Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Г. Ч. Курінний

МНОГОЧЛЕНИ

Навчально-методичний посібник з алгебри
для студентів 1-го курсу механіко-математичного факультету

Харків – 2015

Зміст

Вступ

Наразі вважаємо, що слухачі мають уяву про кільця, зокрема, про кільце $\mathbb{Z}$ цілих чисел і кільце $\mathbb{Z}_n$ класів лишків за модулем n, де n — натуральне число, що більше або дорівнює 2. Ці кільця комутативні, тобто $xy = yx$ для будь-яких своїх елементів x, y, і в них є одиниця. Також вважаємо, що слухачі мають уяву про поля, зокрема, про поле $\mathbb{R}$ дійсних чисел, поле $\mathbb{Q}$ раціональних чисел, поле $\mathbb{Z}_p$, де p — просте натуральне число. Визначення кільця, найпростіші властивості операцій в кільці, підбірка задач, що стосуються найпростіших речей в кільці, можна знайти в російськомовній методичці [1]. Більш спеціальні речі, що стосуються кілець, вводяться в методичці [2].

Протягом роботи часто будуть виникати суми, що мають чи нескінченно багато доданків, чи просто багато (всі виписати неможливо), чи доданків змінна кількість. В таких випадках використовуємо знак підсумовування $\sum$. Таким чином,

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_n = \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{0 \le i \le n} x_i, \qquad x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} x_i.$$

Згідно викладацької традиції, техніка роботи із знаком суми не пояснюється.

Властивості дійсних чисел — комутативність додаваня та множення, існування оберненого до кожного ненульового числа, розподільні закони для додавання та множеня вважаються відомими і використовуються без додаткового нагадування.

Коли в тексті йдеться про числа, то маються на увазі елементи поля або елементи комутативного кільця R з одиницею $(a.b \in R \Rightarrow ab = ba, 1 \in R)$ і без дільників нуля $(a, b \in R, a, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0)$. Це поле чи кільце

- або чітко вказане;
- або вгадується із мовного оточення;
- або ж не принципово, з якого саме поля чи кільця ці числа беруться.

1 Многочлени від однієї змінної

1.1 Визначення рядів, многочленів і дій з ними

Визначення 1.1 *Формальним степеневим рядом від змінної x з коефіцієнтами із кільця R (або, іншими словами, над кільцем R, над кільцем коефіцієнтів R) є вираз вигляду*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \qquad a_i \in R, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Числа $a_i \in R$ називають *коефіцієнтами* ряду. Коефіцієнт a_0 називають *вільним членом*. За домовленістю вважається $x^0 = 1,\ a_0x^0 = a_0$.

Два ряди збігаються тоді і тільки тоді (за визначенням), коли у них однакові відповідні коефіцієнти.

Доданки ряда з нульовими коефіцієнтами можна не писати. Якщо всі коефіцієнти дорівнюють нулю, то ряд позначають символом 0.

Приклади.

1. Запис (вираз)

$$2 + 3x + 4x^2 + 5x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n$$

є формальним степеневим рядом з вільним членом 2. Коефіцієнтом при x^{24} є 26.

2. Запис (вираз)

$$2 + 3x + 4x^2 + 0x^3 + 0x^4 \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \quad a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 4, \quad a_n = 0 \text{ при } n \geq 3$$

є формальним степеневим рядом з вільним членом 2 і лише трьома ненульовими доданками.

Визначення 1.2 *Поліномами (чи многочленами) називають формальні степеневі ряди, що мають лише скінченну кількість ненульових доданків (коефіцієнтів).*

Многочлен $f(x)$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_nx^n, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in R, \quad a_n \neq 0$$

має *вільний член* a_0, *старший член* a_nx^n, *старший коефіцієнт* $a_n \neq 0$ *і степінь* $\deg f = n$.

Степенем нульового многочлена вважають $-\infty$ (так зручно у багатьох випадках).

Доданки $a_0,\ a_1x,\ a_2x^2, \ldots, a_nx^n$ називають *одночленами* або *мономами*.

Приклади.

1. Вираз

$$1 + 5x + 25x^2 + 125x^3 + \ldots + 5^nx^n + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} 5^ix^i$$

є степеневим рядом над кільцем цілих чисел з вільним членом 1. Цей ряд не є многочленом, оскільки в ньому нескінченно багато ненульових доданків. $125x^3$ є одним із одночленів цього ряду.

2. Ряд

$$x^2 - 7x^3 - 12x^7$$

є многочленом над кільцем цілих чисел степеня 7 з нульовим вільним членом, старшим членом (мономом, одночленом, доданком) $-12x^7$ і старшим коефіцієнтом -12.

3. Степенями поліномів $x, x^2+1, -5+2x^{10}$, відповідно, є числа 1, 2, 10.

1.2 Дії з рядами та многочленами

На множині формальних степеневих рядів над кільцем визначені операції додавання та множення наступним чином:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i, \tag{1}$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) x^k. \tag{2}$$

Теорема 1.1 *Нехай є комутативне кільце з одиницею R. Формальні степеневі ряди над R з операціями додавання та множення, що визначені за допомогою (1), (2) утворюють комутативне кільце з одиницею. Многочлени утворюють підкільце кільця рядів.*

Доведення. В цьому переконуємося прямою перевіркою. Отже, потрібно уміти перевіряти асоціативність множення та додавання рядів, комутативність додавання та множення, потрібно уміти перевіряти, що ряд 0 є нулем (тобто нейтральним елементом за додаванням), ряд 1 є одиницею (тобто нейтральним елементом за множенням), потрібно уміти доводити існування протилежного ряду. Також потрібно уміти доводити, що так визначені додавання та множення рядів підкоряються дистрибутивному закону. При доведенні потрібно використовувати виконання відповідних аксіом в кільці коефіцієнтів.

Наведемо приклади перевірки виконання кількох з аксіом кільця.

Перевіряємо аксіому існування ряда, що протилежний даному.

Беремо довільний ряд $f = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ і розглядаємо ряд $g = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-a_i) x^i$. Елементи $-a_i$ існують в R тому, що R — кільце, а в кільці для кожного елемента є протилежний. Далі додаємо

$$f + g = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + (-a_i)) x^i = \sum_{i=0}^{\infty} 0 \cdot x^i = 0.$$

Отже $g = -f$ і ми довели існування протилежного ряда (конструктивно, ми точно вказали цей протилежний ряд).

Перевіряємо асоціативність множення рядів. Нехай є три ряди

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \qquad g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i, \qquad h = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i,$$

Потрібно довести рівність $(fg)h = f(gh)$. Позначимо $fg = U, \quad gh = V, \quad S = Uh, \quad T = fV$ і

$$U = \sum_{i=0}^{\infty} u_i x^i, \qquad V = \sum_{i=0}^{\infty} v_i x^i, \qquad S = \sum_{i=0}^{\infty} s_i x^i, \qquad T = \sum_{i=0}^{\infty} t_i x^i,$$

Два ряди збігаються тоді і тільки тоді, коли у них однакові коефіцієнти (за визначенням). Отже, нам потрібно довести рівність $T = S$ і ми це доведемо, коли перевіримо рівність $t_i = s_i$ для будь-якого $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Беремо певне натуральне число чи 0, позначаємо його через i і обчислюємо (знаючи визначення множення рядів) коефіцієнти s_i, t_i.

$$s_i = \sum_{\varepsilon+\gamma=i} u_\varepsilon c_\gamma, \qquad t_i = \sum_{\alpha+\delta=i} a_\alpha v_\delta.$$

Подібним чином

$$u_\varepsilon = \sum_{\alpha+\beta=\varepsilon} a_\alpha b_\beta, \quad v_\delta = \sum_{\beta+\gamma=\delta} b_\beta c_\gamma,$$

Тепер підставляємо значення u_ε та v_δ у вирази для $s_i,\ t_i$.

$$s_i = \sum_{\varepsilon+\gamma=i} (\sum_{\alpha+\beta=\varepsilon} a_\alpha b_\beta) c_\gamma = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=i} (a_\alpha b_\beta) c_\gamma,$$

$$t_i = \sum_{\alpha+\delta=i} a_\alpha (\sum_{\beta+\gamma=\delta} b_\beta c_\gamma) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=i} a_\alpha (b_\beta c_\gamma)$$

Далі користуємося тим, що в кільці коефіцієнтів множення асоціативне і при будь-яких α, β, γ виконується рівність

$$(a_\alpha b_\beta) c_\gamma = a_\alpha (b_\beta c_\gamma).$$

Отже, всі доданки в сумі для s_i збігаються із відповідними доданками в сумі для t_i, суми збігаються і доведення рівності $s_i = t_i$ закінчене. Тому закінчене також доведення асоціативності множення рядів.

■

Вправа. Довести самостійно усі інші аксіоми кільця в кільці рядів.

Приклад. Візьмемо ряди

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} x^i, \quad g = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i, \quad h = \sum_{i=0}^{\infty} (2i-3) x^i$$

і обчислимо f^2, fh, gh, fgh.

1) $f^2 = (1+x+x^2+\ldots)(1+x+x^2+\ldots) = 1+2x+3x^2+\ldots = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i$.

2) $fh = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\alpha_i x^i$, $\alpha_i = \sum\limits_{p+q=i}(2p-3) = \sum\limits_{p=0}^{i}(2p-3) = \dfrac{-3+(2i-3)}{2}(i+1) = i^2-2i-3$,

$fh = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(i^2-2i-3)x^i$.

3) $gh = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\beta_i x^i$,

$\beta_i = \sum\limits_{p+q=i}(2p-3)(-1)^q = \sum\limits_{p=0}^{i}(2p-3)(-1)^{i-p} = (-1)^i\sum\limits_{p=0}^{i}(2p-3)(-1)^p = i+1-2(1+(-1)^i)$,

$gh = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(i-1-(-1)^i\cdot 2))x^i$.

4) $fg = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\gamma_i x^i$, $\quad \gamma_i = \sum\limits_{p+q=i}(-1)^q = \dfrac{1+(-1)^i}{2}$, $\quad fg = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^i}{2}x^i$.

5) $f\cdot(gh) = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\delta_i x^i$, $\quad \delta_i = \sum\limits_{p+q=i}(p-1-2\cdot(-1)^p) = \sum\limits_{p=0}^{i}(p-1-2\cdot(-1)^p)$.

Оскільки

$$\sum_{p=0}^{i}p = \frac{1}{2}i(i+1),\ \sum_{p=0}^{i}(-1) = -1(i+1),\ \sum_{p=0}^{i}(-2)\cdot(-1)^p = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \text{ парне},\\ -2, & \text{якщо } i \text{ непарне},\end{cases}$$

то

$$\delta_i = \frac{1}{2}i(i+1)-(i+1)-(1+(-1)^i),$$

тобто

$$f\cdot(gh) = \sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{2}i(i+1)-(i+1)-(1+(-1)^i))x^i. \tag{3}$$

Для перевірки проведених обчислень підрахуємо δ_i при малих значенях i — наприклад, при $i=0,1,2$, двома способами. Один спосіб нам дає формула (3) для обчислення δ_i, а другий спосіб — це пряме перемножання рядів без використання знаків суми.

Отже за першим способом

$$\delta_0 = -3, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = -2.$$

За другим способом

$$f = 1+x+x^2+\ldots, \quad g = 1-x+x^2+\ldots \quad h = -3-x+x^2+\ldots$$

$$gh = -3+2x-x^2+\ldots \quad f(gh) = -3-x-2x^2+\ldots$$

Визначення 1.3 *Два елементи комутативного кільця з одиницею називаються взаємно оберненими (оберненими один до другого), якщо їх добуток дорівнює одиниці.*

Деякі ряди в кільці рядів мають обернений ряд. Наприклад,

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots)(1 - x) = 1$$

і ряди $1 - x$ та $\sum_{i=0}^{\infty} x^n$ взаємно обернені.

Теорема 1.2 *Ряд має обернений тоді і тільки тоді, коли його вільний член має обернений в кільці коефіцієнтів.*

Доведення. Нехай є ряд $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ з коефіцієнтами із кільця R: $a_i \in R,\ i = 0, 1, 2, \ldots$

Якщо ряд $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ обернений до ряда $f(x)$, тобто $f(x) \cdot g(x) = 1$, і, відповідно,

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1, \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0, \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &= 0, \\ &\ldots \\ a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0 &= 0, \\ &\ldots \end{aligned}$$

то елементи a_0, b_0 взаємно обернені в кільці. Отже, a_0 має обернений елемент в кільці коефіцієнтів.

Якщо ж елемент a_0 має обернений елемент в кільці коефіцієнтів, то виписана система рівнянь для знаходження коефіцієнтів ряда $g(x)$ має розв'язок і, відповідно, ряд має обернений.

Теорема доведена повністю.

$\blacksquare$

Кільце многочленів над кільцем R від змінної x будемо позначати $R[x]$. Кільце формальних степеневих рядів над кільцем R від змінної x будемо позначати $R[[x]]$.

Від рядів можна брати похідну.

Визначення 1.4 *Похідною від ряда $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ з коефіцієнтами із кільця R: $a_i \in R,\ i = 0, 1, 2, \ldots$ називають ряд $f'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1}(i + 1)x^i$. Похідні більш високих порядків визначаються індуктивно.*

Потрібно мати на увазі, що коли $a_n \in R$, і k — натуральне число, то під добутком $k \cdot a_n$ розуміють суму k доданків, кожен з яких дорівнює a_n. Тому $k \cdot a_n \in R$.

Приклад. Візьмемо многочлени $f_1(x) = x + 2x^2 + x^5 + 2x^6 + x^7$, $f_2(x) = x^3$ над полем $\mathbb{Z}_3$. В полі $\mathbb{Z}_3$ $1+1+1=0$. Тому

$$f_1'(x) = 1+4x+5x^4+12x^5+7x^6 \text{ над полем } \mathbb{R},\ f_1'(x) = 1+x+2x^4+x^6 \text{ над полем } \mathbb{Z}_3,$$

$$f_2'(x) = 3x^2 \text{ над полем } \mathbb{R},\ f_2' = 0 \text{ над полем } \mathbb{Z}_3.$$

Похідна від рядів має ті ж властивості, що і похідна від функції дійсного аргумента.

Теорема 1.3

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (fg)' = f'g + g'f.$$

Доведення. Доведення здійснюється прямою перевіркою і лишається для самостійної роботи.

■

1.3 Дві теореми про степені многочленів

Теорема 1.4 *Якщо кільце коефіцієнтів не має дільників нуля (тобто добуток ненульових чисел не дорівнює нулю), то степінь добутку многочленів дорівнює сумі степенів множників.*

Доведення. Твердження теореми випливає з того, що коли $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, $g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0$ два многочлени і $a_nb_m \neq 0$, тоді

$$fg = a_nb_mx^{n+m} + (a_nb_{m-1} + a_{n-1}b_m)x^{m+n-1} + \ldots + a_0b_0.$$

■

Приклади.

1. Над полем $\mathbb{Z}$:

$$(5x^2 - 7x + 11)(2x^3 + x^2 - 13x + 8) = 10\,x^5 - 9\,x^4 - 50\,x^3 + 142\,x^2 - 199\,x + 88.$$

2. Над полем $\mathbb{Z}_3$:

$$(2x^3 + x + 2)(2x^4 + x^3 + x^2 + 2) = x^7 + 2\,x^6 + x^5 + x^3 + 2\,x^4 + 2\,x + 2\,x^2 + 1$$

3. В кільці $\mathbb{Z}_6$ добуток $2 \cdot 3$ дорівнює нулю. Тому застосовувати теорему 1 для многочленів на цим кільцем не маємо права. Наведемо приклад, коли добуток двох многочленів над кільцем $\mathbb{Z}_6$ має менший степінь, ніж сума степенів множників:

$$(2x^2 + 5x + 4)(3x^3 + 2x + 5) = 3\,x^4 + 4\,x^3 + 2\,x^2 + 3\,x + 2.$$

Теорема 1.5 *Степінь суми двох многочленів або дорівнює більшому із степенів доданків, або менше нього.*

Доведення. Твердження теореми випливає з того, що для многочленів $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ в сумі многочленів $h(x) = f(x) + g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$ коефіцієнт при $k > n \geq m$ буде $c_k = 0$.

■

Приклади.
1. Над полем $\mathbb{Z} : (5x^2 - 7x + 11) + (2x^3 + x^2 - 13x + 8) = 2\,x^3 + 6\,x^2 - 20\,x + 19$.
2. Над полем $\mathbb{Z}_3 : (2x^3 + x + 2) + (2x^4 + x^3 + x^2 + 2) = 2\,x^4 + x^2 + x + 1$.

В наведених прикладах степінь суми дорівнює більшому із степенів доданків. Але коли степені доданків однакові, тоді старші коефіцієнти можуть скоротитися. Наприклад:

$$f = 3x^2 - 3,\ \deg f = 2,\ g = -3x^2 + x - 7,\ \deg g = 2,\ f + g = x - 10,\ \deg(f + g) = 1.$$

1.4 Ділення многочлена на многочлен з остачею

Ділення многочленів завжди розглядають тоді, коли кільце коефіцієнтів є полем. Тому завжди добуток ненульових коефіцієнтів відрізняється від нуля, завжди степінь добутку дорівнює сумі степенів множників.

Визначення 1.5 *Нехай задані два многочлени $f(x)$ і $g(x)$, причому $g(x) \neq 0$. Розділити $f(x)$ на $g(x)$ з остачею означає знайти два многочлени $q(x)$ (його називають часткою від ділення $f(x)$ на $g(x)$) і $r(x)$ (його називають остачею від ділення $f(x)$ на $g(x)$), які задовольняють дві умови*

- $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$;
- $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Визначення ділення з остачею в кільці поліномів над полем коректне, тобто справді поліноми над полем можна ділити з остачею і до того ж єдиним чином. Точніше, правильною є наступна теорема.

Теорема 1.6 *Якщо $g(x)$ — ненульовий поліном, то для будь-якого полінома $f(x)$ існують два поліноми $q(x)$ і $r(x)$, для яких виконуються дві умови*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \tag{4}$$

$$\deg r(x) < \deg g(x). \tag{5}$$

Поліноми $q(x)$ і $r(x)$,що визначаються умовами (4), (5), єдині, тобто коли для деяких поліномів $q_1(x)$ і $r_1(x)$ також

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), \quad \deg r_1(x) < \deg g(x), \tag{6}$$

тоді $q(x) = q_1(x), \quad r(x) = r_1(x)$.

Доведення. Спочатку доводимо існування поліномів $q(x)$ і $r(x)$, які задовольняють умову (4). Доводимо конструктивно, тобто вказуємо їх: $q(x) = 0, r(x) = f(x)$.

Далі серед многочленів $q(x)$ і $r(x)$, які задовольняють умову (4), вибираємо таку пару, в якій степінь $\deg r(x)$ найменший. Така пара існує, тому що степені це натуральні числа, нуль або $-\infty$. Якщо існує нульовий многочлен $r(x)$ (його степінь за домовленістю дорівнює $-\infty$), то вибираємо саме цей поліном, якщо ж нульового многочлена немає, то степені є непорожньою підмножиною розширеного натурального ряду (натуральні числа з нулем), а така непорожня множина має найменший елемент (за принципом найменшого числа).

Таким чином ми обгрунтували, що можливо вибрати пару поліномів $q(x)$ і $r(x)$, у яких степінь многочлена $r(x)$ найменша (серед тих, що задовольняють умову (4)). От ми таку пару і вибрали.

Далі методом від протилежного доводимо, що так вибрана пара $q(x)$ і $r(x)$ також задовольняє умову (5). Припускаємо, що умова (5) порушена, тобто $\deg r(x) = m \geq n = \deg g(x)$, і ми можемо записати

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0, \quad r(x) = b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0,$$

$a_n \neq 0, b_m \neq 0, m \geq n$.

Тоді, з одного боку, многочлен

$$r_1(x) = r(x) - g(x) \cdot \frac{b_m}{a_n} \cdot x^{m-n}$$

має степінь менший, ніж $r(x)$, а з другого боку, він із многочленом $q_1(x) = q(x) + \frac{b_m}{a_n} \cdot x^{m-n}$ задовольняє умову $f(x) = g(x) q_1(x) + r_1(x)$. Ми одержали суперечність із умовою вибору: $r(x)$ повинен був мати найменший степінь, а ми знайшли многочлен з меншим степенем.

Ми закінчили доведення того, що многочлени $q(x)$ і $r(x)$, які задовольняють умови (4), (5), існують.

Переходимо до доведення того, що такі поліноми єдині. Доводимо методом від протилежного. Отже припускаємо, що є дві пари поліномів q, q_1, r, r_1, які задовольняють умови (4), (5), (6). З цих умов одержуємо рівняння

$$g(x) \cdot (q(x) - q_1(x)) = r_1(x) - r(x). \tag{7}$$

Оскільки ми ділимо виключно на ненульові многочлени і, відповідно, $g(x) \neq 0$, то будь-яка із нерівностей $q \neq q_1, r \neq r_1$ призводить до того, що степінь лівої частини рівняння (7) строго більше степеня правої частини рівняння. Ми використали теореми про степінь добутку та степінь суми двох поліномів.

■

Приклад. Розділити многочлен $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ на многочлен $g(x) = 3x^2 + 6x$ з остачею.

Ділимо старший член многочлена $f(x)$ на старший член $g(x)$, одержуємо $\frac{1}{3}x$. Різниця $f_1(x) = f(x) - \frac{1}{3}x \cdot g(x) = x^2 - 1$ має степінь 2, менший за $\deg f(x)$. Далі ділимо старший член многочлена $f_1(x)$ на старший член $g(x)$, одержуємо $\frac{1}{3}$. Різниця $f_2(x) = f_1(x) - \frac{1}{3} \cdot g(x) = -2x - 1$ має степінь 1, менший за $\deg f(x)$. Оскільки $\deg f_2 < \deg g$, процес ділення припиняємо і переходимо до оформлення результату:

$$f - \frac{1}{3}x \cdot g = f_2 \Rightarrow f = \frac{1}{3}xg + f_2; \quad f_2 = \frac{1}{3}g + (-2x-1) \Rightarrow f = g \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) + (-2x-1).$$

Відповідь: часткою від ділення f на g є $q(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, а остачею є $r(x) = -2x - 1$.

Процес ділення часто записують у вигляді таблиці, що подібна до таблиці "ділення натуральних чисел у стовпчик". Запишемо "у стовпчик" проведене ділення f на g:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + 3x^2 + 0x - 1 & 3x^2 + 6x \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 + 2x^2} & \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\
\qquad\quad x^2 + 0x & \\
\qquad\quad \underline{x^2 + 2x} & \\
\qquad\qquad -2x - 1 &
\end{array}$$

В пакеті символьних обчислень Maple є команди, що дозволяють знайти частку і остачу від ділення одного многочлена на другий.

Команда

```
> rem(f,g,‘q‘);
```

виводить на екран остачу від ділення многочлена f на многочлен g і зберігає під іменем q частку від ділення f на g.

Команда

```
> quo(f,g,‘r‘);
```

виводить на екран частку від ділення многочлена f на многочлен g і зберігає під іменем r остачу від ділення f на g.

Визначення 1.6 *Коли остача дорівнює нулю, тоді кажуть, що многочлен f ділиться на многочлен g, або многочлен g є дільником многочлена f.*

Визначення 1.7 *Якщо многочлен неможливо розкласти у добуток двох многочленів так, щоб обидва множники не були константами, тоді такий многочлен називають нерозкладним (незвідним).*

1.5 Схема Горнера.

При діленні многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0$ степеня n на $(x-c)$ одержуємо частку $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$ степеня $(n-1)$ і остачу $r = b_n$. Ділення в стовпчик показує, що коефіцієнти $b_i, \ i = 0, 1, 2, \ldots, n$ обчислюються регулярним чином (згідно одного правила):

$$b_0 = a_0, \quad b_{i+1} = a_{i+1} + b_i \cdot c, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{8}$$

Якщо ділення многочлена $f(x)$ на $(x-c)$ відбувається з використанням таблички

	a_0	a_1	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
c	b_0	b_1	$\ldots$	b_{n-1}	$b_n = r$

в якій числа $b_i, \quad 0 \leq i \leq n$ обчислюються за допомогою формул (8), то кажуть, що ділення відбулося за схемою Горнера.

Покажемо на прикладі, як відбувається ділення за схемою Горнера. Нехай потрібно розділити многочлен $f(x) = 5x^6 - 11x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 + x + 2$ на $(x-2)$. Заповнюємо таблицю

	5	−11	2	3	−6	1	2
2	5	−1	0	3	0	1	4

За табличкою складаємо відповідь:

$$f = (x-2)(5x^5 - x^4 + 3x^2 + 1) + 4$$

або

$$q = 5x^5 - x^4 + 3x^2 + 1, \qquad r = 4.$$

Вправа. Розділити f на $x - c$.

1. $f = -2\,x^5 - 10\,x^4 - 8\,x^3 + 9\,x^2 + 46\,x + 47$, $c = -4$. Відповідь: $q = -2x^4 - 2x^3 + 9x + 10$, $r = 7$.

2. $f = -2\,x^5 - 12\,x^4 - 10\,x^3 + 9\,x^2 + 55\,x + 57$, $c = -5$. Відповідь: $q = -2x^4 - 2x^3 + 9x + 10$, $r = 7$.

3. $f = 3\,x^5 - 5\,x^4 + 2\,x^3 + 9\,x^2 + x - 7$, $c = 1$. Відповідь: $q = 3x^4 - 2x^3 + 9x + 10$, $r = 3$.

4. $f = 3\,x^6 - 9\,x^5 - 2\,x^4 + 6\,x^3 - 9\,x^2 + 37\,x - 29$, $c = 3$. Відповідь: $q = 3x^5 - 2x^3 - 9x + 10$, $r = 1$.

5. $f = -2\,x^5 - x^4 - 3\,ix^4 + 11\,ix - 2\,ix^3 + 2\,x^3 + ix^5 + 9\,x^2 + 3\,x - 2\,ix^2 - 3 + 13\,i$, $c = 1 - i$. Відповідь: $q = (-2+i)x^4 - 2x^3 + (9-2i)x + 10$, $r = 7 + 3i$.

Розкладення за степенями $(x - c)$.

Нехай задано многочлен f і двочлен $(x-c)$. Розділимо f на $(x-c)$ і одержимо частку f_1 і остачу r_0. Далі розділимо f_1 на $(x-c)$ і одержимо частку f_2 і остачу

r_1. Знову розділимо f_2 на $(x-c)$ і одержимо частку f_3 і остачу r_2. Продовжимо цей процес, наскільки він можливий. Таким чином маємо записи

$$f = f_0 = (x-c)f_1 + r_0, \quad f_1 = (x-c)f_2 + r_1, \quad f_2 = (x-c)f_3 + r_2, \quad \ldots$$

Підставивши значення f_{i+1} в f_i для $i = 0, 1, 2, \ldots$ одержимо запис

$$f = r_0 + r_1(x-c) + r_2(x-c)^2 + r_3(x-c)^3 + \ldots \tag{9}$$

Представлення многочлена у вигляді (9) називають розкладенням f за степенями $(x-c)$.

Звичайно у практичному використанні ділення на $(x-c)$ здійснюється за допомогою схеми Горнера і кілька схем об'єднуються для зручності в одну таблицю. Пояснимо сказане прикладом. Нехай потрібно розкласти многочлен

$$f(x) = 3\,x^4 - 28\,x^3 + 96\,x^2 - 133\,x + 66$$

за степенями $(x-2)$.

Заповнюємо відповідну таблицю

	3	-28	96	-133	66
2	3	-22	52	-29	$8 = r_0$
2	3	-16	20	$11 = r_1$	
2	3	-10	$0 = r_2$		
2	3	$-4 = r_3$			
2	$3 = r_4$				

За таблицею пишемо відповідь

$$f(x) = 3(x-2)^4 - 4(x-2)^3 + 11(x-2) + 8.$$

Подібне розкладення зручне, коли розглядається дріб, знаменником якого є степінь двочлена.

Вправа. Розкласти f за степенями $(x-c)$.

1. $f = -2\,x^4 - 20\,x^3 - 72\,x^2 - 101\,x - 34$, $c = -2$. Відповідь: $f = -2(x+2)^4 - 4(x+2)^3 + 11(x+2) + 8$.

2. $f = x^3 + 12\,x^2 + 49\,x + 76$, $c = -4$. Відповідь: $f = (x+4)^3 + (x+4) + 8$

3. $f = x^5 + 5\,x^4 + 10\,x^3 + 10\,x^2 + 6\,x + 10$, $c = -1$. Відповідь: $f = (x+1)^5 + (x+1) + 8$.

4. $f = -2\,x^4 - 8\,ix^3 + 12\,x^2 + 8\,ix + 6 + 15\,i - 4\,x^3 - 12\,ix^2 + 23\,x$, $c = -i$.
   Відповідь: $f = -2(x+i)^4 - 4(x+i)^3 + 11(x+i) + 8$.

5. $f = 4\,x^3 - ix^3 - 21\,x^2 + 18\,ix^2 + 35\,x - 58\,ix - 10 + 59\,i$, $c = 2 - i$.
   Відповідь: $f = (4-i)(x+i-2)^3 + (11-i)(x+i-2) + 8$.

Розкладення на прості дроби.

Розкладення за степенями $(x-c)$ використовують в задачах розкладення на прості дроби дробу вигляду

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{(x-c)^p}.$$

Розглянемо більш складний випадок.

Приклад. Розкласти на прості дроби над полями $\mathbb{C}$ та $\mathbb{R}$:

$$\frac{2x-6}{(x-1)^2(x^2-2x+5)}.$$

Розкладаємо знаменник на прості множники над полем $\mathbb{C}$ та розкладаємо на прості дроби з невідомими коефіцієнтами:

$$\frac{2x-6}{(x-1)^2(x-1+2i)(x-1-2i)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-1+2i} + \frac{D}{x-1-2i}.$$

Домножимо цю рівність на $(x-1)^2$, отримаємо:

$$\frac{2x-6}{(x-1+2i)(x-1-2i)} = A + \frac{B(x-1)^2}{x-1} + \frac{C(x-1)^2}{x-1+2i} + \frac{D(x-1)^2}{x-1-2i}.$$

Підставимо в цю рівність $x=1$ та отримаємо:

$$A = \frac{2-6}{1-2+5} = -1.$$

Це так званий *метод пальців*: ми закриваємо в лівій частині скобку, яка співпадає зі знаменником при невідомому коефіцієнті, та підставляємо корінь знаменника в ліву частину, яка залишилась. За допомогою цього метода ми можемо знайти коефіцієнти A, C, D. Коефіцієнт B так знайти не можливо. Підставимо в нашу рівність знайдене $A=-1$:

$$\frac{2x-6}{(x-1)^2(x^2-2x+5)} = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-1+2i} + \frac{D}{x-1-2i},$$

$$\frac{2x-6}{(x-1)^2(x^2-2x+5)} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-1+2i} + \frac{D}{x-1-2i}.$$

Зведемо до спільного знаменника ліву частину

$$\frac{2x-6+x^2-2x+5}{(x-1)^2(x^2-2x+5)} = \frac{x^2-1}{(x-1)^2(x^2-2x+5)} = \frac{x+1}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Таким чином, маємо рівність:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{x+1}{(x-1)(x-1+2i)(x-1-2i)} =$$

$$= \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-1+2i} + \frac{D}{x-1-2i}.$$

Тепер всі коефіцієнти ми можемо знайти "методом пальців":

Закриваємо $(x-1)$, та підставляємо $x = 1$:

$$B = \frac{2}{1-2+5} = \frac{1}{2}.$$

Закриваємо $(x-1+2i)$, та підставляємо $x = 1-2i$:

$$C = \frac{2-2i}{(-2i)(-4i)} = \frac{2-2i}{-8} = \frac{-1+i}{4}.$$

Закриваємо $(x-1-2i)$, та підставляємо $x = 1+2i$:

$$D = \frac{2+2i}{2i \cdot 4i} = \frac{2+2i}{-8} = \frac{-1-i}{4}.$$

Отже, маємо розкладення над полем $\mathbb{C}$:

$$\frac{2x-6}{(x-1)^2(x^2-2x+5)} = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{-1+i}{4(x-1+2i)} + \frac{-1-i}{4(x-1-2i)}.$$

Для того, щоб отримати розкладання над полем $\mathbb{R}$ додамо два останні доданки:

$$\frac{-1+i}{4(x-1+2i)} + \frac{-1-i}{4(x-1-2i)} = \frac{(-1+i)(x-1-2i)+(-1-i)(x-1+2i)}{4(x^2-2x+5)} =$$

$$= \frac{-(x-1)+i(x-1)+2i+2-(x-1)-i(x-1)-2i+2}{4(x^2-2x+5)} = \frac{-x+3}{2(x^2-2x+5)}.$$

Отже, маємо розкладення над полем $\mathbb{R}$:

$$\frac{2x-6}{(x-1)^2(x^2-2x+5)} = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{-x+3}{2(x^2-2x+5)}.$$

1.6 Поліноміальні функції, корені многочлена

Уникнемо точного визначення, що таке функція — це невдячна робота. Будемо користуватися інтуїтивним розумінням функції. Але дві властивості функцій ми відзначимо:

- функція ставить у відповідність числу x число y. При цьому число x називають аргументом, а y значенням функції на x;
- якщо є дві функції, які кожному аргументу ставлять у відповідність одне й те ж число, то ці дві функції збігаються — це одна і та ж функція.

Якихось ускладнень в зв'язку з відсутністю точного визначення функції у нас не виникне у зв'язку з тим, що ми будемо використовувати досить прості функції в досить простих ситуаціях, для яких інтуїтивного розуміння, відпрацьованого в школі, досить.

Визначення 1.8 *Нехай R — комутативне кільце з одиницею. Функцію $f : R \to R$ назвемо поліноміальною, якщо існує поліном $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ над R такий, що значення $f(c)$ для кожного $c \in R$ обчислюється за допомогою формули*

$$f(c) = \sum_{i=0}^{n} a_i c^i,$$

тобто підставляючи значення $c \in R$ в многочлен.

Таким чином, кожний поліном задає поліноміальну функцію. Якщо розглядаються поліноми над нескінченним полем, то поліноміальна функція задається єдиним поліномом. І в такому випадку між поліномами і поліноміальними функціями існує природна, всім зрозуміла (як кажуть, канонічна) взаємно однозначна відповідність. Ця канонічна взаємно однозначна відповідність дозволяє не звертати увагу на те, з чим ми маємо справу в якомусь конкретному випадку — з поліномом чи з поліноміальною функцією.

Якщо ж поле скінченне, то різні поліноми можуть задавати одну і ту ж поліноміальну функцію. Так над полем $\mathbb{Z}_2$ многочлени $1 + x + x^2$ і $1 + x^2 + x^4$ задать одну і ту ж функцію, що при всіх значеннях змінної приймає значення 1.

В практичній роботі звичайно не переймаються гризотою щодо точного визначення поліномів і поліноміальних функцій. Поліном і задану ним функцію позначають одним і тим же символом. При цьому здоровий глузд і мовне оточення точно вказують, про що власне йдеться в даному конкретному випадку і непорозумінь не виникає.

Цим шляхом підемо і ми.

Формальні степеневі ряди також задають функції, коли існує домовленість про те, як розуміти значення

$$f(c) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i c^i.$$

Так в будь-якому кільці R вважається, що

$$f(0) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 0^i = a_0.$$

Над полем дійсних чисел

$$f(c) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i c^i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i c^i.$$

Підставляти в ряд якесь ненульове значення змінної потрібно вкрай обережно. Прикладом неприємностей, які можуть виникнути під час підставляння, є наступний приклад.

Приклад. Для рядів

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots, \qquad g(x) = 1 - x, \qquad h(x) = 1$$

виконується рівність $f(x) \cdot g(x) = h(x)$. А підставляючи замість x число 2 маємо $g(2) = -1$, $h(2) = 1$, $f(2)$ не існує.

Теорема 1.7 (Теорема Безу) *При діленні многочлена $f(x)$ на двочлен $(x - c)$ остачею буде $f(c)$.*

Кожен многочлен задає поліноміальну функцію, тому є зрозумілим запис $f(c)$ — це значення відповідної поліноміальної функції в точці c.

Доведення. Оскільки $\deg(x-c) = 1$, степенем остачі є 0 або $-\infty$, тобто остача є числом. Отже маємо

$$f(x) = (x - c) \cdot q(x) + r, \quad r = \text{const}, \quad f(c) = (c - c)q(c) + r, \quad r = f(c).$$

Теорема доведена.

■

1.7 Корені многочленів

Визначення 1.9 *Число $x_0 \in R$ (із кільця, звідки беруться коефіцієнти полінома) називається коренем полінома $f(x)$, якщо $f(x_0) = 0$.*

Для прикладу, число 3 є коренем многочлена $x^3 - 27$, а число 2 не є коренем цього многочлена.

Теорема 1.8 (умова подільності многочлена на $x - c$) *Многочлен має число c коренем тоді і тільки тоді, коли цей многочлен ділиться на $(x - c)$.*

Доведення. Теорема (1.8) є прямим наслідком теореми Безу.

■

Визначення 1.10 *Число $c \in R$ є коренем кратності k, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ многочлена $f(x)$, якщо многочлен ділиться на $(x - c)^k$ і не ділиться на $(x - c)^{k+1}$.*

З теореми (1.8) випливає, що число $c \in R$ є коренем кратності k многочлена $f(x)$ тоді і тільки тоді, коли для деякого многочлена $f_1(x)$ можна записати

$$f(x) = f_1(x) \cdot (x - c)^k, \qquad f_1(c) \neq 0.$$

Наслідком теореми (1.8) є наступна теорема.

Теорема 1.9 (про кількість коренів многочлена) *Многочлен $n-$го степеня $(n > 0,)$ над кільцем без дільників нуля має n або менше коренів із врахуванням кратності, тобто якщо $x_1, x_2, \ldots, x_p$ — всі різні корені, і, відповідно, $k_1, k_2, \ldots, k_p$ їх кратності, то $k_1 + k_2 + \ldots + k_p \leq n$.*

Доведення. Теорему можна довести методом повної математичної індукції.

База індукції. Розглянемо многочлен першого степеня $ax + b$, $a \neq 0$. Цей многочлен не може мати два різні корені $x_1 \neq x_2$ тому що

$$ax_1 + b = ax_2 + b = 0 \Rightarrow a(x_1 - x_2) = 0.$$

А в нашому кільці добуток двох ненульових елементів a та $x_1 - x_2$ (за домовленістю кільце не має дільників нуля) не може дорівнювати нулю. Також не може мати корінь більшої кратності ніж 1, тому що многочлен першого степеня не може ділитися на многочлен більш високого степеня.

Індуктивне припущення. Припустимо, нам відомо, що многочлен $(n-1)$-го степеня $n \geq 2$ має не більше ніж $n - 1$ корінь.

Індуктивний перехід. Розглянемо многочлен $f(x)$ степеня n $(n \geq 2)$ Якщо многочлен $f(x)$ не має коренів, то для нього теорема виконується: $0 < n$. У випадку, коли многочлен $f(x)$ має корінь c, цей многочлен ділиться на $(x - c)$ (згідно теореми 1.8)

$$f(x) = (x - c)g(x), \quad \deg g(x) = n - 1.$$

В кільці, над яким ми розглядаємо многочлени, дільників нуля немає, тобто добуток двох ненульових чисел знову є ненульовим числом. Тому кожен корінь многочлена $f(x)$ дорівнює c або є коренем многочлена $g(x)$. Тому кількість коренів многочлена $f(x)$ на одиницю більша від кількості коренів многочлена $g(x)$. Згідно індуктивного припущення кількість коренів многочлена $g(x)$ не перевищує $n - 1$. Тому кількість коренів многочлена $f(x)$ не перевищує n.

$\blacksquare$

Приклад. В кільці $\mathbb{Z}_6$ є дільники нуля — в цьому кільці $2 \cdot 3 = 0$. Для многочлена $f(x) = x^2 + 3x + 2$ другого степеня над цим кільцем теорема не виконується. Цей многочлен має чотири корені: $1, 2, 4, 5$, оскільки $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2) = (x + 4)(x + 5)$.

Наслідком теореми 1.9 є

Теорема 1.10 *Якщо відомо, що многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, $n \geq 0$ над кільцем без дільників нуля приймає значення нуль при $n+1$ різних значеннях змінної, то це нульовий многочлен, тобто всі його коефіцієнти дорівнюють нулю.*

Доведення. Дійсно, нехай $f(x) \neq 0$, $0 \leq \deg f \leq n$. Якщо $\deg f = 0$, $f = a_0 \neq 0$, то маємо суперечність з тим, що цей многочлен має корінь. Якщо ж $\deg f > 0$, то за теоремою 1.9 цей многочлен має k коренів

$$0 \leq k \leq \deg f \leq n < n+1,$$

що суперечить умові.

$\blacksquare$

Теорема 1.11 (про канонічний ізоморфізм) *Якщо два многочлени*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n, \quad (n \geq 0)$$

над нескінченним кільцем без дільників нуля приймають одне і те ж значення при всіх значеннях змінної (тобто задають одну і ту ж поліноміальну функцію) то $a_i = b_i$ при всіх $i = 0, 1, 2, \ldots n$.

Доведення. Для доведення досить розглянути різницю $f - g$ і застосувати теорему 1.9.

$\blacksquare$

Слово *"канонічний"* означає природний, єдиний, всім зрозумілий. Слово *"ізоморфізм"* означає взаємно однозначну відповідність із узгодженням операцій і відношень. Отже, теорема 1.11 показує, що природне задання многочленом функції встановлює взаємно однозначну відповідність між поліномами і поліноміальними функціями у випадку, коли кільце коефіцієнтів нескінченне і не має дільників нуля. Поля не мають дільників нуля. Тому між поліномами і поліноміальними функціями над нескінченними полями є канонічний ізоморфізм, який дозволяє мало звертати увагу на те, що наразі розглядається — поліном чи поліноміальна функція.

В полі, в якому сума двох, трьох і більшої кількості одиниць не дорівнює нулю, правильна наступна теорема.

Теорема 1.12 *Якщо c є коренем многочлена $f(x)$ кратності $k > 0$, то c є коренем многочлена $f'(x)$ (похідної від многочлена) кратності $k - 1$.*

Доведення. Нехай $f(x) = f_1(x) \cdot (x - c)^k, \quad f_1(c) \neq 0, \quad k > 0$. Тоді

$$f'(x) = f_1'(x)(x-c)^k + f_1(x)k(x-c)^{k-1} = (x-c)^{k-1}\left(f_1'(x)(x-c) + kf_1(x)\right),$$

тобто

$$f'(x) = (x-c)^{k-1} \cdot f_2(x), \quad f_2(x) = f_1'(x)(x-c) + kf_1(x), \quad f_2(c) = k \cdot f_1(c) \neq 0.$$

Останні записи означають, що c є коренем многочлена $f'(x)$ кратності $k - 1$.

$\blacksquare$

До поліномів над кільцем $\mathbb{Z}_6$ теорему застосовувати не можна. Наприклад, в цьому кільці похідна від полінома $x^6 - 1$ є нульовим многочленом.

Теорема 1.13 (Теорема Вієта) *Нехай многочлен* $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ *має корені* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *(кожен корінь перерахований стільки разів, яка його кратність), тобто*

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Тоді

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{1 \le i \le n} x_i &= -a_1, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \sum_{1 \le i < j \le n} x_ix_j &= a_2 \\ &\ldots \\ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} &= (-1)^k a_k \\ &\ldots \\ x_1x_2\ldots x_n &= (-1)^n a_n \end{aligned}$$

Доведення. Теорема доводиться простим розкриванням дужок.

∎

Для легшої уяви про розкривання дужок можна здійснити це в конкретному випадку — коли $n = 3$. Нехай

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Тоді

$$(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 =$$
$$= x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

Прирівнюючи відповідні коефіцієнти одержуємо рівності

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + x_3), \qquad a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \qquad a_3 = -x_1x_2x_3.$$

Теорема Вієта дозволяє сказати, що сума коренів многочлена $x^4 - 17x^3 - 18x^2 + 19x + 2$ дорівнює 17, добуток усіх коренів дорівнює 2.

В розумінні теореми Вієта є певні тонкощі. По-перше, корені многочлена (якщо вони взагалі існують!) можуть не належати кільцю коефіцієнтів. По-друге, можуть виникнути проблеми із старшим коефіцієнтом — в умові теореми Вієта він дорівнює одиниці, а в загальному випадку невідомо, чи є у нього обернений. Звичайний випадок, коли використовується теорема Вієта, — многочлени розглядаються над полем комплексних чисел. Там всі ненульові числа мають обернені. Тому на старший коефіцієнт многочлен можна поділити. І до того ж, в цьому полі всі многочлени ненульового степеня мають корені.

Приклади.

1. Для многочлена $f(x) = 3x^2 - x + 8$ будуємо многочлен $g(x) = \dfrac{1}{3}f(x) = x^2 - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}$, який має ті ж корені і з тією ж кратністю, що і многочлен f, і вже до многочлена g над полем комплексних чисел застосовуємо теорему Вієта: сума коренів дорівнює $\dfrac{1}{3}$, добуток коренів дорівнює $\dfrac{8}{3}$. Ми обчислили і суму коренів і добуток коренів многочлена, хоч вони і не існуюють в полі дійсних чисел. Корені у цього многочлена лежать в полі комплексних чисел.

2. Розглянемо многочлен $f(x) = 2x^2 + x + 1$ над полем $\mathbb{Z}_3$. В полі $\mathbb{Z}_3$ число 2 має обернене — воно само до себе обернене. Тому можемо домножити многочлен f на 2 і одержати новий многочлен $g(x) = x^2 + 2x + 2$ з тими ж коренями. І далі застосовуємо теорему Вієта уже до многочлена g: сума коренів дорівнює 1 (-2 – це протилежне до 2 число в полі $\mathbb{Z}_3$, тобто 1), а добуток дорівнює 2. Ми знову обчислили суму і добуток коренів, але в полі коефіцієнтів цих коренів немає — вони знаходяться в певному розширенні поля коефіцієнтів.

3. Розглянемо многочлен $f(x) = 2x^2 + x + 1$ над кільцем $\mathbb{Z}_6$. В цьому кільці $2 \cdot 3 = 0$, тому число 2 не має оберненого. Отже до заданого многочлена взагалі неможливо застосувати теорему Вієта.

Теорема 1.14 (Основна теорема вищої алгебри) *Кожен многочлен ненульового степеня над полем комплексних чисел має корінь.*

Теорему даємо без доведення.

2 Раціональні, дійсні і комплексні корені

2.1 Дійсні корені

В пропонованому розділі під числами розуміємо дійсні числа. Будемо шукати ті властивості коефіцієнтів многочлена, які дозволяють щось сказати про кількість дійсних коренів у многочлена з дійсними коефіцієнтами чи то на всій дійсній осі, чи на певному інтервалі.

Визначення 2.1 *Нехай задана послідовність $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $(n > 1)$ ненульових дійсних чисел. Будемо казати, що при переході від i-го елемента послідовності до $(i+1)$-го $(1 \leq i < n)$ відбувається зміна знака (маємо знакозміну), коли $a_i \cdot a_{i+1} < 0$. Вважаємо, що кількість змін знака (знакозмін) в одноелементній послідовності дорівнює нулю.*

Для прикладу, послідовність $2, -3, -4, 1$ має дві зміни знака: при переході від першого до другого і при переході від третього до четвертого елементів послідовності. При підраховуванні кількості знакозмін можна виписувати не самі елементи послідовності, а тільки знаки. Так замість послідовності $2, -3, -4, 1$ можна писати $+--+$.

Вкажемо досить очевидні властивості кількості знакозмін в послідовності.

1. Якщо змінити всі знаки елементів послідовності на протилежні, то кількість знакозмін не зміниться.

2. Якщо перед першим елементом послідовності дописати одне ненульове число, то кількість знакозмін або лишиться попередньою, або збільшиться на одну.

3. Якщо між двома елементами послідовності вписати число, то в новій послідовності кількість знакозмін буде або такою ж, як і в початковій, або збільшиться на 2.

4. Якщо змінити знак першого елемента послідовності, то кількіть знакозмін або зільшиться на 1 або зменшиться на 1.

5. Якщо перший елемент послідовності має той же знак, що і останній, то кількість знакозмін у цій послідовності парна.

Нехай $f(x) = a_0x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_n$ — многочлен, у якого $a_0, a_n \neq 0$. Позначимо через $L(f)$ кількість змін знака в послідовності його ненульових коефіцієнтів. Для визначеності можна вважати, що коефіцієнти пишуться починаючи із старшого члена. Так, якщо $f(x) = 11x^5 - 3x - 2$, то маємо послідовність $11, -3, -2$ його ненульових коефіцієнтів, послідовність знаків $+, -, -$. В цій послідовності є одна знакозміна. Тому $L(f) = 1$.

Теорема 2.1 (правило знаків Декарта) *Кількість додатних коренів многочлена $f(x)$, (де $f(0) \neq 0$) дорівнює $L(f)$, або менше $L(f)$ на парне число.*

Вище ми відмітили, що $L(f) = 1$ для многочлена $f(x) = 11x^5 - 3x - 2$. Тому за правилом знаків Декарта кількість додатніх коренів цього многочлена дорівнює 1, тобто многочлен має єдиний додатний корінь.

Теорема доводиться з використанням наступної леми.

Лема 2.1 *Нехай $f(x)$ — многочлен , $f(0) \neq 0$ і $c > 0$. Тоді*

$$L((x - c) \cdot f(x)) = L(f(x)) + 2s + 1$$

для деякого цілого невід'ємного s.

Доведення. Доведення проводимо індукцією за степенем многочлена $f(x)$.

База індукції. Нехай $\deg f = 0, f(x) = a \neq 0$. Тоді

$$L(f) = 0, \qquad (x - c) \cdot f(x) = ax - ca, \qquad L((x - c)f(x)) = 1.$$

Перевірка бази індукції закінчена.

Індуктивне припущення. Нехай відомо, що лема правильна для всіх многочленів $f(x)$ таких, що $\deg f(x) < n$ при деякому $n \geq 1$.

Індуктивний прехід. Доведемо, що лема істинна для всіх многочленів $f(x)$ таких, що $\deg f(x) = n$.

Візьмемо многочлен $f(x),\ \deg f(x) = n,\ f(0) \neq 0$,

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0, \quad a_0 \neq 0,$$

і $c > 0$. Оскільки $L(f) = L(-f)$, (див. властивість 1 кількості знакозмін), то можна вважати $a_n > 0$.

Представимо многочлен $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = a_n x^n + g(x), \quad \deg g(x) = k < n, \quad k \geq 0, \quad g(x) = a_k x^k + \ldots + a_0.$$

За індуктивним припущенням, для деякого невід'ємного цілого s

$$L((x-c)g(x)) = L(g(x)) + 2s + 1.$$

В прийнятих позначеннях

$$(x-c)f(x) = a_n x^{n+1} - c a_n x^n + (x-c)g(x). \qquad (10)$$

Лишилося розглянути різні можливості для старших коефіцієнтів многочлена $(x-c)f(x)$.

Перший випадок: $k < n-1$. Нехай $a_k > 0$. Тоді $L(f) = L(g)$ і рівність (10) показує, що

$$L((x-c)f(x)) = 2 + L((x-c)g(x)) = 2 + 2s + 1 + L(g(x)) = L(f(x) + 2(s+1) + 1,$$

і лема правильна. Нехай $a_k < 0$. Тоді $L(f) = L(g) + 1$ і рівність (10) показує, що

$$L((x-c)f(x)) = 1 + L((x-c)g(x)) = 1 + 2s + 1 + L(g(x)) = L(f(x) + 2s + 1,$$

і лема правильна.

Другий випадок: $k = n-1$,

$$(x-c)f(x) = a_n x^{n+1} + (a_{n-1} - a_n c)x^n + h(x), \quad 0 \leq \deg(h(x)) \leq n-1.$$

Припустимо, що $a_{n-1} - a_n c > 0$. Тоді обов'язково $a_{n-1} > 0$,

$$L(f) = L(g), \quad L((x-c)f) = L((x-c)g) = L(g) + 2s + 1 = L(f) + 2s + 1,$$

і лема доведена.

Припустимо, що $a_{n-1} - a_n c = 0$. Тоді знову обов'язково $a_{n-1} > 0$ і можна записати

$$(x-c)f = a_n x^{n+1} + h(x), \quad (x-c)g = a_{n-1}x^n + h(x),$$

$$L(f) = L(g), \quad L((x-c)f) = L((x-c)g)L(g) + 2s + 1 = L(f) + 2s + 1,$$

і лема доведена.

Насамкінець, припустимо, що $a_{n-1} - a_n c < 0$. Знову позначимо

$$(x-c)f(x) = a_n x^{n+1} + (a_{n-1} - a_n c)x^n + h(x), \quad 0 \leq \deg(h(x)) \leq n-1,$$

і, відповідно,

$$(x-c)g(x) = a_{n-1}x^n + h(x).$$

Старший коефіцієнт многочлена $h(x)$ позначимо через b. Складемо табличку можливих відношень між кількостями знакозмін при різних можливих знаках a_{n-1} та b

a_{n-1}	b	$L((x-c)f)$	$L((x-c)g)$	$L((x-c)f)$
$+$	$+$	$L(h)+2$	$L(h)$	$L(h)+2 = L((x-c)g)+2 = L(g)+2s+1+2 = L(f)+2s+3$
$+$	$-$	$L(h)+1$	$L(h)+1$	$L(h)+1 = L((x-c)g) = L(g)+2s+1$
$-$	$+$	$L(h)+2$	$L(h)+1$	$L(h)+2 = L((x-c)g)+1 = L(g)+2s+1+1 = L(f)+2s+1$
$-$	$-$	$L(h)+1$	$L(h)$	$L(h)+1 = L((x-c)g)+1 = L(g)+2s+1+1 = L(f)+2s+1$

Останній стовпчик таблиці показує, що $L((x-c)f) - L(f)$ — непарне натуральне число. Тому у всіх розглянених випадках лема істинна.

Доведення леми закінчене.

■

Доведення. Переходимо, власне, до доведення теореми про правило знаків Декарта для заданого многочлена $f(x)$, $f(0) \neq 0$. Нехай $c_1, c_2, \dots c_k, \quad k \geq 0$ всі додатні корені многочлена $f(x)$, тобто,

$$f(x) = (x-c_1)(x-c_2) \cdot \ldots \cdot (x-c_k)g(x),$$

і многочлен $g(x)$ не має додатніх коренів. Сташий коефіцієнт і вільний член многочлена $g(x)$ мають однакові знаки — в протилежному випадку із міркувань неперервності випливало б, що цей многочлен має додатний корінь. Із того, що сташий коефіцієнт і вільний член многочлена $g(x)$ мають однакові знаки, випливає, що $L(g)$ є парним числом.

Далі розглядаємо послідовність многочленів

$$f_0(x) = g(x),\ f_1(x) = (x-c_1)f_0(x), f_2(x) = (x-c_2)f_1(x), \dots,$$
$$f_k(x) = (x-c_k)f_{k-1}(x) = f(x).$$

У відповідності з лемою, кількість знакозмін у кожному наступному многочлені на непарну кількість більша, ніж у попередньому. Тому кількість знакозмін у многочлена $f(x)$ або дорівнює кількості коренів, або на парну кількість більша від кількості коренів.

■

Правило знаків Декарта дозволяє оцінити і кількість від'ємних коренів многочлена $f(x)$ — просто потрібно розглянути многочлен $g(x) = f(-x)$ оскільки додатні корені многочлена $g(x)$ є від'ємними коренями многочлена $f(x)$. Для прикладу, коли $f(x) = -3x^7 + 2x^6 - x^5 + 1$, тоді $g(x) = f(-x) = 3x^7 + 2x^6 + x^5 + 1$ $L(g) = 0$ і многочлен $f(x)$ не має від'ємних коренів.

Вправа. Оцінити кількість додатних коренів многочлена.

1. $f(x) = -7x^{13} + x^10 + x^9 - 5x^5 + x^4 + x^3 - 15.$

   Відповідь: додатних коренів 4, 2 або 0.

2. $f(x) = -6x^{13} + x^9 - 5x^5 - x^4 - x^3 - 15.$

   Відповідь: додатних коренів 2 або 0.

3. $f(x) = -7x^{13} + x^10 + x^9 - 5x^5 + x^4 + x^3 + 15.$

   Відповідь: додатних коренів 3 або 1.

2.2 Раціональні корені

В цьому розділі маємо справу з многочленами над полем раціональних чисел.

Теорема 2.2 *Припустимо, що нескоротне раціональне число*

$$x_0 = \frac{p}{q}, \quad p \neq 0,\ q > 0$$

є коренем многочлена

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

який задовольняє наступні умови

$$a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \ldots n, \quad a_0, a_n \neq 0, \quad \text{НСД } (a_0, a_1, \ldots, a_n) = 1.$$

Тоді p є дільником a_n, а q є дільником a_0.

Доведення. Припустимо, що $x_0 = \frac{p}{q}$ є коренем многочлена $f(x)$. Дріб $\frac{p}{q}$ вважається нескоротним, тобто НСД $(p, q) = 1$.

Таким чином

$$f(x_0) = 0, \quad \frac{a_0 p^n}{q^n} + \frac{a_1 p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1} p}{q} + a_n = 0$$

і

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0. \tag{11}$$

Почнемо з доведення того, що q є дільником a_0.

В рівнянні (11) лишимо зліва лише перший доданок, а решту перенесемо направо, і винесемо справа за дужки множник q. Одержимо рівняння

$$a_0 p^n = -q \left(a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + \ldots + a_{n-1} p q^{n-2} + a_n q^{n-1} \right). \tag{12}$$

Рівняння (12) показує, що добуток $a_0 p^n$ ділиться на q. Будемо користуватися, як відомим, тим фактом, що коли добуток $x \cdot y$ двох натуральних чисел x, y ділиться на третє натуральне число z, і один із множників (скажемо y) взаємно простий із цим третім числом z (тобто НСД(y, z)=1), тоді другий множник (в нашому випадку x) ділиться на z. З цього факту, а також із того, що НСД $(p, q) =$ НСД $(p^n, q) = 1$, одержуємо потрібне: a_0 ділиться на q.

Для доведення того, що a_n ділиться на p, в рівнянні (11) останній доданок зліва перенесемо направо, і зліва виносимо за дужки p. Таким чином доводиться, що добуток $a_n q^n$ ділиться на p. Тепер із взаємної простоти чисел p, q випливає, що a_n ділиться на p.

■

Безпосереднім наслідком із теореми 2.2 є

Наслідок 2.1 *Якщо старший коефіцієнт многочлена з цілими коефіцієнтами дорівнює 1, то всі раціональні корені цього многочлена є цілими.*

Наведе приклади застосування теореми про раціональні корені.

Приклади.

1. Припустимо, що нам потрібно знайти раціональні корені рівняння

$$x^7 - 8\,x^5 - 8\,x^3 + 6\,x^6 - 8\,x^4 - 8\,x^2 - 9\,x - 14 = 0. \qquad (13)$$

За наслідом із теореми 2.2 всі раціональні корені цього рівняння є цілими числами. До того ж вони є цілими дільниками числа 14. Дільниками числа 14 є $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$. По черзі підставляємо у многочлен (13) відмічені числа і одержуємо, що цілими коренями цього многочлена будуть $-1, 2$ та -7.

2. Нехай нам потрібно довести, що многочлен $x^4 + 5x^3 + x^2 + 2x + 1$ не має раціональних коренів. Доведення проводимо з використанням теореми 2.2: якби цей многочлен мав раціональні корені, то вони належали б множині $\{-1, 1\}$. Підставляючи в наш многочлен послідовно 1 і -1 переконуємося, що ці числа не є його коренями. Тому многочлен взагалі не має раціональних коренів.

Вправа. Знайти раціональні корені многочленів.

1. $f(x) = 6\,x^7 + 71\,x^6 + 202\,x^5 - 6\,x^4 + 9\,x^3 + 9\,x^2 - 37\,x - 14;$
2. $f(x) = 9\,x^7 + 90\,x^6 + 233\,x^5 + 53\,x^4 + 73\,x^3 + 38\,x^2 - 11\,x - 5;$
3. $f(x) = 4\,x^7 + 3\,x^5 + 17\,x^4 + 27\,x^3 + 12\,x^6 + 7\,x^2 - 7\,x - 3;$
4. $f(x) = x^4 + 6\,x^3 - 4\,x^2 - 54\,x - 45;$
5. $f(x) = x^4 + 8\,x^3 + 14\,x^2 - 8\,x - 15;$
6. $f(x) = \frac{1}{2}\,x^5 + \frac{23}{6}\,x^4 + \frac{41}{6}\,x^3 + \frac{11}{6}\,x^2 + 2\,x - 15.$

2.3 Многочлени малих степенів

В цьому розілі розглядаємо многочлени першого, другого, третього та четвертого степенів (так звані многочлени малих степенів) над полем комплексних чисел.

Оскільки многочлени першого степеня $ax + b$ і многочлени другого степеня $ax^2 + bx + c$ розглядаються в школі, то зосередимо увагу лише на многочленах третього та четвертого степенів. Корені таких многочленів множна представити у вигляді виразів, що використовують лише знаки додавання, віднімання, множення, ділення та добування коренів. Кажуть, що ці многочлени можна розв'язати *"в радикалах"*. Можна довести, що для загального многочлена 5-го степеня таких виразів не існує.

Формула Кардано.

Нехай потрібно розв'язати кубічне рівняння

$$x^3 + ax^2 + cx + d = 0. \tag{14}$$

Заміна $x = y - \dfrac{a}{3}$

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + c\left(y - \frac{a}{3}\right) + d =$$

$$= y^3 + \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + c\right)y + \left(-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - c\frac{a}{3} + d\right) = 0,$$

приводить до кубічного рівняння, в якому коефіцієнт при квадраті змінної дорівнює 0. Тому формулу для коренів кубічного рівняння можна шукати лише у випадку, коли коефіцієнт при квадраті змінної дорівнює 0. Отже, маємо рівняння

$$x^3 + px + q = 0. \tag{15}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді суми

$$x = \alpha + \beta. \tag{16}$$

Підставляємо цю суму у рівняння (15) і одержуємо результат:

$$(\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0, \qquad \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 + p\alpha + p\beta + q = 0. \tag{17}$$

Групуємо доданки:

$$\alpha^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta^3 + p(\alpha\beta) + q = 0,$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha\beta + p)(\alpha + \beta) + q = 0. \tag{18}$$

Рівняння (18) при умові $3\alpha\beta + p = 0$ має вигляд

$$\alpha^3 + \beta^3 + q = 0.$$

Таким чином, рівняння (15) зводиться до системи рівнянь

$$\alpha^3 + \beta^3 = -q, \quad 3\alpha\beta = -p \tag{19}$$

Піднесемо ліву і праву частини рівняння $3\alpha\beta = -p$ до третього степеня (при цьому можуть з'явитися зайві корені), позначимо

$$z_1 = \alpha^3, \quad z_2 = \beta^3,$$

$$z_1 + z_2 = -q, \quad z_1 z_2 = -\frac{p^3}{27}. \tag{20}$$

Числа z_1, z_2 шукаємо як корені рівняння

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Маємо

$$z_1 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$z_2 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Тепер для α, β маємо вирази:

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

і

$$x = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{21}$$

Формула (21) і є формулою Кардано для коренів кубічного рівняння (15). Під коренем квадратним у формулі Кардано розуміється одне, довільно вибране значення квадратного кореня (в полі комплексних чисел їх два). А значення кубічних коренів (в полі комплексних чисел їх три) узгоджується із умовою

$$\alpha\beta = -\frac{p}{3}.$$

Для прикладу застосування формули Кардано розглянемо рівняння

$$x^3 - 12x - 8 = 0.$$

Тут

$$p = -12, \quad q = -8, \quad \frac{q}{2} = -4, \quad \frac{q^2}{4} = 16, \quad \frac{p^3}{27} = -64,$$

і відповідно,

$$x = \sqrt[3]{4 + \sqrt{-48}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{-48}}.$$

Для кореня квадратного вибираємо значення $\sqrt{-48} = 4i\sqrt{3}$. Комплексні числа $4 \pm 4i\sqrt{3}$ переводимо у тригонометричну форму

$$4 + 4i\sqrt{3} = 8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), \qquad 4 - 4i\sqrt{3} = 8\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right).$$

Обчислюємо можливі значення кубічних коренів

$$\alpha \in \left\{2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right), 2\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right), 2\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right)\right\},$$

$$\beta \in \left\{2\left(\cos\frac{-\pi}{9} + i\sin\frac{-\pi}{9}\right), 2\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right), 2\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right)\right\},$$

Оскільки

$$2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)2\left(\cos\frac{-\pi}{9} + i\sin\frac{-\pi}{9}\right) =$$

$$2\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right)2\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right) =$$

$$2\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right)2\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right) = 4,$$

то

$$x_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right) + 2\left(\cos\frac{-\pi}{9} + i\sin\frac{-\pi}{9}\right) = 4\cos\frac{\pi}{9},$$

$$x_2 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right) + 2\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right) = 4\cos\frac{7\pi}{9},$$

$$x_3 = 2\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right) + 2\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right) = 4\cos\frac{13\pi}{9}.$$

Метод Ферарі.

Пропонується один метод розв'язування рівнянь четвертого степеня над полем комплексних чисел. Розповідаючи про цей метод, поряд із загальним многочленом будемо, для прикладу, брати конкретний многочлен.

Отже, нехай маємо рівняння 4-го степеня:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \qquad x^4 - 3x^3 + 4x^2 + x - 15 = 0. \tag{22}$$

План розв'язування такий: вводимо в рівняння новий параметр так, щоб ліва частина рівняння (многочлен 4-го степеня) записався як різниця квадратів. Різницю квадратів розкладаємо в добуток, а далі кожен множник (а це квадратні тричлени) прирівнюємо до нуля і розв'язуємо квадратні рівняння як це робилося в школі.

Перший крок в методі Ферарі полягає в тому, що вводимо новий параметр λ наступним чином

$$x^4 + ax^3 = (x^2 + \frac{a}{2}x + \lambda)^2 - 2x^2\lambda - \frac{a^2}{4}x^2 - \lambda^2 - a\lambda x,$$

$$x^4 - 3x^3 = (x^2 - \frac{3}{2}x + \lambda)^2 - 2x^2\lambda - \frac{9}{4}x^2 - \lambda^2 + 3x\lambda.$$

Тепер переписуємо рівняння (22) із введеним параметром:

$$(x^2 + \frac{a}{2}x + \lambda)^2 - 2x^2\lambda - \frac{a^2}{4}x^2 - \lambda^2 - a\lambda x + bx^2 + cx + d = 0,$$

$$(x^2 - \frac{3}{2}x + \lambda)^2 - 2x^2\lambda - \frac{9}{4}x^2 - \lambda^2 + 3x\lambda + 4x^2 + x - 15 = 0.$$

Останні рівняння записуємо у вигляді

$$(x^2 + \frac{a}{2}x + \lambda)^2 - f_1 = 0, \quad (x^2 - \frac{3}{2}x + \lambda)^2 - f_1 = 0, \tag{23}$$

де f_1 — квадратний тричлен:

$$f_1 = (2\lambda - b + \frac{a^2}{4})x^2 + (a\lambda - c)x + (\lambda^2 - d), \quad f_1 = (2\lambda - \frac{7}{4})x^2 + (-1 - 3\lambda)x + (\lambda^2 + 15).$$

Перший крок — штучне введення параметра λ, зроблений.

Другий крок — підбір параметра λ, при якому квадратний тричлен f_1 є квадратом двочлена. Тричлен f_1 є квадратом двочлена тоді і тільки тоді, коли він має два однакові корені, тобто коли його дискримінант дорівнює нулю. З цієї умови — рівність нулю дискримінанта, і шукаємо λ.

Обчилюємо дискримінант f_1:

$$D(f_1) = (a\lambda - c)^2 - 4\left(2\lambda - b + \frac{a^2}{4}\right)(\lambda^2 - d) =$$

$$= -8\,\lambda^3 + 4\,b\lambda^2 + (-2\,ac + 8\,d)\,\lambda + (c^2 - 4\,bd + a^2 d),$$

$$D(f_1) = (1 + 3\,\lambda)^2 + 4\,\left(\lambda^2 + 15\right)\left(\frac{7}{4} - 2\,\lambda\right) = 106 - 114\,\lambda + 16\,\lambda^2 - 8\,\lambda^3.$$

Шукаємо корінь $\lambda = \lambda_0$ рівняння $D(f_1) = 0$.

В цьому місці потрібно зробити два зауваження.

Перше зауваження. Корінь шукається лише один, який-небудь, будь-яким способом. Корінь можна підбирати, вгадувати чи користуватися якоюсь формулою.

Друге зауваження. Рівняння для знаходження кореня $\lambda = \lambda_0$ є рівнянням третього степеня, для розв'язків якого є формули Кардано. Отже λ_0 можна записати у вигляді виразу, в якому використані лише знаки додавання, віднімання, множення, ділення, та добування кореня. Коротше про цей факт кажуть словами *"рівняння розв'язується в радикалах"*.

Для нашого конкретного випадку корінь $\lambda_0 = 1$ рівняння

$$106 - 114\,\lambda + 16\,\lambda^2 - 8\,\lambda^3 = 0$$

просто вгадали.

Третій крок в методі Ферарі: робимо заміну введеного параметра λ на знайдене значення λ_0 і переписуємо задане рівняння у вигляді різниці квадратів.

$$f_1 = (\alpha x + \beta)^2\,, \quad f_1 = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 16 = \left(\frac{1}{2}x - 4\right)^2;$$

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \lambda_0\right)^2 - (\alpha x + \beta)^2 = 0, \quad \left(x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x - 4\right)^2 = 0.$$

І останній, четвертий крок в методі Ферарі є остаточним розв'язуванням: різницю квадратів розкладаємо у добуток, множники (вони є квадратними тричленами) прирівнюємо до нуля, і розв'язуємо два квадратні тричлени, які над полем комплексних чисел дадуть чотири корені початкового рівняння. Виконаємо цю роботу.

$$\left((x^2 + \frac{a}{2}x + \lambda_0) - (\alpha x + \beta)\right)\left((x^2 + \frac{a}{2}x + \lambda_0) + (\alpha x + \beta)\right) = 0,$$
$$\left((x^2 + \frac{a}{2}x + \lambda_0) - (\alpha x + \beta)\right) = 0, \quad \left((x^2 + \frac{a}{2}x + \lambda_0) + (\alpha x + \beta)\right) = 0,$$
$$x^2 + (\frac{a}{2} - \alpha)x + (\lambda_0 - \beta) = 0, \quad x^2 + (\frac{a}{2} + \alpha)x + (\lambda_0 + \beta) = 0.$$

Одержані квадратні рівняння в загальному вигляді не розв'язують і формулу для коренів рівняння четвертого степеня не виписують. Тому немає формул Ферарі, а є тільки метод Ферарі.

В нашому конкретному прикладі розв'язування доведемо до кінця і корені знайдемо явно.

$$\left((x^2 - \frac{3}{2}x + 1) - (\frac{1}{2}x - 4)\right)\left((x^2 - \frac{3}{2}x + 1) + (\frac{1}{2}x - 4)\right) = 0,$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x + 1 - \frac{1}{2}x + 4 = 0 \quad x^2 - \frac{3}{2}x + 1 + \frac{1}{2}x - 4 = 0,$$

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \quad x^2 - x - 3 = 0.$$

Перше рівняння дає два комплексні корені $1 + 2i, 1 - 2i$, а друге дає два дійсні корені $\dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}, \dfrac{1 - \sqrt{13}}{2}$. Таким чином, задане початкове рівння розв'язане, його коренями є числа

$$1 + 2i, \quad 1 - 2i, \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

2.4 Кількість дійсних коренів на інтервалі

В цьому розділі досліджуються многочлени додатного степеня з дійсними коефіцієнтами, які не мають кратних коренів — кратність кожного кореня дорівнює 1 (якщо корені є). Для таких многочленів доведемо теорему Штурма, яка дозволяє обчислити кількість коренів могочлена на заданому інтервалі.

Визначення 2.2 *Послідовністю Штурма для заданого многочлена $f(x)$ $\deg f > 0$ без кратних коренів називають послідовність многочленів*

$$f_0,\ f_1, \dots,\ f_n$$

що побудована наступним чином:

$f_0(x) = f(x)$;

$f_1(x) = f'(x)$ — похідна від многочлена $f(x)$;

для $i = 2, 3, \dots n$ многочлен f_i є остачею з протилежним знаком від ділення $f_{i-2}(x)$ на $f_{i-1}(x)$, тобто

$$f_{i-2}(x) = f_{i-1}(x)q(x) - f_i(x), \quad \deg f_i < \deg f_{i-1}. \tag{24}$$

Многочлени в послідовності Штурма відрізняються від послідовності остач в алгоритмі Евкліда, що застосований до многочлена та його похідної, лише знаками, — це видно із рівності (24). Ми знаємо, що кратність кореня многочлена на одиницю більша від кратності кореня похідної. І коли кратних коренів у многочлена немає, то він взаємно простий з похідною — найбільший спільний дільник многочлена і похідної дорівнює сталій. Звідси випливає

перша властивість послідовності Штурма: останній многочлен в послідовності Штурма є сталою.

Якби два сусідні многочлени в послідовності Штурма мали спільний корінь, то ці два многочлени мали б найбільший спільний дільник ненульового степеня і останній многочлен у цій послідовності не був би сталою. Тому маємо ще одну властивість послідовності Штурма.

Друга властивість послідовності Штурма: якщо число є коренем одного многочлена в послідовності Штурма, то це число не є коренем сусідніх многочленів.

Із рівності (24) випливає ще одна властивість послідовності Штурма.

Третя властивість послідовності Штурма: якщо число a є коренем многочлена $f_i(x)$ в послідовності Штурма при деякому $i = 1, 2, \dots, n-1$, то сусідні многочлени в цій точці приймають різні знаки, тобто $f_{i-1}(a) \cdot f_{i+1}(a) < 0$.

Ще одним визначенням, потрібним для формулювання теореми, є поняття кількості знакозмін у послідовності Штурма в заданій точці.

Визначення 2.3 *Нехай $f(x)$ — многочлен додатного степеня без кратних коренів і $f_0(x),\ f_1(x), \dots,\ f_n(x)$ — його послідовність Штурма. Скажемо, що два сусідні многочлени f_i, f_{i+1}, $0 \le i \le n-1$ утворюють знакозміну в точці a, якщо*

$f_i(a) \cdot f_{i+1}(a) < 0$. *Кількість усіх знакозмін в послідовності Штурма в точці a позначимо через $L(a)$.*

Теорема 2.3 (Штурм) *Нехай $f(x)$ — дійсний многочлен додатного степеня без кратних коренів, $a < b$ — два дійсні числа, $f(a), f(b) \neq 0$. Кількість коренів k многочлена $f(x)$ на інтервалі (a, b) дорівнює кількості втрат знакозмін в послідовності Штурма при переході від a до b, тобто*

$$k = L(a) - L(b).$$

Доведення. Уявляємо, що точка a, в якій обчислюється кількість знакозмін у послідовності Штурма, рухається від лівого кінця інтервала до правого. Якщо протягом руху жоден многочлен у послідовності Штурма не мав a коренем, то всі многочлени зберегли свій знак і кількість знакозмін лишилася незмінною. Останній многочлен в послідовності Штурма є сталою, коренів не має, точка не походить через корінь останнього многочлена. Якщо точка проходить корінь середнього многочлена (не першого і не останнього), то кількість закозмін лишиться попередньою, оскільки сусідні многочлени в околі кореня мають різні знаки.

Для доведення теореми лишилося переконатися, що при переході через корінь першого (заданого) многочлена послідовність Штурма втрачає одну знакозміну. Дійсно, коли многочлен зростав в точці a, що є його коренем, то він був від'ємним до кореня і додатним після кореня, а похідна весь час була додатною. Отже в такому випадку при переході через a послідовність Штурма втратила одну знакозміну. Якщо ж многочлен мав в точці a від'ємну похідну, то перед коренем він був додатним, а після кореня — від'ємним. Отже знову втратилася одна знакозміна. Оскільки многочлен не має кратних коренів, то многочлен і його похідна не можуть в одній і тій же точці дорівнювати 0.

Теорема доведена.

■

Приклади.

1. Нехай $f(x) = x - 4$. Тоді послідовність Штурма складається із двох многочленів $f_0(x) = x - 4$ і $f_1(x) = 1$. в точці 0 і в точці 3 маємо одні знакозміну, а в точці 5 маємо 0 закозмін. Тому на інтервалі (0,3) многочлен коренів не має, а на інтервалі (3,5) многочлен має один корінь.

2. Розглянемо складніший приклад. Нехай

$$f(x) = -2 + 4\,x + 31\,x^2 - 80\,x^3 + 50\,x^4 - 12\,x^5 + x^6,$$

і відповідно, $f_0 = f$.

Тоді

$$f'(x) = 4 + 62\,x - 240\,x^2 + 200\,x^3 - 60\,x^4 + 6\,x^5,$$

і, відповідно, $f_1 = f'$.

Оскільки

$$f = f' \cdot \left(\frac{x}{6} - \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3} + 24\,x - \frac{178}{3}\,x^2 + \frac{80}{3}\,x^3 - \frac{10}{3}\,x^4,$$

то

$$f_2 = -(-\frac{2}{3} + 24\,x - \frac{178}{3}\,x^2 + \frac{80}{3}\,x^3 - \frac{10}{3}\,x^4) = \frac{2}{3} - 24\,x + \frac{178}{3}\,x^2 - \frac{80}{3}\,x^3 + \frac{10}{3}\,x^4.$$

Оскільки

$$f_1 = f_2 \cdot (\frac{9}{5}\,x - \frac{18}{5}) + \frac{32}{5} - \frac{128}{5}\,x + \frac{84}{5}\,x^2 - \frac{14}{5}\,x^3,$$

то

$$f_3 = -\left(\frac{32}{5} - \frac{128}{5}\,x + \frac{84}{5}\,x^2 - \frac{14}{5}\,x^3\right) = -\frac{32}{5} + \frac{128}{5}\,x - \frac{84}{5}\,x^2 + \frac{14}{5}\,x^3.$$

Оскільки

$$f_2 = f_3 \cdot \left(\frac{25}{21}\,x - \frac{50}{21}\right) + \left(-\frac{102}{7} + \frac{312}{7}\,x - \frac{78}{7}\,x^2\right),$$

то

$$f_4 = -\left(-\frac{102}{7} + \frac{312}{7}\,x - \frac{78}{7}\,x^2\right) = \frac{102}{7} - \frac{312}{7}\,x + \frac{78}{7}\,x^2.$$

Оскільки

$$f_3 = f_4 \cdot \left(\frac{49}{195}\,x - \frac{98}{195}\right) + \left(\frac{12}{13} - \frac{6}{13}\,x\right),$$

то

$$f_5 = -\left(\frac{12}{13} - \frac{6}{13}\,x\right) = -\frac{12}{13} + \frac{6}{13}\,x.$$

Оскільки

$$f_4 = f_5 \cdot \left(\frac{169}{7}\,x - \frac{338}{7}\right) - 30,$$

то

$$f_6 = 30.$$

Побудова послідовності Штурма, тобто многочленів $f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5,\ f_6$ закінчена.

Тепер обчислимо значення одержаних многочленів при вибраних значеннях змінної (з точністю до 2 знаків після коми) і підрахуємо кількість знакозмін L в цих точках. Результати роботи зведемо в таблицю

a	$f_0(a)$	$f_1(a)$	$f_2(a)$	$f_3(a)$	$f_4(a)$	$f_5(a)$	$f_6(a)$	$L(a)$
-1	168	-564	114	$\frac{-258}{5}$	$\frac{492}{7}$	$-\frac{18}{13}$	30	6
0	-2	4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{32}{5}$	$\frac{102}{7}$	$-\frac{12}{13}$	30	5
4.5	17.26	115.93	31.04	23.75	39.64	1.15	30	0

Побудована таблиця показує, що $L(-1) - L(0) = 1$ (кажемо, що при переході від -1 до 0 втрачається одна знакозміна). Отже многочлен за теоремою Штурма на інтервалі $(-1, 0)$ має рівно один корінь. Різниця $L(0) - L(4.5) = 5$ показує, що многочлен має 5 коренів на інтервалі $(0,\ 4.5)$.

2.5 Найбільший спільний дільник

Ненульові поліноми $f(x), g(x)$ над полем мають найбільший спільний дільник НСД (f, g) і найменше спільне кратне НСК (f, g). За визначенням, НСД (f, g) це такий дільник поліномів $f,\ g$, який ділиться на всі інші. Потрібно вміти доводити існування і єдиність (з точністю до сталого множника) НСД (f, g).

Оскільки ділення многочленів з остачею розглядається лише для многочленів над полями, то і найбільший спільний дільник шукають лише для многочленів, чиї коефіцієнти лежать в полі.

Теорема 2.4 *Будь-які два ненульові многочлени над полем мають найбільший спільний дільник.*

Доведення. Нехай є два ненульові многочлени $f(x)$ і $g(x)$. Розглядаємо множину ненульових многочленів $d(x)$, які можна записати у вигляді

$$d = f \cdot M + g \cdot N, \tag{25}$$

Ця множина не порожня: в ній є ненульовий многочлен $f(x)$, оскільки його можна записати у вигляді $f(x) = f(x) \cdot 1 + g(x) \cdot 0$. В цій множині вибираємо многочлен найменшого степеня — він існує, оскільки степені є натуральними числами чи нулем, а в будь-якій непорожній підмножині натуральних чисел з нулем є найменше число (принцип найменшого числа). От оцей многочлен $d(x)$ і буде найбільшим спільним дільником. Для закінчення доведення нам потрібно довести дві речі:

- $d(x)$ є дільником і f і g ;
- $d(x)$ ділиться на будь-який інший дільник $\tilde{d}$ многочленів f та g.

Перше твердження доводимо методом від протилежного. Припустимо, що $d(x)$ не є спільним дільником f і g. Для визначеності будемо вважати, що d не є дільником f, тобто при діленні f на d з остачею

$$f = dq + r, \quad \deg r < \deg d$$

остача r не дорівнює нулю. В такому випадку

$$f = (fM + gN)q + r \Rightarrow r = f - fMq - gNq = f(1 - Mq) + g(-Nq),$$

тобто r має запис у вигляді (25) і має степінь менший, ніж d. А це суперечить припущенню, що d має найменш можливий степінь серед ненульових многочленів, які можуть бути записані у вигляді (25). Таким чином перше твердження доведене.

Переходимо до другого твердження. Нехай $\tilde{d}$ який-небудь інший спільний дільник многочленів f і g. Тоді для деяких многочленів f_1, g_1 можна записати $f = f_1\tilde{d},\ g = g_1\tilde{d}$. Тоді

$$d = \tilde{d}f_1M + \tilde{d}g_1N = \tilde{d}(f_1M + g_1N),$$

і $\tilde{d}$ є дільником многочлена d.

Існування найбільшого спільного дільника двох многочленів доведене.

■

Теорема 2.5 (про єдиність найбільшого спільного дільника) *Нехай є два найбільші спільні дільники d_1, d_2 многочленів f, g. Тоді кожен із них одержується із другого множенням на число.*

Доведення. Оскільки найбільший спільний дільник ділиться на всі дільники, то d_2 ділиться на d_1 і d_1 ділиться на d_2, тобто для деяких многочленів h_1, h_2

$$d_1 = d_2h_1, \quad d_2 = d_1h_2, \quad \deg d_1 = \deg d_2 + \deg h_1, \quad \deg d_2 = \deg d_1 + \deg h_2.$$

Нерівності $\deg d_1 \leq \deg d_2, \quad \deg d_2 \leq \deg d_1$ можуть виконуватися лише у випадку $\deg d_1 = \deg d_2, \quad \deg h_1 = \deg h_2 = 0$, коли кожен із найбільших спільних дільників одержується із другого множенням на число.

В такій ситуації кажуть, що *"найбільший спільний дільник двох многочленів єдиний з точністю до сталого множника"*.

■

Якщо не сказане інше (за недомовленістю), то найбільший спільний дільник двох многочленів старшим коефіцієнтом має одиницю.

Визначення 2.4 *Два ненульові многочлени називають взаємно простими, якщо їх найбільший спільний дільник є сталою (має нульовий степінь).*

Далі часто будемо користуватися наступною теоремою:

Теорема 2.6 *Найбільший спільний дільник d многочленів f, g можна записати у вигляді (25)*

$$d = f \cdot M + g \cdot N,$$

де многочлени M, N задовольняють умову

$$\deg M < \deg g, \qquad \deg N < \deg f. \tag{26}$$

Доведення. Те, що для найбільшого спільного дільника d існують многочлени M, N, які задовольняють умову (25), нам уже відомо із доведення теореми про існування найбільшого спільного дільника.

Доведемо, що існують такі многочлени M, N, які задовольняють умову (26). Беремо будь-які многочлени M, N, які задовольняють умову (25). Далі ділимо M на g і N f з остачею:

$$M = gq_1 + M_1, \quad \deg M_1 < \deg g, \quad N = fq_2 + N_1, \quad \deg N_1 < \deg f.$$

Тепер ми можемо записати

$$d = f(gq_1 + M_1) + g(fq_2 + N_1)$$

і

$$d - (fM_1 + gN_1) = fg(q_1 + q_2).$$

Якщо $d - (fM_1 + gN_1) \neq 0$, то ми маємо суперечність:

$$\deg(d - (fM_1 + gN_1)) < \deg f + \deg g, \quad \deg(fg(q_1 + q_2)) \geq \deg f + \deg g.$$

Отже

$$d - (fM_1 + gN_1) = 0, \qquad d = fM_1 + gN_1, \quad \deg M_1 < \deg g, \quad \deg N_1 < \deg f.$$

Доведення теореми закінчене.

■

Теорема про представлення НСД дозволяє переформулювати визначення взаємної простоти двох многочленів:

Визначення 2.5 *Два ненульові многочлени f, g взаємно прості тоді і тільки тоді, коли для деяких многочленів M, N можна записати рівність*

$$fM + gN = 1. \tag{27}$$

Теорема 2.7 *Якщо добуток двох многочленів ділиться на третій і один множник взаємно простий з третім многочленом, то другий множник ділиться на цей третій многочлен.*

Теорема про ділення добутку в символьному вигляді записується так:

Нехай f_1, f_2 — два многочлени, $g = f_1 f_2$ і многочлен g ділиться на многочлен h, тобто для деякого многочлена q_1 можна записати $g = hq_1$. У випадку, коли НСД$\,(f_1, h) = 1$, многочлен f_2 ділиться на h, тобто для деякого многочлена q_2 можна написати $f_2 = hq_2$.

Доведення. Нехай маємо многочлени f_1, f_2, g, h, q_1, для яких виконуються рівності

$$g = f_1 f_2, \quad g = hq_1, \quad \text{НСД}\,(f_1, h) = 1.$$

Використовуючи (27) можна для деяких многочленів $M,\ N$ записати рівність:

$$f_1M + hN = 1. \tag{28}$$

Домножимо (28) на f_2. Одержимо

$$f_1f_2M + hf_2N = f_2.$$

Звідси

$$gM + hf_2N = f_2, \qquad hq_1M + hf_2N = f_2, \qquad h(q_1M + f_2N) = f_2,$$

тобто $f_2 = hq_2$, де $q_2 = q_1M + f_2N$. Цим закінчується доведення того, що f_2 ділиться на h.

Теорема доведена.

■

Теорема 2.8 *Якщо многочлени f, g взаємно прості, тоді многочлени M, N, які задовольняють умову (26), єдині.*

Доведення. Нехай

$$1 = fM + gN = fM_1 + gN_1, \quad \deg M, \deg M_1 < \deg g, \quad \deg N, \deg N_1 < \deg f.$$

Тоді $f(M - M_1) = g(N_1 - N)$, і потрібно довести, що $M - M_1 = N_1 - N = 0$.

Дійсно, оскільки $g(N_1 - N)$ ділиться на f, і НСД(f, g)=1, то за теоремою про подільність добутку многочлен $N_1 - N$ повинен ділитися на f. А це неможливо, оскільки $\deg(N_1 - N) < \deg f$.

Теорема про єдиність представлення НСД доведена.

■

Метод невизначених коефіцієнтів

Теорема про єдиність представлення НСД дозволяє для заданих многочленів f, g шукати многочлени M, N, що задовольняють умові (27), так званим *"методом невизначених коефіцієнтів"*. Цей метод полягає в наступному. Для заданих многочленів

$$f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0, \qquad g = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m, \quad b_0 \neq 0,$$

многочлени M, N записують з невідомими коефіцієнтами

$$M = \alpha_0x^{m-1} + \alpha_1x^{m-2} + \ldots + \alpha_{m-1}, \quad N = \beta_0x^{n-1} + \beta_1x^{n-2} + \ldots + \beta_{n-1}.$$

Підставляємо $f,\ g,\ M,\ N$ в (27). Одержуємо

$$\begin{aligned}(a_0\alpha_0 + b_0\beta_0)x^{n+m-1} + (a_0\alpha_1 + a_1\alpha_0 + b_0\beta_1 + b_1\beta_0)x^{n+m-}) + \ldots +\\ + (a_{n-1}\alpha_0 + a_n\alpha_{m-2} + b_{m-1}\beta_{n-1} + b_m\beta_{n-2})x + (a_n\alpha_{m-1} + b_m\beta_{n-1}) =\\ = 0 \cdot x^{m+n-1} + 0 \cdot x^{m+n-2} + \ldots + 0 \cdot x + 1.\end{aligned} \tag{29}$$

Два многочлени збігаються тоді і тільки тоді, коли у них однакові коефіцієнти при однакових степенях змінної. Тому рівняння (29) рівносильне системі

$$\begin{aligned} a_0\alpha_0 + b_0\beta_0 &= 0, \\ a_0\alpha_1 + a_1\alpha_0 + b_0\beta_1 + b_1\beta_0 &= 0, \\ &\dots \\ a_{n-1}\alpha_0 + a_n\alpha_{m-2} + b_{m-1}\beta_{n-1} + b_m\beta_{n-2} &= 0, \\ a_n\alpha_{m-1} + b_m\beta_{n-1} &= 1. \end{aligned}$$

Визначник виписаної лінійної системи рівнянь з невідомими

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \beta_0, \beta_1, \dots \beta_{n-1}$$

називають *результантом* многочленів f, g і позначають $\mathrm{Res}(f, g)$. Результанту присвячується окремий розділ.

Покажемо, який вигляд все сказане має в конкретному числовому вигляді.

Приклад. Нехай $f = x^3 - 7x + 2$, $g = x^2 + 5x - 3$. Шукаємо невідомі многочлени $M = \alpha_0 x + \alpha_1$, $N = \beta_0 x^2 + \beta_1 x + \beta_2$, для яких виконується рівність $fM + gN = 1$. Для цього пишемо рівняння

$$(x^3 - 7x + 2)(\alpha_0 x + \alpha_1) + (x^2 + 5x - 3)(\beta_0 x^2 + \beta_1 x + \beta_2) - 1 = 0,$$

$$(\alpha_0 + \beta_0)x^4 + (\alpha_1 + 5\beta_0 + \beta_1)x^3 + (-7\alpha_0 - 3\beta_0 + 5\beta_1 + \beta_2)x^2 +$$
$$+(-7\alpha_1 + 2\alpha_0 + 5\beta_2 - 3\beta_1)x + (2\alpha_1 - 3\beta_2 - 1) = 0,$$

і систему рівнянь

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \beta_0 &= 0, \\ \alpha_1 + 5\beta_0 + \beta_1 &= 0, \\ -7\alpha_0 - 3\beta_0 + 5\beta_1 + \beta_2 &= 0, \\ -7\alpha_1 + 2\alpha_0 + 5\beta_2 - 3\beta_1 &= 0, \\ 2\alpha_1 - 3\beta_2 &= 1. \end{aligned}$$

Матрицею системи є

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & -7 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Визначник матриці A

$$\operatorname{Res}(f, g) = \det(A) = 211 \neq 0.$$

Оскільки визначник системи не нульовий, то система має єдиний розв'язок. Звідси випливає, що многочлени взаємно прості.

Розв'язуємо систему тим чи іншим способом. Одержуємо

$$\alpha_0 = -\frac{21}{211}, \quad \alpha_1 = -\frac{118}{211}, \quad \beta_0 = \frac{21}{211}, \quad \beta_1 = \frac{13}{211}, \quad \beta_2 = -\frac{149}{211}.$$

Задача розв'язана. Відповіддю є

$$M(x) = -\frac{21}{211}x - \frac{118}{211}, \qquad N(x) = \frac{21}{211}x^2 + \frac{13}{211}x - \frac{149}{211}.$$

Робимо перевірку:

$$\left(x^3 - 7\,x + 2\right)\left(-\frac{21}{211}\,x - \frac{118}{211}\right) + \left(x^2 + 5\,x - 3\right)\left(\frac{21}{211}\,x^2 + \frac{13}{211}\,x - \frac{149}{211}\right) = 1.$$

2.6 Знищення ірраціональності в знаменнику

Нехай $f(x), \deg f > 1$ — незвідний многочлен над полем F. І нехай α — його корінь в якомусь більшому, ніж поле коефіцієнтів F, полі $F_1, F_1 \supset F$ (наприклад, коефіцієнти многочлена раціональні числа, а корінь не раціональний). Таким чином, $f(\alpha) = 0$. Стверджуємо, що для будь-якого ненульового многочлена $g(x)$, $\deg f > \deg g$ над F можна підібрати многочлен $h(x)$ над F такий, що виконується рівність

$$\frac{1}{g(\alpha)} = h(\alpha). \tag{30}$$

Побудову многочлена $h(x)$ за заданими многочленами $f(x), g(x)$, який задовольняє рівності (30), називають *"знищенням ірраціональності в знаменнику"*.

Стандартний прийом знищення ірраціональності в знаменнику такий. Оскільки многочлен $f(x)$ незвідний, а многочлен $g(x)$ має степень менший, ніж $f(x)$, то многочлени f, g взаємно прості. Тому для них можна підібрати многочлени $M,\ N$, для яких виконується рівність $f(x)M(x) + g(x)N(x) = 1$. Підставивши α замість x і згадавши, що $f(\alpha) = 0$, маємо рівність

$$g(\alpha) \cdot N(\alpha) = 1.$$

Одержуємо відповідь: $h(x) = N(x)$.

Покажемо, як це робиться.

Приклад. Нехай α — якийсь корінь многочлена

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2,$$

тобто $f(\alpha) = 0$. Потрібно дріб $29/(\alpha+1)$ записати у вигляді многочлена від α, тобто знайти многочлен $N(\alpha)$ такий, що

$$\frac{29}{\alpha+1} = N(\alpha), \quad N(\alpha)(\alpha+1) = 29 \tag{31}$$

Нехай $g(x) = x+1$. На першому кроці записуємо два многочлени $M(x)$, $N(x)$, $\deg M(x) < \deg g(x) = 1$, $\deg N(x) < \deg f(x) = 4$ з невідомими коефіцієнтами:

$$N(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad M(x) = e.$$

На другому кроці записуємо рівність $f \cdot M + g \cdot N = 29$:

$$(x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2)e + (x+1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 29.$$

Розкриваємо дужки і прирівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях x в лівій і в правій частинах записаної рівності. Одержуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} e + a &= 0, \\ -8e + b + a &= 0, \\ 12e + c + b &= 0, \\ -6e + d + c &= 0, \\ 2e + d &= 29. \end{aligned} \tag{32}$$

Третім кроком розв'язуємо одержану систему рівнянь

$$a = -1,\ b = 9,\ c = -21,\ d = 27,\ e = 1.$$

Четвертим кроком завершуємо вправу: в тотожність $f(x) \cdot M(x) + g(x) \cdot N(x) = 29$ підставляємо замість x число α, при цьому пам'ятаємо, що $f(\alpha) = 0$. Одержуємо тотожності

$$(-\alpha^3 + 9\alpha^2 - 21\alpha + 27)(\alpha+1) = 29, \quad \frac{29}{\alpha+1} = -\alpha^3 + 9\alpha^2 - 21\alpha + 27.$$

Якщо при розв'язуванні системи (32) з'ясується, що ця система несумісна, то це означає, що даний многочлен $f(x)$ не є незвідним, він розкладається в добуток, скажемо, $f = f_1 \cdot f_2$, $\deg f_1 > 0$, $\deg f_2 > 0$, і число α є коренем одного із множників, скажемо, f_1. В такому випадку знищення ірраціональності можна продовжити, замінивши f на f_1. Тому при виконанні вправи ми не перевіряли незвідність многочлена f, яка гарантує сумісність системи (32).

Вправа. Знищити ірраціональнсть в знаменнику в наступних виразах. Число α — якийсь корінь многочлена $f(x) = x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$.

1. $\dfrac{132\alpha + 213}{a^2 - 7\alpha + 3}$.

   Відповідь: $\dfrac{142\alpha + 213}{a^2 - 7\alpha + 3} = 41\alpha^3 - 326\alpha^2 + 367\alpha - 119.$

2. $\dfrac{7\alpha-1}{\alpha^3-2}$.

Відповідь: $\dfrac{7\alpha-1}{\alpha^3-2}=-180\alpha^3+\dfrac{2427}{2}\alpha^2-\dfrac{1267}{2}\alpha+286.$

3. $\dfrac{7361}{5\alpha+3}$.

Відповідь: $\dfrac{7361}{5\alpha+3}=-125x^3+1075x^2-2145x+2037.$

4. $\dfrac{3\alpha+4}{\alpha^2}$.

Відповідь: $\dfrac{3\alpha+4}{\alpha^2}=-\dfrac{15}{2}\alpha^3+58\alpha^2-74\alpha+21.$

Ми розглянули випадок, коли в знаменнику дробу стоїть многочлен від кореня відомого нам многочлена. Далі розглянемо випадок, коли цей многочлен не відомий.

В простих випадках, наприклад в дробах

$$\frac{2\sqrt{2}-7}{3\sqrt{2}+9},\quad \frac{\sqrt[3]{4}}{1+\sqrt[3]{2}},$$

зрозуміло, коренем якого многочлена є ірраціональне число: число $\sqrt{2}$ є коренем многочлена x^2-2, а число $\sqrt[3]{2}$ є коренем многочлена x^3-2.

Покажемо, як в деяких випадках можна знайти многочлен, коренем якого є дане число.

Нехай нам дане число $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt{5}$. Шукаємо степені цього числа і пробуємо підібрати коефіцієнти так, щоб сума степенів числа з цими коефіцієнтами (фактично, многочлен від цього числа) дорівнювала нулю. Обчислюємо:

$$x^2=\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}\sqrt{5}+5,\quad x^3=2+3\sqrt[3]{4}\sqrt{5}+15\sqrt[3]{2}+5\sqrt{5},$$
$$x^4=2\,\sqrt[3]{2}+8\,\sqrt{5}+30\,\sqrt[3]{4}+20\,\sqrt[3]{2}\sqrt{5}+25,$$
$$x^5=2\,\sqrt[3]{4}+10\,\sqrt[3]{2}\sqrt{5}+100+50\,\sqrt[3]{4}\sqrt{5}+125\,\sqrt[3]{2}+25\,\sqrt{5},$$
$$x^6=129+12\,\sqrt[3]{4}\sqrt{5}+150\,\sqrt[3]{2}+200\,\sqrt{5}+375\,\sqrt[3]{4}+150\,\sqrt[3]{2}\sqrt{5}.$$

Записуємо рівність

$$x^6+y_1x^5+y_2x^4+y_3x^3+y_4x^2+y_5x+y_6=0, \tag{33}$$

і намагаємося підібрати коефіцієнти $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6$ так, щоб вона стала тотожністю. Для цього в рівності (33) підставляємо потрібні нам значення. Одержуємо нову рівність

$$129+12\,\sqrt[3]{4}\sqrt{5}+150\,\sqrt[3]{2}+200\,\sqrt{5}+375\,\sqrt[3]{4}+150\,\sqrt[3]{2}\sqrt{5}+$$
$$+y_1\left(2\,\sqrt[3]{4}+10\,\sqrt[3]{2}\sqrt{5}+100+50\,\sqrt[3]{4}\sqrt{5}+125\,\sqrt[3]{2}+25\,\sqrt{5}\right)+$$

$$+y_2\left(2\sqrt[3]{2}+8\sqrt{5}+30\sqrt[3]{4}+20\sqrt[3]{2}\sqrt{5}+25\right)+y_3\left(2+3\sqrt[3]{4}\sqrt{5}+15\sqrt[3]{2}+5\sqrt{5}\right)+$$
$$+y_4\left(\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}\sqrt{5}+5\right)+y_5\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt{5}\right)+y_6=0.$$

Розкриваємо дужки і групуємо доданки:

$$(129+100y_1+25y_2+2y_3+5y_4+y_6)+(150+125y_1+2y_2+15y_3+y_5)\sqrt[3]{2}+$$
$$+(150+125y_1+2y_2+15y_3+y_5)\sqrt[3]{4}+$$
$$+(200+25y_1+8y_2+5y_3+y_5)\sqrt{5}+(150+10y_1+20y_2+2y_4)\sqrt[3]{2}\sqrt{5}+$$
$$+(12+50y_1+3y_3)\sqrt[3]{4}\sqrt{5}.$$

Прирівнюємо вирази в дужках до нуля і одержуємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned}
129+y_1100+y_225+y_32+y_45+y_6=0,\\
150+y_1125+y_22+y_315+y_5=0,\\
+150+y_1125+y_22+y_315+y_5=0,\\
200+25y_1+8y_2+5y_3+y_5=0,\\
150+10y_1+20y_2+2y_4=0,\\
12+50y_1+3y_3=0.
\end{aligned}$$

Розв'зуємо створену систему рівнянь, одержуємо

$$y_1=0,\ y_2=-15,\ y_3=-4,\ y_4=75,\ y_5=-60,\ y_6=-121.$$

Таким чином, задане число є коренем многочлена

$$x^6-15x^4-4x^3+75x^2-60x-121.$$

2.7 Алгебраїчне та трансцендентне розширення поля

В попередньому розділі ми розглянули два випадки — коли число є коренем відомого многочлена, і коли число є коренем многочлена, але ми не знаємо, якого саме. В обох випадках мається на увазі, що ми знаємо, що таке число.

Але є щей й третій випадок, коли ми вводимо новий символ, називаємо цей символ числом, і вимагаємо (знову ж таки за визначенням), щоб цей символ був коренем незвідного многочлена. Так чинять при побудові поля комплексних чисел — ввводиться символ i, який за визначенням є коренем многочлена x^2+1. Поле комплексних чисел містить у собі поле дійсних чисел, тому його можна назвати розширенням поля дійсних чисел.

За цією схемою за допомогою будь-якого незвідного над заданим полем многочлена $f(x)$, $\deg f(x)\geq 2$ можна побудувати розширення поля. Для побудови нового поля вводимо новий символ i, який за визначенням є коренем многочлена

$f(x)$ тобто $f(i) = 0$. Елементами нового поля є многочлени $g(i)$, $\deg g < \deg f$. Додаються такі многочлени звичайним чином. При множенні многочленів враховується, що $f(i) = 0$. Тому будь-який многочлен від i дорівнює залишку від ділення цього многочлена на $f(i)$. Частка від ділення многочлена на многочлен знаходиться методом знищення ірраціональності в знаменнику. Так побудоване поле називають *алгебраїчним розширенням поля*, або розширенням за допомогою незвідного многочлена.

В розширеному за допомогою многочлена полі цей многочлен має корінь. Тому будь-який многочлен в певному розширенні поля коефіцієнтів має корінь.

Розширення полів має, крім теоретичного, також практичне значення — воно використовується в каналах зв'язку, при кодуванні та шифруванні.

Крім алгебраїчного розширення поля, можна будувати і трансцендентне розширення. Зупинимося на цьому питанні.

Ми маємо основне поле F, кільце $F[[x]]$ формальних степеневих рядів над полем F і кільце $F\,[x]$ многочленів над полем F.

Утворюємо формальні дроби

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \quad f(x),\ g(x) \in F\,[x]\,, \qquad g(x) \neq 0.$$

Вони формальні в тому розумінні, що це не функції, а просто позбавлені змісту вирази.

На множині формальних дробів визначаємо відношення еквівалентності ("=") наступним чином:

$$\frac{f}{g} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow fq = pg.$$

Оскільки добуток многочленів ми вміємо підраховувати, і знаємо, коли два многочлени рівні, то ми знаємо, коли два добутки fq та pg збігаються.

Нагадаємо, що відношення еквівалентності це рефлексивне, транзитивне і симетричне відношення. Всі ці властивості потрібно перевіряти. Для прикладу, перевірка рефлексивності відношення еквівалентності на множині формальних дробів проводиться так

$$fg = fg \Rightarrow \frac{f}{g} = \frac{f}{g}.$$

Симетричність і транзитивність перевіряються так же просто.

На множині формальних дробів вводимо операції додавання та множення наступним чином

$$\frac{f}{g} + \frac{p}{q} = \frac{fq + pg}{gq}, \qquad \frac{f}{g} \cdot \frac{p}{q} = \frac{fp}{gq}.$$

Теорема 2.9 *Введені операції додавання та множення дробів узгоджені із визначенням рівності дробів у тому розумінні, що*

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1}, \quad \frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} \ \Rightarrow \ \frac{f}{g} + \frac{p}{q} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{f}{g} \cdot \frac{p}{q} = \frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{p_1}{q_1}.$$

Доведення. Нехай

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1}, \quad \frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$$

тобто

$$fg_1 = f_1 g, \quad pq_1 = p_1 q.$$

Потрібно довести, що виконуються рівності

$$\frac{f}{g} + \frac{p}{q} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{f}{g} \cdot \frac{p}{q} = \frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{p_1}{q_1}.$$

Обчислюємо, за визначенням додавання дробів, суми

$$\frac{f}{g} + \frac{p}{q}, \qquad \frac{f_1}{g_1} + \frac{p_1}{q_1}$$

$$\frac{f}{g} + \frac{p}{q} = \frac{fq + pg}{gq}, \qquad \frac{f_1}{g_1} + \frac{p_1}{q_1} = \frac{f_1 q_1 + p_1 g_1}{g_1 q_1}.$$

Щоб довести рівність

$$\frac{fq + pg}{gq} = \frac{f_1 q_1 + p_1 g_1}{g_1 q_1},$$

потрібно перевірити рівність

$$(fq + pg)(g_1 q_1) = (f_1 q_1 + p_1 g_1)(gq),$$

тобто

$$fqg_1 q_1 + pgg_1 q_1 = f_1 q_1 gq + p_1 g_1 gq$$

А остання рівність випливає із відомих нам рівностей

$$fg_1 = f_1 g, \quad pq_1 = p_1 q.$$

Із цих рівностей випливає також рівність

$$fpg_1 q_1 = f_1 p_1 gq,$$

яка доводить рівність

$$\frac{f}{g} \cdot \frac{p}{q} = \frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{p_1}{q_1}.$$

■

Утворюємо нову множину $F(x)$, елементами якої є класи рівних дробів. На цій множині визначаються операції додавання та множення класів: щоб додати два класи чи перемножити їх потрібно взяти представника класу (один дріб із класу рівних) в кожному класі, виконати відповідну операцію над цими представниками, а потім взяти той клас, куди попав результат дії. Оцей новий клас і є результатом виконання дії. Наприклад, візьмемо два класи, один містить $\frac{1}{x}$, а другий містить $\frac{1+x}{x^2}$. Результатом додавання цих класів буде клас, який містить дріб

$$\frac{x(1+x)+x^2}{x^3}.$$

Множина класів із введеними операціями додавання та множення утворює поле, яке також позначаємо $F(x)$. Є канонічне вкладення поля F в поле $F(x)$:

$$a \in F \mapsto \frac{a+0x+0x^2+\dots}{1+0x+0x^2+\dots} \in F(x).$$

Наявність згаданого канонічного вкладення дозволяє назвати $F(x)$ розширенням поля F. Поле $F(x)$ є найменшим полем, що містить в собі і поле F і елемент $x \notin F$, який не є коренем ніякого многочлена із коефіцієнтами із поля F. Такі елементи називають *трансцендентними*. Тому побудоване поле $F(x)$ називають *трансцендентним розширенням поля* F.

2.8 Алгоритм Евкліда

Алгоритм Евкліда це алгоритм знаходження найбільшого спільного дільника двох многочленів за допомогою ділення з остачею.

Нехай є два ненульові многочлени f, g. Будуємо послідовність

$$f,\ g,\ r_1,\ r_1,\ r_3, \dots,\ r_n \tag{34}$$

так, що кожен наступний член, починаючи з третього, є остачею від ділення двох попередніх, тобто

$$f = gq_1 + r_1, \quad g = r_1q_2 + r_2,\ r_1 = r_2q_3 + r_3, \dots,\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n.$$

Останній ненульовий елемент $d = r_n$ послідовності (34) є найбільший спільний дільник многочленів $f,\ g$.

Доведення того, що d є дільником, грунтується на тому, що коли ділене і дільник діляться, скажемо, на $h(x)$, тоді і остача ділиться на $h(x)$.

А доведення того, що $d(x)$, ділиться на будь-який інший дільник многочленів $f,\ g$ грунтується на тому, що коли остача і дільник діляться, скажемо, на $h(x)$, тоді і ділене ділиться на $h(x)$.

Приклад. Нехай потрібно знайти НСД многочленів

$$f = 6\,x^7 - x^6 - 66\,x^5 - 11\,x^4 + 111\,x^3 - 309\,x^2 + 284\,x + 84,$$

$$g = 2\,x^6 - x^5 - 21\,x^4 + x^3 + 36\,x^2 - 109\,x + 118.$$

Виконуємо послідовне ділення:

$$f = gq_1 + r_1, \quad q_1 = 3x + 1, \quad r_1 = -2\,x^5 + 7\,x^4 + 2\,x^3 - 18\,x^2 + 39\,x - 34$$

$$g = r_1 q_2 + r_2, \quad q_2 = -x - 3, \quad r_2 = 2\,x^4 - 11\,x^3 + 21\,x^2 - 26\,x + 16,$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \quad q_3 = -x - 2, \quad r_3 = x^3 - 2\,x^2 + 3\,x - 2,$$

$$r_2 = r_3 q_4 + r_4, \quad q_4 = 2x - 7, \quad r_4 = x^2 - x + 2,$$

$$r_3 = r_4 q_5, \quad q_5 = x - 1.$$

Алгоритм Евкліда закінчується, коли відбулося ділення без остачі. У нас без остачі розділився многочлен r_3 на многочлен r_4. Остання ненульова остача в алгоритмі Евкліда є найбільшим спільним дільником. У нас остання ненульова остача: r_4. Отже

$$d = \text{НСД}(f, g) = r_4 = x^2 - x + 2.$$

Алгоритм Евкліда дозволяє знайти многочлени $M,\ N$, які задовольняють умову (25). Покажемо, як це робиться на проведених обчисленнях.

Спочатку виражаємо наступні остачі через попередні:

$$\begin{aligned}
d = r_4 = r_2 - r_3 q_4, &\quad d = r_2 - r_3(2x - 7);\\
r_3 = r_1 - r_2 q_3, &\quad r_3 = r_1 - r_2(-x - 2);\\
r_2 = g - r_1 q_2, &\quad r_2 = (g - r_1(-x - 3));\\
r_1 = f - g q_1, &\quad r_1 = (f - g(3x + 1)).
\end{aligned}$$

Тепер можна написати

$$\begin{aligned}
d &= r_2 - (r_1 - r_2(-x - 2))(2x - 7) = \\
&= (g - r_1(-x - 3)) - (r_1 - (g - r_1(-x - 3))(-x - 2))(2x - 7) = \\
&(g - (f - g(3x + 1))(-x - 3)) - ((f - g(3x + 1)) - (g - (f - g(3x + 1))(-x - 3))(-x - 2))(2x - 7).
\end{aligned}$$

Далі розкриваємо дужки і із частини доданків виносимо за дужки f а із частини виносимо g. Таким чином одержуємо

$$d = f(22\,x + 52 - 2\,x^3 - 3\,x^2) + g(-37 - 65\,x^2 - 175\,x + 6\,x^4 + 11\,x^3).$$

Насамкінець, записуємо відповідь:

$$M = 22\,x + 52 - 2\,x^3 - 3\,x^2, \quad N = -37 - 65\,x^2 - 175\,x + 6\,x^4 + 11\,x^3.$$

Вправа. Знайти НСД многочленів f і g:

1. $f = 2\,x^6 - 23\,x^4 + 21\,x^2 - 5, \quad g = 2\,x^5 - 23\,x^3 + 11\,x + 6\,x^2 - 3.$
   Відповідь: $d = 2x^2 - 1.$

2. $f = x^5 - 2\,x^3 - 11\,x^4 + 27\,x^2 - 10, \quad g = x^5 - 3\,x^3 + 2\,x + 3\,x^2 - 6.$
   Відповідь: $d = x^2 - 2.$

3. $f = x^3 - 11\,x^2 + 5, \quad g = x^3 - x + 3.$
   Відповідь: $d = 1.$

4. $f = x^4 - 4\,x^3 - 77\,x^2 + 5\,x + 35, \quad g = x^4 - 9\,x^3 - 22\,x^2 + 5\,x + 10.$
   Відповідь: $d = x^3 - 11x^2 + 5.$

5. $f = (x-1)^3(x^2+x+2)(x+3)^4, \quad g = (x-1)(x^2+x+2)^6(x+3)^2.$
   Відповідь: $d = (x-1)(x^2+x+2)(x+3)^2.$

В Maple є команда gcd — скорочення від greatest common divisor. Ця команда знаходить найбільший спільний дільник двох многочленів.

І найбільший спільний дільник, і алгоритм Евкліда існують також в кільці цілих чисел. Про узагальнення алгоритму Евкліда можна прочитати в [3].

2.9 Відділення кратних коренів.

Нехай є многочлен $f(x)$. Потрібно побудувати многочлен $g(x)$ такий, що

1) кожен корінь многочлена f є коренем многочлена g,

2) кожен корінь многочлена g є коренем многочлена f,

3) всі корені многочлена g мають кратність 1.

Процес знаходження такого многочлена g називають *"відділенням кратних коренів"*.

Теорема 2.10 *Многочленом g, який би задовольняв умови 1-3 для заданого многочлена f можна взяти наступний:*

$$g(x) = \frac{f}{\text{НСД}\,(f, f')}.$$

Доведення. Теорема 2.10 є наслідком теореми 1.12.

∎

2.10 Незвідність. Незвідні многочлени над полем дійсних і над полем комплексних чисел.

В цьому розділі маємо справу з многочленами над довільним полем.

Визначення 2.6 *Многочлен $f(x)$ називають розкладним, якщо його можна представити у вигляді добутку (розкласти в добуток) $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ так, щоб обидва множники мали додатний степінь:* $\deg g > 0,\ \deg h > 0$. *Якщо ж таке розкладення неможливе, то цей многочлен f називають нерозкладним, або незвідним.*

Отже ненульовий многочлен $f(x)$ є незвідним, якщо в будь-якому розкладенні $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ один із множників є сталою.

Розкладність і незвідність многочлена залежить від того, над яким полем цей многочлен роглядається.

Приклади.

1. Многочлен $x^3 + 1$ є розкладним, тому що можна записати $x^3 + 1 = (x^2 - x + 1)(x + 1)$.

2. Многочлен $x^2 + 1$ є розкладним над полем комплексних чисел: $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$, але цей многочлен є незвідним над полем дійсних чисел.

Для доведення незвідності многочлена $f(x) = x^2 + 1$ над полем дійсних чисел спочатку звернемо увагу, що натуральне число 2 єдиним чином можна подати у вигляді суми двох натуральних чисел: $2 = 1 + 1$. Тому в розкладенні $x^2 + 1 = g(x) \cdot h(x)$, де $\deg g(x),\ \deg h(x) > 0$ буде $\deg g(x) = 1, g(x) = a(x - a_0), \deg h(x) = 1,\ h(x) = b(x - b_0)$. А це неможливо, оскільки $g(a_0) = 0$ а $f(a_0) \geq 1,\ f(a_0) \neq 0$.

Лема 2.2 *Нехай d – НСД двох многочленів f, g, один із яких (скажемо, f) є незвідним. Тоді або d є сталою ($d = 1$), або для деякої сталої α можна написати*

$$d = \alpha \cdot f.$$

Доведення. Правильність леми випливає з того, що d є дільником і f і g (за визначенням найбільшого спільного дільника), а многочлен f не має дільників h таких, що

$$\deg f > \deg h > 0$$

(за визначенням незвідності).

■

Теорема 2.11 *Будь-який многочлен $f(x)$, $\deg f > 0$ можна записати і до того ж єдиним чином у вигляді добутку*

$$f(x) = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}, \quad k > 1,$$

де $p_i(x)(i = 1, 2, \ldots, k)$ *— незвідні поліноми додатного степеня, НСД*$(p_i, p_j) = 1 (1 \leq i < j \leq k.)$ *Єдиність розуміємо так: якщо є два такі розкладення*

$$f(x) = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}, \quad f(x) = q_1^{m_1} \cdot q_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot q_r^{m_r}, \tag{35}$$

то $k = r$ *і множники можна розташувати так, що* $p_i = \alpha_i \cdot q_i, \deg \alpha_i = 0, n_i = m_i$ *для всіх* $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доведення. Теорему будемо доводити за допомогою математичної індукції за степенем многочлена f, записаного у вигляді (35).

База індукції. Якщо $\deg f = 1$, то в розкладенні f у добуток один множник має нульовий степінь, а другий має степінь 1. Це випливає з того, що при множенні многочленів степені додаються, а число 1 множна представити у вигляді суми невід'ємних цілих чисел єдиним чином: 1= 1+0. Отже, коли $\deg f = 1$, тоді

$$f = \alpha \cdot p_1 = \beta \cdot p_2.$$

Таким чином у випадку $\deg f = 1$ теорема справджується.

Індуктивне припущення. Припускаємо, що $\deg f = n > 1$ і теорема справджується для всіх многочленів, що мають степінь менший, ніж n.

Індуктивний перехід. Маємо

$$f(x) = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}, \quad f(x) = q_1^{m_1} \cdot q_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot q_r^{m_r}.$$

Оскільки f ділиться на p_1 і, відповідно, добуток

$$q_1 \cdot \left(q_1^{m_1 - 1} \cdot q_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot q_r^{m_r}\right)$$

ділиться на p_1, то із незвідності p_1 з теореми про подільність добутку випливає, що або q_1, або $q_1^{m_1-1} \cdot q_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot q_r^{m_r}$ ділиться на p_1.

В першому випадку (коли q_1 ділиться на p_1) за доведеною лемою q_1 відрізняється від p_1 сталим множником: $q_1 = \alpha_1 \cdot p_1$. Тому

$$p_1^{n_1-1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k} = \alpha_1 \cdot q_1^{m_1-1} \cdot q_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot q_r^{m_r}.$$

Останнє рівняння дозволяє скористатися індуктивним припущенням. І теорема в цьому випадку доведена.

Якщо ж q_1 не ділиться на p_1, то користуємося індуктивним припущенням стосовно многочлена

$$q_1^{m_1-1} \cdot q_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot q_r^{m_r},$$

згідно якого один із множників $q_2, \ q_3, \ldots, \ q_r$ ділиться на p_1 і теорема зводиться до першого випадку. Отже, і в цьому випадку теорема справджується.

∎

Незвідними многочленами над полем комплексних чисел є виключно многочлени першого степеня — лінійні многочлени. Це випливає із основної теореми вищої алгебри (кожен многочлен ненульового степеня має бодай один корінь) і теореми Безу.

Незвідними многочленами над полем дійсних чисел, крім лінійних, є також многочлени другого степеня із від'ємним дискримінантом. Це впливає з того, що

1) коли многочлен із дійсними коефіцієнтами має комплексний корінь, то спряжене число до кореня також є коренем;

2) квадратний тричлен $(x-c)(x-\bar{c}) = x^2-(c+\bar{c})x+c\bar{c}$ має дійсні коефіцієнти, — отже коли дійсний многочлен f має комплексний корінь c, тоді він ділиться на дійсний тричлен $x^2-(c+\bar{c})x+c\bar{c}$.

3 Інтерполяційні многочлени

Припустимо, що ми маємо многочлен. Для прикладу, маємо

$$P(x) = 2x^5 - 7x^4 - x^3 + 12x + 5.$$

Ми можемо обчислити значення цього многочлена в 6 точках. Для прикладу, обчислимо значення $P(x)$ в точках $x = -2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$: $P(-2) = -187,\ P(0) = 5,\ P(1) = 11,\ P(2) = -27,\ P(3) = -67,\ P(4) = 245$. Результати обчислень можна звести в таблицю, де значення аргумента розташовані в порядку зростання:

x	-2	0	1	2	3	4
$P(x)$	-187	5	11	-27	-67	245

(36)

Тут ми маємо пряму задачу: є функція, потрібно побудувати таблицю її значень в певних точкиах. Задача, якій присвячений розділ, зворотна: по заданій таблиці (36) побудувати многочлен найменшого степеня, для якого ця таблиця є таблицею значень.

Отже, в загальному вигляді розв'язується наступна задача: за таблицею значень

x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_0	y_1	$\dots$	y_n

(37)

з умовою $i > j \Rightarrow x_i > x_j$ побудувати многочлен найменшого степеня $P(x)$ такий, що $P(x_i) = y_i$ при $i = 0, 1, \dots n$ Такий многочлен називається інтерполяційним.

3.1 Інтерполяційні многочлени у формі Лагранжа і у формі Ньютона

Теорема 3.1 *Для (37) існує і единий многочлен* $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, *що задовольняє умові* $P(x_i) = y_i$.

Звернемо увагу, що степінь інтерполяційного многочлена строго менше кількості точок, в яких проводяться обчислення цього могочлена — так званих *вузлів інтерполяції*.

Доведення. Існування і єдиність многочлена $P(x)$ випливає з того, що відповідна система рівнянь для коефіцієнтів має своєю матрицею матрицю Вандермонда і, відповідно, має єдиний розв'язок. Тут ми посилаємося на знання відповідного матеріалу із систем лінійних рівнянь.

■

Повернемося до нашого **прикладу**. По таблиці (36) записуємо невідомий многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5.$$

Коефіцієнти $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ шукаємо як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} a_0 + a_1(-2) + a_2(-2)^2 + a_3(-2)^3 + a_4(-2)^4 + a_5(-2)^5 &= -187 \\ a_0 &= 5 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 11 \\ a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 &= -27 \\ a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 + a_3 3^3 + a_4 3^4 + a_5 3^5 &= -67 \\ a_0 + a_1 4 + a_2 4^2 + a_3 4^3 + a_4 4^4 + a_5 4^5 &= 245 \end{cases}$$

Виписуємо матрицю одержаної системи рівнянь і бачимо, що це матриця Вандермонда.

Пошук інтерполяційного многочлена у загальному вигляді за допомогою системи рівнянь зручний для доведення існування та єдиності такого многочлена, проте для практики такий шлях, як показує досвід, незручний. Розглянемо два більш практичні способи пошуку інтерполяційного многочлена. Звичайно, всі способи дають один і той же результат.

Інтерполяційний многочлен у формі Лагранжа це $L = y_0 L_0 + \ldots + y_n L_n$, де

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)},$$

$$L_k = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}, k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$L_n = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}$$

Це дійсно інтерполяційний многочлен, оскільки

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad i = j, \\ 0, & \text{якщо} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Перевага інтерполяційного многочлена у формі Лагранжа у тому, що він дає кінцевий результат, не потрібно розв'язувати додатково якісь рівняння. Особливо зручно шукати інтерполяційний многочлен у формі Лагранжа тоді, коли приходиться шукати багато разів такі інтерполяційні многочлени при одних і тих же значеннях аргумента.

Розглянемо наш **приклад**. Спочатку виписуємо многочлени

$$L_0 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{-2(-2-1)(-2-2)(-2-3)(-2-4)} =$$

$$-\frac{1}{720}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = -\frac{1}{720}x^5 + \frac{1}{72}x^4 - \frac{7}{144}x^3 + \frac{5}{72}x^2 - \frac{1}{30}x$$

$$L_1 = \frac{(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{2(-1)(-2)(-3)(-4)} =$$

$$\frac{1}{48}(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = \frac{1}{48}x^5 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{5}{12}x^2 - \frac{19}{12}x + 1.$$

$$L_2 = \frac{(x+2)x(x-2)(x-3)(x-4)}{(1+2)1(1-2)(1-3)(1-4)} =$$

$$-\frac{1}{18}(x+2)x(x-2)(x-3)(x-4) = -\frac{1}{18}x^5 + \frac{7}{18}x^4 - \frac{4}{9}x^3 - \frac{14}{9}x^2 + \frac{8}{3}x$$

$$L_3 = \frac{(x+2)x(x-1)(x-3)(x-4)}{(2+2)2(2-1)(2-3)(2-4)} =$$

$$\frac{1}{16}(x+2)x(x-1)(x-3)(x-4) = \frac{1}{16}x^5 - \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{16}x^3 + \frac{13}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$$

$$L_4 = \frac{(x+2)x(x-1)(x-2)(x-4)}{(3+2)3(3-1)(3-2)(3-4)} =$$

$$-\frac{1}{30}(x+2)x(x-1)(x-2)(x-4) = -\frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{15}x$$

$$L_5 = \frac{(x+2)x(x-1)(x-2)(x-3)}{(4+2)4(4-1)(4-2)(4-3)} =$$

$$\frac{1}{144}(x+2)x(x-1)(x-2)(x-3) = \frac{1}{144}x^5 - \frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{144}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{12}x$$

Тепер ми маємо кінцевий, потрібний нам інтерполяційний многочлен

$$L(x) = -187L_0 + 5L_1 + 11L_2 - 27L_3 - 67L_4 + 245L_5 = 2x^5 - 7x^4 - x^3 + 12x + 5.$$

Інтерполяційний многочлен у формі Ньютона:

$$P(t) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

В формі Ньютона інтерполяційний многочлен потрібно шукати. Але пошук досить простий. Повернемося до нашого **прикладу**, і покажемо як проводяться необхідні обчислення.

Маємо

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$
$$+ a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + a_5(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) =$$

$$= a_0 + a_1(x + 2) + a_2(x + 2)x + a_3(x + 2)x(x - 1) +$$
$$+ a_4(x + 2)x(x - 1)(x - 2) + a_5(x + 2)x(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Коефіцієнти a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 шукаємо підставляючи замість змінної значення $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$:

$$\begin{aligned} a_0 &= -187, \\ a_0 + 2a_1 &= 5, \\ a_0 + 3a_1 + 3a_2 &= 11, \\ a_0 + 4a_1 + 8a_2 + 8a_3 &= -27, \\ a_0 + 5a_1 + 15a_2 + 30a_3 + 30a_4 &= -67, \\ a_0 + 6a_1 + 24a_2 + 72a_3 + 144a_4 + 144a_5 &= 245 \end{aligned}$$

4 Многочлени від кількох змінних

4.1 Многочлени від кількох змінних

Визначення 4.1 *Визначення многочлена від кількох змінних індуктивне:*

- *База індуктивного визначення. Многочлени від однієї змінної над комутативним кільцем з одиницею визначені. Вони утворюють кільце.*
- *Індуктивне припущення. Припускаємо, що визначене кільце многочленів від* $(n-1)$*-ї змінної.*
- *Індуктивний перехід. Кільцем многочленів від n змінних називаємо кільце многочленів від однієї ($n-$ї змінної) над кільцем многочленів від* $(n-1)$*-ї змінної.*

Звичайно, якщо коефіцієнти є многочленами від змінної x, то змінну многочлена потрібно позначати іншою буквою — це підказує здоровий глузд. Здорового глузду в цій царині достатньо. При різних позначеннях для змінних ми одержуємо різні, але *"канонічно ізоморфні"* кільця.

Отже поліном від двох змінних $x,\ y$ це формальний степеневий ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x)y^i = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \dots$$

в якому $a_i(x),\ i = 0, 1, \dots$ — многочлени від однієї змінної x, і серед цих многочленів лише скінченна кількість ненульових.

Відповідно, многочленами від $(n+1)$-ї змінної є формальні степеневі ряди

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)x_{n+1}^i =$$
$$= a_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) + a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)x_{n+1} + a_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)x_{n+1}^2 + \ldots \quad (38)$$

де $a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 0, 1, \ldots$ — многочлени від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, і серед цих многочленів лише скінченна кількість ненульових. Розкривши дужки в (38) ми можемо записати цей же многочлен у вигляді

$$\sum_{(i_1 i_2 i_3 \ldots i_{n+1})} a_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_{n+1}} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_{n+1}^{i_{n+1}}.$$

У виписаній сумі додавання відбувається за всіма можливими наборами $(i_1 i_2 i_3 \ldots i_{n+1})$, але лише скінченна кількість чисел (елементів основного кільця) $a_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_{n+1}}$ не дорівнюють нулю.

Доданки в сумі називають *одночленами* або *мономами*.

На множині мономів можна ввести лінійний порядок і використовувати його при записі суми. Порядок називають *лексикографічним*. Отже для будь-яких двох доданків можна сказати, який з них є лексикографічно старшим.

Визначення 4.2 *Нехай є два мономи*

$$A = a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \text{ і } B = b_{j_1 j_2 \ldots j_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n}.$$

Шукаємо найменше натуральне число k таке, що $i_k \neq j_k$. Моном A вважається лексикографічно старшим від B коли $i_k > j_k$. Порівнюються лише ненульові мономи.

Наприклад, x^2y лексикографічно старший від xy^{100}, тому що $i_1 = 2 > j_1 = 1$.

Оскільки доданків у многочлена скінченна кількість, то серед мономів є найстарший, його називають лексикографічно старшим членом.

Теорема 4.1 *Лексикографічно старший член добутку двох многочленів дорівнює добутку лексикографічно старших членів множників.*

Доведення. Беремо добуток $h = fg$ многочленів f та g із сташими членами

$$A = a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}, \quad B = b_{j_1 j_2 \ldots j_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n}$$

відповідно. Позначимо

$$C = a_{p_1 p_2 \ldots p_n} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}, \quad D = b_{q_1 q_2 \ldots q_n)} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n}$$

відповідно довільні доданки многочленів f, g. Тоді довільний доданок добутку і добуток лексикографічно старших членів відповідно мають вигляд

$$U = \alpha x_1^{p_1+q_1} x_2^{p_2+q_2} \ldots x_n^{p_n+q_n}, \qquad V = \beta x_1^{i_1+j_1} x_2^{i_2+j_2} \ldots x_n^{i_n+j_n}, \quad \beta \neq 0.$$

В цих позначеннях нам потрібно довести, що V лексикографічно старший член добутку, тобто V лексикографічно старший від U.

Шукаємо найменше k для якого $i_k \neq p_k$, або $j_k \neq q_k$. Для цього k будуть виконуватися нерівності $i_k \geq p_k$, $j_k \geq q_k$. Тому $i_k+j_k > p_k+q_k$ і V є лексикографічно старшим ніж U.

■

Визначення 4.3 *Степенем монома* $A = ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n}$ *називають* $\deg A = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$.

Отже степенем одночлена $2x^2zt^3$ є 6.

Визначення 4.4 *Многочлен* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *називають однорідним (однорідним степеня* k*), якщо для деякого* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *він задовольняє умову*

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Досить очевидно, що многочлен буде однорідним тоді і тільки тоді, коли всі його доданки маєть один і той же степінь

Многочлен $x + y - 7z$ однорідний першого степеня. Многочлен $x^2 + y^2 - 7xy$ є однорідним степеня 2.

4.2 Результант

Визначення 4.5 *Матрицею Сильвестра двох многочленів*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}, \quad n \geq 1;$$

і

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_m = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i}, \quad m \geq 1$$

називається матриця

$$\mathrm{Sylv}(f,g) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{m-1} & b_m \end{pmatrix}$$

Скажемо точніше, як виписуються елементи r_{ij} матриці Сильвестра.

По-перше, матриця має $n+m$ рядків і $n+m$ стовпчиків. Перші m рядків заповнюються за допомогою нулів та елементів першого многочлена f. Останні n рядків заповнюються за допомогою нулів та коефіцієнтів другого многочлена g.

Для першого рядка матриці Сильвестра можна написати

$$r_{1j} = \begin{cases} a_{j-1}, & \text{якщо} \quad 1 \le j \le n+1, \\ 0, & \text{якщо} \quad n+2 \le j \le n+m. \end{cases}$$

Для другого рядка матриці можна написати

$$r_{21} = 0, \qquad r_{2j} = \begin{cases} a_{j-2}, & \text{якщо} \quad 2 \le j \le n+2, \\ 0, & \text{якщо} \quad n+3 \le j \le n+m. \end{cases}$$

Для третього рядка матриці можна написати

$$r_{31} = 0, \qquad r_{32} = 0, \qquad r_{3j} = \begin{cases} a_{j-3}, & \text{якщо} \quad 3 \le j \le n+3, \\ 0, & \text{якщо} \quad n+3 \le j \le n+m. \end{cases}$$

Для довільного k-го рядка, $1 \le k \le m$, матриці Сильвестра можна написати

$$r_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad 1 \le j \le k-1, \\ a_{j-k}, & \text{якщо} \quad k \le j \le n+k, \\ 0, & \text{якщо} \quad n+k+1 \le j \le n+m. \end{cases}$$

Ми записали, яким чином заповнюються перші m рядків матриці Сильвестра. Останні n рядків заповнюються подібним чином.

Для $m+1$-го рядка матриці можна написати

$$r_{m+1,j} = \begin{cases} b_{j-1}, & \text{якщо} \quad 1 \le j \le m+1, \\ 0, & \text{якщо} \quad m+2 \le j \le n+m. \end{cases}$$

Для $m+2$-го рядка матриці можна написати

$$r_{m+2,1} = 0, \qquad r_{m+2,j} = \begin{cases} b_{j-2}, & \text{якщо} \quad 2 \le j \le m+2, \\ 0, & \text{якщо} \quad m+3 \le j \le n+m. \end{cases}$$

Для $m+3$-го рядка матриці можна написати

$$r_{m+3,1} = 0, \qquad r_{m+3,2} = 0, \qquad r_{m+3,j} = \begin{cases} b_{j-3}, & \text{якщо} \quad m+3 \le j \le m+3, \\ 0, & \text{якщо} \quad m+3 \le j \le n+m. \end{cases}$$

Для довільного $m+k$-го рядка, $1 \le k \le n$, матриці Сильвестра можна написати

$$r_{m+k,j} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad 1 \le j \le k-1, \\ b_{j-k}, & \text{якщо} \quad k \le j \le m+k, \\ 0, & \text{якщо} \quad m+k+1 \le j \le n+m. \end{cases}$$

Визначення 4.6 *Результантом двох многочленів називається визначник матриці Сильвестра цих многочленів:*

$$\operatorname{Res}(f, g) = \det(\operatorname{Sylv}(f, g)).$$

Таким чином, для многочленів $f = a_0x + a_1$, $g = b_0x + b_1$ результантом буде

$$\operatorname{Res}(f, g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

Для многочленів $f = a_0x^2 + a_1x + a_2$, $g = b_0x + b_1$ результантом буде

$$\operatorname{Res}(f, g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

Для многочленів $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ та $g(x) = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$ результантом буде

$$\operatorname{Res}(f, g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Якщо один із многочленів є сталою величиною, то результант цих многочленів не визначений, його не обчислюють.

Із визначення видно, що результант двох многочленів можна підраховувати у випадку, коли коефіцієнти належать комутативному кільцю з одиницею, — зокрема, у випадках, коли коефіцієнти є цілими числами, або многочленами. Проте наша увага буде зосереджена на випадку, коли коефіцієнти належать певному полю.

Теорема 4.2 *Результант двох многочленів*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}, \quad n \geq 1$$

і

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_m = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i}, \quad m \geq 1$$

над полем дорівнює нулю у двох випадках

1) многочлени не взаємно прості;

2) $a_0 = b_0 = 0$.

В інших випадках результант не дорівнює нулю.

Доведення. Коли $a_0 = b_0 = 0$, результант дорівнює нулю, оскільки перший стовпчик матриці Сильвестра дорівнює нулю.

Нехай тепер хоч один із коефіцієнтів a_0, b_0 не дорівнює нулю і многочлени f та g не взаємно прості, тобто вони мають спільний множник $h(x)$ ненульового степеня:

$$f(x) = f_1(x) \cdot h(x), \quad g(x) = g_1(x) \cdot h(x), \quad \deg h(x) > 0.$$

Тоді

$$\deg f_1 < \deg f, \quad \deg g_1 < \deg g, \tag{39}$$

і

$$f \cdot g_1 - g \cdot f_1 = f_1 g_1 h - f_1 g_1 h = 0. \tag{40}$$

Нерівності (39) дозволяють сказати, що при деяких $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}, d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ із поля коефіцієнтів можна записати

$$f_1 = c_0 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}, \qquad g_1 = d_0 x^{m-1} + d_1 x^{m-2} + \ldots + d_{m-1}.$$

Оскільки $f \cdot g_1 - g \cdot f_1$ є нульовим многочленом, то всі його коефіцієнти при $x^0, x^1, \ldots, x^{m+n-1}$ дорівнюють нулю. Випишемо всі ці коефіцієнти і запишемо, що вони дорівнюють нулю:

$$\sum_{i+j=k} a_i d_j - \sum_{i+j=k} b_i c_j = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m+n-1. \tag{41}$$

Маємо систему $m+n$ лінійних однорідних рівнянь з $m+n$ невідомими. Ця система має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник її матриці дорівнює нулю.

Виконаємо згадані дії в конкретному випадку: коли $n = 2$ і $m = 3$, тобто для многочленів $f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ та $g(x) = b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3$, і, відповідно, $f_1(x) = c_0 x + c_1$ і $g_1 = d_0 x^2 + d_1 x + d_2$. П'ять коефіцієнтів c_0, c_1, d_0, d_1, d_2 є невідомими. Рівність $f \cdot g_1 - g \cdot f_1 = 0$ має вигляд

$$(a_0 x^2 + a_1 x + a_2) \cdot (d_0 x^2 + d_1 x + d_2) - (b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3) \cdot (c_0 x + c_1) = 0.$$

Розкриємо дужки і зберемо коефіцієнти при однакових степенях змінної:

$$(a_0 d_0 - b_0 c_0) x^4 + (a_0 d_1 + a_1 d_0 - b_0 c_1 - b_1 c_0) x^3 + (a_0 d_2 + a_1 d_1 + a_2 d_0 - b_1 c_1 - b_2 c_2) x^2 + \\ (a_1 d_2 + a_2 d_1 - b_2 c_1 - b_3 c_0) x + (a_2 d_2 - b_3 c_1) = 0.$$

Многочлен дорівнює нулю, коли всі коефіцієнти дорівнюють нулю. Тому прирівнюємо всі коефіцієнти нулю і одержуємо систему лінійних однорідних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_0 x_1 + 0 x_2 + 0 x_3 - b_0 x_4 + 0 x_5 & = & 0, \\ a_1 x_1 + a_0 x_2 + 0 x_3 - b_1 x_4 - b_0 x_5 & = & 0, \\ a_2 x_1 + a_1 x_2 + a_0 x_3 - b_2 x_4 - b_1 x_5 & = & 0, \\ 0 x_1 + a_2 x_2 + a_1 x_3 - b_3 x_4 - b_2 x_5 & = & 0, \\ 0 x_1 + 0 x_2 + a_2 x_3 + 0 x_4 - b_3 x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

з невідомими

$$x_1 = d_0, \quad x_2 = d_1, \quad x_3 = d_2, \quad x_4 = c_0, \quad x_5 = c_1.$$

Система має ненульовий розв'язок в тому і тільки тому випадку, коли визначник її матриці дорівнює нулю, тобто коли

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & -b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & -b_1 & -b_0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & -b_2 & -b_1 \\ 0 & a_2 & a_1 & -b_3 & -b_2 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & -b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathrm{Res}(f, g) = 0.$$

Повернемося до загального випадку, тобто до системи рівнянь (41). Позначимо невідомі зручніше

$$x_1 = d_0,\ x_2 = d_1, \ldots, x_m = d_{m-1},\ x_{m+1} = -c_0,\ x_{m+2} = -c_1, \ldots, x_{m+n} = c_{n-1}.$$

І далі ретельним (і громіздким) виписуванням елементів матриці системи переконуємося, що визначник системи є результантом заданих многочленів.

Отже, система (41) має ненульовий розв'язок (і відповідно, існують ненульові многочлени f_1, g_1, що задовольняють умову (40)), тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Res}(f, g) = 0$. Таким чином, закінчене доведення того, що коли два многочлени мають спільний множник ненульового степеня, то результант цих многочленів дорівнює нулю.

Далі вважаємо, що

- або $a_0 \neq 0$, або $b_0 \neq 0$,
- існують ненульові многочлени f_1, g_1, що задовольняють умову $f \cdot g_1 = g \cdot f_1 = 0$ (див. (40)).

і, відповідповідно, $\mathrm{Res}(f, g) = 0$. Переконаємося, що в такому випадку многочлени f і g мають спільний множник ненульового степеня. Зробимо це методом від протилежного.

Припустимо, що многочлени f і g взаємно прості,

$$f \cdot g_1 - g \cdot f_1 = 0,$$

і або $\deg f_1 < \deg f$, або $\deg g_1 < \deg g$. (Стверджувати, що виконуються обидві нерівності ми не можемо, оскільки один із старших коефіцієнтів многочленів f, g може дорівнювати нулю). Для визначеності припустимо $\deg f_1 < \deg f$. В такому випадку умови

$$f \cdot g_1 = g \cdot f_1, \qquad \text{НСД}\,(f, g) = 1$$

показують, що многочлен f_1 ділиться на многочлен f (див. теорему 2.7), а це неможливо із-за нерівності $\deg f_1 < \deg f$. Одержана суперечність доводить, що многочлени f і g мають спільний множник ненульового степеня.

Теорема доведена повністю.

∎

Визначення 4.7 *Дискримінантом многочлена*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

називають число

$$D(f) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2.$$

Відомо (приймемо цей факт на віру, без доведення), що

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{a_0}\mathrm{Res}(f, f'). \tag{42}$$

Пакети символьних обчислень мають команди для обчислення результанта і дискримінанта многочлена. Так в пакетах Maple

для породження матриці Сильвестра використовується команда sylvester;

для обчислення результанта використовуэться команда resultant;

для обчислення дискримінанта за формулою (42) використовується команда discrim.

Для практичних потреб часто використовують спрощене визначення дискримінанта: *дискримінантом многочлена називають результант многочлена та його похідної.* Спрощене визначення враховує випадок, коли старший коефіцієнт дорівнює нулю. Спрощене визначення відрізняється від правильного (ортодоксального) множником

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{a_0}.$$

Із доведеної теореми випливає, що дискримінант (і у правильному визначенні і у спрощеному) многочлена з ненульовим старшим коефіцієнтом дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли многочлен має кратні корені. За спрощеним визначенням дискримінант многочлена із нульовим старшим коефіцієнтом дорівнює нулю. Правильне визначення для такого многочлена відсутнє. Для многочлена першого степеня і для сталого многочлена дискримінант не визначається.

Дискримінантом квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ буде (за спрощеним визначенням)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} = ab^2 - 2ab^2 + c4a^2 = -a(b^2 - 4ac).$$

А за правильним визначенням він дорівнює $b^2 - 4ac$.

Розв'язування системи двох алгебраїчних рівнянь з двома невідомими.

Алгебраїчними називають рівняння, в яких знаком рівності з'єднують два многочлени.

Отже маємо систему із двох рівнянь

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \ldots + a_n(y) & = & 0, \\ b_0(y)x^m + b_1(y)x^{m-1} + \ldots + b_m(y) & = & 0. \end{array}\right.$$

Спочатку шукаємо всі ті значення змінної $y = y_0$, для яких у многочленів

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0(y_0)x^n + a_1(y_0)x^{n-1} + \ldots + a_n(y_0) & = & 0, \\ b_0(y_0)x^m + b_1(y_0)x^{m-1} + \ldots + b_m(y_0) & = & 0. \end{array}\right.$$

є спільний дільник додатного степеня. Для цього обчислюється результант цих многочленів, як многочленів від однієї змінної x над кільцем многочленів від змінної y. Результант буде многочленом від y. Корені результанта і є потрібні значення y_0. Підставляємо знайдені значення $y = y_0$ у задані многочлени, шукаємо найбільший спільний дільник цих многочленів (наприклад, методом Евкліда). Насамкінець шукаємо корені знайденого найбільшого спільного дільника: $x = x_0$. Пари (x_0, y_0) і є коренями заданої системи рівнянь.

Збірник задач з алгебри під редакцією А.І.Кострикіна [4] пропонує чотири вправи на тему "Результант і дискримінант"(стор. 88, 89).

7.4.1 Знайти всі значення параметра λ, при яких многочлени f, g мають спільний корінь:

1) $f(x) = x^3 - \lambda x + 2, \quad g(x) = x^2 + \lambda x + 2.$

Відповідь: $\lambda = 3,\ \lambda = -1.$

2) $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 9, \quad g(x) = x^3 + \lambda x - 3.$

Відповідь: $\lambda = \pm i\sqrt{2},\ \lambda = \pm 2i\sqrt{3}$

7.4.2 Виключити x із системи рівнянь $f(x,y) = 0,\ g(x,y) = 0.$

1) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0, \quad g(x,y) = x^2y + y^2x - 6 = 0.$

Відповідь: $y^6 - 4y^4 + 3y^2 - 12y + 12 = 0.$

2) $x^3 - xy - y^3 + y = 0, \quad x^2 + x - y^2 - 1 = 0.$

Відповідь: $5y^5 - 7y^4 + 6y^3 - 2y^2 - y - 1 = 0.$

7.4.3 Обчислити дискримінант многочленів (використати спрощене визначення дискримінанта)

1) $f(x) = ax^2 + bx + c$. Відповідь: $-a(b^2 - 4ac)$.

2) $f(x) = x^3 + px + q$. Відповідь: $4p^3 + 27q^2$.

7.4.4 Знайти всі значення λ, при яких многочлен $f(x)$ має кратні корені.

1) $x^3 - 3x + \lambda$. Відповідь: ± 2.

2) $x^4 - 4x + \lambda$. Відповідь: $\left\{3, 3\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.

Приклад. Нехай потрібно знайти всі цілі розв'язки системи рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l} (y-2)x^2 + (y^2-3)x + 3y + 3 = 0, \\ (2y-1)x^2 + (3y^2+y-1)x - y - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Розв'язування. Складаємо матрицю Сільвестра

$$A = \begin{bmatrix} y-2 & y^2-3 & 3\,y+3 & 0 \\ 0 & y-2 & y^2-3 & 3\,y+3 \\ 2\,y-1 & 3\,y^2+y-1 & -y-1 & 0 \\ 0 & 2\,y-1 & 3\,y^2+y-1 & -y-1 \end{bmatrix}$$

Далі обчислюємо визначник цієї матриці — результант многочленів, що входять до рівняння:

$$\det(A) = 10\,y^6 - 27\,y^5 + 24\,y^4 + 63\,y^3 - 64\,y^2 - 35\,y + 31$$

Можливими цілими коренями рівняння $\det(A) = 0$ є дільники числа 31, тобто $\pm 1, \pm 31$. Перевірка цих чисел показує, що -1 дійсно є розв'язком рівняння $\det(A) = 0$.

Підставляємо знайдене значення для y в задану систему і одержуємо систему $f(x) = 0,\ g(x) = 0$, де $f(x) = -3x^2 - 2x$, $g(x) = -3x^2 + x$, для знаходження x. Найбільший спільний дільник для многочленів $f,\ g$ дорівнює x. Отже єдиним цілим розв'язком системи є $(0, -1)$.

4.3 Симетричні многочлени

Визначення 4.8 *Многочлен*

$$\sum_{(i_1 i_2 i_3 \dots i_n)} a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

називаеться симетричним, коли для будь-якої підстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

виконуеться рівність

$$\sum_{(i_1 i_2 i_3 \dots i_n)} a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} = \sum_{(i_1 i_2 i_3 \dots i_n)} a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} x_{\sigma_1}^{i_1} x_{\sigma_2}^{i_2} \dots x_{\sigma_n}^{i_n}.$$

Наприклад, многочлен $x + 2xy$ не симетричний, тому що після заміни x на y і y на x ми одержимо многочлен $y + 2yx$, який не дорівнює початковому, заданому многочлену $x + 2xy$. А многочлен $xy + x^2y^2$ симетричний, тому що

$$xy + x^2y^2 = yx + y^2x^2.$$

Визначення 4.9 *Симетричний многочлен називається однопородженим (або моногенним), якщо всі його доданки одержуються із одного переставлянням індексів.*

Многочлен $x_1^2x_2+x_2^2x_1$ є однопородженим, оскільки другий доданок одержується із першого заміною індексів 1 на 2 і 2 на 1.

Многочлен $x_1^3 + x_2^3 + x_1^2x_2 + x_2^2x_1$ не є однопородженим, оскільки перший та останній доданки не можуть бути одержані із одного доданка заміною індексів.

Однопороджений многочлен можна задавати лише одним доданком, коли кількість змінних зрозуміла із мовного оточення, або ця кількість не має значення. В однопородженому многочлені виписують звичайно лише лексикографічно старший доданок. Так запис $x_1^3 + \ldots$ означає $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, якщо контекст стосується многочленів від трьох змінних, і означає $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3$, коли кількість змінних є невідомим параметром n.

Многочлен $f = x_1^7x_2^7x_3^6x_4x_5x_6 + \ldots$ від десяти змінних має

$$C_{10}^2 \cdot 8 \cdot C_7^3 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot 8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 12600$$

доданків. Відповідно, $f(1, 1, \ldots, 1) = 12600$. Підрахуємо значення многочлена $f(x_1, \ldots, x_{10})$ у випадку, коли $x_1 = 2$, $x_3 = x_4 = \ldots = x_{10} = 1$. Для цього перепишемо заданий многочлен в зручному вигляді

$$f(x_1, \ldots, x_{10}) =$$

$$= x_1^7(x_2^7x_3^6x_4x_5x_6+\ldots)+x_1^6(x_2^7x_3^7x_4x_5x_6+\ldots)+x_1(x_2^7x_3^7x_4^6x_5x_6+\ldots)+(x_2^7x_3^7x_4^6x_5x_6x_7+\ldots).$$

Позначимо многочлени, що стоять в дужках, відповідно через $g_1(x_2, \ldots, x_{10})$, $g_2(x_2, \ldots, x_{10})$, $g_3(x_2, \ldots, x_{10})$, $g_4(x_2, \ldots, x_{10})$. В прийнятих позначеннях многочлен f запишеться у вигляді

$$f = x_1^7g_1 + x_1^6g_2 + x_1g_3 + g_4.$$

Многочлени g_1, g_2, g_3, g_4 — симетричні однопороджені многочлени від 9 змінних. Знайдемо кількість доданків в цих многочленах. Многочлен g_1 має $9 \cdot 8 \cdot C_7^3 = 2520$ доданків, многочлен g_2 має $C_9^2 \cdot C_7^3 = 1260$ доданків, многочлен g_3 має $\frac{2}{9} \cdot 7 \cdot C_6^2 = 3780$ доданків, многочлен g_4 має $C_9^2 \cdot 7 \cdot C_6^3 = 5040$ доданків. Тому

$$f(2, 1, 1, \ldots, 1) = 2^7 \cdot 2520 + 2^6 \cdot 1260 + 2 \cdot 3780 + 5040 = 415800.$$

Серед симетричних многочленів від n змінних виділяють *елементарні симетричні многочлени*

$$\sigma_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$
$$\sigma_2(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \sum_{1 \le i < j \le n} x_ix_j,$$
$$\sigma_3(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + xn - 2x_{n-1}x_n = \sum_{1 \le i < j < k \le n} x_ix_jx_k,$$
$$\ldots$$
$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k},$$
$$\ldots$$
$$\sigma_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2\ldots x_n.$$

та *степеневі суми*

$$s_k(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^k.$$

І елементарні симетричні многочлени і степеневі суми є однорідними многочленами.

Формули Ньютона - зв'зок між степеневими сумами та елементарними симетричними многочленами.

За формулою Вієта

$$(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}+\ldots+(-1)^n\sigma_n.$$

Піставивши сюди x_i замість x одержимо рівність

$$x_i^n-\sigma_1x_i^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n=0 \qquad i=1,2,\dots,n. \tag{43}$$

Сумою одержаних рівностей по всіх $i=1,2,\dots,n$ буде

$$s_n(x_1,\dots,x_n)-s_{n-1}(x_1,\dots,x_n)\sigma_1+s_{n-2}(x_1,\dots,x_n)\sigma_2+\ldots \\ +(-1)^{n-1}s_1(x_1,\dots,x_n)\sigma_{n-1}+(-1)^nn\sigma_n=0. \tag{44}$$

Використовуючи рівність (44) доведемо формулу Ньютона для многочленів від кількох змінних. Для цього нам ще знадобиться наступна лема.

Лема 4.1 *Якщо однорідний симетричний многочлен $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ має степінь k, менший ніж n, і при кожному $i=1,2,\dots,n$ при підстановці $x_i=0$ стає степеневою сумою, то цей многочлен є степеневою сумою.*

Доведення. Симетричний многочлен, який одержується після підставляння $x_i=0$ в многочлен $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ позначимо через g_i. Многочлен $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ має степінь менший, ніж кількість змінних, тому доданку, який би містив добуток усіх змінних, він не має, бо в кожному доданку немає хоч однієї змінної. Звідси випливає, що кожен доданок многочлена $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ збігається з певним доданком якогось многочлена g_i. Оскільки всі многочлени g_i містять лише степені змінних, то і f є сумою степенів змінних. Разом з однорідністю це переконує нас в тому, що f є степеневою сумою.

∎

Теорема 4.3 (формула Ньютона, коли кількість змінних велика) *При всіх $n\geq k$ виконується рівність*

$$s_k(x_1,\dots,x_n)-s_{k-1}(x_1,\dots,x_n)\sigma_1+\ldots+(-1)^{k-1}s_1(x_1,\dots,x_n)\sigma_{k-1}+(-1)^kk\sigma_k=0. \tag{45}$$

Доведення. Нехай k — фіксоване число. Доводити будемо індукцією по різниці $n-k$.

База індукції. При $n=k$ правильність формули забезпечується доведеною формулою (44).

Індуктивне припущення. Нехай для всіх чисел від k до n включно формула (45) правильна.

Індуктивний перехід. Будемо доводити формулу для $n+1$:

$$s_k(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) - s_{k-1}(x_1,\ldots,x_{n+1})\sigma_1 + \ldots + \\ (-1)^{k-1}s_1(x_1,\ldots,x_{n+1})\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0$$

$$s_k(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = s_{k-1}(x_1,\ldots,x_{n+1})\sigma_1 - \ldots + \\ (-1)^k s_1(x_1,\ldots,x_{n+1})\sigma_{k-1} + (-1)^{k+1}k\sigma_k. \tag{46}$$

Права частина рівності (46) є однорідним многочленом степеня k. За індуктивним припущенням права частина є степеневою сумою, якщо взяти $x_i=0$, при будь-якому $i=1,2,\ldots,n+1$. Лема 4.1 забезпечує нам, що права частина буде сумою $k-$степенів змінних.

Теорема 4.3 доведена.

■

Теорема 4.4 (формула Ньютона, коли кількість змінних мала) *Якщо* $1\le n<k$, *то*

$$s_k(x_1,\ldots,x_n) - s_{k-1}(x_1,\ldots,x_n)\sigma_1 + \ldots + \\ (-1)^{n-1}s_{k-n+1}(x_1,\ldots,x_n)\sigma_{n-1} + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0. \tag{47}$$

Для доведення теореми 4.4 достатньо домножити кожну рівність (43) на x_i^{k-n} і потім результати скласти.

Теореми 4.3 та 4.4 дозволяють виразити степеневі суми через елементарні симетричні многочлени. Наведемо приклади. Зауважимо, що завжди $s_1=\sigma_1$. Припустимо, що змінних 4. Тоді за теоремою 4.3:

$$\begin{aligned} &s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0,\\ &s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0,\\ &s_4 - s_3\sigma_1 + s_2\sigma_2 - s_1\sigma_3 + 4\sigma_4 = 0. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} &s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,\\ &s_3 = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\cdot\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,\\ &s_4 = (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)\sigma_1 - (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4. \end{aligned}$$

Маємо відповідь

$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4.$$

Оскільки змінних 4, то для обчислення s_k при $k \geq 5$ потрібно користуватися теоремою 4.4. Виразимо s_5 через елементарні симетричні многочлени.

Теорема 4.4 дає нам рівність

$$s_5 = s_4\sigma_1 - s_3\sigma_2 + s_2\sigma_3 - s_1\sigma_4.$$

Ми уже виразили $s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4$ через елементарні симетричні многочлени. Тому можемо записати

$$s_5 = (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4)\sigma_1 - (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)\sigma_2 + (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_3 - \sigma_1\sigma_4.$$

Далі можна виразити s_6, оскільки уже відомі $s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5$.

Основна теорема теорії симетричних многочленів.

Теорема 4.5 (основна теорема теорії симетричних многочленів) *Будь-який симетричний многочлен можна виразити, до того ж є единим чином, через елементарні симетричні многочлени. Точніше, для будь-якого симетричного полінома $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ існує, і до того ж единий, многочлен $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ такий, що*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

Лема 4.2 *Якщо $A = x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}\ldots x_n^{i_n}$ лексикографічно страний член симетричного полінома, то*

$$i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq \ldots \geq i_n.$$

Доведення. Доведення методом від протилежного. Припустимо, що для деякого $1 \leq k < n$ виконується нерівність $i_k < i_{k+1}$. Оскільки многочлен симетричний, то він містить доданок B, який одержується із A заміною x_k на x_{k+1} і x_{k+1} на x_k. Доданок B лексикографічно старший від A, а це суперечить припущенню, що A лексикографічно страший член заданого многочлена.

Лема доведена.

■

Лема 4.3 *Якщо є послідовність невід'ємних цілих чисел*

$$i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq \ldots \geq i_n,$$

то лексикографічно старшим членом добутку

$$f = \sigma_1^{i_1-i_2}\sigma_2^{i_2-i_3}\sigma_3^{i_3-i_4}\ldots\sigma_{n-1}^{i_{n-1}-i_n}\sigma_n^{i_n}$$

буде $A = x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}\ldots x_n^{i_n}$

Доведення. Ми уже знаємо, що лексикографічно старший член добутку многочленів є добутком лексикографічно старших членів множників. Тому лексикографічно страншим членом добутку f буде

$$x_1^{i_1-i_2}(x_1x_2)^{i_2-i_3}(x_1x_2x_3)^{i_3-i_4}\dots(x_1x_2\dots x_{n-1})^{i-n-1-i_n}(x_1x_2\dots x_n)^{i_n}=A.$$

Лема 4.3 доведена.

■

Доведення. Переходимо власне до доведення теореми 4.4.

Леми 4.2, 4.3 забезпечують нам існування добутку елементарних симетричних многочленів, який має той же лексикографічно старший член, що і заданий симетричний многочлен. Послідовно віднімаючи такі добутки елементарних симетричних многочленів і знищуючи відповідно лексикографічні страші члени, ми одержимо послідовність многочленів, у яких лексикографічно старші члени стоять у спадному порядку. Оскільки степінь многочлена при таких діях (відніманні добутку елементарних симетричних многочленів) не збільшується, то побудована послідовність многочленів обірветься нулем. Позначимо послідовність побудованих добутків елементарних симетричних многочленів через $g_1,\ g_2,\dots,g_k$. Тоді

$$f-g_1-g_2-\dots-g_k=0,\quad f=g_1+g_2+\dots+g_k.$$

Частина теореми 4.4, що стосується існування, доведена.

Перейдемо до доведення єдиності такого представлення. Знову скористаємося методом від протилежного. Нехай є два многочлени a,b такі, що

$$f(x_1,\dots x_n)=a(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=b(\sigma_1,\dots,\sigma_n).$$

Потрібно довести, що

$$a(y_1,y_2,\dots,y_n)=b(y_1,y_2,\dots,y_n).$$

Припустимо, що $c=a-b\neq 0$. Доведемо, що це неможливо.

Наголосимо, що многочлен $c=c(y_1,y_2,\dots,y_n)\neq 0$ — це многочлен від змінних $y_1,y_2,\dots,y_n$. Якщо ж замість змінних $y_i, i=1,2,\dots,n$ підставити елементарні симетричні многочлени від $x_i, i=1,2,\dots,n$, то одержимо нульовий многочлен від $x_i, i=1,2,\dots,n$.

Ненульовий многочлен $c=c(y_1,y_2,\dots,y_n)$ має ненульові доданки вигляду

$$A=y_1^{k_1}y_2^{k_2}\dots y_{n-1}^{k_{n-1}}y_n^{k_n}$$

з певними коефіцієнтами, які нас зараз не цікавлять. Якщо в моном A замість $y_1,y_2,\dots,y_n$ підставити $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n$, то ми одержимо симетричний многочлен з лексикографічно старшим членом

$$x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n},$$

де

$$\begin{aligned} i_1 &= k_1 + k_2 + \ldots + k_n, \\ i_2 &= k_2 + k_3 + \ldots + k_n, \\ &\ldots \\ i_{n-1} &= k_{n-1} + k_n, \\ i_n &= k_n. \end{aligned}$$

Знаючи $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ми можемо знайти $k_1, k_2, \ldots, k_n$

$$\begin{aligned} k_1 &= i_1 - i_2, \\ k_2 &= i_2 - i_3, \\ &\ldots \\ k_{n-1} &= i_{n-1} - i_n, \\ k_n &= i_n. \end{aligned}$$

Із сказаного випливає, що різні мономи A — доданки многочлена $c(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, після підставляння замість змінних елементарних симетричних поліномів дають різні лексикографічно старші члени. Із цих лексикографічно старших членів вибираємо найстарший. Цей лексикографічно найстарший член ні з яким доданком (після підставляння замість змінних елементарних симетричних многочленів і після розкриття дужок) не скоториться. Тому після розкриття дужок ми одержимо ненульовий многочлен.

Пояснимо сказане прикладом. Нехай

$$c = 5y_1^2 y_2^1 y_3^3 - 11 y_1^5 y_2 y_3^2.$$

Підставляємо в многочлен c замість змінних y_1, y_2, y_3 елементарні симетричні многочлени

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3, \qquad \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \qquad \sigma_3 = x_1x_2x_3.$$

Доданок $A_1 = 5y_1^2 y_2^1 y_3^3$ після підставляння заміcь змінних елементарних симетричних поліномів дасть симетричний многочлен

$$B_1 = 5x_1^6 x_2^4 x_3^3 + \ldots$$

а моногочлен $A_2 = -11y_1^5 y_2^1 y_3^2$ після підставляння заміcь змінних елементарних симетричних поліномів дасть симетричний многочлен

$$B_1 = -11x_1^8 x_2^3 x_3^2 + \ldots$$

Доданок $5x_1^6 x_2^4 x_3^3$ лексикографічно менший від $-11x_1^8 x_2^3 x_3^2$. Тому

$$c(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = B_1 + B_2 = -11x_1^8 x_2^3 x_3^2 + \ldots$$

Тут крапками позначено лексикографічно менші доданки, які нас не цікавлять – для нас головним є виписати ненульовий доданок, от ми його й виписали.

Ми прийшли до суперечності: з однієї сторони, ненульовий многочлен c від змінних $y_1, y_2, \ldots, y_n$ після підставляння замість змінних елементарних симетричних многочленів перетворився в нульовий многочлен, а з другої сторони, таке статися не може. Одержана суперечніть доводить єдиність представлення симетричного многочлена у вигляді многочлена від елементарних симетричних многочленів.

■

Хоч доведення цієї теореми проводилося у припущенні, що коефіцієнти належать певному полю (зазвичай – полю дійсних чисел), але теорема лишається справедливою і у випадку, коли коефіцієнти належать комутативному кільцю з одиницею (зокрема, кільцю цілих чисел).

Часто основна теорема теорії симетричних многочленів застосовується в парі із теоремою Вієта для обчислення симетричного многочлена від коренів заданого многочлена від одієї змінної.

Приклад 1. Нехає є многочлен від однієї змінної

$$f(x) = x^4 - 11x^2 + 12x - 3$$

і потрібно обчислити вираз

$$\begin{gathered} g = (5355x_1^5x_2^4x_3^3x_4 + \ldots) + (21840x_1^4x_2^4x_3^3x_4^2 + \ldots) + (7965x_1^4x_2^4x_3^4x_4 + \ldots) + \\ + (9385x_1^5x_2^4x_3^2x_4^2 + \ldots) + (15076x_1^5x_2^3x_3^3x_4^2 + \ldots) + (34065x_1^4x_3^3x_4^3x_2^3 + \ldots) + \\ + (855x_1^5x_2^4x_3^4 + \ldots) + (380x_1^6x_2^4x_3^3 + \ldots) + (2572x_1^6x_2x_3^3x_4^3 + \ldots) + (1470x_1^6x_2^4x_3^2x_4 + \ldots) + \\ + (4615x_1^6x_2^3x_3^2x_4^2 + \ldots) + (2060x_1^5x_2^5x_3x_4^2 + \ldots) + (540x_1^5x_2^5x_3^3 + \ldots) + (11x_1^8x_2^3x_3^2 + \ldots) + \\ + (22x_1^8x_2^3x_3x_4 + \ldots) + (55x_1^8x_2^2x_3^2x_4 + \ldots) + (495x_1^7x_2^3x_3^2x_4 + \ldots) + (957x_1^7x_4^2x_2^2x_3^2 + \ldots) + \\ + (110x_1^7x_2^4x_3x_4 + \ldots) + (121x_1^7x_2^3x_3^3 + \ldots) + (220x_1^6x_2^5x_3x_4 + \ldots) \end{gathered}$$

від коренів многочлена f.

Шукаємо лексикографічно старший член — ним буде: $11x_1^8x_2^3x_3^2$. Цей доданок буде також лексикографічно старшим членом в симетричному многочлені $11\sigma_1^5\sigma_2\sigma_3^2$. Многочлен $g_1 = g - 11\sigma_1^5\sigma_2\sigma_3^2$ має лексикографічно старшим членом $-5x_1^6x_2^4x_3^3$, той же, що і у многочлена $-5\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^3$. Шукаємо $g_2 = g_1 - (-5\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^3)$. скільки $g_2 = 0$, то

$$g = 11\sigma_1^5\sigma_2\sigma_3^2 - 5\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^3.$$

Оскільки за теоремою Вієта σ_1 від коренів многочлена f дорівнює нулю, то і весь вираз g від коренів цього многочлена дорівнює нулю.

Приклад 2. Виразити симетричний многочлен f через елементарні симетричні многочлени.

$$f = x_1^5x_2^2 + x_1^2x_2^5 + x_1^5x_3^2 + x_1^2x_3^5 + x_2^5x_3^2 + x_2^2x_3^5.$$

Цей многочлен від трьох змінних, отже елементарні симетричні многочлени в цьому випадку такі:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1(x_{1,2}, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \\
&\sigma_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\
&\sigma_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3.
\end{aligned}$$

Розв'язувати дану задачу будемо *методом невизначених коефіцієнтів*.

1. Шукаємо лексикографічно старший член многочлена f: $x_1^5x_2^2$, його степінь доівнює 7. Оскільки многочлен f від трьох змінних, то ми можемо записати $x_1^5x_2^2x_3^0$. Показники степенів в цьому мономі $(5, 2, 0)$.

2. Далі виписуємо показники всіх мономів від трьох змінних степеня 7, для яких моном $x_1^5x_2^2x_3^0$ є лексикографічно старшим:

$$(5, 1, 1),\ (4, 3, 0),\ (4, 2, 1),\ (3, 3, 1),\ (3, 2, 2).$$

3. Виписуємо шість симетричних многочленів, утворених елементарними, в яких мономи з відповідними показниками будуть лексикографічно старшими членами.

Моном з показниками $(5, 2, 0)$ — в симетричному многочлені $\sigma_1^3\sigma_2^2$.

Моном з показниками $(5, 1, 1)$ — в симетричному многочлені $\sigma_1^4\sigma_3$.

Моном з показниками $(4, 3, 0)$ — в симетричному многочлені $\sigma_1\sigma_2^3$.

Моном з показниками $(4, 2, 1)$ — в симетричному многочлені $\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3$.

Моном з показниками $(3, 3, 1)$ — в симетричному многочлені $\sigma_2^2\sigma_3$.

Моном з показниками $(3, 2, 2)$ — в симетричному многочлені $\sigma_1\sigma_3^2$.

4. Записуємо многочлен у вигляді лінійної комбінації виписаних многочленів з невизначеними коефіцієнтами.

$$f = A\sigma_1^3\sigma_2^2 + B\sigma_1^4\sigma_3 + C\sigma_1\sigma_2^3 + D\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + E\sigma_2^2\sigma_3 + F\sigma_1\sigma_3^2.$$

Оскільки моном $x_1^5x_2^2$ є лексикографічно старшим і коефіцієнт при ньому дорівнює 1, то $A = 1$.

5. Для того, щоб знайти всі інші коефіцієнти, побудуємо таблицю, надаючи змінним $x_1,\ x_2,\ x_3$ часткові значення, обчислюючи при цих значеннях $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ f$.

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	1	0	2	1	0	2
1	-1	1	1	-1	-1	0
2	-1	-1	0	-3	2	54
1	1	1	3	3	1	6
2	1	-1	2	-1	-2	64

6. Підставляємо отримані значення з таблиці в вираз для f з невизначеними

коефіцієнтами. Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 8+2C=2 \\ 1-B-C+D-E+F=2 \\ 18E=54 \\ 243+81B+81C+27D+9E+3F=6 \\ 8-32B-2C+8D-2E+8F=64 \end{cases}$$

Одразу можемо знайти $C=-3,\ E=3$. Підставляємо в інші рівняння та отримуємо:

$$\begin{cases} -B+D+F=1 \\ 27B+9D+F=-7 \\ -4B+D+F=7 \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 1 & -7 \\ -4 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 9 & 1 & 47 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & 48 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right)$$

Отримали $B=-2,\ D=6,\ F=-7$.

Відповідь: многочлен f через елементарні симетричні многочлени виражається наступним чином:

$$f=\sigma_1^3\sigma_2^2-2\sigma_1^4\sigma_3-3\sigma_1\sigma_2^3+6\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3+3\sigma_2^2\sigma_3-7\sigma_1\sigma_3^2.$$

Приклад 3. Обчислити значення многочлена

$$f=x_1^5x_2^2+x_1^2x_2^5+x_1^5x_3^2+x_1^2x_3^5+x_2^5x_3^2+x_2^2x_3^5.$$

від коренів многочлена $g=x^3-x^2-4$.

Є два шляхи розв'язування цієї задачи.

Перший: знайти корені g та підставити їх у поліном f.

Другий: виразити поліном через елементарні симетричні многочлени та скористатися теоремою Вієта.

Розглянемо другий шлях. Ми вже маємо вираз для f. Теорема Вієта підказує нам, що

$$\sigma_1=-a_1=1,\ \sigma_2=a_2=0,\ \sigma_3=-a_3=4.$$

Отже, значення f від коренів g

$$f=\sigma_1^3\sigma_2^2-2\sigma_1^4\sigma_3-3\sigma_1\sigma_2^3+6\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3+3\sigma_2^2\sigma_3-7\sigma_1\sigma_3^2=-2\cdot4-7\cdot4^2=-8-112=-120.$$

Якщо йти першим шляхом, то $x_1=2,\ x_2=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2},\ x_3=\dfrac{-1-\sqrt{7}i}{2}.$

Література

[1] Ковтун Л.Ф., Куринной Г.Ч. Методические указания по теме "Кольца". Для студентов 1-го курса механико-математического факультета. — Харьков: ХГУ, 1984. — 47 с.

[2] Ковтун Л.Ф., Куринной Г.Ч. Методические указания и задания по изучению темы "Кольца". Для студентов 2-го курса механико-математического факультета. — Харьков: ХГУ. — 1986. — 47 с.

[3] Родосский К.А. Алгоритм Евклида / М: Наука. — 1988.

[4] Кострикин А.И. Сборник задач по алгебре. — М.: Наука, 1987