ГЛАВА III

ЗАРЯД В ПОЛЕ

§ 14. Четырехмерный потенциал поля

Взаимодействие частиц друг с другом можно описывать с помощью понятия поля. Именно, вместо того, чтобы говорить о том, что одна частица действует на другую, можно сказать, что частица создает вокруг себя поле; на всякую другую частицу, находящуюся в этом поле, действует некоторая сила. В классической механике поле является лишь некоторым способом описания физического явления — взаимодействия частиц. В теории же относительности благодаря конечности скорости распространения взаимодействий положение вещей существенным образом меняется. Силы, действующие в данный момент на частицу, не определяются их расположением в этот момент. Изменение положения одной из частиц отражается на других частицах лишь спустя некоторый промежуток времени. Это значит, что поле само по себе становится физической реальностью. Мы не можем говорить о непосредственном взаимодействии частиц, находящихся на расстоянии друг от друга. Взаимодействие может происходить в каждый момент лишь между соседними точками пространства (близкодействие). Поэтому мы должны говорить о взаимодействии одной частицы с полем и о последующем взаимодействии поля с другой частицей.

Известно, что существует два вида полей: поля гравитационные и электромагнитные. Изучению гравитационных полей посвящены главы IX — X. В остальных главах мы будем рассматривать только электромагнитные поля.

Взаимодействие данного электромагнитного поля с некоторой частицей определяется одной величиной, характеризующей эту частицу. Эта величина называется зарядом частицы. Взаимодействие поля с частицей пропорционально заряду частицы. Заряд может быть как положительным, так и отрицательным. В частности, он может быть равен нулю. В этом случае говорят, что частица не заряжена, в отличие от частиц заряженных. Заметим, что до тех пор, пока у нас нет никаких формул, связывающих заряд с известными уже величинами, мы можем произвольно выбирать единицу для измерения заряда.

Как мы видели в § 9, для свободной материальной частицы действие $S = -mc\int_a^b ds$. Если заряженная частица (мы будем ниже говорить о ней просто как о заряде) находится в поле, то к этому интегралу надо прибавить член, описывающий взаимодействие поля с частицей. Этот член должен содержать как величины, характеризующие частицу (в частности ее заряд e), так и величины, характеризующие поле. Оказывается, что электромагнитное поле можно характеризовать некоторым четырехмерным вектором A_i. Поскольку единственный скаляр, который можно составить из A_i и дифференциалов dx_i, есть их скалярное произведение $A_i dx_i$, то дополнительный член должен иметь вид

$$\frac{e}{c}\int\limits_a^b A_i dx_i.$$

Скорость света c мы ввели сюда для удобства; никаких других постоянных перед интегралом мы можем не писать, поскольку единица для измерения заряда еще не установлена. Вектор A_i, как только что говорилось, характеризует поле; его компоненты являются, вообще говоря, функциями координат и времени. Вектор A_i носит название 4-потенциала поля. Таким образом, действие для заряда в электромагнитом поле имеет вид

$$S = \int\limits_a^b \left(-mc\,ds + \frac{e}{c} A_k dx_k\right). \tag{14,1}$$

Заметим, что единицы для измерения A_i тоже остаются произвольными, пока произволен выбор единиц для e.

Три пространственные компоненты вектора A_i образуют трехмерный вектор $\mathbf{A}$, называемый векторным потенциалом поля. Временная компонента вектора A_i мнима, т. е. имеет вид $A_4 = i\varphi$. Действительная величина φ называется скалярным потенциалом поля. Таким образом,

$$A_{1,2,3} = A_{x,y,z}, \quad A_4 = i\varphi. \tag{14,2}$$

Поэтому интеграл действия можно написать в виде

$$S = \int\limits_a^b \left(-mc\,ds + \frac{e}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{r} - e\varphi\,dt\right).$$

Далее, $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — вектор скорости частицы. Поэтому действие принимает вид

$$S = \int\limits_a^b \left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi\right) dt. \tag{14,3}$$

Подинтегральные выражения есть не что иное, как функция Лагранжа для заряда в электромагнитном поле:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi. \tag{14,4}$$

Эта функция отличается от функции Лагранжа (9,2) для свободной частицы членами $\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi$, которые и описывают взаимодействие заряда с полем.

§ 15. Уравнения движения заряда в поле

Заряд, находящийся в поле, не только подвергается воздействию со стороны поля, но в свою очередь сам влияет на поле, изменяя его. Поэтому заряд, помещенный во внешнее поле, подвергается, строго говоря, действию этого поля, измененного им самим. Однако, если заряд e не очень велик, то действием заряда на поле, т. е. изменением поля благодаря заряду, можно пренебречь. В этом случае, рассматривая движение заряда в заданном поле, можно считать, что само поле не зависит при этом ни от координат, ни от скорости заряда. Точные условия, которым должен удовлетворять заряд для того, чтобы он мог считаться в указанном смысле малым, будут выяснены в дальнейшем (см. § 72). Ниже мы будем считать это условие выполненным.

Итак, нам надо найти уравнения движения заряда в заданном электромагнитном поле. Эти уравнения получаются варьированием интегралов действия. Уравнения движения будут, следовательно, обычными уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}, \tag{15,1}$$

где L определяется формулой (14,4).

Производная $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ есть обобщенный импульс частицы; обозначим его через $\mathbf{P}$. С помощью (14,4) находим

$$\mathbf{P}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}=\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{15,2}$$

Здесь мы обозначим посредством $\mathbf{p}$ обычный импульс частицы, который мы и будем называть просто импульсом.

Для того, чтобы написать уравнения Лагранжа, мы должны еще определить производную $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$. С помощью (14,4) находим

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}\equiv\nabla L=\frac{e}{c}\operatorname{grad}\mathbf{Av}-e\operatorname{grad}\varphi.$$

Но по известной формуле векторного анализа

$$\operatorname{grad}\mathbf{ab}=(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}+(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}+[\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}]+[\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}],$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — любые два вектора. Применяя эту формулу к $\mathbf{Av}$ и помня, что дифференцирование по $\mathbf{r}$ производится при постоянном $\mathbf{v}$, находим

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}=\frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{A}]-e\operatorname{grad}\varphi.$$

Уравнения Лагранжа, следовательно, имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)=\frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{A}]-e\operatorname{grad}\varphi.$$

Но полный дифференциал $\frac{d\mathbf{A}}{dt}dt$ складывается из двух частей: из изменения $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}dt$ векторного потенциала со временем в данной точке пространства и из изменения при переходе от одной точки пространства к другой на расстоянии $d\mathbf{r}$. Эта вторая часть, как известно из векторного анализа, есть $(d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{A}$. Таким образом, производная $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ имеет вид

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{A}.$$

Подставляя это в предыдущее уравнение, получаем

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e\,\mathrm{grad}\,\varphi + \frac{e}{c}\,[\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}]. \tag{15,3}$$

Это и есть уравнение движения частицы в электромагнитном поле. Слева стоит производная от импульса частицы по времени. Следовательно, выражение в правой части (15,3) есть сила, действующая на заряд в электромагнитном поле. Мы видим, что эта сила состоит из двух частей. Первая часть [первый и второй члены в правой части (15,3)] не зависит от скорости частицы. Вторая часть (третий член) зависит от этой скорости, а именно, пропорциональна скорости и перпендикулярна к ней.

Силу первого рода, отнесенную к заряду, равному единице, называют напряженностью электрического поля; обозначим его посредством $\mathbf{E}$. Итак, по определению

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi. \tag{15,4}$$

Множитель при скорости, точнее при $\mathbf{v}/c$, в силе второго рода, действующей на единичный заряд, называют напряженностью магнитного поля; обозначим его через $\mathbf{H}$. Итак, по определению

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \tag{15,5}$$

Если в электромагнитном поле $\mathbf{E} \neq 0$, а $\mathbf{H} = 0$, то говорят об электрическом поле; если же $\mathbf{E} = 0$, а $\mathbf{H} \neq 0$, то поле называют магнитным. В общем случае электромагнитное поле является наложением полей электрического и магнитного.

Уравнения движения заряда в электромагнитном поле можно теперь написать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\,[\mathbf{v}\mathbf{H}]. \tag{15,6}$$

Стоящее справа выражение носит название лоренцовой силы. Первая ее часть — сила, с которой действует электрическое поле на заряд, — не зависит от скорости заряда и направлена по напряженности поля $\mathbf{E}$. Вторая часть — сила, оказываемая магнитным полем на заряд, — пропорциональна скорости заряда и направлена перпендикулярно к этой скорости и направлению магнитного поля $\mathbf{H}$.

Для скоростей, малых по сравнению со скоростью света, функция Лагранжа (14,4) переходит в

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\,\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi. \tag{15,7}$$

Импульс $\mathbf{p}$ в этом случае приближенно равен своему классическому выражению $m\mathbf{v}$, и уравнение движения (15,6) переходит в

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]. \tag{15,8}$$

Таким образом, мы можем рассматривать движение в поле также и частиц, подчиняющихся классической механике (т. е. кинетическая энергия которых есть $mv^2/2$, а импульс $m\mathbf{v}$).

Выведем еще уравнение, определяющее изменение кинетической энергии частицы со временем, т. е. производную $\dfrac{d\mathscr{E}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$.

Легко убедиться, что

$$d\mathscr{E} = \mathbf{v}\,d\mathbf{p},$$

откуда

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \mathbf{v}\frac{d\mathbf{p}}{dt};$$

подставляя $\dfrac{d\mathbf{p}}{dt}$ из (15,6), имеем

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v} \tag{15,9}$$

(замечая, что $[\mathbf{vH}]\,\mathbf{v} = [\mathbf{vv}]\,\mathbf{H} = 0$).

Изменение кинетической энергии со временем есть работа, произведенная полем над частицей (в единицу времени). Из (15,9) видно, что эта работа равна произведению скорости заряда на силу, с которой действует на него электрическое поле. Работа поля за время dt, т. е. при перемещении заряда на $d\mathbf{r}$, равна, очевидно, $e\mathbf{E}d\mathbf{r}$.

Подчеркнем то обстоятельство, что работу над зарядом производит только электрическое поле; магнитное поле не производит работы над движущимся в нем зарядом. Последнее связано с тем, что сила, с которой магнитное поле действует на заряд, всегда перпендикулярна к скорости заряда.

§ 16. Градиентная инвариантность

Рассмотрим теперь вопрос о том, насколько однозначно определены потенциалы поля. Раньше всего обратим внимание на то обстоятельство, что поле характеризуется тем действием, которое оно оказывает на находящиеся в нем заряды, точнее, — на движение этих зарядов. Но в уравнения движения (15,6) входят не потенциалы, а напряженности поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Поэтому два поля физически тождественны, если они характеризуются одними и теми же векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Если заданы потенциалы $\mathbf{A}$ и φ, то этим согласно (15,4) и (15,5) вполне однозначно определены $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, а значит и поле. Однако, одному и тому же полю могут соответствовать различные потенциалы. Чтобы убедиться в этом, прибавим к компонентам потенциала A_k по величине

$\frac{\partial f}{\partial x_k}$, где f — произвольная функция от координат и времени. Тогда потенциал A_k переходит в

$$A'_k = A_k + \frac{\partial f}{\partial x_k}. \tag{16,1}$$

При такой замене в интеграле действия (14,1) появится дополнительный член

$$\frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k = \frac{e}{c}df.$$

Но прибавление к подинтегральному выражению в действии полного дифференциала, как известно [1]), не влияет на уравнения движения.

Если ввести вместо четырехмерного потенциала векторный и скалярный и вместо координат x_i — координаты x, y, z, t, то четыре равенства (16,1) можно написать в виде

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{16,2}$$

Легко убедиться в том, что электрическое и магнитное поля, определенные равенствами (15,4) и (15,5), действительно не изменяются при подстановке вместо $\mathbf{A}$ и φ потенциалов $\mathbf{A}'$ и φ', определенных согласно (16,2). Таким образом, преобразование потенциалов (16,1) не изменяет поля. Потенциалы определены поэтому не однозначно — векторный потенциал определен с точностью до градиента произвольной функции и скалярный — с точностью до производной по времени от той же функции.

В частности, очевидно, к векторному потенциалу можно прибавить любой постоянный вектор, а к скалярному потенциалу — любую постоянную. Это видно и непосредственно из того, что в определение $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ входят только производные от $\mathbf{A}$ и φ и потому прибавление к последним постоянных не влияет на напряжение поля.

Физический смысл имеют лишь те величины, которые инвариантны по отношению к преобразованию (16,2) потенциалов; в частности, все уравнения должны быть инвариантны по отношению к этому преобразованию. Эту инвариантность мы назовем градиентной [2]) (по-немецки ее называют Eichinvarianz, по-английски — gauge invariance).

Описанная неоднозначность потенциалов дает всегда возможность выбрать их так, чтобы они удовлетворяли одному выбранному нами дополнительному условию (соотношению между ними). Подчеркиваем, что именно одному условию, так как мы можем произвольно выбрать одну функцию f в (16,2). В частности, всегда возможно выбрать потенциал поля так, чтобы скалярный потенциал φ был равен нулю. Сделать векторный потенциал равным нулю, если он нулю не равен, вообще говоря, невозможно, так как условие $\mathbf{A} = 0$ представляет собой три дополнительных условия (для трех компонент $\mathbf{A}$).

---

[1]) При интегрировании полного дифференциала некоторой функции получается постоянная разность значений этой функции на пределах интеграла. При варьировании интеграла эта постоянная исчезает.

[2]) Это название предложено В. А. Фоком.

Зак. 4716. Л. Ландау и Е. Лифшиц

(§18) § 17. Постоянное электромагнитное поле

Постоянным электромагнитным полем мы называем поле, не зависящее от времени. Очевидно, что потенциалы постоянного поля можно выбрать так, чтобы они были функциями только от координат, но не от времени. Постоянное магнитное поле попрежнему равно согласно (15,5) $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Постоянное электрическое поле равно согласно (15,4)

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{17,1}$$

Таким образом, постоянное электрическое поле определяется только скалярным потенциалом, а магнитное — векторным потенциалом.

Мы видели в предыдущем параграфе, что потенциалы поля определены не однозначно. Легко, однако, убедиться в том, что если описывать постоянное электромагнитное поле с помощью не зависящих от времени потенциалов, то к скалярному потенциалу можно прибавить, не изменяя поля, лишь произвольную постоянную (не зависящую ни от координат, ни от времени). Обычно на φ накладывают еще дополнительное условие, требуя, чтобы он имел определенное значение в определенной точке пространства; чаще всего выбирают φ так, чтобы он был равен нулю на бесконечности. Тогда и упомянутая произвольная постоянная становится определенной, и скалярный потенциал постоянного поля, таким образом, становится вполне однозначным.

Напротив, векторный потенциал попрежнему не однозначен даже для постоянного электромагнитного поля; именно к нему можно прибавить градиент от любой функции координат.

Определим, чему равна энергия заряда в постоянном электромагнитном поле. Если поле постоянно, то и функция Лагранжа для заряда не зависит явно от времени. Как известно, в этом случае энергия сохраняется. Энергия заряда находится по известной формуле

$$\mathcal{E} = \mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L,$$

где для L мы должны взять выражение (14,4). С помощью этого выражения мы находим для полной энергии $\mathcal{E}$ заряда в поле

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \tag{17,2}$$

Таким образом, благодаря наличию поля к энергии частицы прибавляется член $e\varphi$ — потенциальная энергия заряда в поле. Отметим то существенное обстоятельство, что энергия зависит только от скалярного, но не от векторного потенциала. В связи с формулой $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ и с (17,1) это значит, что магнитное поле не влияет на энергию зарядов. Энергию частицы может изменить только электрическое поле. Это стоит в связи с тем, что, как упоминалось в конце § 15, магнитное поле, в противоположность электрическому, не производит над зарядом работы.

Если напряженность поля во всех точках пространства одинакова, то поле называют однородным. Выразим скалярный потенциал однородного электрического поля через напряженность поля **E**. Легко убедиться в том, что для однородного поля

$$\varphi = -\mathbf{Er}, \tag{17,3}$$

так как, поскольку $\mathbf{E} = \mathrm{const}$, $-\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}(\mathbf{Er}) = (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{r} + [\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{r}] = \mathbf{E}$ (напоминаем, что $\operatorname{rot}\mathbf{r} = 0$).

Выразим теперь векторный потенциал однородного магнитного поля через напряженность этого поля **H**. Легко убедиться, что потенциал **A** может быть написан в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{Hr}]. \tag{17,4}$$

Действительно, помня, что $\mathbf{H} = \mathrm{const}$., мы находим с помощью известных формул векторного анализа:

$$\operatorname{rot}[\mathbf{Hr}] = \mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{r} - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{r} = 2\mathbf{H}$$

(напоминаем, что $\operatorname{div}\mathbf{r} = 3$).

Векторный потенциал однородного магнитного поля можно выбрать и иначе, например, в виде

$$A_x = -Hy, \quad A_y = A_z = 0 \tag{17,5}$$

(ось Z выбрана вдоль направления **H**). Легко убедиться, что и при таком выборе **A** имеет место $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$.

Если скорость движения заряда мала по сравнению с c, то его функция Лагранжа есть

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{Av} - e\varphi$$

[см. (15,7)]. Пусть заряд находится в постоянном однородном магнитном поле. Тогда $\varphi = 0$, а **A** определяется равенством (17,4). Функция Лагранжа

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{2c}[\mathbf{Hr}]\,\mathbf{v}. \tag{17,6}$$

Если перейти от неподвижной системы координат к равномерно вращающейся, то, согласно известной формуле, скорость $\mathbf{v}'$ частицы в новой системе координат связана с ее же скоростью **v** в первоначальной системе посредством соотношения

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + [\mathbf{\Omega r}],$$

где **r** — радиус-вектор частицы, а $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращающейся системы. Функция Лагранжа для частицы в такой системе координат есть

$$L = \frac{mv'^2}{2} = \frac{m}{2}(\mathbf{v} - [\mathbf{\Omega r}])^2.$$

Если положить здесь

$$\mathbf{\Omega} = -\frac{e}{2mc}\mathbf{H}, \tag{17,7}$$

то при достаточно слабом магнитном поле (когда можно пренебречь квадратом H^2) эта функция Лагранжа совпадает с (17,6). Таким образом, мы приходим к выводу, что поведение частицы в постоянном однородном слабом магнитном поле тождественно с ее поведением во вращающейся системе координат. Заметим, что угловая скорость $\Omega = eH/2mc$ этой системы называется ларморовой частотой.

§19 § 18. Движение в постоянном однородном электрическом поле

Рассмотрим движение заряда e в однородном постоянном электрическом поле $\mathbf{E}$. Направление поля выберем за ось X. Если начальная скорость (скорость в момент времени $t=0$) есть $\mathbf{v}_0$, то заряд, очевидно, будет двигаться все время в плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{v}_0$. Эту плоскость выберем за плоскость XY. Тогда уравнения движения (15,6), т. е.

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E},$$

(точка над $\mathbf{p}$ обозначает дифференцирование по t) примут вид

$$\frac{dp_x}{dt} = eE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0;$$

отсюда

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0. \tag{18,1}$$

Начало отсчета времени (т. е. момент $t=0$) мы выбрали в тот момент, когда $p_x = 0$; p_0 есть импульс частицы в этот момент.

Кинетическая энергия $\mathscr{E}$ частицы (энергия без потенциальной энергии в поле) равна, согласно (10,13), $\mathscr{E} = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$. Подставляя сюда (18,1), находим в нашем случае

$$\mathscr{E} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2 + (ceEt)^2}.$$

Согласно (10,5) скорость частицы $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c^2}{\mathscr{E}}$. Для скорости $v_x = \dot{x}$ мы имеем, следовательно, в нашем случае

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2eEt}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2}},$$

где $\mathscr{E}_0 = c\sqrt{m^2c^2 + p_0^2}$ есть энергия при $t=0$. Интегрируя, находим:

$$x = \frac{1}{eE}\sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2}. \tag{18,2}$$

Постоянную интегрирования полагаем равной нулю.

Для определения y имеем

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y c^2}{\mathscr{E}} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2}},$$

откуда

$$y = \frac{p_0 c}{eE} \operatorname{argsh} \frac{ceEt}{\mathscr{E}_0}. \tag{18,3}$$

Уравнение траектории находим, выражая из (18,3) t через y и подставляя в (18,2). Это дает:

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \operatorname{ch} \frac{eEy}{p_0 c}. \tag{18,4}$$

Таким образом, заряд движется в однородном электрическом поле по цепной линии.

Если скорость частицы $v \ll c$, то можно положить $p_0 = mv_0$, $\mathcal{E}_0 = mc^2$ и $\operatorname{ch} \frac{eEy}{p_0 c}$ в (18,4) можно разложить в ряд по степеням $\frac{1}{c}$. Тогда мы получаем с точностью до членов высшего порядка:

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2} y^2, \tag{18,5}$$

т. е. заряд движется по параболе, — результат, хорошо известный из классической механики.

§ 19. Движение в постоянном однородном магнитном поле

Рассмотрим теперь движение заряда e в однородном магнитном поле $\mathbf{H}$. Направление поля выберем за ось Z. Уравнения движения

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{vH}]$$

мы перепишем в другом виде, поставив вместо импульса согласно (10,6)

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2},$$

где $\mathcal{E}$ — энергия частицы, которая, как мы знаем из § 17, в магнитном поле постоянна. Уравнения движения приобретают тогда вид

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{vH}], \tag{19,1}$$

или, в компонентах,

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0, \tag{19,2}$$

где мы ввели обозначение

$$\omega = \frac{ecH}{\mathcal{E}}. \tag{19,3}$$

Умножим второе из уравнений (19,2) на i и сложим с первым. Мы находим

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y),$$

откуда

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t},$$

где a — комплексная постоянная. Ее можно написать в виде $a = v_{0t} e^{-i\alpha}$, где v_{0t} и α вещественны. Тогда

$$v_x + iv_y = v_{0t} e^{-i(\omega t + \alpha)}$$

и, отделяя действительную и мнимую части, находим

$$v_x = v_{0t}\cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v_{0t}\sin(\omega t + \alpha). \tag{19,4}$$

Постоянные v_{0t} и α определяются начальными условиями, α есть начальная фаза; что же касается v_{0t}, то из (19,4) видно, что

$$v_{0t} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

т. е. v_{0t} есть скорость частицы в плоскости XY, остающаяся при движении постоянной.

Из (19,4) находим, интегрируя еще раз,

$$x = x_0 + r\sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + r\cos(\omega t + \alpha), \tag{19,5}$$

где

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}\mathcal{E}}{ecH} = \frac{cp_t}{eH} \tag{19,6}$$

(p_t — проекция импульса на плоскость XY). Из третьего уравнения (19,2) находим $v_z = v_{0z}$ и

$$z = z_0 + v_{0z}t; \tag{19,7}$$

x_0, y_0, z_0 — начальные координаты частицы.

Из (19,5) и (19,7) видно, что заряд движется в однородном магнитном поле по винтовой линии с осью вдоль магнитного поля и с радиусом r, определяемым (19,6). Скорость частицы при этом постоянна. В частном случае, когда $v_{0z} = 0$, т. е. заряд не имеет скорости вдоль поля, он движется по окружности в плоскости, перпендикулярной полю.

Величина ω, как видно из формул, есть циклическая частота вращения электрона в плоскости, перпендикулярной полю.

Если скорость частицы мала, то мы можем приближенно положить $\mathcal{E} = mc^2$. Тогда частота ω превращается в

$$\omega = \frac{eH}{mc}. \tag{19,8}$$

Она равна удвоенной ларморовской частоте (17,7).

Задача

Определить частоты колебаний заряженного пространственного осциллятора, находящегося в постоянном однородном магнитном поле; собственная частота колебаний осциллятора (в отсутствии поля) есть ω_0.

Решение: Уравнения вынужденных колебаний осциллятора в магнитном поле (направленном вдоль оси Z) гласят:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eH}{mc}\dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{eH}{mc}\dot{x}, \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$

Умножая второе уравнение на i и складывая с первым, находим

$$\ddot{\zeta} + \omega_0^2\zeta = -i\frac{eH}{mc}\dot{\zeta},$$

где $\zeta = x + iy$. Отсюда находим, что частоты колебаний осциллятора в плоскости, перпендикулярной к полю, равны

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2} \pm \frac{eH}{2mc}.$$

Если поле H слабо, то эта формула переходит в

$$\omega_0 \pm \frac{eH}{2mc}.$$

Колебания вдоль направления поля остаются неизменными.

§ 20. Движение заряда в постоянных однородных электрическом и магнитном полях

Наконец, рассмотрим движение заряда в случае наличия одновременно электрического и магнитного полей, однородных и постоянных. Мы ограничимся при этом случаем, когда скорость заряда $v \ll c$, и потому его импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Направление $\mathbf{H}$ выберем за ось Z, а плоскость, проходящую через векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$, за плоскость YZ. Тогда уравнения движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$$

напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e}{c}\dot{y}H, \\ m\ddot{y} &= eE_y - \frac{e}{c}\dot{x}H, \\ m\ddot{z} &= eE_z. \end{aligned}\right\} \tag{20,1}$$

Из третьего из этих уравнений видно, что вдоль оси Z заряд движется равномерно-ускоренно, т. е.

$$z = \frac{eE_z}{2m}t^2 + v_{0z}t. \tag{20,2}$$

Умножая второе из уравнений (20,1) на i и складывая с первым, находим

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) + i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) = i\frac{e}{m}E_y$$

$\left(\omega = \frac{eH}{mc}\right)$. Интеграл этого уравнения, где $\dot{x} + i\dot{y}$ рассматривается как неизвестное, равен сумме интеграла этого же уравнения без правой части и частного интеграла уравнения с правой частью. Первый из них есть $ae^{-i\omega t}$, второй равен $\frac{eE_y}{m\omega} = \frac{cE_y}{H}$. Таким образом,

$$\dot{x} + i\dot{y} = ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{H}.$$

Постоянная a, вообще говоря, комплексная. Написав ее в виде $a = be^{i\alpha}$ с действительными b и α, мы видим, что поскольку a умножается на $e^{-i\omega t}$, то, выбирая соответствующим образом начало отсчета времени, мы можем придать фазе α любое значение. Выберем ее так, чтобы a

было действительно. Тогда, отделяя в $\dot{x}+i\dot{y}$ мнимую и действительную части, находим

$$\dot{x}=a\cos\omega t+c\,\frac{E_y}{H},\quad \dot{y}=-a\sin\omega t.$$

В момент времени $t=0$ скорость направлена по оси X; обозначим ее значение в этот момент посредством v_0. Тогда имеем $a=v_0-\frac{cE_y}{H}$, так что

$$\dot{x}=\left(v_0-\frac{cE_y}{H}\right)\cos\omega t+\frac{cE_y}{H},$$

$$\dot{y}=-\left(v_0-\frac{cE_y}{H}\right)\sin\omega t. \tag{20,3}$$

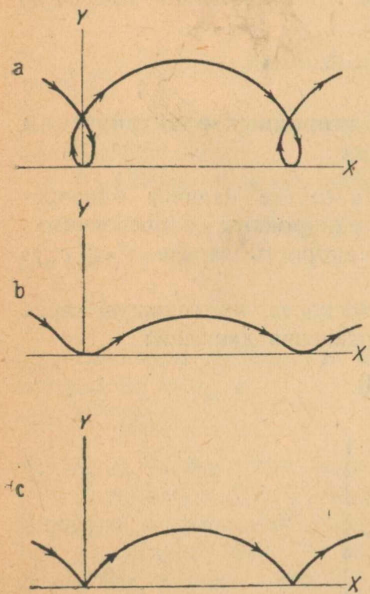

Рис. 5.

Мы видим, что скорость частицы является периодической функцией времени. Среднее значение скорости легко найти, замечая, что среднее значение $\overline{\cos\omega t}=\overline{\sin\omega t}=0$:

$$\overline{\dot{x}}=\frac{cE_y}{H},\quad \overline{\dot{y}}=0. \tag{20,4}$$

Таким образом, средняя скорость в направлении оси Y равна нулю, а средняя скорость вдоль оси X, т. е. перпендикулярно к магнитному и электрическому полям, отлична от нуля.

Все формулы этого параграфа применимы, если скорость частицы мала по сравнению со скоростью света; мы видим [из (20,3) или (20,4)], что для этого требуется, в частности, чтобы электрическое и магнитное поля удовлетворяли условию

$$\frac{E_y}{H}\ll 1, \tag{20,5}$$

абсолютные же величины E_y и H могут быть произвольными.

Интегрируя еще раз уравнения (20,3) и выбирая постоянные интегрирования так, чтобы при $t=0$ было $x=y=0$, получаем

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{\omega}\left(v_0-\frac{cE_y}{H}\right)\sin\omega t+\frac{cE_y}{H}t,\\ y&=\frac{1}{\omega}\left(v_0-\frac{cE_y}{H}\right)(\cos\omega t-1). \end{aligned}\right\} \tag{20,6}$$

Рассматриваемые как параметрические уравнения кривой эти уравнения определяют собой так называемую трохоиду. В зависимости от того, больше или меньше абсолютная величина $\left(v_0-\frac{cE_y}{H}\right)$, чем абсолютная величина $\frac{cE_y}{H}$, проекция траектории частицы на плоскость XY имеет вид, изображенный соответственно на рис. 5,a и рис. 5,b.

Если скорость $v_0 = 0$, то (20,6) переходит в

$$x = \frac{cE_y}{\omega H}(\omega t - \sin \omega t), \quad y = \frac{cE_y}{\omega H}(1 - \cos \omega t), \tag{20,7}$$

т. е. проекция траектории на плоскость XY является циклоидой (рис. 5, с).

22 § 21. Тензор электромагнитного поля

В § 15 мы вывели уравнения движения заряда в поле, исходя из функции Лагранжа (14,4), написанной в трехмерном виде. Выведем теперь те же уравнения непосредственно из действия (14,1), написанного в четырехмерных обозначениях.

Принцип наименьшего действия гласит

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc\, ds + \frac{e}{c} A_i dx_i \right) = 0. \tag{21,1}$$

Замечая, что $ds = \sqrt{-dx_i^2}$, находим (пределы интегрирования a и b мы будем ниже для краткости опускать):

$$\delta S = \int \left[-mc\, \delta ds + \frac{e}{c} \delta (A_i dx_i) \right] = \int \left(mc \frac{dx_i \delta dx_i}{ds} + \frac{e}{c} A_i \delta dx_i + \right.$$
$$\left. + \frac{e}{c} \delta A_i dx_i \right) = \int \left(mc \frac{dx_i d\delta x_i}{ds} + \frac{e}{c} A_i d\delta x_i + \frac{e}{c} \delta A_i dx_i \right) = 0.$$

Первые два члена в подинтегральном выражении проинтегрируем по частям. Кроме того, в первом члене подставим $\frac{dx_i}{ds} = u_i$, где u_i — компоненты 4-скорости. Тогда

$$\int \left(-mc du_i \delta x_i - \frac{e}{c} \delta x_i dA_i + \frac{e}{c} \delta A_i dx_i \right) + \left(mcu_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x_i \Big| = 0.$$

Второй член этого равенства равен нулю, так как интеграл варьируется при заданных пределах, т. е. на пределах $(\delta x_i)_a = (\delta x_i)_b = 0$. Далее:

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \delta x_k, \quad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx_k,$$

и поэтому

$$\int \left(-mc\, du_i \delta x_i - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \delta x_i dx_k + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx_i \delta x_k \right) = 0.$$

Напишем в первом члене $du_i = \frac{du_i}{ds} ds$, во втором и третьем $dx_i = u_i ds$. Кроме того, в третьем члене поменяем местами индексы i и k (это ничего не изменит, так как по значкам i и k производится суммирование). Тогда

$$\int \left[-mc \frac{du_i}{ds} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) u_k \right] \delta x_i ds = 0.$$

В виду произвольности δx_i отсюда следует, что подинтегральное выражение равно нулю, т. е.

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) u_k. \tag{21,2}$$

Введем обозначение

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \tag{21,3}$$

Тензор F_{ik} называется тензором электромагнитного поля. Уравнения движения (21,2) тогда принимают вид:

$$mc\,\frac{du_i}{ds}=\frac{e}{c}\,F_{ik}\,u_k. \tag{21,4}$$

Эти четыре (для $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$) уравнения и являются уравнениями движения заряда в электромагнитном поле в четырехмерном виде.

Из определения тензора F_{ik} следует, что

$$F_{ik}=-F_{ki}, \tag{21,5}$$

т. е. тензор электромагнитного поля антисимметричен. Поэтому $F_{ik}=0$ при $i=k$.

Подставляя в (21,3) $A_{1,2,3}=A_{x,y,z}$, $A_4=i\varphi$, легко находим следующие значения отдельных компонент тензора F_{ik}:

$$\begin{gathered}F_{11}=F_{22}=F_{33}=F_{44}=0,\\ \begin{aligned} F_{12}&=-F_{21}=H_z, & F_{14}&=-F_{41}=-iE_x,\\ F_{13}&=-F_{31}=-H_y, & F_{24}&=-F_{42}=-iE_y,\\ F_{23}&=-F_{32}=H_x, & F_{34}&=-F_{43}=-iE_z.\end{aligned}\end{gathered}$$

Это можно написать в виде таблицы:

$$(F_{ik})=\begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x\\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y\\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z\\ iE_x & iE_y & iE_z & 0\end{pmatrix}. \tag{21,6}$$

Таким образом, компоненты напряженностей электрического и магнитного полей являются компонентами одного 4-тензора электромагнитного поля.

Из (21,6) видно, что пространственные компоненты тензора F_{ik} (т. е. компоненты с $i,\ k=1,\ 2,\ 3$) связаны с магнитным полем. Именно, компоненты магнитного поля $\mathbf{H}$ образуют трехмерный антисимметричный тензор 2-го ранга. Это значит, как известно, что вектор $\mathbf{H}$ есть аксиальный вектор (см. § 6).

Что касается компонент электрического поля $\mathbf{E}$, то они являются временными компонентами F_{ik} (одно из i или k равно 4). Вектор $\mathbf{E}$ есть, очевидно, обычный, т. е. полярный, вектор.

С помощью (21,6) и (7,2) легко убедиться в том, что первые три уравнения (21,4) тождественны с уравнением движения (15,6), а четвертое — с уравнением (15,9). То, что соответственно этому только три из них независимы, можно легко обнаружить, непосредственно умножив обе части (21,4) на u_i. Тогда в виду (7,6) и (21,5) обе части уравнения тождественно обратятся в нуль.

Задачи

1. Определить движение заряда, движущегося со скоростью, сравнимой со скоростью света в параллельных электрическом и магнитном полях.

Решение: Выбирая ось Z вдоль направления полей, находим уравнения движения (21,4) в виде (вводим постоянную $\lambda = e/mc^2$):

$$\ddot{x} = \lambda H\dot{y}, \quad \ddot{y} = -\lambda H\dot{x}, \quad \ddot{z} = cE\lambda\dot{t}, \quad c\ddot{t} = E\lambda\dot{z}$$

(точки над x, y, z, t означают здесь дифференцирование по s) с дополнительным условием $u_i^2 = \dot{x}_i^2 = -1$. Эта система распадается на две пары независимых уравнений. Интегрируя их и выбирая соответствующим образом произвольные постоянные (начало отсчета s, начало и направление осей X и Y), находим траекторию в параметрическом виде:

$$x = \frac{a}{\lambda H}\sin\lambda Hs, \quad y = \frac{a}{\lambda H}\cos\lambda Hs, \quad z = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\lambda E}\operatorname{ch}\lambda Es, \quad ct = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\lambda E}\operatorname{sh}\lambda Es$$

(a — произвольная постоянная).

2. То же во взаимно перпендикулярных и равных по абсолютной величине электрическом и магнитном полях.

Решение: Выбирая ось Z по направлению $\mathbf{H}$, а ось Y по направлению $\mathbf{E}$, находим уравнение движения (вводим постоянную $\mu = \frac{eH}{mc^2} = \frac{eE}{mc^2}$):

$$\ddot{x} = \mu\dot{y}, \quad \ddot{y} = \mu(c\dot{t} - \dot{x}), \quad \ddot{z} = 0, \quad c\ddot{t} = \mu\dot{y}.$$

Интегрируя эти уравнения (с условием $u_i^2 = -1$) и выбирая соответствующим образом начало отсчета s и начало координат, находим:

$$x = -\frac{\mu^2 as^3}{6} + bs, \quad y = -\frac{\mu as^2}{2}, \quad z = s\sqrt{a^2 - 2ab - 1}, \quad ct = -\frac{\mu^2 as^3}{6} + (b-a)s$$

(a и b — произвольные постоянные).

§ 22. Преобразование Лоренца для поля

В этом параграфе мы найдем формулы преобразования для поля, т. е. формулы, по которым можно определить поле в одной инерциальной системе отсчета, зная это же поле в другой системе.

Формулы, преобразованные для потенциалов, находятся непосредственно из общих формул преобразования 4-вектора (6,2). Помня, что компоненты вектора A_i есть $A_{x,y,z}$, $i\varphi$, легко находим

$$A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c}\varphi'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z, \quad \varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (22,1)$$

Формулы преобразования для компонент тензора F_{ik} можно было бы найти по общей формуле (6,4) преобразования 4-тензоров. Проще, однако, поступить следующим образом. Вспомним, что переход от системы отсчета K к системе K', движущейся относительно K вдоль оси X, эквивалентен повороту в плоскости $X\tau$ в четырехмерном пространстве x, y, z, τ (см. § 4). Компоненты же тензора преобразуются как произведение двух соответствующих координат. Координаты $x_2 = y$

и $x_3 = z$ при этом преобразовании не меняются. По этой же причине не меняется и F_{23}:

$$F_{23} = F'_{23}. \tag{22,2}$$

Далее, опять-таки, поскольку координаты y и z не меняются, компоненты F_{12}, F_{13} и F_{42}, F_{43} преобразуются просто, соответственно, как координаты $x_1 = x$ и $x_4 = \tau$. Согласно формулам (6,4) легко находим:

$$\left.\begin{aligned} F_{12} &= \frac{F'_{12} - i\frac{V}{c}F'_{42}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad F_{42} = \frac{F'_{42} + i\frac{V}{c}F'_{12}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \\ F_{13} &= \frac{F'_{13} - i\frac{V}{c}F'_{43}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad F_{43} = \frac{F'_{43} + i\frac{V}{c}F'_{13}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c}}}. \end{aligned}\right\} \tag{22,3}$$

Для того, чтобы определить преобразование компоненты F_{14}, заметим следующее: как известно, антисимметричный тензор ранга, равного числу измерений пространства (ср. в § 6 о тензорах e_{iklm} и $e_{\alpha\beta\gamma}$), остается инвариантным при вращении системы координат в этом пространстве. Вращение системы координат x, y, z, τ в плоскости $X\tau$ можно, очевидно, рассматривать как вращение двухмерной системы координат x, τ в двухмерном же пространстве. Тензор с составляющими $F_{11} = F_{44} = 0$, $F_{14} = -F_{41}$ как раз является в этой системе тензором ранга, равного числу измерений. Поэтому при вращении в плоскости $X\tau$

$$F_{14} = F'_{14}. \tag{22,4}$$

Подставим теперь в (22,2—4) вместо компонент F_{ik} их выражения через компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ согласно (21,6). Мы находим тогда следующие формулы преобразования электрического поля:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{22,5}$$

и для магнитного поля:

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{22,6}$$

Таким образом, электрическое и магнитное поля, как и большинство физических величин, относительны, т. е. их свойства различны в разных системах отсчета. В частности, электрическое или магнитное поле может быть равно нулю в одной системе отсчета и в то же время присутствовать в другой системе.

Формулы преобразования (22,5), (22,6) значительно упрощаются для случая $V \ll c$. С точностью до членов порядка V/c мы имеем тогда из (22,5) и (22,6):

$$E_x = E'_x, \quad E_y = E'_y + \frac{V}{c} H'_z, \quad E_z = E'_z - \frac{V}{c} H'_y;$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = H'_y - \frac{V}{c} E'_z, \quad H_z = H'_z + \frac{V}{c} E'_y.$$

Эти формулы могут быть написаны в векторном виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c}[\mathbf{H}'\mathbf{V}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c}[\mathbf{E}'\mathbf{V}]. \tag{22,7}$$

Формулы обратного преобразования из K' в K получаются непосредственно из (22,6) или (22,7) изменением знака у V.

Если в системе K' магнитное поле $\mathbf{H}' = 0$, то, как легко убедиться на основании (22,5) и (22,6), между электрическим и магнитным полями в системе K существует соотношение

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\mathbf{VE}]. \tag{22,8}$$

Если же в K' $\mathbf{E}' = 0$, то в системе K

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{VH}]. \tag{22,9}$$

§ 23. Уравнение Гамильтона-Якоби для заряда в поле

В § 21 при нахождении уравнений движения в четырехмерной форме мы нашли следующее выражение для вариации действия [см. (21,1)]:

$$\delta S = \left(mcu_i + \frac{e}{c} A_i\right)\delta x_i \Big| + \int \left(-mc\, du_i \delta x_i - \frac{e}{c}\delta x_i dA_i + \frac{e}{c}\delta A_i dx_i\right).$$

Если мы рассматриваем истинные траектории, то второй член тождественно равен нулю. Тогда первый член, где один из пределов рассматривается как переменный, дает дифференциал действия как функцию от координат. Таким образом,

$$\delta S = \left(mcu_i + \frac{e}{c} A_i\right)\delta x_i. \tag{23,1}$$

Отсюда

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = mcu_i + \frac{e}{c} A_i = p_i + \frac{e}{c} A_i. \tag{23,2}$$

4-вектор с составляющими $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ есть 4-вектор обобщенного импульса частицы; обозначим его через P_i. Пользуясь выражениями для составляющих 4-скорости и 4-потенциала, находим следующее выражение для компонент P_i:

$$P_\alpha = p_\alpha + \frac{e}{c} A_\alpha, \quad P_4 = i\frac{\mathcal{E}_{\text{кин}} + e\varphi}{c}; \tag{23,3}$$

$\mathcal{E}_{\text{кин}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Пространственные компоненты вектора P_i образуют трехмерный вектор обобщенного импульса (15,2). Временная же компонента есть, очевидно, как и в § 10, $i\mathcal{E}/c$, где $\mathcal{E}$ — полная энергия заряда в поле.

В виду того, что согласно (7,3) $u_i^2 = -1$, мы имеем

$$m^2c^2u_i^2 = \left(P_i - \frac{e}{c}A_i\right)^2 = -m^2c^2. \tag{23,4}$$

В трехмерных обозначениях

$$\left(\frac{\mathcal{E} - e\varphi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2. \tag{23,5}$$

Энергия, выраженная через обобщенный импульс, есть функция Гамильтона для заряда в поле

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\varphi. \tag{23,6}$$

Эти формулы легко получить и непосредственно из функции Лагранжа (14,4) по общей формуле

$$\mathcal{H} = \mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L,$$

где результат должен быть выражен через импульс.

Для малых скоростей, т. е. в классической механике, функция Лагранжа есть

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi$$

[см. (15,7)]. В этом приближении $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$, и мы находим следующее выражение для функции Гамильтона:

$$\mathcal{H} = \frac{\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m} + e\varphi. \tag{23,7}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби получается, как известно, заменой в функции Гамильтона компонент обобщенного импульса P_i производными $\frac{\partial S}{\partial x_i}$. Таким образом, из (23,4) мы имеем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}A_i\right)^2 = -m^2c^2, \tag{23,8}$$

или в трехмерных обозначениях

$$\left(\operatorname{grad} S - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - e\varphi\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{23,9}$$

Задачи

1. Написать вариационный принцип для траектории частицы (принцип Мопертюи) в электромагнитном поле в релятивистской механике.

Решение: Принцип Мопертюи заключается, как известно из механики, в том, что если полная энергия частицы сохраняется (движение в постоянном поле), то ее траектория может быть определена из вариационного уравнения

$$\delta\int \mathbf{P}d\mathbf{r} = 0,$$

где $\mathbf{P}$ — обобщенный импульс частицы, выраженный через энергию и дифференциалы координат, а интеграл берется вдоль траектории частицы. Подставляя $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$ и замечая, что направления $\mathbf{p}$ и $d\mathbf{r}$ совпадают, имеем

$$\delta \int \left(p\, dl + \frac{e}{c} \mathbf{A}\, d\mathbf{r} \right) = 0,$$

где $dl = \sqrt{d\mathbf{r}^2}$ есть элемент дуги. Определяя p из $p^2 + m^2c^2 = \left(\frac{\mathcal{E} - e\varphi}{c}\right)^2$, находим окончательно

$$\delta \int \left\{ \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E} - e\varphi}{c}\right)^2 - m^2c^2}\; dl + \frac{e}{c} \mathbf{A}\, d\mathbf{r} \right\} = 0.$$

2. Найти изменение движения заряженной частицы, находящейся в магнитном поле при медленном изменении этого поля.

Решение: Как известно, при медленном изменении условий движения остаются постоянными так называемые адиабатические инварианты. Поскольку движение в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, является периодическим, то адиабатическим инвариантом является интеграл $I = \oint \mathbf{P}_t d\mathbf{r}$, взятый по полному периоду движения, — в данном случае по окружности ($\mathbf{P}_t$ — проекция обобщенного импульса на указанную плоскость). Подставляя $\mathbf{P}_t = \mathbf{p}_t + \frac{e}{c}\mathbf{A}$, имеем

$$I = \oint \mathbf{P}_t\, d\mathbf{r} = \oint \mathbf{p}_t\, d\mathbf{r} + \frac{e}{c} \oint \mathbf{A}\, d\mathbf{r}.$$

В первом члене замечаем, что $\mathbf{p}_t$ постоянно по абсолютной величине и направлено по $d\mathbf{r}$; ко второму применяем теорему Стокса:

$$I = 2\pi r p_t + \frac{e}{c} H \pi r^2,$$

где r — радиус орбиты. Подставляя $r = \frac{cp_t}{eH}$ [см. (19,6)], находим

$$I = \frac{3\pi c p_t^2}{eH}.$$

Отсюда видно, что при изменении H тангенциальный импульс p_t меняется пропорционально $\sqrt{H}$. Что касается импульса p_z вдоль направления $\mathbf{H}$, то, если при изменении поля не возникает электрического поля, параллельного $\mathbf{H}$ (например, при изменении магнитного поля в соленоиде), он, очевидно, не меняется.

§ 24. Изотропия времени

Уравнения механики инвариантны по отношению к перемене знака у времени, т. е. по отношению и замене будущего прошедшим. Другими словами, в механике оба направления времени эквивалентны, т. е. время изотропно. Это значит, что если согласно уравнениям механики возможно какое-нибудь движение, то возможно и обратное движение, при котором система проходит те же состояния в обратном порядке.

Легко видеть, что то же самое имеет место и в электромагнитном поле в теории относительности. При этом, однако, вместе с заменой t на $-t$ надо изменить знак магнитного поля. Действительно, легко видеть, что уравнения движения (15,6) не меняются, если произвести замену.

$$t \to -t, \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{H}. \tag{24,1}$$

При этом согласно (15,4) и (15,5) скалярный потенциал не меняется, а векторный меняет знак

$$\varphi \to \varphi, \quad \mathbf{A} \to -\mathbf{A}. \tag{24,2}$$

Таким образом, если в электромагнитном поле возможно некоторое движение, то возможно и обратное движение в поле с обратным направлением **H**.

§ 25. Инварианты поля

Из компонент тензора электромагнитного поля можно составить инвариантные величины, остающиеся неизменными при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Для нахождения всех таких инвариантов поступим аналогично тому, как определяются инварианты симметрического тензора второго ранга. Если A_{ik} есть такой тензор, то надо, как известно, приравнять нулю детерминант

$$|A_{ik} - \lambda\delta_{ik}| = 0.$$

Корни λ_1 и λ_2 этого уравнения представляют собой главные значения симметричного тензора A_{ik} и являются его инвариантами; то же самое относится, очевидно, и к коэффициентам при различных степенях в этом уравнении, которые и выбираются обычно в качестве основных инвариантов.

Для антисимметричного тензора, каковым является тензор F_{ik}, операция приведения к диагональному виду не имеет, очевидно, смысла. Можно, однако воспользоваться описанным способом для нахождения инвариантов такого тензора, причем, конечно, корни λ_1, λ_2 не будут обладать смыслом главных значений тензора.

Соответственно сказанному, напишем уравнение

$$|F_{ik} - \lambda\delta_{ik}| = 0.$$

Легко видеть, что в нем будут присутствовать только члены с четными степенями λ. Действительно, определитель не меняется при перестановке строк и столбцов. Кроме того, определитель четного ранга не изменится при изменении знака всех величин. Поэтому, в виду антисимметричности F_{ik}

$$|F_{ik} - \lambda\delta_{ik}| = |F_{ki} - \lambda\delta_{ki}| = |-F_{ik} - \lambda\delta_{ik}| = |F_{ik} + \lambda\delta_{ik}|.$$

Соответственно этому в уравнении для λ будет только два отличных от нуля коэффициента — при λ^2 и при λ^4, т. е. антисимметричный тензор 2-го ранга характеризуется всего двумя инвариантами.

Подставляя выражения (21,6) для компонент тензора F_{ik}, без труда раскрываем детерминант и находим

$$\lambda^4 + \lambda^2(H^2 - E^2) - (\mathbf{HE})^2 = 0$$

(при раскрытии детерминанта удобно выбрать оси координат таким образом, чтобы одна из осей, скажем ось Z, была направлена вдоль **H**, а вектор **E** лежал бы в плоскости YZ). Таким образом, инвариантами являются величины

$$H^2 - E^2 = \text{invar.}, \tag{25,1}$$

$$\mathbf{EH} = \text{invar.} \tag{25,2}$$

Приведенный вывод показывает, что эти два инварианта являются единственными независимыми. Всякий другой инвариант может быть написан как функция этих двух.

Инварианты (25,1) и (25,2), написанные в четырехмерной форме, имеют, как легко убедиться, вид

$$F_{ik}^2, \tag{25,3}$$

$$e_{iklm} F_{ik} F_{lm}, \tag{25,4}$$

где e_{iklm} есть совершенно антисимметричный единичный тензор 4-го ранга (см. § 6).

Необходимо отметить, что величина $e_{iklm} F_{ik} F_{lm}$ (или, иначе, **EH**), строго говоря, является не скаляром, а псевдоскаляром; это видно как из его четырехмерного написания (произведение тензора F_{ik} на его дуальный, см. § 6), так и из трехмерного (произведение аксиального вектора **H** на полярный вектор **E**). Истинным скаляром является $(\mathbf{EH})^2$.

Из инвариантности приведенных двух выражений вытекают следующие выводы. Если в какой-нибудь системе отсчета электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны, т. е. $\mathbf{EH} = 0$, то они перпендикулярны и во всякой другой инерциальной системе отсчета [в силу (25,2)]. Если в какой-нибудь системе отсчета абсолютные величины **E** и **H** равны друг другу, то они одинаковы и в любой другой системе [в силу (25,1)].

Преобразованием Лоренца можно всегда достичь того, чтобы **E** и **H** получили любые значения, удовлетворяющие только условию, чтобы $E^2 - H^2$ и **EH** имели заданные определенные значения. В частности, можно всегда найти такую инерциальную систему отсчета, в которой электрическое и магнитное поля параллельны друг другу. В этой системе $\mathbf{EH} = EH$ и из двух уравнений

$$E^2 - H^2 = E_0^2 - H_0^2, \quad EH = E_0 H_0$$

можно найти значения **E** и **H** в этой системе отсчета ($\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — электрическое и магнитное поля в исходной системе отсчета).

Исключением является случай, когда оба инварианта равны нулю. В этом случае **E** и **H** во всех системах отсчета равны и взаимно перпендикулярны.

Если $\mathbf{EH} = 0$, то можно всегда найти такую систему отсчета, в которой $\mathbf{E} = 0$ или $\mathbf{H} = 0$ (смотря по тому $E^2 - H^2 <$ или > 0), т. е. поле или чисто электрическое, или чисто магнитное. Наоборот, если в какой-нибудь системе отсчета $\mathbf{E} = 0$ или $\mathbf{H} = 0$, то во всякой другой системе они будут взаимно перпендикулярны.

Зак. 4716. Л. Ландау и Е. Лифшиц.

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

§ 26. Первая пара уравнений Максвелла

Из выражений $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$ [(15,5) и (15,4)] для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ легко получить уравнения для этих полей, т. е. соотношения, содержащие только $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Мы должны при этом исключить из выражений для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ потенциалы $\mathbf{A}$ и φ. Для этого определим $\operatorname{rot} \mathbf{E}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi.$$

Но ротор всякого градиента равен нулю, а $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$. Следовательно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{26,1}$$

Беря дивергенцию от обеих частей уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$ и помня, что дивергенция всякого ротора равна нулю, находим

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \tag{26,2}$$

Уравнения (26,1) и (26,2) называются первой парой уравнений Максвелла. Заметим, что эти два уравнения еще не определяют вполне свойства поля. Это видно из того, что они определяют изменение магнитного поля со временем $\left(\text{производную } \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)$, но не определяют производной $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.

Уравнения (26,1) и (26,2) можно написать в интегральной форме. Согласно теореме Гаусса

$$\int \operatorname{div} \mathbf{H}\, dV = \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{f},$$

где интеграл справа берется по всей замкнутой поверхности, охватывающей объем, по которому интегрируется слева. На основании (26,2) мы имеем

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{f} = 0. \tag{26,3}$$

Интеграл от вектора по некоторой поверхности называется потоком вектора через эту поверхность. Таким образом, поток магнитного поля через всякую замкнутую поверхность равен нулю.

Согласно теореме Стокса

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{E}\, d\mathbf{f} = \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l},$$

где интеграл справа берется по замкнутому контуру, огибающему поверхность, по которой интегрируется слева. Из (26,1) мы находим, интегрируя обе части по некоторой поверхности:

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{H}\, d\mathbf{f}. \tag{26,4}$$

Интеграл вектора по замкнутому контуру называется циркуляцией этого вектора по контуру. Циркуляцию электрического поля называют также электродвижущей силой в данном контуре. Таким образом, электродвижущая сила в некотором контуре равна взятой с обратным знаком производной по времени от потока магнитного поля через поверхность, ограничиваемую этим контуром.

Уравнения Максвелла (26,1) и (26,2) можно написать и в четырехмерных обозначениях. На основании определения тензора электромагнитного поля

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

легко убедиться, что

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}=0. \tag{26,5}$$

При $i=k=l$ это уравнение выполняется тождественно (так как $F_{ik}=0$ при $i=k$). При одинаковых двух из i, k, l это уравнение тривиально в силу антисимметричности F_{ik}. Остальные четыре уравнения (при $i\neq k\neq l$), как легко убедиться, подставляя выражения (21,6) для F_{ik}, являются не чем иным, как уравнениями (26,1) и (26,2). Таким образом, (26,5) есть первая пара уравнений Максвелла, написанная в четырехмерных обозначениях.

§ 27. Действие для электромагнитного поля

Действие S для всей системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами, должно состоять из трех частей:

$$S=S_f+S_m+S_{mf}. \tag{27,1}$$

S_m есть та часть действия, которая зависит только от свойств частиц. Эта часть, очевидно, есть не что иное, как действие для свободных частиц, т. е. для частиц в отсутствии поля. Действие для свободной частицы есть, как мы знаем, $-mc\int ds$ [см. (9,1)]. Если имеется несколько частиц, то их общее действие равно сумме действия для каждой частицы в отдельности. Таким образом,

$$S_m=-\sum mc\int ds. \tag{27,2}$$

S_{mf} есть та часть действия, которая обусловлена взаимодействием между частицами и полем. Как мы видели в § 14, она имеет вид $\frac{e}{c}\int A_k dx_k$ или, в случае нескольких частиц,

$$S_{mf}=\sum\frac{e}{c}\int A_k dx_k. \tag{27,3}$$

В каждом из членов этой суммы A_k есть потенциал поля в той точке пространства и времени, в которой находится соответствующая частица. Сумма S_m+S_{mf} есть уже известное нам действие (14,1) для заряда в поле, которое мы писали раньше просто как S.

Наконец, S_f есть та часть действия, которая зависит только от свойств самого поля, т. е. S_f есть действие для поля в отсутствии зарядов. До тех пор, пока мы интересовались только движением зарядов в заданном электромагнитном поле, S_f, как не зависящее от частиц, нас не интересовало, так как этот член не мог повлиять на уравнения движения частицы. Он делается, однако, необходимым, когда мы хотим найти уравнения, определяющие само поле. Этому соответствует то обстоятельство, что из части $S_m + S_{mf}$ действия мы нашли только два уравнения поля (27,1) и (27,2), которые еще недостаточны для полного определения поля.

Для установления вида действия поля S_f мы будем исходить из следующего весьма важного свойства электромагнитных полей. Как показывает опыт, электромагнитное поле подчиняется так называемому принципу суперпозиции. Этот принцип заключается в том, что если один заряд создает одно поле, а другой — другое, то поле, создаваемое обоими факторами вместе, представляет собой результат простого сложения полей, которые создаются каждым из зарядов в отдельности. Это значит, что напряженности результирующего поля в каждой точке равны сумме напряженностей в этой точке каждого из полей в отдельности.

Всякое решение уравнений поля является полем, которое может быть осуществлено в природе. Согласно принципу суперпозиции сумма любых таких полей тоже должна быть полем, которое может быть осуществлено в природе, т. е. должно удовлетворять уравнениям поля.

Как известно, линейные дифференциальные уравнения как раз отличаются тем свойством, что сумма любых его решений тоже является решением. Следовательно, уравнения для поля должны быть линейными дифференциальными уравнениями.

Из сказанного следует, что под знаком интеграла в действии S_f должно стоять выражение, квадратичное по полю. Только в этом случае уравнения поля будут линейными, — уравнения поля получаются варьированием действия, а при варьировании степень подынтегрального выражения понижается на единицу.

В выражение для действия S_f не могут входить потенциалы поля, так как они не определены однозначно (в S_{mf} эта неоднозначность была не существенна). Поэтому S_f должно быть интегралом некоторой функции от тензора электромагнитного поля F_{ik} [1]). Но действие должно быть скаляром и потому должно быть интегралом от некоторого скаляра. К тому же, как было выше отмечено, этот скаляр, стоящий под знаком интеграла, должен быть квадратичным по F_{ik}.

[1]) Подинтегральная функция в S_f не должна содержать производных от F_{ik}, так как функция Лагранжа может содержать кроме координат системы только их первые производные по времени, а роль координат (т. е. переменных, по которым производится варьирование в принципе наименьшего действия) играют в этом случае потенциалы A_k поля; это аналогично тому, что в механике функция Лагранжа для механической системы содержит только координаты частиц и их первые производные по времени.

Мы уже знаем, что существует всего только один скаляр второй степени, который можно составить из F_{ik} (§ 25); им является F_{ik}^2 (величина $e_{iklm}F_{ik}F_{lm}$ есть псевдоскаляр).

Таким образом, S_f должно иметь вид:

$$S_f = a\int\int F_{ik}^2 dV\,dt, \quad dV = dx\,dy\,dz,$$

где интеграл берется по координатам по всему пространству, а по времени — между двумя заданными моментами; a есть некоторая постоянная. Под интегралом стоит $F_{ik}^2 = 2(H^2 - E^2)$; поле $\mathbf{E}$ содержит производную $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. Но легко видеть, что $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$ должно входить в действие с положительным знаком (а потому и E^2 с положительным знаком). Действительно, если бы $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$ входило в S_f со знаком минус, то достаточно быстрым изменением потенциала со временем (в рассматриваемом интервале времени) всегда можно было бы сделать $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$ сколь угодно большим, а S_f — отрицательной величиной со сколь угодно большим абсолютным значением. S_f не могло бы, следовательно, иметь минимума, как этого требует принцип наименьшего действия. Таким образом, a должно быть отрицательным. $-H^2 < 0$

Численное значение a зависит от выбора единиц для измерения поля. Заметим, что после выбора определенного значения a вместе с единицами для измерения поля определяются также и единицы для измерения всех остальных электромагнитных величин.

Мы будем в дальнейшем пользоваться так называемой гауссовой системой единиц; в этой системе a есть безразмерная величина, равная $-1/16\pi$.

Наряду с гауссовой системой единиц пользуются также и так называемой системой Хевисайда, в которой $a = -{}^1/_4$. В этой системе единиц имеют более удобный вид уравнения поля (в них не входит тогда π), но зато π входит в закон Кулона. Напротив, в гауссовой системе единиц уравнения поля содержат π, а закон Кулона имеет простой вид.

Таким образом, действие для поля имеет вид

$$S_f = \frac{i}{16\pi c}\int F_{ik}^2 d\Omega, \quad d\Omega = dx\,dy\,dz\,d\tau. \tag{27,4}$$

При этом мы написали $d\Omega$ вместо $dV\,dt$ и потому разделили все выражение еще на ic. В трехмерном виде

$$S_f = \frac{1}{8\pi}\int\int (E^2 - H^2)\,dV\,dt\,. \tag{27,5}$$

Другими словами, функция Лагранжа для поля есть

$$L_f = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 - H^2)\,dV. \tag{27,6}$$

Действие для поля вместе с находящимися в нем зарядами есть

$$S = -\sum\int mc\,ds + \sum\int \frac{e}{c}A_k dx_k + \frac{i}{16\pi c}\int F_{ik}^2\,d\Omega. \tag{27,7}$$

Заметим, что теперь уже заряды отнюдь не считаются малыми как при выводе уравнений движения заряда в заданном поле. Поэтому A_k и F_{ik} относятся к истинному полю, т. е. внешнему полю вместе с полем, созданным самими зарядами; A_k и F_{ik} зависят теперь от положения и скорости зарядов.

§ 28. Четырехмерный вектор тока

До сих пор мы всегда рассматривали только точечные заряды. Все имеющиеся в природе заряды и являются в действительности точечными, ибо, как мы видели в § 8, всякая элементарная частица должна рассматриваться как точка, а всякая сложная частица состоит из отдельных элементарных.

Однако, в целях математического удобства часто рассматривают заряд, как распределенный в пространстве непрерывно. Тогда можно ввести „плотность заряда“ ρ так, что ρdV есь заряд, находящийся в объеме dV; ρ есть, вообще говоря, функция от координат и времени. Интеграл $\int \rho dV$ по некоторому объему есть заряд, находящийся в этом объеме.

При этом надо помнить, что в действительности заряды являются точечными, так что плотность ρ равна нулю везде кроме тех точек, где находятся точечные заряды, а интеграл $\int \rho dV$ должен быть равен сумме тех зарядов, которые находятся в данном объеме. Поэтому ρ можно написать с помощью δ-функций[1]) в следующем виде:

$$\rho = \sum_A e_A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \tag{28,1}$$

где сумма берется по всем имеющимся зарядам, а $\mathbf{r}_A$ — радиус-вектор

---

[1]) δ-функция $\delta(x)$ определяется следующим образом: $\delta(x) = 0$ при всех не равных нулю значениях x; при $x = 0$ $\delta(0) = \infty$, причем так, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Из этого определения вытекают следующие свойства: если $f(x)$ — любая непрерывная функция, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x-a)\, dx = f(a);$$

в частности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0)$$

(пределы интегрирования, разумеется, не обязательно должны быть $\pm\infty$: областью интегрирования может быть любая область, заключающая ту точку, в которой δ-функция не исчезает).

Приведем еще два равенства с δ-функциями; смысл этих равенств заключается в том, что их левая и правая части дают одинаковые результаты, если заряда e_A. Эта функция согласно свойствам δ-функции действительно равна нулю везде, кроме точек $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A$, а интеграл

$$\int \rho\, dV = \sum_A e_A,$$

где справа стоит сумма всех зарядов, находящихся в данном объеме.

Заряд частицы есть, по самому своему определению, величина инвариантная, т. е. не зависящая от выбора системы отсчета. Напротив, плотность ρ не есть, вообще говоря, инвариант, — инвариантом является лишь произведение $\rho\, dV$.

Умножим равенство $de = \rho\, dV$ с обеих сторон на dx_i:

$$de\, dx_i = \rho\, dV\, dx_i = \rho\, dV\, dt \frac{dx_i}{dt}.$$

Слева стоит 4-вектор (так как de есть скаляр, а dx_i — 4-вектор). Значит, и справа должен стоять 4-вектор. Но $dV dt$ надо рассматривать как скаляр (см. § 6), а потому $\rho \frac{dx_i}{dt}$ есть 4-вектор. Этот вектор (обозначим его через j_i) носит название 4-вектора тока:

$$j_i = \rho \frac{dx_i}{dt}. \tag{28,2}$$

Три первые компоненты этого вектора образуют обычный пространственный вектор с составляющими $\rho \frac{dx}{dt}$, $\rho \frac{dy}{dt}$, $\rho \frac{dz}{dt}$, т. е. вектор

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}; \tag{28,3}$$

$\mathbf{v}$ есть скорость заряда в данной точке. Вектор $\mathbf{j}$ называется вектором плотности тока. Четвертая составляющая 4-вектора тока есть $ic\rho$. Таким образом,

$$j_{1,2,3} = j_{x,y,z}, \quad j_4 = ic\rho. \tag{28,4}$$

Полный заряд, находящийся во всем пространстве, как уже указывалось, равен интегралу $\int \rho\, dV$ по всему пространству. Мы можем написать этот интеграл в четырехмерном виде:

$$\int \rho\, dV = \frac{1}{ic} \int j_4\, dV = \frac{1}{ic} \int j_i\, dS_i, \tag{28,5}$$

где интегрирование производится по всей четырехмерной гиперплоскости, перпендикулярной оси x_4 (очевидно, что такое интегрирование и означает интегрирование по всему трехмерному пространству).

их применять в качестве множителей под знаком интегрирования:

$$\delta(-x) = \delta(x), \qquad \delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x).$$

Подобно тому как $\delta(x)$ определена для одной переменной x, можно ввести трехмерную δ-функцию $\delta(\mathbf{r})$, равную нулю везде, кроме начала трехмерной системы координат, и интеграл которой по всему пространству равен 1. В качестве такой функции можно, очевидно, взять произведение $\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$.

Вообще, интеграл $\frac{1}{ic}\int j_i dS_i$, взятый по любой гиперповерхности, есть, очевидно, сумма зарядов, мировые линии которых пересекают эту гиперповерхность.

Введем 4-вектор тока в выражение (27,7) для действия. Именно, преобразуем второй член в этом выражении. Согласно сказанному в настоящем параграфе мы можем ввести вместо точечных зарядов e непрерывное распределение зарядов с плотностью ρ. Тогда, очевидно, вместо приведенного выражения мы должны написать $\frac{1}{c}\int \rho A_i dx_i dV$, заменив сумму по зарядам интегралом ко всему объему. Переписав его в виде $\frac{1}{c}\int \rho \frac{dx_i}{dt} A_i dV dt$, мы видим, что этот член равен

$$-\frac{i}{c^2}\int A_i j_i d\Omega.$$

Таким образом, действие S принимает вид

$$S = -\sum\int mc\,ds - \frac{i}{c^2}\int A_i j_i\, d\Omega + \frac{i}{16\pi c}\int F_{ik}^2\, d\Omega. \qquad (28,6)$$

§ 29. Уравнение непрерывности

Полный заряд, находящийся в некотором объеме, равен интегралу $\int \rho\, dV$ по этому объему. Изменение этого заряда со временем определяется производной $\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV$.

С другой стороны, это изменение, например, за единицу времени определяется количеством заряда, выходящего за единицу времени из данного объема наружу, или, наоборот, входящего внутрь его. Количество заряда, проходящего за единицу времени через элемент $d\mathbf{f}$ поверхности, ограничивающей наш объем, равно $\rho \mathbf{v}\, d\mathbf{f}$, где $\mathbf{v}$ есть скорость заряда в той точке пространства, где находится элемент $d\mathbf{f}$. Вектор $d\mathbf{f}$ направлен, как это всегда принимается, по внешней нормали к поверхности, т. е. по нормали, направленной наружу от рассматриваемого объема. Поэтому $\rho \mathbf{v}\, d\mathbf{f}$ положительно, если заряд выходит из нашего объема, и отрицательно, если заряд входит в него. Полное количество заряда, выходящего в единицу времени из данного объема, есть следовательно, $\oint \rho \mathbf{v}\, d\mathbf{f}$, где интеграл распространен по всей замкнутой поверхности, ограничивающей этот объем.

Из сравнения обоих полученных выражений находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\oint \rho \mathbf{v}\, d\mathbf{f}. \qquad (29,1)$$

Справа поставлен знак минус, так как левая часть положительна, если полный заряд в данном объеме увеличивается. Уравнение (29,1) есть так называемое уравнение непрерывности, выражающее собой закон сохранения заряда, написанное в интегральном виде. Замечая, что $\rho\mathbf{v}$ есть плотность тока [см. (28,3)], можно переписать (29,1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\int \mathbf{j}\, d\mathbf{f}. \qquad (29,2)$$

Напишем это же уравнение в дифференциальном виде. Для этого применим к правой части (29,2) теорему Гаусса:

$$\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{f} = \int \operatorname{div} \mathbf{j}\, dV.$$

Подставляя это в (29,2), находим $\int \left(\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dV = 0$. Поскольку это должно иметь место при интегрировании по любому объему, то подинтегральное выражение должно быть равно нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{29,3}$$

Это и есть уравнение непрерывности в дифференциальном виде.

Легко убедиться в том, что выражение (28,1) для ρ в виде δ-функций автоматически удовлетворяет уравнению (29,3). Для простоты предположим, что имеется всего лишь один заряд, так что

$$\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Ток $\mathbf{j}$ есть тогда

$$\mathbf{j} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

где $\mathbf{v}$ — скорость заряда. Найдем производную $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. При движении заряда меняются его координаты, т. е. меняется $\mathbf{r}_0$. Поэтому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_0} \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}.$$

Но $\frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$ есть не что иное, как скорость $\mathbf{v}$ заряда. Далее, поскольку ρ есть функция от $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_0} = -\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{v} \operatorname{grad} \rho = -\operatorname{div} \rho\mathbf{v}$$

(скорость $\mathbf{v}$ заряда не зависит, конечно, от $\mathbf{r}$). Таким образом, мы приходим к уравнению (29,3).

В четырехмерном виде уравнение непрерывности (29,3) приобретает, как легко проверить, вид:

$$\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0. \tag{29,4}$$

В предыдущем параграфе мы видели, что полный заряд, находящийся во всем пространстве, может быть написан в виде $\frac{1}{ic}\int j_i\, dS_i$, где интегрирование производится по гиперплоскости $x_4 = \mathrm{const}$. В другой момент времени полный заряд изобразится таким же интегралом, взятым по другой гиперплоскости, перпендикулярной оси x_4. Легко проверить, что уравнение (29,4) действительно приводит к закону сохранения заряда, т. е. к тому, что интеграл $\int j_i\, dS_i$ одинаков, по какой бы гиперплоскости $x_4 = \mathrm{const}$ мы ни интегрировали. Разность между интегралами $\int j_i\,dS_i$, взятыми по двум таким гиперплоскостям, можно написать в виде $\oint j_i\,dS_i$, где интеграл берется по всей замкнутой гиперплоскости, охватывающей 4-объем между двумя рассматриваемыми гиперплоскостями (этот интеграл отличается от искомой разности интегралом по бесконечно удаленной „боковой“ гиперповерхности, который, однако, исчезает, так как на бесконечности нет зарядов). С помощью теоремы Гаусса (6,11) можно преобразовать этот интеграл по 4-объему между двумя гиперплоскостями и, воспользовавшись (29,4), имеем:

$$\oint j_i\,dS_i = \int \frac{\partial j_i}{\partial x_i}\,d\Omega = 0, \tag{29,5}$$

что и требовалось доказать.

Приведенное доказательство остается, очевидно, в силе и для двух интегралов $\int j_i\,dS_i$, в которых интегрирование производится по любым двум бесконечным гиперповерхностям (а не только по гиперплоскостям $x_4 = \text{const.}$), включающим в себе все (трехмерное) пространство. Отсюда видно, что интеграл $\int j_i\,dS_i$ действительно имеет одно и то же значение (равное полному заряду в пространстве), по какой бы такой гиперповерхности ни производилось интегрирование.

§ 30. Вторая пара уравнений Максвелла

При нахождении уравнений поля с помощью принципа наименьшего действия движение зарядов мы должны считать заданным и должны варьировать только поле, т. е. потенциалы; при нахождении уравнений движения мы, наоборот, считали поле заданным и варьировали траекторию частицы.

Поэтому вариация первого члена в (28,6) равна нулю, а во втором не должен варьироваться ток j_i. Таким образом,

$$\delta S = \int\left(\frac{1}{ic^2} j_i\,\delta A_i - \frac{1}{16\pi ic}\,\delta\left(F_{ik}^2\right)\right) d\Omega = \int \frac{1}{ic}\left\{\frac{1}{c} j_i\,\delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik}\delta F_{ik}\right\} d\Omega = 0.$$

Подставляя $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$, имеем

$$\delta S = \int \frac{1}{ic}\left\{\frac{1}{c} j_i\,\delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik}\delta\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)\right\} d\Omega =$$

$$= \int \frac{1}{ic}\left\{\frac{1}{c} j_i\delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta A_k + \frac{1}{8\pi} F_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\delta A_i\right\} d\Omega.$$

Во втором члене меняем местами индексы i и k, по которым производится суммирование, и, кроме того, заменяем F_{ki} на $-F_{ik}$. Тогда мы получим

$$\delta S = \int \frac{1}{ic}\left\{\frac{1}{c} j_i\delta A_i + \frac{1}{4\pi} F_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\delta A_i\right\} d\Omega.$$

Второй из этих интегралов берем по частям, т. е., иначе говоря, применяем теорему Гаусса:

$$\delta S = \frac{1}{ic}\int\left\{\frac{1}{c}j_i - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}\right\}\delta A_i\, d\Omega + \frac{1}{4\pi ic}\int F_{ik}\delta A_i\, dS_k\Big| . \qquad (30,1)$$

Во втором члене мы должны взять его значение на пределах интегрирования. Пределами интегрирования по координатам является бесконечность (так как интегрируется по всему полю), где поле равно нулю. На пределах же интегрирования по времени, т. е. в заданные начальный и конечный моменты времени, вариация потенциалов равна нулю, так как по смыслу принципа наименьшего действия поле в эти моменты задано. Таким образом, второй член в (30,1) равен нулю, и мы находим

$$\frac{1}{ic}\int\left(\frac{1}{c}j_i - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}\right)\delta A_i\, d\Omega = 0.$$

В виду того, что по смыслу принципа наименьшего действия вариации δA_i произвольны, нулю должен равняться коэффициент при δA_i, т. е.

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c}j_i. \qquad (30,2)$$

Эти четыре ($i = 1, 2, 3, 4$) уравнения и есть вторая пара уравнений Масквелла, написанная в четырехмерной форме. Напишем эти уравнения в трехмерной форме. Первое из них ($i = 1$) есть

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x} + \frac{\partial F_{12}}{\partial y} + \frac{\partial F_{13}}{\partial z} + \frac{1}{ic}\frac{\partial F_{14}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}j_1.$$

Подставляя значения составляющих тензора F_{ik} из (21,6), находим

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}j_x.$$

Вместе с двумя следующими ($i = 2, 3$) уравнениями они могут быть записаны как одно векторное

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \qquad (30,3)$$

Наконец, четвертое уравнение ($i = 4$) дает

$$\frac{\partial iE_x}{\partial x} + \frac{\partial iE_y}{\partial y} + \frac{\partial iE_z}{\partial z} = \frac{4\pi}{c}ic\rho, \qquad (30,4)$$

или

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Уравнения (30,3) и (30,4) и есть вторая пара уравнений Максвелла, написанная в векторных обозначениях. Вместе с первой парой уравнений Максвелла они вполне определяют электромагнитное поле и являются основными уравнениями теории этих полей, или, как говорят, электродинамики.

Напишем эти уравнения в интегральной форме. Интегрируя (30,4) по некоторому объему и применяя теорему Гаусса

$$\int \operatorname{div}\mathbf{E}\, dV = \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{f},$$

находим

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{f} = 4\pi \int \rho\, dV. \qquad (30,5)$$

Таким образом, поток электрического поля через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся в объеме, ограниченном этой поверхностью, умноженному на 4π.

Интегрируя (30,3) по некоторой незамкнутой поверхности и применяя теорему Стокса

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{H}\, d\mathbf{f} = \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l},$$

находим

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E}\, d\mathbf{f} + \frac{4\pi}{c}\int \mathbf{j}\, d\mathbf{f}. \qquad (30,6)$$

Величину

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (30,7)$$

называют „током смещения“. Из (30,6), написанного в виде

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\int \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) d\mathbf{f}, \qquad (30,8)$$

видно, что циркуляция магнитного поля по некоторому контуру равна помноженной на $4\pi/c$ сумме токов истинного и смещения, протекающих сквозь поверхность, ограничиваемую этим контуром.

Из уравнений Максвелла можно получить известное уже нам уравнение непрерывности (29,3). Беря с обеих сторон (30,3) дивергенцию, находим

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{j}.$$

Но $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} \equiv 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$, согласно (30,4). Таким образом, мы приходим снова к уравнению (29,3). В четырехмерном виде из (30,2) мы имеем:

$$\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial j_i}{\partial x_i}.$$

Но в силу антисимметричности тензора F_{ik} имеем, подставляя $F_{ik} = -F_{ki}$ и меняя затем обозначения индексов:

$$\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i\, \partial x_k} = -\frac{\partial^2 F_{ki}}{\partial x_i\, \partial x_k} = -\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_k \partial x_i},$$

откуда следует, что $\dfrac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0$, и мы приходим к уравнению непрерывности (29,4), написанному в четырехмерном виде.

§ 31. Плотность энергии и вектор Пойнтинга

Умножим обе части уравнения (30,3) на **E**, а обе части уравнения (26,1) на **H** и сложим полученные уравнения почленно. Тогда мы будем иметь

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{1}{c}\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE}-(\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H}).$$

Пользуясь известной формулой векторного анализа:

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}]=\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b},$$

переписываем это соотношение в виде

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2+H^2)=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE}-\operatorname{div}[\mathbf{EH}]$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2+H^2}{8\pi}=-\mathbf{jE}-\operatorname{div}\mathbf{S}. \tag{31,1}$$

Вектор

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] \tag{31,2}$$

носит название вектора Пойнтинга.

Проинтегрируем (31,1) по некоторому объему и применим ко второму члену справа теорему Гаусса. Мы получим тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}dV=-\int\mathbf{jE}\,dV-\oint\mathbf{S}\,d\mathbf{f}. \tag{31,3}$$

Если интегрирование производится по всему пространству, то интеграл по поверхности исчезает (поле на бесконечности равно нулю). Далее, мы можем написать интеграл $\int\mathbf{jE}\,dV$ в виде суммы $\sum e\mathbf{vE}$ по всем зарядам, находящимся в поле, и подставить согласно (15,9)

$$e\mathbf{vE}=\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}_{\text{кин}}$$

$\left(\text{где } \mathscr{E}_{\text{кин}}=\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)$. Тогда (31,3) переходит в

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}dV+\sum\mathscr{E}_{\text{кин}}\right\}=0. \tag{31,4}$$

Таким образом, для замкнутой системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами, сохраняется величина, стоящая в написанном уравнении в скобках. Второй член в этом выражении есть кинетическая энергия (вместе с энергией покоя) всех частиц; первый же член есть, следовательно, энергия самого электромагнитного поля. Величину

$$W=\frac{E^2+H^2}{8\pi} \tag{31,5}$$

мы можем поэтому назвать „плотностью энергии“ электромагнитного поля; это есть энергия единицы объема поля.

При интегрировании по некоторому конечному объему поверхностный интеграл в (31,3), вообще говоря, не исчезает, так что мы можем написать это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int \frac{E^2+H^2}{8\pi}\, dV + \sum \mathscr{E}_{\text{кин}}\right\} = -\oint \mathbf{S}\, d\mathfrak{f}, \tag{31,6}$$

где теперь во втором члене в скобках суммирование производится только по частицам, находящимся в рассматриваемом объеме. Слева стоит изменение полной энергии поля и частиц в единицу времени. Поэтому интеграл $\oint \mathbf{S}\, d\mathfrak{f}$ надо рассматривать как поток энергии поля через поверхность, ограничивающую данный объем, так что вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ есть плотность этого потока, — количество энергии поля, протекающее в единицу времени через единицу поверхности.

§ 32. Тензор энергии-импульса

В предыдущем параграфе мы вывели выражение для энергии электромагнитного поля. Выведем это выражение, вместе с выражением для импульса поля, в четырехмерной форме. При этом мы будем для простоты рассматривать пока электромагнитное поле без зарядов. Имея в виду дальнейшее применение (к гравитационным полям), а также упрощение выводов, мы проделаем вывод в общем виде, не специализируя конкретного рода системы. Именно, рассмотрим некоторую систему, интеграл действия для которой имеет вид

$$S = \int \Lambda\left(q, \frac{\partial q}{\partial x_i}\right) dV\, dt = \frac{1}{ic}\int \Lambda\, d\Omega \tag{32,1}$$

где Λ — некоторая функция от величин q, определяющих систему, и их производных по координатам и времени (для электромагнитного поля величинами q являются компоненты 4-потенциала); для краткости мы пишем здесь всего одну такую величину q. Заметим, что интеграл по пространству $\int \Lambda\, dV$ есть функция Лагранжа системы, так что Λ можно рассматривать как „плотность“ функции Лагранжа. Математическим выражением замкнутости системы является то, что Λ не зависит явно от x_i, — подобно тому, как функция Лагранжа для замкнутой механической системы не зависит явно от времени.

„Уравнения движения“ (т. е. уравнение поля, если речь идет о каком-либо поле) получаются согласно принципу наименьшего действия путем варьирования S. Имеем $\left(\text{для краткости обозначаем } q_{,i} \equiv \frac{\partial q}{\partial x_i}\right)$:

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q_{,i}\right) d\Omega =$$
$$= \int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\delta q + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q\right) - \delta q \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\right] d\Omega = 0.$$

Второй член под интегралом, будучи преобразован по теореме

Гаусса, исчезает при интегрировании по всему пространству, и мы находим тогда следующие „уравнения движения“:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}-\frac{\partial\Lambda}{\partial q}=0 \tag{32,2}$$

(везде, конечно, подразумевается суммирование по индексу i).

Дальнейший вывод аналогичен тому, который производится в механике для вывода закона сохранения энергии. Именно, пишем:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_i}=\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x_i}+\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,k}}{\partial x_i}.$$

Подставляя сюда (32,2) и замечая, что $\frac{\partial q_{,k}}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 q}{\partial x_i\,\partial x_k}=\frac{\partial q_{,i}}{\partial x_k}$, находим

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\right)q_{,i}+\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,i}}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(q_{,i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\right).$$

С другой стороны, можно написать $\frac{\partial\Lambda}{\partial x_i}=\delta_{ik}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_k}$, так что

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_k}\delta_{ik}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}q_{,i}\right).$$

Вводя обозначение

$$T_{ik}=q_{,i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}-\delta_{ik}\Lambda, \tag{32,3}$$

можно написать полученное соотношение в виде

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=0. \tag{32,4}$$

Заметим, что если имеется не одна, а несколько величин $q^{(l)}$, то вместо (32,3) надо, очевидно, писать

$$T_{ik}=\sum_l q^{(l)}_{,i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q^{(l)}_{,k}}-\delta_{ik}\Lambda. \tag{32,5}$$

Но в § 29 мы видели, что уравнение вида $\frac{\partial A_k}{\partial x_k}=0$, т. е. равенство нулю 4-дивергенции вектора, эквивалентно утверждению, что сохраняется интеграл от этого вектора по гиперповерхности $\int A_k\,dS_k$, заключающей в себе все трехмерное пространство. Очевидно, что аналогичное обстоятельство имеет место и для дивергенции тензора; уравнение $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=0$ равносильно утверждению, что сохраняется вектор P_i, компоненты которого равны интегралам от T_{ik} по гиперповерхности:

$$P_i=\text{const.}\int T_{ik}\,dS_k.$$

Этот вектор и должен быть отождествлен с 4-вектором импульса системы. Постоянный множитель перед интегралом мы выберем так, чтобы четвертая компонента вектора P_i, в соответствии с прежним определением, была равна энергии системы, умноженной на i/c. Для этого заметим, что P_4 можно написать в виде

$$P_4 = \text{const.} \int T_{4k}\, dS_k = \text{const.} \int T_{44} dV,$$

если интегрирование производить по гиперплоскости $x_4 = \text{const}$. С другой стороны, согласно (32,3) имеем

$$T_{44} = \dot{q}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} - \Lambda \qquad \left(\dot{q} \equiv \frac{\partial q}{\partial t}\right).$$

Эта величина, в соответствии с обычной формулой, связывающей энергию с функцией Лагранжа, должна быть рассматриваема как плотность энергии системы, и поэтому $\int T_{44} dV$ есть полная энергия системы. Таким образом, мы должны положить $\text{const.} = i/c$ и мы получаем окончательно для 4-импульса системы выражение

$$P_i = \frac{i}{c} \int T_{ik} dS_k. \tag{32,6}$$

Тензор T_{ik} называется тензором энергии-импульса системы.

Необходимо заметить, что определение тензора T_{ik} по существу не однозначно. Действительно, к тензору T_{ik}, определенному равенством (32,3), можно прибавить величину вида $\frac{\partial}{\partial x_l}\psi_{ikl}$, где ψ_{ikl} — любой тензор, антисимметричный по индексам k, l. При такой замене новый цензор T_{ik} тоже будет удовлетворять уравнению (32,4), так как мы имеем тождественно $\frac{\partial^2 \psi_{ikl}}{\partial x_k \partial x_l} = 0$. Полный 4-импульс системы P_i при этом вообще не изменится, так как согласно (6,12) мы можем написать

$$\int \frac{\partial \psi_{ikl}}{\partial x_l} dS_k = \frac{1}{2} \int \left(dS_k \frac{\partial \psi_{ikl}}{\partial x_l} - dS_l \frac{\partial \psi_{ikl}}{\partial x_k}\right) = \int \psi_{ikl}\, df_{kl},$$

где интегрирование с правой стороны равенства производится по поверхности (обычной), „огибающей“ гиперповерхность, по которой производится интегрирование с левой стороны равенства. Эта поверхность находится, очевидно, на бесконечности трехмерного пространства, и поскольку поле или материя на бесконечности отсутствует, этот интеграл равен нулю. Таким образом, 4-импульс системы является, как и должно быть, величиной, определенной однозначно. Для однозначного определения тензора T_{ik} можно воспользоваться требованием, чтобы 4-тензор момента импульса (см. § 13) системы выражался через 4-импульс посредством

$$M_{ik} = \int (x_i dP_k - x_k dP_i) = \int (x_i T_{kl} - x_k T_{il})\, dS_l, \tag{32,7}$$

т. е. так, чтобы не только весь момент системы, но и его „плотность“ выражались через „плотность“ импульса по обычной формуле.

Легко определить, какому условию должен для этого удовлетворять тензор энергии-импульса. Для этого заметим, что закон сохранения момента может быть выражен, как мы уже знаем, равенством нулю дивергенции подинтегрального выражения в M_{ik}. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(x_i T_{kl} - x_k T_{il}) = 0.$$

Замечая, что $\frac{\partial x_i}{\partial x_l} = \delta_{il}$ и что $\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} = 0$, находим отсюда

$$\delta_{il} T_{kl} - \delta_{kl} T_{il} = T_{ki} - T_{ik} = 0,$$

или

$$T_{ik} = T_{ki}, \tag{32,8}$$

т. е. тензор энергии-импульса должен быть симметричным.

Заметим, что T_{ik}, определенный формулой (32,4), вообще говоря, не симметричен, но может быть сделан таковым путем прибавления выражения вида $\frac{\partial}{\partial x_l}\psi_{ikl}$ с соответствующим ψ_{ikl}.

В дальнейшем (§ 90) мы увидим, что существует простой способ непосредственного получения симметричного тензора T_{ik}. Как уже упоминалось выше, если производить интегрирование в (32,6) по гиперплоскости $x_4 = \text{const.}$, то P_i приобретает вид

$$P_i = \frac{i}{c}\int T_{i4} dV, \tag{32,9}$$

где интегрирование производится по всему пространству (трехмерному). Поскольку пространственные компоненты P_i образуют трехмерный вектор импульса системы, а временная компонента есть умноженная на i/c ее энергия, то компоненты $\frac{i}{c} T_{\alpha 4}$ можно назвать „плотностью импульса", а T_{44} — „плотностью энергии" (т. е. соответственно импульсом и энергией единицы объема).

Для выяснения смысла остальных компонент T_{ik} напишем уравнение сохранения (32,4) в трехмерном виде

$$\frac{1}{ic}\frac{\partial T_{44}}{\partial t} + \frac{\partial T_{4\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \frac{1}{ic}\frac{\partial T_{\alpha 4}}{\partial t} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \tag{32,10}$$

Проинтегрируем эти уравнения по некоторому объему V пространства. Из первого имеем

$$\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}\int T_{44} dV + \int \frac{\partial T_{4\alpha}}{\partial x_\alpha} dV = 0,$$

или, преобразуя второй интеграл по теореме Гаусса:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T_{44} dV = -ic \oint T_{4\alpha} df_\alpha, \tag{32,11}$$

где интеграл справа берется по поверхности, огибающей объем V. Слева стоит скорость изменения энергии, находящейся в объеме V; отсюда видно, что выражение, стоящее справа, есть количество энергии, протекающей через границу объема V, а $icT_{4\alpha}$ есть плотность этого потока — количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности. Таким образом, плотность потока энергии равна плотности импульса, умноженной на c^2.

Из второго уравнения находим аналогично

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{i}{c}\int T_{\alpha 4}\,dV = \oint T_{\alpha\beta}\,df_{\beta}. \qquad (32,12)$$

Слева стоит изменение импульса системы в объеме V в единицу времени; поэтому $-\oint T_{\alpha\beta}df_{\beta}$ есть количество импульса, вытекающее в единицу времени из объема V. Таким образом, $T_{\alpha\beta}$ есть плотность потока импульса. Плотность потока энергии есть вектор, плотность же потока импульса, который сам по себе есть вектор, должна, очевидно, быть тензором (компонента $T_{\alpha\beta}$ этого тензора есть количество α-компоненты импульса, протекающее в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную оси x_{β}).

§ 33. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Применим теперь полученные в предыдущем параграфе общие соотношения к электромагнитному полю. Для электромагнитного поля величина, стоящая под знаком интеграла (32,1), равна согласно (27,4)

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi}F_{kl}^{2} = -\frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)^2.$$

Величинами q являются компоненты 4-потенциала поля A_k. Подставляя это в определение (32,5) тензора T_{ik}, имеем

$$T_{ik} = \frac{\partial A_l}{\partial x_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)} - \delta_{ik}\Lambda.$$

Для вычисления стоящей здесь производной от Λ напишем вариацию $\delta\Lambda$. Имеем

$$\delta\Lambda = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)\delta\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right) = -\frac{1}{8\pi}F_{kl}\left(\delta\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \delta\frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right),$$

или, переставляя индексы и пользуясь тем, что $F_{kl} = -F_{lk}$:

$$\delta\Lambda = -\frac{1}{4\pi}F_{kl}\delta\frac{\partial A_l}{\partial x_k}.$$

Отсюда мы видим, что

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)} = -\frac{1}{4\pi}F_{kl},$$

и поэтому

$$T_{ik} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_l}{\partial x_i}F_{kl} + \frac{1}{16\pi}\delta_{ik}F_{lm}^{2}.$$

Для того чтобы сделать это выражение симметричным по индексам i и k, прибавим к нему член $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_i}{\partial x_l}F_{kl}$; этот член имеет вид производной $\frac{\partial}{\partial x_l}\psi_{ikl}$, так как

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_l}F_{kl} = \frac{\partial A_i F_{kl}}{\partial x_l} - A_i\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} = \frac{\partial A_i F_{kl}}{\partial x_l}$$

[согласно уравнениям Максвелла (30,2) в местах, где нет зарядов, $\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l}=0$], а потому, как было выяснено в предыдущем параграфе, действительно может быть прибавлен к тензору энергии-импульса. Поскольку $\frac{\partial A_l}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_l}=F_{il}$, то мы находим окончательно следующее выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}F_{lm}^2\delta_{ik}-F_{il}F_{kl}\right). \tag{33,1}$$

Легко убедиться в том, что тензор T_{ik} электромагнитного поля удовлетворяет требованию $T_{ik}=T_{ki}$; кроме того, он обладает тем свойством, что сумма его диагональных членов равна нулю:

$$T_{ii}=0. \tag{33,2}$$

Выразим компоненты тензора T_{ik} через электрическое и магнитное поля. С помощью выражений (21,6) для компонент F_{ik} легко найти следующие выражения для T_{ik}:

$$\left.\begin{aligned} T_{\alpha\beta}&=\frac{1}{4\pi}\left(E_\alpha E_\beta+H_\alpha H_\beta-\frac{1}{2}(E^2+H^2)\delta_{\alpha\beta}\right),\\ T_{4\alpha}&=-\frac{i}{c}S_\alpha, \qquad T_{44}=W, \end{aligned}\right\} \tag{33,3}$$

где $W=\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)$ есть плотность энергии поля, а $\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]$ — вектор Пойнтинга. Трехмерный тензор $T_{\alpha\beta}$ называется тензором натяжений Максвелла.

До сих пор мы рассматривали поля без зарядов. При наличии частиц общая энергия и импульс поля вместе с частицами равны сумме энергии и импульса того и другого, т. е. полный 4-импульс равен

$$P_i=\frac{i}{c}\int T_{ik}dS_k+\sum p_i, \tag{33,4}$$

где $p_i=mcu_i$ — 4-импульс частицы, а сумма берется по всем частицам, находящимся в поле. В трехмерном виде мы можем написать для импульса поля и зарядов

$$\int\frac{\mathbf{S}}{c^2}dV+\sum\mathbf{p}$$

и для энергии

$$\int W dV+\sum\mathcal{E}.$$

Нетрудно проверить, что P_i, определенные согласно (33,4), действительно сохраняются. Вычислим изменение dP_i вектора P_i за время dt. Это можно сделать аналогично тому, как мы вычисляли изменение заряда в § 29. В некоторый момент времени t P_i определяется формулой (33,4), где интегрирование производится по всей гиперплоскости $t=\text{const}$. В момент времени $t+dt$ P_i определяется той же формулой, где теперь интегрирование производится по гиперплоскости $t+dt=\text{const}$, а импульсы частиц берутся в момент времени $t+dt$. Разность значений интеграла $\int T_{ik} dS_k$ на этих гиперплоскостях можно написать в виде интеграла $\oint T_{ik} dS_k$ по гиперповерхности, окружающей четырехмерный объем между этими гиперплоскостями (на бесконечности поле равно нулю и потому интеграл по „боковой гиперповерхности“ исчезает). Таким образом,

$$dP_i = \frac{i}{c} \oint T_{ik} dS_k + \sum dp_i,$$

или, по теореме Гаусса,

$$dP_i = \frac{i}{c} \int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} d\Omega + \sum dp_i, \tag{33,5}$$

где интеграл берется по 4-объему между двумя бесконечно близкими гиперплоскостями.

Второй член в (33,5) можно преобразовать, воспользовавшись уравнениями движения заряда в поле (21,4):

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u_k,$$

откуда, умножая на ds:

$$dp_i = \frac{e}{c} F_{ik} dx_k = \frac{e}{c} F_{ik} \frac{dx_k}{dt} dt.$$

Вводя плотность заряда ρ, имеем

$$\sum dp_i = \frac{dt}{c} \int \rho F_{ik} \frac{dx_k}{dt} dV = \frac{dt}{c} \int F_{ik} j_k dV,$$

где j_k — 4-вектор тока. Но полученное выражение можно написать в виде

$$\sum dp_i = \frac{1}{ic^2} \int F_{ik} j_k d\Omega,$$

где интеграл берется по тому же 4-объему, как и в первом члене в (33,5). Таким образом,

$$dP_i = \frac{i}{c} \int \left(\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} - \frac{1}{c} F_{ik} j_k \right) d\Omega.$$

С другой стороны, можно показать, с помощью уравнений Максвелла, что подинтегральное выражение здесь исчезает, так что dP_i равно нулю, т. е. P_i действительно сохраняется. Для этого пишем, воспользовавшись выражением (33,1),

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{4} \frac{\partial F_{lm}^2}{\partial x_k} \delta_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} F_{il} F_{kl} \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x_i} F_{lm} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} F_{kl} - \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_k} F_{il} \right).$$

Подставляя сюда согласно уравнениям Максвелла (26,5) и (30,2)

$$\frac{\partial F_{lk}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_l, \quad \frac{\partial F_{lm}}{\partial x_i} = -\frac{\partial F_{mi}}{\partial x_l} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x_m}$$

и помня, что тензор F_{ik} антисимметричен, имеем

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_l} = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial F_{mi}}{\partial x_l} F_{lm} - \frac{1}{2} \frac{\partial F_{il}}{\partial x_m} F_{lm} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} F_{kl} + \frac{4\pi}{c} F_{il} j_l \right).$$

Перестановкой индексов легко показать, что первые три члена справа взаимно сокращаются, и мы приходим к требуемому результату:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{c} F_{ik} j_k. \tag{33,6}$$

Это уравнение, являющееся обобщением уравнения (32,4), является математическим выражением закона сохранения энергии и импульса электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами. Четвертая компонента этого уравнения, как легко убедиться, совпадает с уравнением (31,1).

Задача

Показать, что главные значения тензора T_{ik} равны $-W, -W, +W, +W$.

§ 34. Тензор энергии-импульса макроскопических тел

Рассмотрим систему не взаимодействующих друг с другом частиц. Их общий 4-импульс можно написать в интегральном виде, введя соответствующим образом определенный тензор энергии-импульса. Для этого будем описывать распределение масс в пространстве при помощи „плотности массы“, аналогично тому, как мы описываем распределение точечных зарядов при помощи их плотности. Аналогично формуле (28,1) для плотности зарядов плотность масс можно написать в виде

$$\mu = \sum_A m_A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \tag{34,1}$$

где $\mathbf{r}_A$ — радиусы-векторы частиц, а суммирование производится по всем частицам системы.

„Плотность 4-импульса“ частиц напишется в виде $\mu c u_i$. Как мы знаем, эта плотность представляет собой компоненты $\frac{i}{c} T_{4\alpha}$ тензора энергии-импульса, т. е. $T_{4\alpha} = -i\mu c^2 u_i$. Но плотность массы μ является временной компонентой 4-вектора $\frac{\mu}{ic}\frac{dx_k}{dt}$ (аналогично плотности зарядов, см. § 28). Поэтому тензор энергии-импульса системы не взаимодействующих частиц есть

$$T_{ik} = -\mu c \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{dt} = -\mu c u_i u_k \frac{ds}{dt}. \tag{34,2}$$

Этот тензор, как это и должно быть, симметричен.

Вычислим сумму диагональных членов тензора энергии-импульса (34,2), т. е. величину T_{ii}. Имеем

$$T_{ii} = -\mu c u_i u_i \frac{ds}{dt} = \mu c \frac{ds}{dt}.$$

Подставляя сюда $ds = c\,dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ и вместо μ — сумму (34,1), находим

$$T_{ii} = \sum_A m_A c^2 \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A). \tag{34,3}$$

Мы видим, в частности, что $T_{ii} > 0$.

Легко убедиться в том, что выражение (34,3) для T_{ii} имеет место для любой системы взаимодействующих друг с другом заряженных частиц. Действительно, тензор энергии-импульса такой системы можно было бы написать в виде суммы тензора (34,2) и тензора энергии-импульса, создаваемого частицами электромагнитного поля. Но для электромагнитного поля всегда $T_{ii}=0$ (§ 33). Таким образом, мы можем высказать утверждение, что для любой физической системы

$$T_{ii} \geqslant 0, \tag{34,4}$$

причем знак равенства имеет место только для электромагнитного поля без зарядов.

Рассмотрим теперь некоторое макроскопическое тело и определим его тензор энергии-импульса. Из уравнения (32,12)

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{i}{c}\int T_{\alpha 4}\, dV = \oint T_{\alpha\beta} df_\beta$$

мы видим, что выражение в правой части можно рассматривать как α-ую компоненту силы, которую тело оказывает на ограничивающую его поверхность (поскольку слева стоит уменьшение α-ой компоненты импульса тела в единицу времени). Иначе говоря, $-T_{\alpha\beta}df_\beta$ есть α-ая компонента силы, действующей на элемент этой поверхности. Воспользуемся теперь системой отсчета, в которой данный элемент объема тела покоится. В такой системе отсчета имеет место закон Паскаля, т. е. давление, оказываемое данным участком тела, одинаково по всем направлениям и везде перпендикулярно к площадке, на которую оно производится [1]). Поэтому мы можем написать $-T_{\alpha\beta}df_\beta = p\,df_\alpha$, откуда

$$T_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}p,$$

где p — давление тела. Что касается компонент $T_{4\alpha}$, изображающих плотность импульса, то для данного элемента объема тела в рассматриваемой системе отсчета они равны нулю. Компонента же T_{44}, как всегда, равна плотности энергии тела, которую мы обозначим здесь посредством ρc^2; ρ есть при этом, очевидно, плотность массы тела, т. е. масса его единицы объема [2]). Таким образом, в рассматриваемой системе отсчета тензор T_{ik} (для данного участка тела) имеет вид

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho c^2 \end{pmatrix}. \tag{34,5}$$

---

[1]) Строго говоря, закон Паскаля имеет место только для жидкостей и газов. Однако для твердых тел максимальные возможные разности давлений в разных направлениях ничтожны по сравнению с теми давлениями, которые могут играть роль в теории относительности, так что их учет не представляет интереса.

[2]) Обозначение плотности массы и плотности заряда одинаковой буквой ρ не может привести к недоразумению, так как мы нигде не пользуемся ими одновременно.

Легко найти теперь выражение для тензора энергии-импульса макроскопического тела в любой системе отсчета. Для этого введем 4-скорость u_i макроскопического движения элемента объема тела. В той системе отсчета, где данный элемент покоится, компоненты его 4-скорости равны $u_\alpha = 0$, $u_4 = i$. Выражение для T_{ik} должно быть выбрано так, чтобы в этой системе он приобретал вид (34,5). Легко проверить, что таковым является

$$T_{ik} = -(p + \rho c^2) u_i u_k - p\delta_{ik}. \tag{34,6}$$

Это выражение и определяет тензор энергии-импульса макроскопического тела.

В случае, если скорости всех частиц, входящих в состав макроскопического тела, малы по сравнению со скоростью света (скорость же макроскопического движения может быть произвольной), выражение для T_{ik} упрощается.

Именно, в этом случае в плотности энергии ρc^2 можно пренебречь всеми ее частями, малыми по сравнению с энергией покоя, т. е. можно писать μc^2 вместо ρc^2, где μ — сумма масс частиц, находящихся в единице объема тела (в отличие от точной плотности массы тела ρ, включающей в себя также и массу, происходящую от энергии микроскопического движения частиц в теле и энергии их взаимодействия). Что касается давления, определяемого энергией микроскопического движения молекул, то оно в рассматриваемом случае, конечно, тоже мало по сравнению с плотностью энергии покоя μc^2. Таким образом, мы находим для T_{ik} выражение

$$T_{ik} = -\mu c^2 u_i u_k. \tag{34,7}$$

Из выражения (34,6) находим $T_{ii} = \rho c^2 - 3p$. Общее свойство (34,4) тензора энергии-импульса любой системы показывает теперь, что для давления и плотности макроскопического тела всегда имеет место неравенство

$$p < \frac{\rho c^2}{3}. \tag{34,8}$$

Сравним соотношение $T_{ii} = \rho c^2 - 3p$ с общей формулой (34,3), имеющей место, как мы видели, для любых систем. Поскольку мы рассматриваем сейчас макроскопическое тело, то выражение (34,3) надо усреднить по всем значениям $\mathbf{r}$ в единице объема. В результате находим

$$\rho c^2 - 3p = \sum m_A c^2 \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} \tag{34,9}$$

(суммирование производится по частицам, находящимся в единице объема [1]).

---

[1]) В случае малых скоростей разложение этой формулы приводит к соотношению $3p = \overline{u} + 2\sum \frac{1}{2} m_A v_A^2$, т. е. давление равно третьей части суммы средней потенциальной энергии взаимодействия частиц в единице объема $(\overline{u})$ и удвоенной их кинетической энергии. Это же соотношение можно получить непосредственно из закона Кулона при помощи так называемой теоремы вириала.

Применим полученные формулы к идеальному газу, который мы предположим состоящим из одинаковых частиц. Поскольку частицы идеального газа не взаимодействуют друг с другом, можно воспользоваться формулой (34,2), предварительно усреднив ее. Таким образом, для идеального газа

$$T_{ik} = -nmc\,\overline{\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{ds}},$$

где n — число частиц в единице объема, а черта обозначает усреднение по всем частицам. Если в газе нет никакого макроскопического движения, то мы имеем с другой стороны для T_{ik} выражение (34,5). Сравнение обеих формул приводит к уравнениям:

$$\rho = nm\overline{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}, \quad p = \frac{nm}{3}\overline{\frac{v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}. \tag{34,10}$$

Эти уравнения определяют плотность и давление релятивистского идеального газа через скорости частиц; вторая из них заменяет собой известную формулу нерелятивистской кинетической теории газов.

Как известно из термодинамики, давление равно взятой с обратным знаком производной от энергии тела по его объему V (при постоянной энтропии σ): $p = -\left(\frac{\partial(\rho c^2 V)}{\partial V}\right)_\sigma$ (ρc^2 — энергия единицы объема). Подставляя это в (34,8), находим неравенство

$$\left[\frac{\partial}{\partial V}(\rho V^{4/3})\right]_\sigma \geqslant 0. \tag{34,11}$$

Знак равенства достигается здесь при скоростях, равных c; другими словами, $\rho V^{4/3}$ стремится при $v \to c$ к постоянному пределу:

$$\rho V^{4/3} = \text{const}. \tag{34,12}$$

Поскольку число частиц n в единице объема тела пропорционально $1/V$, то мы можем иначе написать для предельного случая

$$\rho = \text{const} \cdot n^{4/3}. \tag{34,13}$$

Такая же формула имеет место для давления, поскольку в этом предельном случае $p = \rho c^2/3$. Наконец, для химического потенциала ζ, являющегося производной от энергии по числу частиц, имеем

$$\zeta = \text{const} \cdot n^{1/3}. \tag{34,14}$$

§ 35. Макроскопическое движение

Уравнения $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0$, выражая собой законы сохранения энергии и импульса, содержат в себе уравнения движения той физической системы, к которой относится рассматриваемый тензор энергии-импульса. Примененные к макроскопическим телам они дают уравнения гидродинамики. Однако, для того чтобы получить полностью эти уравнения движения из уравнений $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=0$, необходимо учесть дополнительно закон сохранения числа частиц, не содержащийся в этих уравнениях.

Выведем уравнение, выражающее закон сохранения числа частиц (уравнение непрерывности) для макроскопических тел. Для этого введем (аналогично 4-вектору тока зарядов) 4-вектор „тока частиц" n_i. Его временная компонента есть число частиц в единице объема (умноженное на i), а три пространственные компоненты составляют трехмерный тензор тока частиц. 4-вектор n_i можно написать в виде

$$n_i=\frac{n_4}{ic}\frac{dx_i}{dt},$$

аналогично выражению (28,2) для j_i. Переписав это выражение в виде

$$n_i=\frac{n_4}{ic}\frac{ds}{dt}\frac{dx_i}{ds},$$

мы видим, что $\frac{n_4}{ic}\frac{ds}{dt}$ есть скаляр, являющийся не чем иным, как плотностью числа частиц в той системе отсчета, в которой данный элемент объема тела покоится. Обозначая ее посредством n, имеем, следовательно,

$$n_i=nu_i, \tag{35,1}$$

где u_i — 4-скорость макроскопического движения.

Уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения числа частиц, можно написать непосредственно по аналогии с (29,4), не производя заново всего вывода:

$$\frac{\partial(nu_i)}{\partial x_i}=0. \tag{35,2}$$

Перейдем теперь к нахождению уравнений движения из уравнений $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=0$, где для T_{ik} мы должны теперь воспользоваться выражением (34,6). Дифференцируя $T_{ik}=-(\rho c^2+p)u_iu_k-\delta_{ik}p$, находим

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=-u_i\frac{\partial(p+\rho c^2)u_k}{\partial x_k}-(p+\rho c^2)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}u_k-{}_{ik}\frac{\partial p}{\partial x_k}=0.$$

Но $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{dx_k}{ds}=\frac{du_i}{ds}$, где производная берется вдоль мировой линии движения данного элемента объема тела. Таким образом,

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=-u_i\frac{\partial(p+\rho c^2)u_k}{\partial x_k}-(p+\rho c^2)\frac{du_i}{ds}-\frac{\partial p}{\partial x_i}=0. \tag{35,3}$$

Умножим это уравнение на u_i, т. е. „спроецируем" его на направление 4-скорости. Помня, что $u_i^2=-1$, а $u_i\frac{du_i}{ds}=0$ (см. § 7), находим

$$\frac{\partial(p+\rho c^2)u_k}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_k}u_k=0.$$

Переписываем это в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{p+\rho c^2}{n}nu_k\right)-\frac{1}{n}\frac{\partial p}{\partial x_k}nu_k=0$$

и в силу (35,2) получаем отсюда

$$nu_k\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{p+\rho c^2}{n}\right)-\frac{1}{n}\frac{\partial p}{\partial x_k}\right]=0.$$

Введем вместо числа частиц n в единице объема молекулярный объем $V=1/n$ (т. е. объем, приходящийся на одну молекулу), а вместо плотности энергии ρc^2 — энергию $\varepsilon=V\rho c^2$, отнесенную к одной молекуле. Тогда

$$nu_k\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(pV+\varepsilon)-V\frac{\partial p}{\partial x_k}\right]=nu_k\left[p\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}\right]=0.$$

Но, как известно из термодинамики, $p\,dV+d\varepsilon=T\,d\sigma$, где T — температура, а σ — энтропия тела (отнесенная к одной молекуле). Таким образом, находим

$$nT\frac{dx_k}{ds}\frac{\partial\sigma}{\partial x_k}=0,$$

или

$$\frac{d\sigma}{ds}=0. \tag{35,4}$$

Это уравнение выражает неизменность энтропии данного элемента тела при его движении, т. е. адиабатичность процесса. Этот результат естественен, поскольку наше выражение для тензора энергии-импульса по существу относилось к идеальной жидкости, так как мы не учитывали необратимых процессов, происходящих при движении, — теплопроводности и вязкости. Учет этих явлений привел бы к тому, что и в системе отсчета, где данный элемент тела покоится, компоненты $T_{4\alpha}$ были бы отличны от нуля, изображая собой поток тепла, а к $T_{\alpha\beta}$ пришлось бы прибавить дополнительный поток импульса, связанный с внутренним трением. Надо, однако, иметь в виду, что в релятивистской механике эти эффекты всегда играют малую роль, поскольку потоки энергии и импульса, связанные с теплопроводностью и вязкостью, всегда малы по сравнению с потоками энергии и импульса, связанными с движением самой материи со скоростями порядка скорости света.

„Спроецируем" теперь уравнение (35,3) на направление, „перпендикулярное" к u_i. Такая проекция вектора $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$ равна, очевидно, $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}+$ $+u_iu_k\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l}$; она дает нуль при скалярном умножении на u_i. Простое вычисление приводит к

$$(p+\rho c^2)\frac{du_i}{ds}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}-u_iu_k\frac{\partial p}{\partial x_k}. \tag{35,5}$$

Уравнение (35,5) вместе с (35,2) и (35,4) представляет собой полную систему гидродинамических уравнений в релятивистской механике.

Наконец, выведем соотношение, выражающее закон возрастания энтропии в релятивистской термодинамике. Для этого надо ввести 4-вектор „тока энтропии" σ_i, определяемый аналогично 4-векторам n_i и j_i.

Полную энтропию тела можно написать в четырехмерном виде как интеграл

$$\int \sigma_i dS_i,$$

взятый по гиперповерхности, включающей в себя все трехмерное пространство (см. § 28). В § 29 мы видели, что условием сохранения такого интеграла являлось бы уравнение $\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = 0$. Из приведенного в § 29 вывода видно, что условием его монотонного возрастания является уравнение

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} \geqslant 0. \tag{35,6}$$

Это уравнение и выражает собой закон возрастания энтропии. Интеграл $\int \sigma_i dS_i$, взятый по некоторой гиперповерхности, меньше (или равен) такого же интеграла, взятого по любой гиперповерхности, не пересекающей данной и лежащей от нее в положительном направлении оси времени.

У идеальной жидкости в (35,6) стоит знак равенства. Соответственно этому при рассмотрении возрастания энтропии нельзя писать просто $\sigma_i = n\sigma u_i$ (где σ — энтропия, отнесенная к одной частице), а необходимо учитывать также и наличие потока тепла. Именно, в системе отсчета, где данный элемент потока покоится, поток энтропии надо положить равным потоку тепла, деленному на температуру.

ГЛАВА V

ПОСТОЯННОЕ ПОЛЕ

§ 36. Закон Кулона

Для постоянного электрического или, как говорят, электростатического поля уравнения Максвелла имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{36,1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \tag{36,2}$$

Электрическое поле **E** выражается через один только скалярный потенциал посредством соотношения

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{36,3}$$

Подставляя (36,3) в (36,1), мы находим уравнение, которому удовлетворяет потенциал постоянного электрического поля:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{36,4}$$