

## Шарик на пружинке

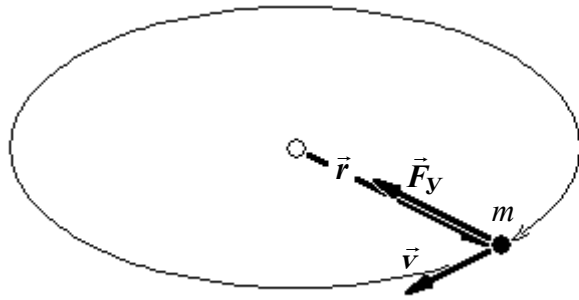
### 1° Движение материальной точки в потенциальном поле силы упругости

Согласно 2<sup>му</sup> закону Ньютона

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \vec{F}_y = -k\vec{r}$$

$$m\ddot{\vec{r}} + k\vec{r} = \vec{0}$$

$$\ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} = \vec{0}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$



Решая полученное дифференциальное уравнение, найдем

$$\vec{r}(t) = \vec{c}_1 \cos \omega t + \vec{c}_2 \sin \omega t$$

где произвольные const определим из начальных условий

$$\begin{cases} \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \\ \vec{r}'(0) = \vec{v}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}(0) = \vec{c}_1 = \vec{r}_0 \\ \vec{r}'(0) = \omega \vec{c}_2 = \vec{v}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \vec{v}_0 \sin \omega t \\ \vec{v} = \vec{r}'(t) = -\omega \vec{r}_0 \sin \omega t + \vec{v}_0 \cos \omega t \end{cases}$$

**Замечание.** Траектория

$$\vec{r}(t) = \vec{a} \cos t + \vec{b} \sin t$$

представляет собой эллипс, лежащий в плоскости векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  с центром в начале координат. Если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  - полуоси эллипса. Найти полуоси в общем случае.

Далее. Проверим сохранение полной энергии

$$E = E_{\Pi} + E_K = \text{const}$$

Замечая, что силовое поле  $\vec{F} = \vec{F}_y$  потенциально

$$\vec{F}_y = -k\vec{r} = -\text{grad} \left( \frac{k}{2} (\vec{r}, \vec{r}) \right)$$

получим

$$E_{\Pi} = \frac{k}{2} (\vec{r}, \vec{r}), \quad E_K = \frac{m}{2} (\vec{v}, \vec{v})$$

Введем обобщенные векторы координат и импульса

$$\vec{h}_r = \sqrt{\frac{k}{2}} \vec{r}, \quad \vec{h}_v = \sqrt{\frac{m}{2}} \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{h} = \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix}$$

и построим вектор  $\vec{h}$ , называемый **вектором состояния** физической системы, **скалярный квадрат** которого и есть **полная энергия**

$$(\vec{h}, \vec{h}) = (\vec{h}_r, \vec{h}_r) + (\vec{h}_v, \vec{h}_v) = E_{\Pi} + E_K = E$$

По найденному выше решению  $\vec{r}$  ( $\Rightarrow \vec{v} = \vec{r}'$ ), построим компоненты  $\vec{h}_r$ ,  $\vec{h}_v$

$$\begin{cases} \vec{h}_r = \cos \omega t \vec{h}_{r0} + \sin \omega t \vec{h}_{v0} \\ \vec{h}_v = -\sin \omega t \vec{h}_{r0} + \cos \omega t \vec{h}_{v0} \end{cases} \Rightarrow \vec{h} = \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \cos \omega t & I \sin \omega t \\ -I \sin \omega t & I \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_{r0} \\ \vec{h}_{v0} \end{bmatrix} = U_t \vec{h}_0$$

где матрица  $U_t$  - унитарная, что и обеспечивает сохранение скалярного квадрата  $\vec{h}$

Выясним “причину” унитарности матрицы эволюции  $U_t$ .

С этой целью преобразуем уравнение для  $\vec{r}$  в уравнение для вектора состояния  $\vec{h}$

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{v} \\ \vec{v}' = \vec{r}'' = -\omega^2 \vec{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{2}} \vec{r}' = \omega \sqrt{\frac{m}{2}} \vec{v} \\ \sqrt{\frac{m}{2}} \vec{v}' = -\omega \sqrt{\frac{k}{2}} \vec{r} \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega I \\ -\omega I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix}$$

откуда

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \vec{h} = A \vec{h} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -i\omega I \\ i\omega I & 0 \end{bmatrix} = A^*$$

Учитывая начальное условие, получим решение

$$\vec{h} = e^{iAt} \vec{h}_0$$

Проверим, что

$$e^{iAt} = U_t$$

Имеем

$$e^{iAt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iAt)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (At)^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (At)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \begin{matrix} \cos At & + & i \sin At \end{matrix} \rightarrow$$

Замечая, что

$$A^2 = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \omega^2 I$$

продолжим

$$= I \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\omega t)^{2m}}{(2m)!} + \frac{i}{\omega} A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\omega t)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cos \omega t + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \sin \omega t = U_t$$

Подведем итог.

Поведение физической системы описывается вектором состояния  $\vec{h}$ , удовлетворяющим дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \vec{h} = A \vec{h}$$

скалярный квадрат которого есть полная энергия системы

$$E = (\vec{h}, \vec{h})$$

В случае замкнутой (консервативной) системы матрица уравнения

$$A = A^*$$

самосопряженная, так что эволюция состояния задается унитарной матрицей

$$\vec{h} = e^{iAt} \vec{h}_0 = U_t \vec{h}_0$$

что и обеспечивает сохранение энергии

$$E = (\vec{h}, \vec{h}) = (U_t \vec{h}_0, U_t \vec{h}_0) = (\vec{h}_0, \vec{h}_0) = \text{const}$$

2° Движение с учетом потенциального однородного поля силы тяжести

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \vec{F}_Y + \vec{F}_T = -k\vec{r} + m\vec{g} = -k(\vec{r} - \omega^{-2}\vec{g}), \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

После замены переменной

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \omega^{-2}\vec{g}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{\rho}' = \vec{r}' = \vec{v}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{\rho}'' = \vec{v}' = \vec{w}$$

задача сводится к предыдущей

$$\vec{\rho}'' + \omega^2 \vec{\rho} = \vec{0}$$

Замечая, что силовое поле

$$\vec{F} = \vec{F}_Y + \vec{F}_T = -k\vec{r} + m\vec{g} =$$

$$= -\text{grad}\left(\frac{k}{2}(\vec{r}, \vec{r})\right) - \text{grad}(-(\vec{r}, m\vec{g})) = -\text{grad}\left(\frac{k}{2}(\vec{\rho}, \vec{\rho})\right)$$

потенциально, получим

$$E_{\Pi} = \frac{k}{2}(\vec{\rho}, \vec{\rho}) = \frac{k}{2}(\vec{r} - \omega^{-2}\vec{g}, \vec{r} - \omega^{-2}\vec{g}), \quad E_K = \frac{m}{2}(\vec{v}, \vec{v})$$

так что роль вектора состояния играет вектор

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{h}_r = \sqrt{\frac{k}{2}} \vec{\rho} = \sqrt{\frac{k}{2}} (\vec{r} - \omega^{-2}\vec{g}), \quad \vec{h}_v = \sqrt{\frac{m}{2}} \vec{v}$$

скалярный квадрат которого равен полной энергии

$$(\vec{h}, \vec{h}) = (\vec{h}_r, \vec{h}_r) + (\vec{h}_v, \vec{h}_v) = E_{\Pi} + E_K = E$$

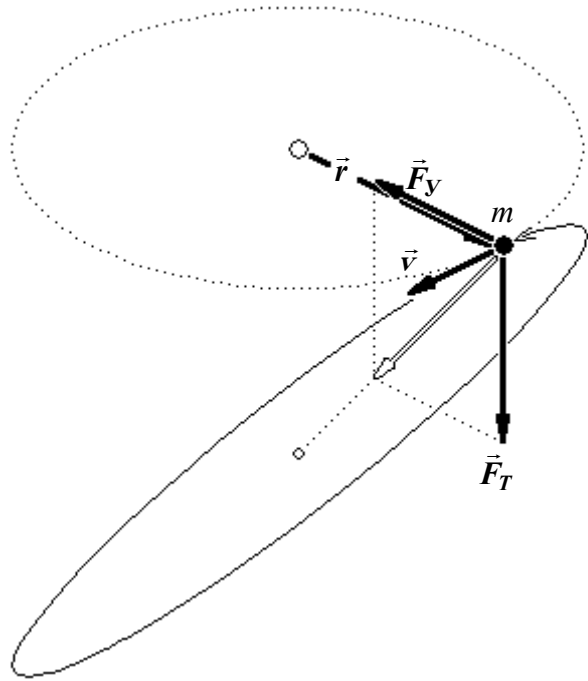
Итак, вектор состояния  $\vec{h}$  системы удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \vec{h} = A \vec{h}$$

с самосопряженной матрицей  $A = A^*$ , что равносильно сохранению энергии

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (\vec{h}, \vec{h}) = \left( \frac{d}{dt} \vec{h}, \vec{h} \right) + \left( \vec{h}, \frac{d}{dt} \vec{h} \right) =$$

$$= (iA \vec{h}, \vec{h}) + (\vec{h}, iA \vec{h}) = -\left( \frac{A - A^*}{i} \vec{h}, \vec{h} \right) = 0 \Rightarrow E = \text{const}$$



### 3° Движение с учетом сопротивления среды

При движении тела в вязкой среде происходит диссипация (рассеяние, убывание) полной механической энергии, переходящей в другие формы (например, теплоту)

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \vec{F}_y + \vec{F}_T + \vec{F}_C = -k\vec{r} + m\vec{g} - \alpha\vec{v}$$

$$\ddot{\vec{r}} + \beta\dot{\vec{r}} + \omega^2\vec{r} = \vec{g}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \beta = \frac{\alpha}{m}$$

После замены переменной

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \omega^{-2}\vec{g}$$

получим

$$\ddot{\vec{\rho}} + \beta\dot{\vec{\rho}} + \omega^2\vec{\rho} = \vec{0}$$

Как и раньше

$$E_{II} = \frac{k}{2}(\vec{\rho}, \vec{\rho}), \quad E_K = \frac{m}{2}(\vec{v}, \vec{v})$$

так что вектор состояния прежний

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{h}_r = \sqrt{\frac{k}{2}} \vec{\rho} = \sqrt{\frac{k}{2}} (\vec{r} - \omega^{-2}\vec{g}), \quad \vec{h}_v = \sqrt{\frac{m}{2}} \vec{v} \Rightarrow (\vec{h}, \vec{h}) = E$$

Построим дифференциальное уравнение для вектора состояния  $\vec{h}$

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\rho}} = \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = -\omega^2\vec{\rho} - \beta\vec{v} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{k}{2}}\dot{\vec{\rho}} = \omega\sqrt{\frac{m}{2}}\vec{v} \\ \sqrt{\frac{m}{2}}\dot{\vec{v}} = -\omega\sqrt{\frac{k}{2}}\vec{\rho} - \beta\sqrt{\frac{m}{2}}\vec{v} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega I \\ -\omega I & -\beta I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix}$$

откуда

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \vec{h} = A \vec{h} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -i\omega I \\ i\omega I & i\beta I \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & -i\omega I \\ i\omega I & -i\beta I \end{bmatrix} = A^*$$

Диссипативность матрицы  $A$

(уточнение **несамосопряженности**)

$$\frac{A - A^*}{i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\beta I \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \neq 0$$

равносильна **потере** энергии

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (\vec{h}, \vec{h}) = - \left( \frac{A - A^*}{i} \vec{h}, \vec{h} \right) =$$

$$= - \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\beta I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix} \right) = -\alpha (\vec{v}, \vec{v}) \leq 0 \Rightarrow E \searrow$$

## Шарики на пружинках

$$\Rightarrow m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{j \neq i} k_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \sum_{j \neq i} k_{ij} \vec{r}_j - \left( \sum_{j \neq i} k_{ij} \right) \vec{r}_i, \quad k_{ij} = k_{ji} \geq 0, \quad i, j = 1 \dots n$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_i \\ \vdots \\ \vec{r}_n \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_i \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} m_1 I & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_i I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & m_n I \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} \sum_{j \neq 1} k_{1j} I & \dots & -k_{1i} I & \dots & -k_{1n} I \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_{i1} I & \dots & \sum_{j \neq i} k_{ij} I & \dots & -k_{in} I \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_{n1} I & \dots & -k_{ni} I & \dots & \sum_{j \neq n} k_{nj} I \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

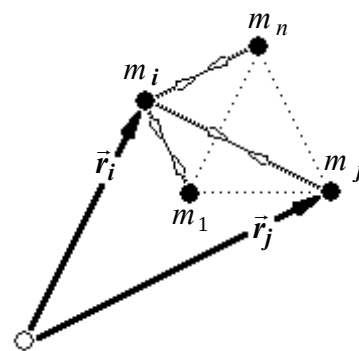
$$M \ddot{\vec{r}} = -K \vec{r}, \quad M = M^* > 0, \quad K = K^* (\geq 0)$$

Замечая, что

$$K \vec{r} = \text{grad} \frac{1}{2} (K \vec{r}, \vec{r}) = \text{grad} E_{\Pi}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2E_{\Pi} &= (K \vec{r}, \vec{r}) = \sum_i \left( \sum_{j \neq i} k_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j), \vec{r}_i \right) = \\ &= \sum_i \sum_{j < i} (k_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{r}_i) + k_{ji} (\vec{r}_j - \vec{r}_i, \vec{r}_j)) = \sum_i \sum_{j < i} k_{ij} \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow K \geq 0 \Rightarrow \exists \sqrt{K} \Rightarrow E_{\Pi} = \frac{1}{2} (K \vec{r}, \vec{r}) = \left( \sqrt{\frac{1}{2} K} \vec{r}, \sqrt{\frac{1}{2} K} \vec{r} \right)$$

а так же

$$E_K = \frac{1}{2} (M \vec{v}, \vec{v}) = \left( \sqrt{\frac{1}{2} M} \vec{v}, \sqrt{\frac{1}{2} M} \vec{v} \right)$$

построим **вектор состояния**

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{h}_r = \sqrt{\frac{1}{2} K} \vec{r}, \quad \vec{h}_v = \sqrt{\frac{1}{2} M} \vec{v}$$

скалярный квадрат которого есть **полная энергия** системы материальных точек

$$(\vec{h}, \vec{h}) = (\vec{h}_r, \vec{h}_r) + (\vec{h}_v, \vec{h}_v) = E_{\Pi} + E_K = E$$

Преобразуя дифференциальное уравнение для  $\vec{r}$

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{v} \\ M \vec{v}' = -K \vec{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2} K} \vec{r}' = \Omega^* \cdot \sqrt{\frac{1}{2} M} \vec{v} \\ \sqrt{\frac{1}{2} M} \vec{v}' = -\Omega \cdot \sqrt{\frac{1}{2} K} \vec{r} \end{cases}, \quad \Omega = \sqrt{M}^{-1} \sqrt{K}$$

получим уравнение для вектора состояния  $\vec{h}$

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \vec{h} = A \vec{h} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -i \Omega^* \\ i \Omega & 0 \end{bmatrix} = A^*$$

с **самосопряженной** матрицей  $A = A^*$ , что равносильно **сохранению энергии**

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (\vec{h}, \vec{h}) = - \left( \frac{A - A^*}{i} \vec{h}, \vec{h} \right) = 0 \Rightarrow E = \text{const}$$