О ТѢЛѢ

НАИБОЛЬШАГО ПОТЕНЦІАЛА.

А. М. Ляпунова.

---

1. Разсмотримъ какое-нибудь однородное тѣло, частицы котораго взаимно притягиваются или отталкиваются по закону Ньютона. Пусть $d\tau$ и $d\tau'$ суть какіе-либо два элемента объема его, и r разстояніе между точками (x, y, z) и (x', y', z'), принадлежащими этимъ элементамъ. Тогда выраженіе

$$k\iint\frac{d\tau\, d\tau'}{r},$$

въ которомъ каждое изъ двухъ означенныхъ интегрированій распространяется на весь объемъ тѣла и въ которомъ k есть нѣкоторая постоянная, зависящая отъ плотности тѣла, представитъ то, что называется потенціаломъ этого тѣла самого на себя.

Положимъ

$$\Pi=\iint\frac{d\tau\, d\tau'}{r}.$$

Извѣстно, что это выраженіе Π, при данномъ объемѣ тѣла, есть maximum для шара. Но, на сколько я знаю, до сихъ поръ еще не былъ рѣшенъ вопросъ, достигаетъ ли оно при этомъ наибольшаго изъ всѣхъ возможныхъ для него значеній; другими словами — достигаетъ ли П для шара своего высшаго предѣла?

Въ предлагаемой замѣткѣ заключаются нѣкоторыя данныя для рѣшенія этого вопроса. А именно, въ ней показывается, что если допустить существованіе такого тѣла, для котораго П достигаетъ при данномъ объемѣ своего высшаго предѣла, то это тѣло необходимо есть шаръ. Пріемъ, посредствомъ котораго это доказывается, состоитъ въ сообщеніи такому тѣлу нѣкоторой опредѣленной деформаціи и затѣмъ въ изслѣдованіи условій, при которыхъ соотвѣтствующее приращеніе П имѣетъ отрицательное или равное нулю значеніе.

2. Прежде всего выведемъ нѣкоторыя вспомогательныя формулы, относящіяся къ тѣлу, для котораго П есть maximum.

Легко убѣдиться, что если потенціальная функція тѣла не сохраняетъ постояннаго значенія на его поверхности, то этому тѣлу всегда можно сообщить такую деформацію, не измѣняющую его объема, которая увеличитъ соотвѣтствующее ему выраженіе П. Поэтому если

$$V = \int \frac{d\tau'}{r},$$

то для тѣла, обращающаго П въ maximum, функція V должна сохранять одно и то-же значеніе во всѣхъ точкахъ его поверхности, состоитъ ли послѣдняя изъ одной или нѣсколькихъ замкнутыхъ поверхностей. Это постоянное на поверхности такого тѣла значеніе функціи V мы назовемъ черезъ λ.

Можно найти зависимость между λ и П. Для этого, разумѣя подъ n направленіе внутренней нормали къ поверхности тѣла въ точкѣ (x, y, z) ея элемента ds, умножимъ обѣ части уравненія

$$V=\lambda$$

на $[x\cos(nx)+y\cos(ny)+z\cos(nz)]\,ds$ и проинтегрируемъ по всей поверхности. Такъ-какъ при этомъ

$$\int V[x\cos(nx)+y\cos(ny)+z\cos(nz)]\,ds=-\frac{5}{2}\Pi,$$

и если Q есть объемъ тѣла, то

$$\int [x\cos(nx)+y\cos(ny)+z\cos(nz)]\,ds=-3Q,$$

то мы и находимъ

$$\lambda=\frac{5}{6}\,\frac{\Pi}{Q}. \tag{1}$$

Обозначимъ производную V по внутренней нормали къ поверхности тѣла черезъ $\frac{\partial V}{\partial n}$, такъ что

$$\frac{\partial V}{\partial n}=\frac{\partial V}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial V}{\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial V}{\partial z}\cos(nz),$$

гдѣ производныя $\frac{\partial V}{\partial x}$ и т. д. имѣютъ значенія, соотвѣтствующія точкѣ (x, y, z) поверхности тѣла.

Нетрудно убѣдиться, что $\frac{\partial V}{\partial n}$ есть плотность электрическаго слоя массы $4\pi Q$, находящагося въ равновѣсіи на поверхности разсматриваемаго тѣла, если его предположить проводникомъ электричества.

Для этого мы замѣчаемъ, что

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = 4\pi Q \qquad (2)$$

и что

$$\int \frac{\frac{\partial V'}{\partial n'} ds'}{r} = 4\pi V$$

для всѣхъ точекъ внѣшняго по отношенію къ тѣлу пространства. Здѣсь интегрированія распространены на всю поверхность тѣла, и величины, обозначенныя буквами со значками, имѣютъ тѣ-же значенія по отношенію къ точкѣ (x', y', z'), какія имѣютъ величины, обозначенныя тѣми-же буквами безъ значковъ, по отношенію къ точкѣ (x, y, z).

Въ справедливости первой изъ этихъ двухъ формулъ легко убѣдиться преобразованіемъ поверхностнаго интеграла въ объемный. Вторая же слѣдуетъ изъ извѣстной формулы, опредѣляющей значеніе потенціальной функціи для каждой точки внѣшняго по отношенію къ тѣлу пространства по даннымъ значеніямъ на поверхности тѣла самой потенціальной функціи и ея производной по нормали, принимая въ разсчетъ, что потенціальная функція сохраняетъ въ разсматриваемомъ случаѣ постоянное значеніе на этой поверхности.

Изъ этой второй формулы получается слѣдующая для всѣхъ точекъ поверхности тѣла

$$\int \frac{\frac{\partial V'}{\partial n'} ds'}{r} = 4\pi\lambda. \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) и доказываютъ справедливость только что сказаннаго.

Извѣстно, что интегралъ

$$\iint \frac{\rho\rho' \, ds \, ds'}{r},$$

въ которомъ каждое изъ двухъ означенныхъ интегрированій распространяется на всю поверхность тѣла, и въ которомъ ϱ есть какая-либо функція точки поверхности, удовлетворяющая условію

$$\int \varrho \, ds = M,$$

достигаетъ наименьшаго изъ всѣхъ возможныхъ для него значеній, когда ϱ обращается въ плотность электрическаго слоя массы M, находящагося въ равновѣсіи на поверхности тѣла.

Вслѣдствіе этого, если $M = 4\pi Q$, то по только-что доказанному мы будемъ имѣть:

$$\iint \frac{\rho\rho' \, ds \, ds'}{r} \geqq \iint \frac{\frac{\partial V}{\partial n} \frac{\partial V'}{\partial n'} \, ds \, ds'}{r},$$

или въ силу (2) и (3)

$$\iint \frac{\rho\rho' \, ds \, ds'}{r} \geqq (4\pi)^2 \, Q\lambda,$$

гдѣ знакъ равенства относится только къ случаю $\varrho = \frac{\partial V}{\partial n}$.

Полагая здѣсь

$$\varrho = \frac{4\pi Q}{S},$$

и разумѣя подъ S величину всей поверхности тѣла, найдемъ:

$$\iint \frac{ds\,ds'}{r} \geqq \frac{S^2}{Q}\,\lambda\,, \tag{4}$$

гдѣ знакъ равенства относится только къ тому случаю, когда $\frac{\partial V}{\partial n}$ сохраняетъ постоянное значеніе на всей поверхности тѣла, какъ это имѣетъ мѣсто для шара.

3. Опредѣлимъ теперь ту деформацію, которую мы будемъ сообщать тѣлу.

Условимся подъ разстояніемъ какой-нибудь точки отъ данной поверхности разумѣть наименьшее изъ разстояній между этою точкою и всѣми точками поверхности.

Найдемъ геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ внѣшняго по отношенію къ какому-либо тѣлу пространства, находящихся въ постоянномъ разстояніи ζ отъ его поверхности. Это геометрическое мѣсто, очевидно, будетъ нѣкоторою новою поверхностью, заключающею внутри себя разсматриваемое тѣло. Когда поверхность тѣла такова, что, при непрерывномъ движеніи по ней точки, направленіе нормали къ ней въ этой точкѣ измѣняется непрерывнымъ образомъ, то къ этой второй поверхности можно перейти, откладывая на внѣшнихъ нормаляхъ къ поверхности тѣла длины, равныя ζ.

Предполагая, что тѣло получаетъ такую деформацію, при которой его поверхность переходитъ въ эту новую, мы будемъ эту деформацію называть первою. Если затѣмъ деформированному тѣлу сообщимъ такую деформацію, вслѣдствіе которой оно уменьшится, оставаясь подобнымъ самому себѣ, такъ что каждая длина, сохраняя свое направленіе, уменьшится въ отношеніи равномъ $1-\varepsilon$, то эту деформацію мы будемъ называть второю. Очевидно, что вторую деформацію можно опредѣлить такимъ образомъ, чтобы послѣ нея объемъ тѣла возвратился къ той-же величинѣ, какая ему соотвѣтствовала до первой деформаціи.

Мы будемъ предполагать обѣ эти деформаціи безконечно-малыми, такъ что ζ и ε будутъ разсматриваться, какъ безконечно-малыя величины. Найдемъ въ этомъ предположеніи зависимость между обѣими деформаціями, при которой объемъ тѣла не измѣняется.

Пусть Q' есть объемъ тѣла послѣ первой деформаціи.

Если направленіе нормали къ поверхности тѣла измѣняется непрерывнымъ образомъ при переходѣ отъ одной точки поверхности къ другой, то, называя черезъ R_1 и R_2 главные радіусы кривизны этой поверхности, считаемые положительными, когда соотвѣтственные центры кривизны находятся съ внутренней стороны поверхности, и отрицательными въ противномъ случаѣ, очевидно, будемъ имѣть:

$$Q' - Q = \int ds \int_0^{\zeta} \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right)\left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right) d\xi = S\zeta + q,$$

гдѣ

$$q = \zeta^2 \left\{ \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) ds + \frac{4}{3} \pi \zeta \right\}.$$

Если же существуютъ такія точки, въ которыхъ можно возставить болѣе одной нормали къ поверхности тѣла, то это выраженіе для $Q' - Q$ конечно уже не будетъ справедливо. Но для нашей цѣли достаточно замѣтить, что и въ этомъ случаѣ можно положить

$$Q' = Q + S\zeta + q, \tag{5}$$

гдѣ q будетъ безконечно-малою величиною болѣе высокаго порядка, чѣмъ ζ, такъ-что

$$\lim \frac{q}{\zeta} = 0.$$

Далѣе, такъ-какъ послѣ второй деформаціи тѣло должно возвратиться къ прежнему объему, то мы должны имѣть:

$$Q = Q'(1-\varepsilon)^3 = Q'(1-3\varepsilon+3\varepsilon^2-\varepsilon^3). \qquad (6)$$

Исключая изъ уравненій (5) и (6) Q', мы и получимъ искомую зависимость. Отбрасывая безконечно-малыя порядка выше ζ^2, этой зависимости можно дать слѣдующій видъ:

$$S\zeta + q - 3Q\varepsilon - 3S\zeta\varepsilon + 3Q\varepsilon^2 = 0.$$

Отсюда съ тою-же степенью приближенія получается такое выраженіе для ε

$$\varepsilon = \frac{S}{3Q}\zeta + \frac{q}{3Q} - \frac{2}{9}\frac{S^2}{Q^2}\zeta^2. \qquad (7)$$

Сообщая какому-нибудь тѣлу послѣдовательно первую и вторую деформаціи, удовлетворяющія только что сказанной зависимости, мы и получимъ въ результатѣ ту деформацію, которую имѣли въ виду опредѣлить.

4. Обращаемся теперь къ нашей задачѣ.

Сообщимъ тѣлу, для котораго П достигаетъ наибольшаго изъ всѣхъ возможныхъ для него значеній, безконечно-малую деформацію, опредѣленную въ предыдущемъ параграфѣ, и разсмотримъ приращеніе, которое получитъ при этомъ П.

Пусть П$'$ есть значеніе П послѣ первой деформаціи. Въ такомъ случаѣ легко видѣть, что

$$\Pi' = \Pi + 2\int V d\tau_1 + \iint \frac{d\tau_1\, d\tau_1'}{r_1},$$

гдѣ $d\tau_1$ и $d\tau_1'$ суть элементы того объема, который заключается между поверхностью тѣла въ первоначальномъ состояніи и поверхностію его послѣ первой деформаціи, r_1 разстояніе между какими-либо точками, принадлежащими этимъ элементамъ, и интегрированія распространяются на весь этотъ объемъ.

Но отбрасывая безконечно-малыя, порядки которыхъ выше ζ^2, очевидно, найдемъ:

$$\int V d\tau_1 = \lambda(S\zeta + q) - \frac{\zeta^2}{2}\int \frac{\partial V}{\partial n} ds,$$

$$\iint \frac{d\tau_1\, d\tau_1'}{r} = \zeta^2 \iint \frac{ds\, ds'}{r},$$

а потому, принимая въ разсчетъ формулу (2), будемъ имѣть:

$$\Pi' = \Pi + 2\lambda(S\zeta + q) - 4\pi Q\zeta^2 + \zeta^2 \iint \frac{ds ds'}{r}.$$

Далѣе, если Π_1 есть значеніе Π послѣ второй деформаціи, то очевидно

$$\Pi_1 = \Pi'(1-\varepsilon)^5,$$

или, по прежнему отбрасывая безконечно-малыя порядка выше ζ^2,

$$\Pi_1 = \Pi' - 5\Pi\varepsilon - 10\lambda S\zeta\varepsilon + 10\Pi\varepsilon^2.$$

Отсюда, принимая въ разсчетъ выраженіе (7) для ε, съ тою же степенью приближенія находимъ:

$$\Pi_1 - \Pi = \left(2\lambda - \frac{5}{3}\frac{\Pi}{Q}\right)(S\zeta + q) - 4\pi Q\zeta^2 +$$

$$+ \zeta^2 \iint \frac{ds ds'}{r} - \frac{2}{3}\frac{S^2}{Q}\left(5\lambda - \frac{10}{3}\frac{\Pi}{Q}\right)\zeta^2,$$

а это равенство вслѣдствіе формулы (1) принимаетъ видъ:

$$\Pi_1 - \Pi = \zeta^2 \left(\iint \frac{ds\,ds'}{r} - 4\pi Q - \frac{2}{3}\frac{S^2}{Q}\lambda \right).$$

Такова величина искомаго приращенія съ точностью до безконечно-малыхъ одного порядка съ ζ^2.

Такъ-какъ это приращеніе не должно быть положительнымъ, то необходимо должно быть

$$\iint \frac{ds\,ds'}{r} \leqq 4\pi Q + \frac{2}{3}\frac{S^2}{Q}\lambda,$$

а это въ силу (4) требуетъ, чтобы было удовлетворено условіе

$$\lambda \leqq 12\pi \frac{Q^2}{S^2}. \qquad (8)$$

Но, съ другой стороны, по свойству разсматриваемаго тѣла, П не должно быть менѣе его значенія, соотвѣтствующаго шару того-же объема, а слѣдовательно въ силу (1) и λ не должно быть менѣе соотвѣтственной величины, относящейся къ шару. Для шара же, какъ извѣстно, если R есть его радіусъ,

$$\lambda = \frac{4}{3}\pi R^2,$$

или если S_0 есть его поверхность,

$$\lambda = 12\pi \frac{Q^2}{S_0^2}.$$

Поэтому для разсматриваемаго тѣла должно быть

$$\lambda \geqq 12\pi \frac{Q^2}{S_0^2},$$

или въ силу (8)

$$S \leqslant S_0 .$$

Этому же условію, какъ извѣстно, можно удовлетворить только со знакомъ равенства и притомъ не иначе, какъ въ предположеніи, что разсматриваемое тѣло есть шаръ, ибо извѣстно, что шаръ есть тѣло (и притомъ единственное), для котораго поверхность при данномъ объемѣ достигаетъ своего низшаго предѣла [1].

Такимъ образомъ если не подлежитъ сомнѣнію существованіе такого тѣла, для котораго потенціалъ при данномъ объемѣ достигаетъ своего высшаго предѣла, то это тѣло есть шаръ.

[1] *Steiner*, «Sur le maximum et le minimum des figures» etc. Crelle's J., Bd. XXIV (1842).