предельные значения

$$\lim_{r\to1-0}\frac{1}{\pi(re^{i\theta})}=\frac{1}{\pi(e^{i\theta})}, \tag{22.10}$$

причем существуют интегралы Лебега [40])

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|\pi(e^{i\theta})|^2};\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg\frac{1}{|\pi(e^{i\theta})|^2}\,d\theta. \tag{22.11}$$

Рассмотрим теперь в области $|z|<1$ гармоническую функцию $c_0 R\left\{\frac{\Omega^*_n(z)}{P^*_n(z)}\right\}$; на окружности $z=e^{i\theta}$ она по (10.4) имеет значение $\frac{h_n}{|P^*_n(e^{i\Omega})|^2}$; рассмотрим также функцию $\frac{h_n}{|P^*_n(z)|^2}$; в области $|z|<1$ она непрерывна и положительна, причем ее значения на границе области совпадают со значениями гармонической функции $c_0 R\left\{\frac{\Omega^*_n(z)}{P^*_n(z)}\right\}$; функ-

---

[40]) См. И. Привалов [1], гл. IV.

ция $\frac{h_n}{|P_n^*(z)|^2}$ является субгармонической функцией в области $|z|<1$, а функция $c_0 R\left\{\frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}\right\}$ — ее наилучшая гармоническая мажоранта в замкнутой области $|z|\leqslant 1$; при этом [41])

$$\frac{h_n}{|P_n^*(z)|^2}\leqslant c_0 R\left\{\frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}\right\}, \qquad |z|\leqslant 1. \tag{22.12}$$

Рассмотрим теперь семейство субгармонических функций

$$\frac{h_n}{|P_n^*(z)|^2}$$

и семейство их наилучших гармонических мажорант

$$c_0 R\left[\frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}\right];$$

благодаря (21.9) и (13.1) мы находим, переходя к пределу.

$$\frac{h}{|\pi(z)|^2}\leqslant c_0 RF(z), \qquad |z|<1. \tag{22.13}$$

Благодаря условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|\pi(e^{i\theta})|^2}<\infty,$$

функция $\frac{h}{|\pi(z)|^2}$ имеет наилучшую гармоническую мажоранту в области $|z|<1$ [41]); обозначая ее через $RH(z)$, имеем для $|z|<1$

$$\frac{h}{|\pi(z)|^2}\leqslant RH(z)\leqslant c_0 RF(z),$$

$$H(z)=\frac{h}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\cdot\frac{d\theta}{|\pi(e^{i\theta})|^2}; \tag{22.14}$$

таким образом функция $F(z)-\frac{1}{c_0}H(z)$ является C-функцией и поэтому допускает представление

$$c_0F(z)-H(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\tau(\theta), \tag{22.15}$$

---

[41]) И. Привалов [1], гл. II.

$$\tau(\theta)=\sigma(\theta)-h\int_0^{\theta}\frac{d\varphi}{|\pi(e^{i\varphi})|^2};$$

мы имеем почти всюду в $[0, 2\pi]$

(22.16) $$\sigma'(\theta)=p(\theta)\geqslant\frac{h}{|\pi(e^{i\theta})|^2};$$

отсюда вытекает VII, ибо

$$-\infty<\lg\frac{h}{|\pi(0)|^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg\frac{h}{|\pi(e^{i\theta})|^2}d\theta\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg p(\theta)d\theta\leqslant$$

(22.17) $$\leqslant\lg\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(\theta)\,d\theta\right\}\leqslant\lg c_0.$$

§ 23.

Следствия из теоремы 21.1.

Рассмотрим несколько следствий из доказанной теоремы 21.1.

Теорема 23.1. При условии

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2<\infty$$

мы имеем почти всюду в $[0, 2\pi]$

(23.1) $$p(\theta)=\sigma'(\theta)=\frac{h}{|\pi(e^{i\theta})|^2}.$$

Мы имеем по (22.1), полагая $G_n(z)=P_n^*(z)$,

(23.2) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg p(\theta)\,d\theta\leqslant\lg\frac{h_n}{|P_n^*(0)|^2};$$

так как это справедливо при всех n, то при $n\to\infty$ имеем

(23.3) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg p(\theta)\,d\theta\leqslant\lg\frac{h}{|\pi(0)|^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg\frac{h}{|\pi(e^{i\theta})|^2}d\theta;$$

если предположить, что

$$p(\theta)>\frac{h}{|\pi(e^{i\theta})|^2}$$

на множестве положительной меры, то придем к противоречию с (23.3).

Примечание 1. Известно, что каждая функция ограниченной вариации $\sigma(\theta)$ может быть представлена, как сумма трех функций [42])

[42] См. Р. Неванлинна [1], гл. VII.

$$(23.4) \qquad \sigma(\theta) = \sigma_1(\theta) + \sigma_2(\theta) + \sigma_3(\theta),$$

где $\sigma_1(\theta)$—функция скачков, а $\sigma_2(\theta)+\sigma_3(\theta)$—непрерывная функция; при этом $\sigma_2(\theta)$—сингулярная функция, т. е. непрерывная функция, имеющая положительную вариацию на множестве меры нуль, а $\sigma_3(\theta)$ — ядро, т. е. абсолютно-непрерывная часть функции $\sigma(\theta)$

$$(23.5) \qquad \sigma_3(\theta) = \int_0^{\theta} p(\varphi)\, d\varphi.$$

G. Szegö [1], [6] нашел асимптотическую формулу (21.4) в предположении, что $\sigma_1(\theta) = \sigma_2(\theta) \equiv 0$ и что имеет место условие VII.

Из наших результатов вытекает, во-первых, то, что асимптотическая формула (21.4) справедлива при любых функциях $\sigma_1(\Theta)$ и $\sigma_2(\Theta)$— ограничение накладывается только на производную ядра; во-вторых, справедливо обратное заключение—из наличия асимптотической формулы (21.4), что эквивалентно асимптотической формуле

$$(23.6) \qquad P_n^*(z) \cong \pi(z), \qquad |z| < 1,$$

(и даже из более общего условия ограниченности хотя в одной точке области $|z|<1$ хотя одной подпоследовательности $\left\{\frac{P_{n_\nu}^*(z)}{\sqrt{h_{n_\nu}}}\right\}$), вытекает на основании (20.22) условие VII.

Примечание 2. Интересно отметить, что при условии (21.1) ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z)$, являющийся, по самому определению параметров (3.1) формальным разложением функции $\frac{1}{z}$, сходится на основании формул (21.8) и (21.9) в области $|z| < 1$ к функции

$$(23.7) \qquad \frac{1-\pi(z)}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z).$$

§ 24.

Частный случай $p(\Theta) \equiv 1$.

Особенно интересен случай $p(\Theta) \equiv 1$; в таком случае $\pi(z) \equiv 1$ при $|z|<1$ и мы имеем

$$(24.1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z) \equiv 0, \qquad |z|<1,$$

хотя в то же время $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 > 0$.

В качестве иллюстрации изложенной теории рассмотрим пример:

пусть

(24.2) $$a_n = \frac{1}{n+\alpha},\ \alpha > 1, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty;$$

в этом частном случае мы сможем найти полиномы $\{P_n^*(z)\}$ и $\{\Omega_n^*(z)\}$ в явном виде. Действительно, полагая $y_{n+1} = z\frac{n+\alpha}{n+\alpha+1}$, мы можем придать уравнению в конечных разностях (5.9) следующую форму

(24.3) $$u_{k+2} - u_{k+1} = u_{k+1}y_{k+1} - u_k y_k,$$

откуда находим

(24.4) $$u_{k+1} - \frac{k+\alpha-1}{k+\alpha} z u_k = C.$$

Полагая $v_k = u_k(k+\alpha-1)$ приходим к уравнению

(24.5) $$v_{k+1} - z v_k = C(k+\alpha);$$

решая его, находим

$$v_k = Az^k + \frac{C\left(k+\alpha-\frac{1}{1-z}\right)}{1-z}; \qquad u_k = \frac{Az^k}{k+\alpha-1} + \frac{C\left(k+\alpha-\frac{1}{1-z}\right)}{(1-z)(k+\alpha-1)},$$

$$C = u_1 - u_0 z\frac{\alpha-1}{\alpha}; \quad A = u_0(\alpha-1) - \frac{\left(u_1 - u_0 z\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\left(\alpha - \frac{1}{1-z}\right)}{1-z}.$$

Полагая $u_0 = 1$, $u_1 = 1 \mp \frac{z}{\alpha}$, находим

(24.6) $$P_n^*(z) = 1 - \frac{z(z^n-1)}{(n+\alpha-1)(z-1)},$$

(24.7) $$\Omega_n^*(z) = -\frac{z^{n+1}[\alpha(1-z)-2]}{\alpha(n+\alpha-1)(1-z)^2} + \frac{\left(1-z+\frac{2z}{\alpha}\right)\left(n+\alpha-\frac{1}{1-z}\right)}{(1-z)(n+\alpha-1)};$$

отсюда при $|z| < 1$ и $n \to \infty$ имеем

(24.8) $$\pi(z) = 1,\ \omega(z) = \lim_{n\to\infty} \Omega_n^*(z) = \frac{\alpha - z(\alpha-2)}{1-z};$$

$$Q_0(z) = \frac{\omega(z)}{\pi(z)} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1+z}{1-z} + \frac{\alpha-1}{\alpha};$$

обложение $d\sigma(\theta)$ таково: при $\theta \neq 0$ имеем

(24.9) $$p(\Theta) = \sigma'(\Theta) = c_0\frac{\alpha-1}{\alpha};$$

кроме того, в точке $\theta = 0$ сконцентрирована масса

(24.10) $$\mu = \frac{2\pi c_0}{\alpha}.$$

Легко проверить непосредственно, что выполняется (24.1).

Если положить

$$a_i = \begin{cases} 0, & i \neq ns-1, \\ \dfrac{1}{n+\alpha}, & i = ns-1, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots), \tag{24.11}$$

то получим несколько более общий случай

$$Q_0(z) = \frac{\alpha - z^s(\alpha - 2)}{\alpha(1 - z^s)}, \tag{24.12}$$

т. е. массы $\mu_k = \dfrac{2\pi c_0}{\alpha s}$ сконцентрированы в точках $\left\{ e^{\frac{2\pi i k}{s}} \right\}_0^{s-1}$

§ 25.

Свойства C- и S-функций при $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$.

Из теоремы 21.1 можно вывести некоторые заключения о предельных значениях C- и S-функций при условии (21.1).

Теорема 25.1. Если коэфициенты C-функции $F(z)$

$$\frac{c_0}{2} F(z) = \frac{c_0}{2} + c_1 z + \ldots\ldots + c_n z^n + \ldots\ldots, \quad |z| < 1, \tag{25.1}$$

таковы, что существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \tag{25.2}$$

то почти для всех точек окружности $|z| = 1$ предельные значения C-функции $F(z)$ имеют положительные вещественные части.

Если коэфициенты S-функции $f(z)$

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots\ldots + \alpha_n z^n + \ldots\ldots, \quad |z| < 1, \tag{25.3}$$

таковы, что существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \tag{25.4}$$

то почти для всех точек окружности $|z| = 1$ предельные значения S-функции $f(z)$ по модулю меньше единицы.

Для доказательства достаточно заметить, что из (25.1) вытекает существование интеграла Лебега (21.6), откуда следует, что функция $p(\Theta)$ почти всюду в $[0, 2\pi]$ положительна — т. е. соответствующие этим точкам окружности $z = e^{i\Theta}$ предельные значения C-функции $F(z)$ обладают свойством $RF(z) > 0$, а следовательно, $|f(z)| < 1$.

§ 26.

Исследование случая $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Пусть теперь параметры подчинены более ограничительному условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty. \tag{26.1}$$

Имеет место следующая

Теорема 26.1. Если сходится числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, то имеют место формулы

$$\begin{aligned} P_n^*(z) &= \pi(z) + \varepsilon_n, \quad |z| \leqslant 1; \qquad |\varepsilon_n| = 0\left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|\right); \\ P_n(z) &= z^n\left[\bar{\pi}\left(\frac{1}{z}\right) + \varepsilon'_n\right], \quad |z| \geqslant 1; \qquad |\varepsilon'_n| = 0\left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|\right); \end{aligned} \tag{26.2}$$

в этом случае функция $\sigma(\theta)$ абсолютно-непрерывна

$$\sigma(\theta) = \int_0^{\theta} p(\varphi)\, d\varphi, \tag{26.3}$$

причем функция

$$p(\varphi) = \frac{\bar{h}}{|\pi(e^{i\varphi})|^2} \tag{26.4}$$

положительна и непрерывна в $[0, 2\pi]$.

Для доказательства снова обратимся к формуле

$$P_n^*(z) = \prod_{k=0}^{n-1} \left\{1 - z a_k \frac{P_k(z)}{P_k^*(z)}\right\}, \tag{26.5}$$

откуда при $|z| \leqslant 1$ имеем

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left\{1 - |a_k|\right\} \leqslant |P_n^*(z)| \leqslant \prod_{k=0}^{n-1} \left\{1 + |a_k|\right\}, \quad (n = 1, 2, \ldots); \tag{26.6}$$

из условия (26.1) вытекает сходимость бесконечных произведений

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left\{1 \pm |a_k|\right\},$$

и, следовательно, абсолютная и равномерная сходимость произведения

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left\{1 - z a_k \frac{P_k(z)}{P_k^*(z)}\right\} = \lim_{n \to \infty} P_n^*(z) = \pi(z) \tag{26.7}$$

во всей замкнутой области $|z| \leqslant 1$ к некоторой аналитической функции $\pi(z)$, регулярной для $|z| < 1$ и непрерывной для $|z| \leqslant 1$, причем

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left\{1-|a_k|\right\} \leqslant |\pi(z)| \leqslant \prod_{k=0}^{\infty}\left\{1+|a_k|\right\}, \qquad |z| \leqslant 1. \tag{26.8}$$

С другой стороны, из формулы

$$P_n^*(z) = 1 - z\sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k(z), \tag{26.9}$$

пользуясь тем, что при $|z| \leqslant 1$ имеем

$$|P_n(z)| \leqslant |P_n^*(z)| \leqslant \prod_{k=0}^{n-1}\left\{1+|a_k|\right\} \leqslant \prod_{k=0}^{\infty}\left\{1+|a_k|\right\} = M,$$

мы находим, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z)$ имеет в области $|z| \leqslant 1$ мажоранту

$$M\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|,$$

откуда вытекает

$$\left.\begin{aligned} &\pi(z) = \lim_{n\to\infty} P_n^*(z) = 1 - z\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z);\\ &|\pi(z) - P_n^*(z)| = |z|\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z)\right| \leqslant |z| M\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|. \end{aligned}\right\}|z| \leqslant 1. \tag{26.10}$$

Совершенно аналогично имеем при $|z| \leqslant 1$

$$\begin{aligned} &\Omega_n^*(z) = \omega(z) + \varepsilon_n''; \qquad |\varepsilon_n''| = 0\left(\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|\right);\\ &\omega(z) = 1 + z\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Omega_k(z); \quad \prod_{k=0}^{\infty}\left\{1-|a_k|\right\} \leqslant |\omega(z)| \leqslant \prod_{k=0}^{\infty}\left\{1+|a_k|\right\}. \end{aligned} \tag{26.11}$$

Так как при всех n имеем по (10.4)

$$c_0 R\left\{\frac{\Omega_n^*(e^{i\theta})}{P_n^*(e^{i\theta})}\right\} = \frac{h_n}{|P_n^*(e^{i\theta})|^2},$$

то при $n \to \infty$ находим

$$c_0 R\left\{\frac{\omega(e^{i\theta})}{\pi(e^{i\theta})}\right\} = \frac{h}{|\pi(e^{i\theta})|^2}. \tag{26.12}$$

Мы имели в области $|z|<1$ при $\left\{|a_k|\right\}_0^\infty<1$

$$Q_0(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}; \tag{26.13}$$

при добавочном условии $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|^2<\infty$ мы нашли

$$Q_0(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}=\frac{\omega(z)}{\pi(z)}, \qquad |z|<1; \tag{26.14}$$

при еще более ограничительном условии $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|<\infty$ функции $\pi(z)$ и $\omega(z)$ ограничены по (26.8) и (26.11) и непрерывны во всей замкнутой области $|z|\leqslant 1$.

Так как последовательность $\left\{\dfrac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}\right\}$ равномерно сходится во всем круге к предельной функции $\dfrac{\omega(z)}{\pi(z)}$, которая таким образом непрерывна при $|z|\leqslant 1$, то

$$c_0\lim_{r\to 1-0} R\, Q_0\left(re^{i\Theta}\right)=\frac{h'}{\left|\pi\left(e^{i\Theta}\right)\right|^2}; \tag{26.15}$$

отсюда, пользуясь формулой обращения, выводим (26.3) и (26.4).

Примечание I. Мы исходили из достаточного условия

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|<\infty$$

и вывели из него непрерывность аналитической функции $\pi(z)$ во всем круге $|z|\leqslant 1$; отсюда вытекала справедливость асимптотической формулы (26.2) при $|z|\leqslant 1$, а также формула (26.4) для веса. Если исходить из веса $p(\Theta)$, положительного и непрерывного для $0\leqslant\Theta\leqslant 2\pi$, то, как показал G. Szegő ([6], § 10.3) для справедливости асимптотической формулы (26.2) во всем круге необходимо и достаточно существование интеграла

$$\int_0^{2\pi}\lg p(\theta)\operatorname{cotg}\frac{t-\theta}{2}d\theta \tag{26.16}$$

в смысле главного значения Коши, ибо

$$\frac{\pi(e^{it})}{|\pi(e^{it})|}=\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\lg p(\theta)\operatorname{cot g}\frac{\theta-t}{2}d\theta\right\}; \tag{26.17}$$

для этого, как показали С. Н. Бернштейн [2] и G. Szegö [6], достаточно условие Dini-Lipschitz'a

$$(26.18) \qquad |p(\theta+\delta)-p(\theta)| < L\,|\lg\delta|^{-1-\lambda},$$

где L и λ — фиксированные положительные константы; при этом погрешность асимптотической формулы (26.2) такова

$$(26.19) \qquad \varepsilon_n < C(\lg n)^{-\lambda}.$$

Поскольку условие (26.18) и наше условие $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|<\infty$ являются только достаточными, то весьма интересно было бы сопоставить их между собой и найти случаи, когда выполняется только одно из них; в частности, если не выполняется (26.16), то $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|=\infty$.

Примечание II. Сравнивая результаты §§ 13, 21, 22, 26 мы видим, что при $\left\{|a_n|\right\}_0^{\infty}<1$ можно утверждать лишь существование предела подпоследовательности

$$(26.20) \qquad \lim_{n_\nu\to\infty}\int_0^{\theta}\frac{h_{n_\nu}\,d\varphi}{\left|P^*_{n_\nu}(e^{i\varphi})\right|^2}=\sigma(\theta)$$

на всюду плотном множестве; при $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty$ имеем

$$(26.21) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{h_n}}{P^*_n(z)}=\frac{h}{\pi(z)}, \qquad |z|<1,$$

и почти всюду в $[0,2\pi]$

$$(26.22) \qquad \lim_{r\to1-0}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{h_n}}{P^*_n\left(re^{i\theta}\right)}\right\}=\frac{h}{\pi\left(e^{i\theta}\right)};$$

$$\lim_{r\to1-0}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{h_n}{\left|P^*_n\left(re^{i\theta}\right)\right|^2}\right\}=p(\theta);$$

при $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<\infty$ указанные пределы существуют во всех точках замкнутой области $|z|\leqslant1$, причем сходимость равномерная.

§ 27.

Свойства C- и S-функций при $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<\infty$.

Сравнивая теоремы 19.2 и 25.1, мы видим, что чем быстрее стремятся к нулю параметры, тем дальше отодвигаются предельные значения C-функции $w=F(z)$ от мнимой оси $Rw=0$, а предельные значения S-функции $v=f(z)$ от единичной окружности; особенный интерес представляет случай

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<\infty.$$

Теорема 27.1. Если коэфициенты C-функции $F(z)$

$$\frac{c_0}{2}F(z)=\frac{c_0}{2}+c_1 z+\ldots+c_n z^n+\ldots,\quad |z|<1, \tag{27.2}$$

подчинены условию

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\Delta_n^2-\Delta_{n+1}\,\Delta_{n-1}}}{\Delta_n}<\infty,$$

то точка $w=F(z)$ не выходит за пределы круга плоскости w, построенного, как на диаметре, на отрезке $\left[\frac{1}{A},\, A\right]$, где

$$A=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1+|a_n|}{1-|a_n|}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n+\sqrt{\Delta_n^2-\Delta_{n+1}\,\Delta_{n-1}}}{n-\sqrt{\Delta_n^2-\Delta_{n+1}\,\Delta_{n-1}}}= \tag{27.3}$$

$$=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\delta_n+\sqrt{\delta_n^2+\delta_{n+1}\,\delta_{n-1}}}{\delta_n-\sqrt{\delta_n^2-\delta_{n+1}\,\delta_{n-1}}}.$$

Если коэфициенты S-функции $f(z)$

$$f(z)=z(\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_n z^n+\ldots),\quad |z|<1, \tag{27.4}$$

подчинены условию

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\delta_n^2-\delta_{n+1}\,\delta_{n-1}}}{\delta_n}<\infty, \tag{27.5}$$

то точка $v=f(z)$ не выходит за пределы круга плоскости v

$$|v|\leqslant\frac{A-1}{A+1}. \tag{27.6}$$

Указанные области не могут быть сужены, как явствует из рассмотрения функций

$$F_0(z)=\frac{1+\alpha z^s}{1-\alpha z^s};\ f_0(z)=\alpha z^s,\ s\geqslant 1,\ |\alpha|=\frac{A-1}{A+1}. \tag{27.7}$$

Из (26.12) находим при $|z|=1$

$$RF(z)=R\frac{\omega(z)}{\pi(z)}=\frac{h}{h_0|\pi(z)|^2}=\frac{\prod_{k=0}^{\infty}\{1-|a_k|^2\}}{|\pi(z)|^2}; \tag{27.8}$$

Вводя обозначение $w=x+iy=F(z)$, имеем для $|z|=1$

(27.9)
$$\frac{|F(z)|^2}{RF(z)} = \frac{x^2+y^2}{x} = \frac{h_0|\omega(z)|^2}{h} = \frac{|\omega(z)|^2}{\prod\limits_{k=0}^{\infty}\{1-|a_k|^2\}};$$

пользуясь (26.8) и (26.11) находим при $|z|=1$

(27.10)
$$\frac{1}{A} \leqslant \frac{x^2+y^2}{x} \leqslant A, \qquad A = \prod_{k=0}^{\infty}\frac{1+|a_k|}{1-|a_k|}.$$

т. е. точка w лежит в области, ограниченной двумя окружностями

$$x^2+y^2-Ax=0; \qquad x^2+y^2-\frac{x}{A}=0.$$

Кроме того имеем по (27.8) и (26.10)

$$\frac{1}{A} \leqslant x \leqslant A;$$

таким образом точка w не выходит за пределы сегмента, ограниченного окружностью $x^2+y^2-Ax=0$ и прямой $x=\frac{1}{A}$.

Рассмотрим S-функцию $f(z)$ [43])

(27.11)
$$v = f(z) = \frac{F(z)-1}{F(z)+1} = \frac{w-1}{w+1};$$

это дробно-линейное преобразование переводит окружность x^2+y^2- $-Ax=0$ в окружность с диаметром $\left[-1, \frac{A-1}{A+1}\right]$, а прямую $x=\frac{1}{A}$ в окружность с диаметром $\left[-\frac{A-1}{A+1}, 1\right]$; таким образом точка v не выходит за пределы луночки K

(27.12)
$$\xi^2 \pm \frac{2\xi}{A+1} + \eta^2 \leqslant \frac{A-1}{A+1}, \qquad v = \xi + i\eta.$$

Рассмотрим теперь новое семейство параметров (см. § 7)

(27.13)
$$a'_k = \lambda a_k, \ \lambda = e^{i\gamma}, \qquad (k=0, 1, 2, \ldots);$$

им соответствует, как это видно из (7.10), C-функция

(27.14)
$$w' = \frac{w+1+\lambda(w-1)}{w+1-\lambda(w-1)}$$

и, следовательно, S-функция

(27.15)
$$v' = \lambda v;$$

так как $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a'_n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n| < \infty$, то точка v' тоже не выходит за пределы той же луночки K — следовательно, точка v не должна выходить за пределы луночки, получающейся из K поворотом вокруг

[43]) Мы вводим дополнительное условие $f(o)=0$.

0 на угол $-\gamma$; итак, точка v не должна выходить за пределы области, общей всем луночкам, получаемым вращением K вокруг 0 на любой угол—отсюда находим

$$|v| \leqslant \frac{A-1}{A+1}; \tag{27.16}$$

пользуясь соотношением $w = \dfrac{1-v}{1+v}$, находим, что этому кругу соответствует в плоскости w круг с диаметром $\left[\dfrac{1}{A}, A\right]$. Функции $F_0(z)$ и $f_0(z)$ (27.7) соответствуют случаю

$$a_k = \begin{cases} 0, & k \neq s-1, \\ \alpha, & k = s-1. \end{cases} \qquad A = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1+|a_k|}{1-|a_k|} = \frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}. \tag{27.17}$$

Как прямое следствие теоремы 27.1 получается

Теорема 27.2. При условии

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\Delta^2 k - \Delta_{k+1}\, \Delta_{k-1}}}{\Delta_k} < \infty \tag{27.18}$$

тригонометрический ряд

$$\frac{c_0}{2} + R\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik\varphi} \tag{27.19}$$

является рядом Fourier непрерывной положительной функции $G(\varphi)$; функция $\dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \cdot \dfrac{1}{|\pi_n(e^{i\varphi})|^2}$, где $\pi_n(z) = P_n^*(z)$ дается формулой (14.12), имеет те же первые коэфициенты $\{c_k\}_0^n$, как и $G(\varphi)$, и для всех $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ дает аппроксимацию

$$\left| G(\varphi) - \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \cdot \frac{1}{|\pi_n(e^{i\varphi})|^2} \right| \leqslant 0 \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sqrt{\Delta_k^2 - \Delta_{k+1}\, \Delta_{k-1}}}{\Delta_k} \right\}; \tag{27.20}$$

для всех $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и $0 \leqslant r \leqslant 1$ справедливы неравенства

$$\frac{c_0}{2A} \leqslant \frac{c_0}{2} + R\sum_{k=1}^{\infty} r^k c_k e^{ik\varphi} \leqslant \frac{c_0}{2} A, \tag{27.21}$$

$$\left| I \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k e^{ik\varphi} \right| \leqslant \frac{c_0}{4}\left(A - \frac{1}{A}\right),$$

$$A = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta_k + \sqrt{\Delta_k^2 - \Delta_{k+1}\, \Delta_{k-1}}}{\Delta_k - \sqrt{\Delta_k^2 - \Delta_{k+1}\, \Delta_{k-1}}}.$$

§ 28.

Некоторые замечания к теореме 27.1.

Главный интерес теоремы 27.1 состоит в следующем: на основании леммы Schwarz'a можно утверждать, что, если $|z| \leqslant r = \frac{A-1}{A+1}$, то значения S-функции $f(z)$, нормированной условием $f(0)=0$, не выходят за пределы круга $|v| = |f(z)| \leqslant \frac{A-1}{A+1}$, а, следовательно, значения C-функции $F(z)$ не выходят за пределы круга, получаемого из предыдущего круга преобразованием $w = \frac{1-v}{1+v}$, т. е. круга с диаметром $\left[\frac{1}{A}, A\right]$. Таким образом при условиях

$$\left\{\left| a_k \right|\right\}_0^\infty < 1$$

можно утверждать, что за пределы указанных областей не выходят значения S-функции $v = f(z)$ и C-функции $w = F(z)$, соответствующие значениям аргумента $|z| \leqslant \frac{A-1}{A+1} < 1$; при выполнении дополнительного условия $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ точки v и w не выйдут за пределы тех же областей не только при $|z| \leqslant \frac{A-1}{A+1} < 1$, но и при $|z| \leqslant 1$.

I. Schur ([1], § 15) отмечает случай $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, как особенно интересный; он доказывает, что в этом случае S-функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $|z| \leqslant 1$ и удовлетворяет в ней неравенству

$$|f(z)| \leqslant \sqrt{\frac{A-1}{A}}\,; \tag{28.1}$$

эта оценка является более грубой, чем наша граница (27.16), и знак равенства в ней не может достигаться — поэтому Schur в своей формулировке теоремы указывает только, что при $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ имеем во всем круге $|z| \leqslant 1$ оценку $|f(z)| < 1$. Schur рассматривает далее такие примеры: если $a_0 = \frac{1}{2}$, $\left\{a_n = \frac{2}{2n+1}\right\}_1^\infty$, то $f(z) = \frac{1+z}{2}$; точно так же, если $\left\{a_n = \frac{1}{n+2}\right\}_0^\infty$, то $f(z) = \frac{1}{2-z}$ [44].

Эти примеры показывают, что из того одного факта, что S-функция $f(z)$ непрерывна во всем круге $|z| \leqslant 1$, еще не вытекает сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$, — правда, в обоих этих случаях $\sup |f(z)| = 1$ при $|z| < 1$.

[44]) См. также пример нашего § 24.

Schur ставит, но оставляет открытым, следующий интересный вопрос: **может ли S-функция быть непрерывной во всем круге $|z| \leqslant 1$ и удовлетворять в нем неравенству $|f(z)| < 1$, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ расходится?**

Мы видим из (26.6), что условие $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ достаточно, но не необходимо для ограниченности всей системы $\left\{P_n^*(z)\right\}_0^{\infty}$

$$0 < m \leqslant \left|P_n^*(z)\right| \leqslant M \tag{28.2}$$

во всем круге $|z| \leqslant 1$; точно так же оно достаточно для мажорации рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z), \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_k(z) \tag{28.3}$$

во всем круге $|z| \leqslant 1$, откуда вытекает их равномерная сходимость. Существенным является то обстоятельство, что функции $\pi(z)$ и $\omega(z)$ ограничены сверху и снизу.

Необходимые и достаточные условия, менее ограничительные, чем условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty, \tag{28.4}$$

дает

Теорема 28.1. **Для того, чтобы C-функция $F(z)$ и S-функция $f(z)$ были непрерывны во всем круге $|z| \leqslant 1$ и удовлетворяли в нем неравенствам**

$$|f(z)| \leqslant M < 1; \qquad \mathrm{R}\,F(z) \geqslant m > 0 \tag{28.5}$$

необходимы и достаточны условия:

1) последовательность $\left\{\dfrac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}\right\}$ должна сходиться квази-равномерно во всем круге $|z| \leqslant 1$;

2) для $|z| = 1$ и для всех достаточно больших n должны выполняться неравенства

$$\frac{\left|P_n^*(z)\right|}{\sqrt{h_n}} \leqslant K, \qquad n \geqslant N, \tag{28.6}$$

где K не зависит от n.

Для доказательства достаточности заметим, что при $|z| \leqslant r < 1$ имеем равномерную сходимость

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)} = F(z) = Q_0(z); \tag{28.7}$$

из условия 1) вытекает непрерывность предельной функции во всем круге [45]).

Далее, из § 22 имеем для всех n и для $|z| \leqslant 1$

$$(28.8) \qquad \frac{h_n}{|P_n^*(z)|^2} \leqslant c_0 R \frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}, \qquad |z| \leqslant 1;$$

отсюда, пользуясь 2), находим для всех достаточно больших значений n

$$0 < \frac{1}{c_0 K^2} \leqslant R \frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}, \qquad |z| \leqslant 1,$$

откуда, переходя к пределу, получим

$$0 < \frac{1}{c_0 K^2} \leqslant R Q_0(z), \qquad |z| \leqslant 1.$$

Для доказательства необходимости заметим, что обратно — из непрерывности функции $Q_0(z)$ при $|z| \leqslant 1$ вытекает квази-равномерная сходимость последовательности $\left\{\frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}\right\}$ [45]); так как во всем круге $R Q_0(z) \geqslant m > 0$, то из (28.7) ясно, что для достаточно больших значений n мы должны иметь

$$R \frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)} \geqslant m > 0, \qquad |z| \leqslant 1, \ n \geqslant N;$$

так как гармоническая функция достигает своего минимума на границе, то

$$0 < m \leqslant \frac{h_n}{\left|P_n^*\left(e^{i\Theta}\right)\right|^2}, \qquad 0 \leqslant \Theta \leqslant 2\pi,$$

откуда вытекает

$$\frac{\left|P_n^*\left(e^{i\Theta}\right)\right|}{\sqrt{h_n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{m}}, \qquad 0 \leqslant \Theta \leqslant 2\pi,$$

и, следовательно, (28.6).

Примечание. Необходимым условием в теореме 28.1 является сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$, ибо по формуле обращения (11.7) ясно, что при непрерывной функции $Q_0(z)$ и при условии (28.2) функция $\sigma(\Theta)$ абсолютно непрерывна, причем функция $p(\Theta)$ непрерывна и положительна; отсюда вытекает (21.6), и, следовательно, (21.1).

---

[45]) См. P. Montel [2], гл. I.

Условие $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ однако недостаточно, как показывает пример § 24; для достаточности надо еще предположить квази-равномерную сходимость последовательностей $\{P_n^*(z)\}$ и $\{\Omega_n^*(z)\}$ во всем круге $|z| \leqslant 1$, — отсюда вытекает непрерывность, а, стало быть, ограниченность функций $\pi(z)$ и $\omega(z)$ во всем круге

$$(28.9) \qquad 0 \leqslant |\pi(z)|, \quad |\omega(z)| \leqslant M_1, \quad |z| \leqslant 1;$$

из соотношения (10.3) вытекает соотношение

$$(28.10) \qquad \overline{\omega(e^{i\theta})}\,\pi(e^{i\theta}) + \overline{\pi(e^{i\theta})}\,\omega(e^{i\theta}) = \frac{2h}{c_0},$$

откуда, пользуясь (28.9), находим

$$(28.11) \qquad |\pi(e^{i\theta})|, \quad |\omega(e^{i\theta})| \geqslant \frac{h}{c_0 M_1};$$

таким образом во всем круге $|z| \leqslant 1$ имеем оценки

$$0 < \frac{h}{c_0 M_1} \leqslant |\pi(z)|, \quad |\omega(z)| \leqslant M_1;$$

отсюда вытекает непрерывность функции $Q_0(z)$ во всем круге и неравенства (28.5).

Квази-равномерная сходимость последовательностей $\{P_n^*(z)\}$ и $\{\Omega_n^*(z)\}$ эквивалентна такой же сходимости рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z), \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_k(z);$$

их абсолютная сходимость при этом необязательна.

§ 29.

Выводы из асимптотической формулы

Предполагая снова $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, вычислим асимптотические значения функции $K_n(x, y)$.

Теорема 29.1. При $|x| < 1$, $|y| \leqslant 1$ и $n \to \infty$ имеем

$$(29.1) \qquad \lim_{n\to\infty} K_n(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)\overline{P_n(y)}}{h_n} = \frac{\pi(x)\overline{\pi(y)}}{h(1-x\overline{y})};$$

при $|x| = 1$ и $n \to \infty$ имеем

$$(29.2) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{K_n(x, x)}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{(n+1)\rho_n(x)} \right\} = \frac{|\pi(x)|^2}{h}.$$

Формула (29.1) вытекает из (8.1), если учесть, что при

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

имеем

(29.3) $$\lim_{n\to\infty} P_n^*(z) = \pi(z), \quad |z| \leqslant 1;$$

(29.4) $$\lim_{n\to\infty} P_n(z) = 0, \quad |z| < 1.$$

Для вывода (29.2) заметим, что при $|x| = |y| = 1$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} P_n^*(x) = \pi(z); \qquad \lim_{n\to\infty} P_n(x) = x^n\overline{\pi(x)}.$$

Так как

$$\frac{K_n(x, x)}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{|P_k(x)|^2}{h_k},$$

то из сходимости $\left\{\frac{P_k(x)}{\sqrt{h_k}}\right\}$ вытекает сходимость среднего арифметического.

Примечание. Из (29.1) полагая $x = y$, находим

(29.5) $$\frac{h}{|\pi(x)|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|P_n(x)|^2}{h_n} = \frac{1}{1-|x|^2}, \quad |x| < 1;$$

если ввести функции

(29.6) $$\frac{\sqrt{h}}{\pi(x)} \cdot \frac{P_n(x)}{\sqrt{h_n}} = \varphi_n(x), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

и вспомнить (26.4), то мы видим, что функции $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ образуют ортогональную нормированную систему на круге $|z| = 1$, ибо

(29.7) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}\, d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ 1, & n = m; \end{cases} \qquad x = e^{i\theta}$$

отсюда вытекает, что для всех ортогональных нормированных систем функций $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ сумма

(29.8) $$\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(x)|^2 = \frac{1}{1-|x|^2}, \qquad |x| < 1,$$

одна и та же и не зависит от веса $p(\Theta)$.[46])

[46]) Это вытекает из общей теоремы S. Takenaka [1] (теорема 6).

Отметим ещё следующую теорему:

Теорема 29.2. Если обложение $d\sigma(\Theta)$ таково, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

и если обложение $d\sigma'(\Theta)$ получается из $d\sigma(\Theta)$ добавлением масс $\{\mu_k\}_1^s > 0$ в точках $\{\Theta_k\}_1^s$, причем $\{\alpha_k = e^{i\Theta_k}\}_1^s$, то для полиномов $\{P_n'(z)\}$, ортогональных относительно обложения $d\sigma'(\Theta)$, справедливы при $n \to \infty$ следующие асимптотические формулы

$$P_n'(z) \simeq -\frac{\pi(z)}{n}\sum_{i=1}^{s}\alpha_i^n \frac{\overline{\pi(\alpha_i)}}{\pi(\alpha_i)}\frac{1}{1-z\alpha_i} + o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad |z|<1; \tag{29.9}$$

$$P_n'(z) \simeq z^n\overline{\pi(z)}\left\{1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{1-z\bar{\alpha}_i}\right\} - \tag{29.10}$$

$$-\frac{\pi(z)}{n}\sum_{i=1}^{s}\alpha_i^n\frac{\overline{\pi(\alpha_i)}}{\pi(\alpha_i)}\cdot\frac{1}{1-z\alpha_i} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad |z|=1,$$

соответствующие параметры $\{a_k'\}$ выражаются асимптотическими формулами

$$\bar{a}_{n-1}' \simeq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s}\alpha_i^n\frac{\overline{\pi(\alpha_i)}}{\pi(\alpha_i)} + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{29.11}$$

Для доказательства покажем прежде всего, что полиномы $\{P_n'(z)\}$ удовлетворяют следующему уравнению

$$\begin{vmatrix} K_{n-1}(\alpha_1,\alpha_1)+\frac{1}{\mu_1} & \ldots & K_{n-1}(\alpha_1,\alpha_s) & P_n(\alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{n-1}(\alpha_s,\alpha_1) & \ldots & K_{n-1}(\alpha_s,\alpha_s)+\frac{1}{\mu_s} & P_n(\alpha_s) \\ K_{n-1}(z,\alpha_1) & \ldots & K_{n-1}(z,\alpha_s) & P_n(z)-P_n'(z) \end{vmatrix} = 0. \tag{29.12}$$

Действительно, умножая все элементы последней строки на $\frac{1}{2\pi}\overline{P_\nu(z)}\,d\sigma'(\Theta)$ $(\nu \leqslant n-1)$ и интегрируя, мы получим в пересечении последней строки и i-ой колонны элемент

$$\sum_{r=1}^{s}\left\{K_n(\alpha_r,\alpha_i)+\frac{\delta_{ir}}{\mu_r}\right\}\mu_r\overline{P_\nu(\alpha_r)};$$

элемент, стоящий в правом нижнем углу, таков

$$\sum_{r=1}^{s} \mu_r P_n(\alpha_r) \overline{P_\nu(\alpha_r)} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n'(z) \overline{P_\nu(z)}\, d\sigma'(\Theta);$$

вычитая из элементов последней строки сумму элементов всех верхних строк, причем элементы r-ой строки умножены предварительно на $\mu_r \overline{P_\nu(\alpha_r)}$, мы найдем, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n'(z) \overline{P_\nu(z)}\, d\sigma'(\Theta) = 0, \qquad \nu \leqslant n-1.$$

Обозначим через D определитель матрицы

$$\left\| K_{n-1}(\alpha_i, \alpha_k) + \frac{\delta_{ik}}{\mu_i} \right\|_{i,k=1}^{s}$$

и через D_{ik} его миноры; в таком случае имеем

$$(29.13) \qquad P_n'(z) - P_n(z) = -\sum_{i,k=1}^{s} (-1)^{i+k} P_n(\alpha_i)\, K_{n-1}(z, \alpha_k) \frac{D_{ik}}{D}.$$

Формулы (29.12) и (29.13) справедливы при всех n; пусть теперь $n \to \infty$, причем $|z| < 1$ и s независимы от n; по (29.1), (29.2) имеем

$$K_{n-1}(\alpha_i, \alpha_k) = O(1), \qquad i \neq k;$$

$$(29.14) \qquad K_{n-1}(\alpha_i, \alpha_i) \simeq n \frac{|\pi(\alpha_i)|^2}{h}.$$

Поэтому

$$D \simeq \left(\frac{n}{h}\right)^s \prod_{i=1}^{s} |\pi(\alpha_i)|^2; \quad \frac{D_{ik}}{D} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ i \neq k; \quad \frac{D_{ii}}{D} \simeq \frac{h}{n} \cdot \frac{1}{|\pi(\alpha_i)|^2};$$

отсюда вытекает

$$P_n'(z) - P_n(z) \simeq -\frac{h}{n} \sum_{i=1}^{s} \frac{P_n(\alpha_i) K_{n-1}(z, \alpha_i)}{|\pi(\alpha_i)|^2};$$

пользуясь (8.1) и (29.3) мы приходим к (29.9); полагая затем $z = 0$, мы выводим (29.11), причем $a_{n-1} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, благодаря условию $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$; аналогично выводится (29.10).

Примечание. Если, в частности, $s = 1$, то мы имеем из (29.11)

$$(29.15) \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_{n-1}'} = \overline{\alpha_1};$$

это соотношение аналогично тому, которое может быть получено из общих исследований J. Hadamard'a[47])—если C-функция $F(z)$ имеет на круге $|z|=1$ единственную особенность, именно — полюс первого порядка в точке α_1, то

(29.16) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \overline{\alpha_1};$$

точно так же в общем случае $s>1$ можно показать справедливость предельного соотношения

(29.17) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{D_{n-1}^{(s)}} = \overline{\alpha_1}\,\overline{\alpha_2}\ldots\overline{\alpha_s}, \qquad D_{n-1}^{(s)} = \left| a'_{n-1+i+k} \right|_{i,\,k=0}^{s-1},$$

аналогичного соотношению

(29.18) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_n^{(s)}} = \overline{\alpha_1}\,\overline{\alpha_2}\ldots\overline{\alpha_s}, \qquad C_n^{(s)} = \left| c_{n+i+k} \right|_{i,\,k=0}^{s-1}.$$

§ 30.

Случай вещественных параметров.

Во всем дальнейшем изложении мы рассмотрим тот частный случай, когда все параметры $\{a_k\}_0^\infty$ вещественны; из формулы (3.2) ясно, что и все моменты $\{c_k\}_0^\infty$ вещественны и, следовательно, C-функция $F(z)$ и $\mathfrak{S}$-функция $f(z)$ имеют вещественные коэфициенты и для вещественных значений z принимают вещественные значения; эти подклассы будем называть соответственно C_r и S_r.

Так как в этом случае мы имеем

$$R\,F\left(re^{i\Theta}\right) = R\,F\left(re^{i(2\pi-\Theta)}\right),$$

то из формулы обращения вытекает соотношение

(30.1) $$d\sigma(\Theta) + d\sigma(2\pi-\Theta) = 0.$$

Поэтому мы находим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi c_0}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\, d\sigma(\Theta) = \frac{1}{2\pi c_0}\left\{\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}\right\} =$$

(30.2)

$$= \frac{1}{2\pi c_0}\int_0^{\pi}\left(\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z} + \frac{e^{-i\Theta}+z}{e^{-i\Theta}-z}\right) d\sigma(\Theta) = \frac{1-z^2}{\pi c_0}\int_0^{\pi} \frac{d\sigma(\Theta)}{1+z^2-2z\cos\Theta};$$

вводя обозначения

(30.3) $$\cos\Theta = x, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1;$$

[47]) См. E. Borel [1], ch. II.

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=y, \qquad z=y+\sqrt{y^2-1},$$

мы находим

$$(30.4) \qquad F(z)=\frac{1-z^2}{2z\pi c_0}\int_0^\pi \frac{d\sigma(\theta)}{y-\cos\theta}=\frac{1-z^2}{2z\pi c_0}\int_{-1}^1 \frac{d\psi(x)}{y-x},$$

где мы положили [48])

$$(30.5) \qquad \psi(x)=\psi(\cos\theta)=-\sigma(\theta), \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi, \qquad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Функцию

$$(30.6) \qquad \varphi(y)=\int_{-1}^1 \frac{d\psi(x)}{y-x}$$

будем называть функцией Неванлинна, или, короче, N-функцией; легко видеть, что в верхней полуплоскости $Iy>0$ она имеет отрицательную мнимую часть; таким образом мы имеем соотношение между $F(z)\in C_T$ и $\varphi(y)\in N$:

$$(30.7) \qquad F(z) = \frac{1-z^2}{2z\pi c_0}\,\varphi(y)=\frac{\sqrt{y^2-1}}{\pi c_0}\,\varphi(y);$$

отсюда, в частности, находим

$$s_0 = \int_1^1 d\psi(x) = \pi c_0.$$

Если не выполнить преобразования (30.3), т. е. рассмотреть функцию

$$(30.8) \qquad \frac{\varphi\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)}{2\pi^2 c_0}=\tau(z)=\frac{1}{\pi c_0}\int_0^\pi \frac{d\sigma(\theta)}{1+z^2-2z\cos\theta}=z+\sum_{k=2}^{\infty}\beta_k z^k, \qquad |z|<1,$$

то легко видеть, что в верхнем полукруге

$$z=re^{i\varphi}, \qquad 0<r<1, \qquad 0<\varphi<\pi$$

она имеет положительную мнимую часть; такие функции впервые детально рассмотрел W. Rogosinski [1] и назвал их типично-вещественными; он установил формулу

$$(30.9) \qquad F(z)=\frac{1-z^2}{z}\,\tau(z)$$

---

[48]) Легко видеть, что $\psi(1)-\psi(1-0)=\frac{1}{2}\left\{\sigma(+0)-\sigma(2\pi-0)\right\}+2\pi c_0$; $\psi(-1+0)-\psi(-1)=\frac{1}{2}\left\{\sigma(\pi+0)-\sigma(\pi-0)\right\}$.

не прибегая к представлению (30.2) для C-функций; ему принадлежит также следующая интересная

Теорема 30.1. Все значения, принимаемые типично-вещественной функцией $\tau(z)$ в точке z области $|z|<1$, не выходят за пределы того сегмента окружности, проходящей через точки $\left(0, \frac{1-z}{1+z}, \frac{1+z}{1-z}\right)$, который содержит дугу, проходящую через две последние точки и не содержащую точки 0.

Все значения, принимаемые S-функцией

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$$

с вещественными коэфициентами в точке z области $|z|<1$ не выходят за пределы луночки, образованной окружностями, проходящими через точки $(1, z, -z)$ и $(-1, z, -z)$.

Перейдем теперь к рассмотрению полиномов $\{p_n(x)\}$, ортогональных на отрезке $[-1, +1]$.

Теорема 30.2. Если полиномы $\{p_n(x)\}_0^\infty$ ортогональны на отрезке $[-1, +1]$ относительно обложения $d\psi(x)$

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)\, p_m(x)\, d\psi(x) = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ h_n' > 0, & n=m, \end{cases} \qquad p_n(x)=x^n+\ldots, \tag{30.10}$$

и $\{R_{n-1}(x)\}_1^\infty$ являются соответствующими полиномами второго рода

$$R_{n-1}(y)=\int_{-1}^{1} \frac{p_n(y)-p_n(x)}{y-x}\, d\psi(x) = s_0 y^{n-1}+\ldots, \tag{30.11}$$

то имеют место соотношения $\left\{\text{при } x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}$

$$p_n(x)=\frac{P_{2n}(z)+P_{2n}^*(z)}{(2z)^n(1-a_{2n-1})}=\frac{zP_{2n-1}(z)+P_{2n-1}^*(z)}{(2z)^n}, \tag{30.12}$$

$$R_{n-1}(x) = 2s_0 \frac{\Omega_{2n}(z)-\Omega_{2n}^*(z)}{(2z)^n\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(1-a_{2n-1}\right)} = \tag{30.13}$$

$$=2s_0 \frac{z\Omega_{2n-1}(z)-\Omega_{2n-1}^*(z)}{1-a_{2n-1}}.$$

Для доказательства предположим, что мы задали параметры

$$-1<a_k<+1, \qquad (k=0, 1, \ldots, 2n-2),$$

и приняли $a_{2n-1} = -1$; в таком случае, как было показано в § 10, функция $\sigma(\theta)$ будет иметь $2n$ точек роста $\{\theta_k\}_1^{2n}$, причем точки $\{e^{i\theta_k}\}_1^{2n}$ являются нулями полинома $P_{2n}(z)$; из формулы

$$P_{2n}(z) = zP_{2n-1}(z) - a_{2n-1}\overset{*}{P}_{2n-1}(z) \tag{30.14}$$

ясно, что при $a_{2n-1} = -1$ точки $z = \pm 1$ не являются корнями полинома $P_{2n}(z)$; кроме того, так как все его коэфициенты вещественны, то корни входят попарно сопряжёнными, т. е. корнями будут точки $\{e^{\pm i\theta_k}\}_1^{2n}$, $0 < \theta_k < \pi$. Благодаря соотношению (30.5) ясно, что функция $\psi(x)$ имеет n точек роста $-1 < \{\cos\theta_k\}_1^n < 1$; эти точки роста являются нулями полинома $p_n(x)$. Пользуясь (30.6) и (30.7), а также результатами § 10, мы находим при $a_{2n-1} = -1$

$$-\frac{\Omega_{2n}(z)}{P_{2n}(z)} = -\frac{z\Omega_{2n-1}(z) - \overset{*}{\Omega}_{2n-1}(z)}{zP_{2n-1}(z) + \overset{*}{P}_{2n-1}(z)} = \frac{1-z^2}{2s_0 z}\cdot\frac{R_{n-1}(y)}{p_n(y)}, \tag{30.15}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right);$$

так как

$$P_{2n}(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - e^{i\theta_k})(z - e^{-i\theta_k}) = \prod_{k=1}^{n}(z^2 + 1 - 2z\cos\theta_k) =$$

$$= (2z)^n \prod_{k=1}^{n}(y - \cos\theta_k) = (2z)^n p_n(y),$$

то из (30.15) находим

$$p_n(y) = \frac{zP_{2n-1}(z) + \overset{*}{P}_{2n-1}(z)}{(2z)^n}; \tag{30.16}$$

$$R_{n-1}(y) = 2s_0\frac{z\Omega_{2n-1}(z) - \overset{*}{\Omega}_{2n-1}(z)}{(2z)^n\left(z - \frac{1}{z}\right)}.$$

Из формул

$$\begin{aligned} P_{2n}(z) &= zP_{2n-1}(z) - a_{2n-1}\overset{*}{P}_{2n-1}(z), \\ \overset{*}{P}_{2n}(z) &= \overset{*}{P}_{2n-1}(z) - z\,a_{2n-1}P_{2n-1}(z), \end{aligned} \tag{30.17}$$

справедливых при любом a_{2n-1}, находим

$$\frac{P_{2n}(z) + \overset{*}{P}_{2n}(z)}{1 - a_{2n-1}} = zP_{2n-1}(z) + \overset{*}{P}_{2n-1}(z), \tag{30.18}$$

и совершенно аналогично

$$\frac{\Omega_{2n}(z) - \overset{*}{\Omega}_{2n}(z)}{1 - a_{2n-1}} = z\Omega_{2n-1}(z) - \overset{*}{\Omega}_{2n-1}(z).$$

Правые части этих равенств не зависят от выбора a_{2n-1} — следовательно, не зависят и левые; отсюда вытекает (30.12) и (30.13) [49].

Примечание. В рассматриваемом нами случае имеем

$$\varphi(y)=\int_{-1}^{1}\frac{d\psi(x)}{y-x}=\frac{R_{n-1}(y)}{p_n'(y)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{g_k^{(n)}}{y-\cos\theta_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{g_k^{(n)}}{y-y_k},\qquad y_k=\cos\theta_k,$$

где $\left\{g_k^{(n)}\right\}_1^n$ — так называемые числа Christoffel'я

$$g_k^{(n)}=\frac{R_{n-1}(y_k)}{p_n'(y_k)}=\psi(y_k+0)-\psi(y_k-0).$$

На основании (30.5) и (20.12) имеем

$$(30.19)\qquad g_k^{(n)}=\mu_k=\sigma(\theta_k+0)-\sigma(\theta_k-0)=2\pi\rho_{2n}(e^{i\theta_k})=\frac{2\pi}{\sum\limits_{\nu=0}^{2n-1}\frac{|P_\nu(e^{i\theta_k})|^2}{h_\nu}};$$

с другой стороны имеем [50])

$$g_k^{(n)}=\frac{1}{\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\frac{p_\nu^2(y_k)}{h_\nu'}},$$

и таким образом

$$(30.20)\qquad \sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{p_\nu^2(y_k)}{h'_\nu}=\frac{1}{g_k^{(n)}}=\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=0}^{2n-1}\frac{|P_\nu(e^{i\theta_k})|^2}{h_\nu},\qquad y_k=\cos\theta_k.$$

§ 31.

Соотношение между параметрами $\{a_k\}$ и коэфициентами рекуррентной формулы.

Теорема 31.1. Коэфициенты $\{\alpha_n\}$ и $\{\lambda_n)$ трехчленной рекуррентной формулы

$$p_n(x)=\left(x-\alpha_n\right)p_{n-1}(x)-\lambda_n p_{n-2}(x),\quad (n=1,2,\ldots;\ p_{-1}=0),$$
(31.1)
$$R_{n-1}(x)=\left(x-\alpha_n\right)R_{n-2}(x)-\lambda_n R_{n-3}(x),\quad (n=2,3,\ldots;\ R_{-1}=0),$$

связаны с параметрами $\left\{a_n\right\}$ соотношениями

$$\alpha_n=-\frac{a_{2n-4}\left(1+a_{2n-3}\right)-a_{2n-2}\left(1-a_{2n-3}\right)}{2},$$

$$(n=2,3,\ldots);\qquad \alpha_1=a_0;$$

[49]) Формула (30.12) впервые выведена G. Szegö [4] другим путём.
[50]) L. c. [32]).

(31.2)

$$\lambda_n = \frac{\left(1-a_{2n-5}\right)\left(1-a^2_{2n-4}\right)\left(1+a_{2n-3}\right)}{4} \qquad (n=3, 4\ldots);$$

$$\lambda_2 = \frac{\left(1-a_0^2\right)\left(1+a_1\right)}{2}, \qquad \lambda_1 = s_0 = \pi c_0 .$$

Обратно, параметры $\{a_n\}$ выражаются через коэфициенты $\{\alpha_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ формулами

(31.3) $$a_{2n+1} = 1 - u_{n+1} - v_{n+1}, \qquad a_{2n} = \frac{v_n - u_n}{v_n + u_n},$$

где

$$u_n = \frac{p_{n+1}(1)}{p_n(1)} = 1 - \alpha_{n+1} - \frac{\lambda_{n+1}|}{|1-\alpha_n} - \frac{\lambda_n|}{|1-\alpha_{n-1}} - \cdots - \frac{\lambda_2|}{|1-\alpha_1},$$

(31.4)

$$v_n = -\frac{p_{n+1}(-1)}{p_n(-1)} = 1 + \alpha_{n+1} - \frac{\lambda_{n+1}|}{|1+\alpha_n} - \frac{\lambda_n|}{|1+\alpha_{n-1}} - \cdots - \frac{\lambda_2|}{|1+\alpha_1}.$$

Для вывода (31.2) введем обозначения

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \delta_k^{(n)} x^{n-k}, \qquad \delta_0^{(n)} = 1;$$

(31.5) $$(n=0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} d_k^{(n)} z^{n-k}, \qquad d_0^{(n)} = 1.$$

Из (30.14) мы находим, приравнивая коэфициенты при z^{2n-1} и при z

$$d_1^{(2n)} = d_1^{(2n-1)} - a_{2n-1}\, d_{2n-1}^{(2n-1)} = d_1^{(2n-1)} = a_{2n-1}\, a_{2n-2};$$

(31.6)

$$d_{2n-1}^{(2n)} = d_{2n-1}^{(2n-1)} - a_{2n-1}\, d_1^{(2n-1)} = -a_{2n-2} - a_{2n-1}\, d_1^{(2n-1)},$$

откуда

(31.7) $$d_1^{(2n)} + d_{2n-1}^{(2n)} = \left(1 - a_{2n-1}\right)\left[d_1^{(2n-1)} - a_{2n-2}\right].$$

Из (30.12) находим

(31.8) $$\delta_1^{(n)} = \frac{d_1^{(2n)} + d_{2n-1}^{(2n)}}{2\left(1 - a_{2n-1}\right)} = \frac{d_1^{(2n-1)} - a_{2n-2}}{2};$$

пользуясь (31.6) находим

(31.9) $$d_1^{(2n-1)} - d_1^{(2n-3)} = a_{2n-2}\, a_{2n-3} + a_{2n-3}\, a_{2n-4} =$$
$$= 2\left[\delta_1^{(n)} - \delta_1^{(n-1)}\right] + a_{2n-2} - a_{2n-4}.$$

Приравнивая в (31.1) коэфициенты при x^{n-1}, имеем

(31.10) $$\delta_1^{(n)} = \delta_1^{(n-1)} - \alpha_n,$$

откуда вытекает (31.2), ибо

$$a_{2n-3}\left(a_{2n-2} + a_{2n-4}\right) - a_{2n-2} + a_{2n-4} = -2\alpha_n.$$

Для нахождения λ_n заметим, что из (31.1), умножая на $p_{n-2}(x)$ и интегрируя, находим

(31.11) $$\lambda_n = \frac{h'_{n-1}}{h'_{n-2}};$$

для нахождения h'_n воспользуемся (30.12); имеем

$$h'_n = \int_{-1}^{1} p_n^2(x)\, d\psi(x) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\left[P_{2n}(z) + P_{2n}^{*}(z)\right]^2 d\sigma(\Theta)}{z^{2n}\, 2^{2n}\left(1 - a_{2n-1}\right)^2} =$$

(31.12)

$$= \frac{\pi}{2^{2n}\left(1 - a_{2n-1}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ P_{2n}(z)\, \frac{P_{2n}(z)}{z^{2n}} + \right.$$

$$\left. + z^{2n} P_{2n}\left(\frac{1}{z}\right) P_{2n}\left(\frac{1}{z}\right) + 2\left|P_n(z)\right|^2 \right\} d\sigma(\Theta) = \frac{\pi h_{2n}}{2^{2n-1}\left(1 - a_{2n-1}\right)};$$

отсюда по (31.11) находим

$$\lambda_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{h_{2n-2}}{h_{2n-4}} \cdot \frac{1 - a_{2n-5}}{1 - a_{2n-3}} = \frac{\left(1 - a_{2n-5}\right)\left(1 - a_{2n-4}^2\right)\left(1 + a_{2n-3}\right)}{4},$$

$$(n = 3,\ 4, \ldots).$$

Для проверки того, что (31.3) является решением (31.2), заметим, что

(31.13) $$u_n = 1 - \alpha_{n+1} - \frac{\lambda_{n+1}}{u_{n-1}}, \quad v_n = 1 + \alpha_{n+1} - \frac{\lambda_{n+1}}{v_{n-1}},$$

откуда

(31.14) $$v_n + u_n = 2 - \frac{\lambda_{n+1}(v_{n-1} + u_{n-1})}{v_{n-1}\, u_{n-1}};$$

$$v_n - u_n = 2\alpha_{n+1} + \frac{\lambda_{n+1}(v_{n-1} - u_{n-1})}{v_{n-1}\, u_{n-1}};$$

кроме того имеем

(31.15) $$1 - a_{2n-1} = u_n + v_n; \quad 1 + a_{2n-1} = \frac{\lambda_{n+1}(v_{n-1} + u_{n-1})}{v_{n-1}\, u_{n-1}}.$$

Пользуясь этим, находим

$$a_{2n-4}(1 + a_{2n-3}) - a_{2n-2}(1 - a_{2n-3}) =$$

$$= \frac{v_{n-2} - u_{n-2}}{v_{n-2} + u_{n-2}} \cdot \frac{\lambda_n (v_{n-2} + u_{n-2})}{v_{n-2}\, u_{n-2}} - \frac{v_{n-1} - u_{n-1}}{v_{n-1} + u_{n-1}} \cdot (v_{n-1} + u_{n-1}) =$$

$$= \frac{\lambda_n (v_{n-2} - u_{n-2})}{v_{n-2}\, u_{n-2}} - (v_{n-1} - u_{n-1}) = -2\alpha_n .$$

Точно так же находим

$$(1 - a_{2n-5})(1 + a_{2n-3})(1 - a_{2n-4})(1 + a_{2n-4}) = (v_{n-2} + u_{n-2}) \cdot$$

$$\cdot \frac{\lambda_n (v_{n-2} + u_{n-2})}{v_{n-2}\, u_{n-2}} \cdot \frac{2u_{n-2}}{v_{n-2} + u_{n-2}} \cdot \frac{2v_{n-2}}{v_{n-2} + u_{n-2}} = 4\lambda_n .$$

Мы видим, что, задавая параметры $\{a_k\}_0^\infty$, подчиненные условиям

$$-1 < a_k < 1, \qquad (k = 0, 1 \ldots),$$

мы придем к системе полиномов $\{p_n(x)\}$, ортогональных на отрезке $[-1, +1]$; известно, что, выбирая произвольно коэфициенты $\{\alpha_n\}_1^\infty$ и $\{\lambda_n\}_1^\infty > 0$, мы получим систему полиномов, ортогональную в общем случае на всей оси. Естественно, возникает вопрос, как надо выбирать коэфициенты $\{\alpha_n\}_1^\infty$ и $\{\lambda_n\}_1^\infty > 0$, чтобы множество e точек роста функции $\psi(x)$ не выходили за пределы отрезка $[-1, +1]$? Ответ на него дает

Теорема 31.2 Для того, чтобы $e \subset [-1, +1]$, необходимо и достаточно, чтобы коэфициенты были выбраны следующим образом:

(31.16) $$-1 < \alpha_1 < 1; \quad 0 < \lambda_2 < 1 - \alpha_1^2; \quad -1 + \frac{\lambda_2}{1 + \alpha_1} < \alpha_2 < 1 - \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_1}$$

и вообще, если выбраны $\{\lambda_k\}_2^n$, $\{\alpha_k\}_1^n$, то выбираем

(31.17) $$0 < \lambda_{n+1} < \frac{2}{\frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{v_{n-1}}}, \quad -1 + \frac{\lambda_{n+1}}{v_{n-1}} < \alpha_{n+1} < 1 - \frac{\lambda_{n+1}}{u_{n-1}}.$$

Необходимость вытекает из условий

(31.18) $$-1 < a_{2n+1} = 1 - u_{n+1} - y_{n+1} < 1;$$

$$-1 < a_{2n} = \frac{v_n - u_n}{v_n + u_n} < 1, \ (n = 0, 1, \dots),$$

откуда следует:

(31.19) $$0 < u_{n+1} + v_{n+1} < 2; \quad u_n > 0, \quad v_n > 0, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

из первого условия, пользуясь (31.14), находим

$$0 < 2 - \frac{\lambda_{n+2}(v_n + u_n)}{v_n u_n} < 2,$$

откуда вытекают неравенства (31.17) для λ_{n+1}; неравенства для α_{n+1} вытекают из (31.3), ибо $u_n > 0$ и $v_n > 0$; обратно, неравенства (31.17) влекут за собой (31.19) и, следовательно, (31.18).

§ 32.

Корреспондирующая непрерывная дробь для отрезка [0, 1].

Коэфициенты $\{\alpha_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ являются коэфициентами непрерывной дроби

(32.1) $$\frac{\lambda_1|}{|y - \alpha_1} - \frac{\lambda_2|}{|y - \alpha_2} - \dots,$$

ассоциированной с интегралом (30.6); она дает разложение N-функции $\varphi(y)$, равномерно сходящееся внутри плоскости y, разрезанной вдоль отрезка $[-1, +1]$.

Выполним линейное преобразование

(32.2) $$x = 2u - 1;$$

в таком случае имеем:

(32.3) $$\varphi(y) = \int_0^1 \frac{d\psi(2u-1)}{y - 2u + 1} = -\frac{v}{2}\int_0^1 \frac{d\beta(u)}{1 + vu},$$

где мы положили

(32.4) $$\beta(u) = \psi(2u - 1); \qquad v = -\frac{2}{y+1} = -\frac{4z}{(z+1)^2}.$$

Функции

(32.5) $$\int_0^1 \frac{d\beta(u)}{w - u}$$

соответствует так называемая корреспондирующая непрерывная дробь [51])

(32.6) $$\int_0^1 \frac{d\beta(u)}{w - u} = \frac{b_1|}{|w} - \frac{b_2|}{|1} - \frac{b_3|}{|w} - \frac{b_4|}{|1} - \dots,$$

[51]) См. J. Shohat [1], ch. I, § 4.

которая равномерно сходится внутри плоскости w, разрезанной вдоль отрезка [0, 1]; делая замену $w = -\frac{1}{v}$, мы найдем

$$(32.7)\qquad -\frac{1}{v}\int_0^1 \frac{d\beta(u)}{-\frac{1}{v}-u} = \int_0^1 \frac{d\beta(u)}{1+vu} = \frac{b_1|}{|1} + \frac{b_2 v|}{|1} + \frac{b_3 v|}{|1} + \ldots;$$

коэфициенты $\{b_k\}_1^\infty$ связаны с коэфициентами $\{\alpha'_k\}$ и $\{\lambda'_k\}$ ассоциированной дроби

$$(32.8)\qquad \frac{b_1|}{|w} - \frac{b_2|}{|1} - \frac{b_3|}{|w} - \frac{b_4|}{|1}\cdots = \frac{\lambda'_1|}{|w-\alpha'_1} - \frac{\lambda'_2|}{|w-\alpha'_2} - \ldots.$$

соотношениями [52])

$$(32.9)\qquad \left.\begin{aligned} b_{2n-1}+b_{2n} &= \alpha'_n \\ b_{2n-2}\, b_{2n-1} &= \lambda'_n \end{aligned}\right\}(n=2,3,\ldots);\qquad \alpha'_1 = b_2,\ \lambda'_1 = b_1.$$

Из формулы (31.1) находим

$$p_n(2u-1) = (2u-1-\alpha_n)\,p_{n-1}(2u-1) - \lambda_n\,p_{n-2}(2u-1),$$

откуда

$$\frac{p_n(2u-1)}{2^n} = \left(u - \frac{1+\alpha_n}{2}\right)\frac{p_{n-1}(2u-1)}{2^{n-1}} - \frac{\lambda_n}{4}\cdot\frac{p_{n-2}(2u-1)}{2^{n-2}};$$

следовательно

$$(32.10)\qquad \alpha'_n = \frac{1+\alpha_n}{2},\ \lambda'_n = \frac{\lambda_n}{4},\qquad (n=1,2,\ldots).$$

Пользуясь формулами (31.2), выразим $\{b_k\}_1^\infty$ через $\{a_k\}_0^\infty$; имеем

$$(32.11)\qquad \alpha'_n = \frac{2-a_{2n-4}(1+a_{2n-3})+a_{2n-2}(1-a_{2n-3})}{4},$$

$$\lambda'_n = \frac{(1-a_{2n-5})(1-a_{2n-4}^2)(1+a_{2n-3})}{16}.$$

Из (32.9) находим

$$(32.12)\qquad b_1 = \lambda'_1 = \lambda_1 = s_0;\ b_2 = \alpha'_1 = \frac{1+a_0}{2},$$

$$b_3 = \frac{\lambda'_2}{b_2} = \frac{(1-a_0^2)(1+a_1)}{8} : \frac{1+a_0}{2} = \frac{(1-a_0)(1+a_1)}{4},\ b_4 = \alpha'_2 - b_3 =$$

$$= \frac{2-a_0(1+a_1)+a_2(1-a_1)}{4} - \frac{(1-a_0)(1+a_1)}{4} = \frac{(1-a_1)(1+a_2)}{4};$$

предположим, что

$$b_k = \frac{(1-a_{k-3})(1+a_{k-2})}{4},\qquad (k=3,4,\ldots,2n-1);$$

[52]) L. c. [51]).

в таком случае

$$b_{2n} = \alpha_n' - b_{2n-1} = \frac{2 - a_{2n-4}(1 + a_{2n-3}) + a_{2n-2}(1 - a_{2n-3})}{4} -$$

$$- \frac{(1 - a_{2n-4})(1 + a_{2n-3})}{4} = \frac{(1 - a_{2n-3})(1 + a_{2n-2})}{4},$$

и точно так же

$$b_{2n+1} = \frac{\lambda_{n+1}'}{b_{2n}} = \frac{(1 - a_{2n-3})(1 - a_{2n-2}^2)(1 + a_{2n-1})}{16}$$

$$: \frac{(1 - a_{2n-3})(1 + a_{2n-2})}{4} = \frac{(1 - a_{2n-2})(1 + a_{2n-1})}{4}.$$

Мы приходим к следующей теореме:

Теорема 32.1. Для всякой C_r-функции $F(z)$ имеет место разложение

$$\frac{1+z}{1-z}F(z) = \frac{1|}{|1} + \frac{g_2 v|}{|1} + \frac{(1-g_2)g_3 v|}{|1} + \frac{(1-g_3)g_4 v|}{|1} + \ldots, \tag{32.13}$$

где

$$g_k = \frac{1 + a_{k-2}}{2}, \quad (k = 2, 3, \ldots), \qquad v = -\frac{4z}{(1+z)^2}; \tag{33.14}$$

при условиях

$$0 < g_k < 1, \qquad (k = 2, 3, \ldots), \tag{32.15}$$

непрерывная дробь равномерно сходится внутри плоскости v, разрезанной вдоль вещественной оси от -1 до $-\infty$.

Примечание. Сходимость непрерывных дробей типа (32.7) впервые изучил Т. Стильтьес [1]; сходимость дроби более общего типа

$$\frac{1|}{|1} + \frac{r_2 e^{i\Theta_2} v|}{|1} + \frac{r_3 e^{i\Theta_3}(1 - r_2)v|}{|1} + \ldots, \qquad 0 < r_n < 1,$$

была изучена E. Van-Vleck'ом [1] и A. Pringsheim'ом [1] — однако, из их исследований вытекает сходимость только при $|v| \leqslant 1$.

Непрерывные дроби типа (32.13) в связи с N-функциями (32.7) впервые рассмотрел H. Wall ([1] — [5]); многие из его результатов могут быть получены из наших общих теорем [53]).

Отметим теорему, в которой из непосредственного изучения сходимости непрерывной дроби (32.13) выводятся свойства функции $\sigma(\Theta)$.

Теорема 32.2. (Т. Стильтьес [1]). Если существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \left\{(1 + a_n)(1 - a_{n+1})\right\} = 0, \tag{32.16}$$

то множество точек роста функции $\sigma(\Theta)$ имеет единственной предельной точкой точку $\Theta = \pi$; при этом C_r-функция $F(z)$ мероморфна [54]).

Действительно, из общих теорем о непрерывных дробях типа (32.7) вытекает, что при существовании предела $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$ функция (32.7)

---

[53]) С работами H. Wall'a, представляющими значительный интерес, нам удалось ознакомиться только по рефератам в Math. Reviews.

[54]) См. H. Wall [3].

мероморфна[55]); так как точке $v=\infty$ соответствует точка $z=-1$, то отсюда вытекает утверждение нашей теоремы.

§ 33.

Применение общих теорем к полиномам $\{p_n(x)\}$, ортогональным на отрезке $[-1,+1]$.

Теорема 33.1. Если

$$(33.1)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{h_n'}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}}=\frac{1}{4},$$

то множество точек роста функции $\psi(x)$ всюду плотно на отрезке $[-1,+1]$[56]).

Для доказательства достаточно применить теорему 19.1 и воспользоваться формулами (31.11) и (31.12).

Теорема 33.2. Следующие три условия эквивалентны:

I. сходимость произведения

$$(33.2)\qquad \prod_{n=1}^{\infty}(4\lambda_n);$$

II. справедливость асимптотической формулы

$$(33.3)\qquad p_{n_\nu}(x)\simeq\left(\frac{z}{2}\right)^{n_\nu}\pi\left(\frac{1}{z}\right),\qquad |z|=|x+\sqrt{x^2-1}|>1,$$

хоть в одной точке и хоть для одной подпоследовательности полиномов $\{p_{n_\nu}(x)\}$;

III. существование интеграла Лебега

$$(33.4)\qquad \int_{-1}^{1}\frac{\lg w(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

где $w(x)$ — существующая почти всюду производная функции $\psi(x)$.

Доказательство сразу вытекает из теоремы 21.1 и формулы (30.12), связывающей $p_n(x)$ с $P_{2n}(z)$; заметим также, что по (30.5)

$$(33.5)\qquad \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta}=-\frac{d\psi(x)}{d\theta}=-\frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta},\qquad p(\theta)=w(x)\,|\sin\theta|,$$

откуда

$$(33.6)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg p(\theta)\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\lg w(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\lg\sin\theta\,d\theta;$$

---

[55]) См. O. Perron [1], § 64.

[56]) Предполагается, что коэфициенты $\{\lambda_n\}_1^\infty$ выбраны в соответствии с теоремой 31.2.

так как второй интеграл в правой части существует, то условия (21.6) и (33.4) эквивалентны.

Примечание. В своей монографии по теории ортогональных полиномов J. Shohat [1] рассматривает нормированные полиномы

$$\frac{p_n(x)}{\sqrt{h'_n}} = k_n x^n + \cdots; \tag{33.7}$$

предполагая, что полиномы ортогональны на отрезке $[-1, +1]$, он выводит ряд их асимптотических свойств в предположении, что

$$k_n = 0\left(2^n\right); \tag{33.8}$$

после этого он говорит[57]): „можно пойти дальше, если рассмотреть случай, когда $d\psi(x) = w(x)\,dx$, причем $w(x) > 0$ почти всюду и существует интеграл (33.4)“.

Нетрудно показать, что это последнее условие (33.4) эквивалентно условию (33.8). Действительно, из формулы (33.7) и (31.12) и условия (33.8) вытекает, что

$$k_n = \frac{1}{\sqrt{h'_n}} = \frac{2^n}{\sqrt{h_{2n}}} \cdot \sqrt{\frac{1 - a_{2n-1}}{2\pi}} = 0\left(2^n\right), \tag{33.9}$$

откуда вытекает, что $h_{2n} = 0(1)$; следовательно, сходится произведение

$$h = \lim_{n \to \infty} h_{2n} = h_0 \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - |a_n|^2\right),$$

а поэтому выполняется условие VII теоремы 21.1 и эквивалентное ему условие III теоремы 33.2.

Из рассуждений § 23 снова вытекает, что функция $\psi(x)$ может иметь и сингулярную составляющую, и функцию скачков — лишь бы производная $w(x)$ ядра удовлетворяла условию III; в том частном случае, когда функция $\psi(x)$ абсолютно непрерывна, эквивалентность (33.8) и (33.4) доказана в одной из последних работ G. Szegö [8].

Теорема 33.3. Если $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, т. е. если в разложении N-функции

$$\varphi(y) = \int_{-1}^{1} \frac{d\psi(x)}{y - x} \tag{33.10}$$

в непрерывную дробь

$$(y+1)\varphi(y) = \frac{g_1|}{|1} + \frac{g_2 v|}{|1} + \frac{(1-g_2) g_3 v|}{|1} + \frac{(1-g_3) g_4 v|}{|1} + \ldots, \quad v = -\frac{2}{y+1}, \tag{33.11}$$

[57]) См. J. Shohat [1], стр. 50—57.

коэфициенты $\{g_n\}$ таковы, что сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|g_n-\frac{1}{2}\right|, \tag{33.12}$$

то справедлива асимптотическая формула

$$p_n(x)\simeq\left(\frac{z}{2}\right)^n\pi\left(\frac{1}{z}\right), \qquad |z|=|x+\sqrt{x^2-1}|\geqslant 1+\varepsilon, \qquad \varepsilon>0; \tag{33.13}$$

на отрезке $[-1, +1]$ имеем

$$\sqrt{\frac{w(x)}{h}}\sqrt[4]{1-x^2}\,p_n(x)=\frac{\cos\{n\Theta+\gamma(\Theta)\}}{2^n}+\varepsilon_n, \tag{33.14}$$

$$-1\leqslant x=\cos\,\Theta\leqslant 1, \qquad \varepsilon_n=\frac{1}{2^n}0\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left|g_k-\frac{1}{2}\right|\right),$$

где

$$e^{i\gamma(\Theta)}=\frac{\pi(e^{-i\Theta})}{|\pi(e^{-i\Theta})|}; \tag{33.15}$$

$$p(\Theta)=\frac{h}{|\pi(e^{i\Theta})|^2}=w(x)|\sin\Theta|=w(x)\sqrt{1-x^2}.$$

Доказательство сразу вытекает из теоремы 26.1; функцию $\gamma(\Theta)$ можно выразить непосредственно через вес $w(x)$ формулой [58])

$$\gamma(\Theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\lg W(y)-\lg W(x)}{y-x}\cdot\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}\,dy, \qquad x=\cos\Theta, \tag{33.16}$$

где

$$W(\cos\Theta)=w(\cos\Theta)|\sin\Theta|=p(\Theta). \tag{33.17}$$

ЛИТЕРАТУРА

Ахиезер Н., 1) Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов, „Успехи матем. наук", т. 9, стр. 126—156, 1941; 2) О некоторых проблемах замкнутости (в печати).

Ахиезер Н. и Крейн М., 1) О некоторых вопросах теории моментов, ст. I, Харьков, 1938; 2) Деякі зауваження про коефіцієнти квадратурних формул Gauss'овського типу, Труды Одесск. гос. унив., т. II, стр. 29—38, 1938.

Бернштейн С., акад., 1) Sur une classe de polynomes orthogonaux, Сообщ. Харьк. матем. о-ва, т. IV, стр. 79—93, 1930; 2) О многочленах, ортогональных в конечном интервале, Харьков, 1937.

Геронимус Я., 1) Обобщенные ортогональные полиномы и формула Кристоффеля-Дарбу, Докл. Акад. наук СССР, т. XXVI, стр. 843—846, 1940; 2) О некоторых свойствах обобщенных ортогональных полиномов, там же, т. XXIX, стр. 5—8, 1940; Матем. сборн., т. 9, стр. 121—135, 1941; 3) О полиномах, ортогональных на круге, о тригонометрической проблеме моментов и об ассоциированных с ней функциях типа Carathéodory и Schur'а, Докл. Акад. наук СССР, т. XXIX, стр. 319—324, 1943; Матем. сборн., т. 15, стр. 99—130, 1944; 4) О некоторых уравнениях в конечных разностях и соответствующих системах ортогональных полиномов, Докл. Акад. наук СССР, т. XXIX, стр. 536—538, 1940; 5) О характере решения проблемы моментов в случае предельно-периодической ассоциированной дроби, Изв. Акад. наук СССР, т. 5, стр.

---

[58]) См. С. Н. Бернштейн [2]; G. Szegö [6], §§ 12.1, 12.2.

203—210; 1941; 6) Sur quelques propriétés d'une classe de polynomes orthogonaux, Сообщ. Харьк. матем. о-ва., т. IV, стр. 123—128, 1930; 7) О некоторых функциях распределения, связанных с системами полиномов, Докл. Акад. наук СССР, т. XLIV, стр. 383—387, 1944.

Колмогоров А., Бюллетень Моск. гос. унив., Математика, вып. 6, 1941.

Крейн М., 1) Об обобщённой проблеме моментов, Докл. Акад. наук СССР. т. XLIV, стр. 239—243, 1944; 2) Об одном обобщении исследований G. Szegö, В. И. Смирнова и А. Н. Колмогорова, там же т. XLVI, стр. 95—98, 1945.

Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, Москва, 1941.

Плесснер А., Спектральная теория линейных операторов, „Успехи матем. наук", т. 9, стр. 3—125, 1941.

Привалов И., Граничные свойства однозначных аналитических функций, Москва, 1941.

Стильтьес Т., Исследования о непрерывных дробях, Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse, т. 8, стр. 1—122, 1894; т. 9, стр.5—47, 1895 (русск. пер., Харьков, 1934).

Чезаро Э., Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно-малых, ч. I, Москва, 1936.

Borel E., Leçons sur les fonctions méromorphes, Paris, 1903.

Carathéodory C., 1) Ueber den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen", Math. Ann., т. 64, стр. 95—*115, 1907;* 2) Ueber den Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, т. 32, стр. 193—217, 1911.

Edrei A., Sur les déterminants recurrents et les singularités d'une fonction, donnée par son développement de Taylor, Compos. Math., т. 7, стр, 20—80, 1939.

Faber G., Ueber Tchebyscheffsche Polynome, Crelle, т. 150, стр. 79—106, 1922.

Fejér L., Ueber trigonometrische Polynome, Crelle, т. 146, стр. 53—82, 1916.

Fekete M., 1) Ueber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Ztschr, т. 17, стр. 228—249, 1923. 2) Ueber den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen. Ibidem, т. 32, стр. 108—114, 215—221. 1930; т. 37, стр. 635—646, 1933.

Fischer E., Ueber das Carathéodory'sche Problem, Potenzreihen mit positiven reelen Teil betreffend, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, т. 32, стр. 240—256, 1911.

Herglotz G., Ueber Potenzreihen mit positiven reellen Teil im Einheitskreise, Leipz. Ber., т. 63, 1911.

Montel P., Leçons sur les familles normales des fonctions analytiques et leurs applications, Paris, 1927 (русск. пер. Москва, 1936). 2) Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, Paris, 1910.

Perron O., Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig und Berlin, 1929.

Polyà G. und Szegö G., Ueber den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen, Crelle, т. 165, стр. 4—49, 1931; 2) Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin, 1925. (Русск. пер. Москва, 1937—1938).

Pringsheim A., Ueber einige Konvergenz-Kriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern, Münch. Sitzungsber., т, XXXV, стр. 359—380, 1905.

Riesz F., Ueber ein Problem des Herrn Carathéodory, Crelle, т. 146, стр. 83—87, 1916.

Rogosinski W., Ueber positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen, Math. Ztschr., т. 35, стр. 93—121, 1932.

Schur J., Ueber Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, Crelle, т. 147, стр. 205—232, 1917; т. 148, стр. 122—145, 1918.

Shohat J., 1) Théorie générale des polynomes orthogonaux de Tchebicheff, Paris. 1934, 2) Application of orthogonal Tchebycheff polynomials to Lagrangean interpolation and to the general theory of polynomials, Ann. di Mat., т. XVIII, стр. 201—238, 1939.

Shohat J. and Tamarkin J., The problem of moments, New-York, 1943.

Szegö G., 1) Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen, II, Math. Ztschr., т. 9, стр. 167—190, 1921. 2) Ueber die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems, Ibidem, т. 12, стр. 61—94, 1921. 3) Ueber orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören, Ibidem, т. 9. стр. 218—270, 1921. 4) Ueber die Entwicklung einer analytischen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems, Math. Ann, т. 82, стр. 188—212, 1921. 5) Ueber den asymptotischen Ausdrück von Polynomen, die durch eine Orthogonalitätseigenschaft definiert sind, Ibidem, т. 86, стр. 114—139, 1922. 6) Orthogonal polynomials, New-York 1939. 7) Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn M. Fekete, Math. Ztschr., т. 21, стр. 203—208' 1924. 8) Remarks on a note of Mr. R. Wilson and on related subjects, Bull. of Amer. Math. Soc., т. 46, стр. 852—858, 1940.

Takenaka S., On the orthogonal functions and a new formula of interpolation, Jap. J. of Math., т. II, стр. 129—145, 1926.

Toeplitz O., Ueber die Fouriersche Entwicklung positiver Funktionen, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, т. 32, стр. 191—192, 1911.

Van-Vleck E., On the convergence and character of the continued fraction $\frac{a_1 z|}{|1} + \frac{a_2 z|}{|1} + \frac{a_3 z|}{|1} + \cdots$, Trans. of Amer. Math. Soc., т. 2, 1901.

1) Wall H. S., On continued fractions of the form $1 + \overset{\infty}{\underset{1}{K}} \frac{b_\nu z''}{1}$. Bull. of Amer. Math. Soc., т. 41, стр. 727—736, 1935. 2) The behavior of certain Stieltjes continued fractions near the singular line, Ibidem, т. 48, стр. 427—431, 1942; 3) Some recent developments in the theory of continued fractions, Ibidem, т. 47, стр. 405—423, 1941, 4) A class of functions bounded in the unit-circle, Duke Math. J., т. 7, стр. 146—153, 1940; 5) Continued fractions and totally monotone sequences, Trans. of Amer. Math. Soc., т. 48. стр. 165—189, 1940.