

– це є азимутальний кут, θ – полярний кут, $r_{\perp} = r \sin \theta$ – відстань від елементарної маси до осі обертання.

Тоді для моменту інерції кулі можна записати наступний вираз:

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 (\sin \theta)^2 \rho dr r^2 \sin \theta d\varphi d\theta = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin^3 \theta \int_0^R r^4 dr = \\ &= \frac{M}{4\pi R^3} 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d(-\cos \theta) \int_0^R r^4 dr = \frac{-3M}{2R^3} \frac{R^5}{5} \int_1^{-1} (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \\ &= \frac{-3MR^2}{10} \left[\cos \theta \Big|_0^{\pi} - \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{-3MR^2}{10} \left[-2 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) \right] \\ &= \frac{3MR^2}{10} \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{5} MR^2. \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

Отже, момент інерції суцільної кулі відносно осі, що проходить крізь її центр мас, дорівнює:

$$I = 0.4MR^2. \quad (1.6.14)$$

Ця задача є ілюстрацією того, як знання, які набуто в курсі математичного аналізу, стосовно якобіана J переходу від однієї системи координат до іншої можна застосовувати у фізичних задачах. Справді, записати об'єм кулі у декартовій системі координат було б складніше: $dV = dx dy dz$. А в сферичній системі координат $dV = |J| dr d\varphi d\theta$, тому процедура інтегрування виглядає простішою.

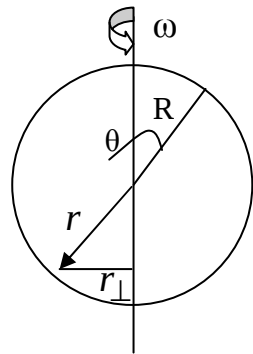


Рис. 1.6.4

1.6.3. Момент інерції абсолютно твердого тіла відносно точки

Момент інерції абсолютно твердого тіла відносно точки O – це сума добутків мас матеріальних точок, з яких складається абсолютно тверде тіло, що помножені на квадрати їхніх відстаней R_i до точки O :

$$\theta = \sum_i m_i R_i^2 = \int R^2 dm. \quad (1.6.15)$$

Розглянемо одну матеріальну точку з масою m та координатами X , Y , Z у декартовій системі координат. Моменти інерції цієї матеріальної точки відносно осей декартової системи координат (див. рис. 1.6.5) дорівнюють, відповідно:

$$I_x = m(Y^2 + Z^2); I_y = m(Z^2 + X^2); I_z = m(X^2 + Y^2). \quad (1.6.16)$$

Якщо їх скласти, то отримаємо: $I_x + I_y + I_z = 2m(X^2 + Y^2 + Z^2)$. Але оскільки $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, то:

$$2\theta = I_x + I_y + I_z. \quad (1.6.17)$$

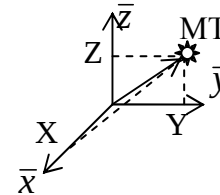


Рис. 1.6.5

Оскільки момент інерції є адитивною величиною, то наведені міркування є вірними і для абсолютно твердого тіла, що складається з багатьох матеріальних точок.

Для абсолютно твердого тіла, яке має форму плоскої фігури, одна з координат, що є перпендикулярною до фігури, наприклад, Z , дорівнює нулю. Отже, у цьому випадку:

$$\theta_{\text{плоск}} = \sum_i m_i (Y_i^2 + X_i^2) = I_z. \quad (1.6.18)$$

Отже, для плоского абсолютно твердого тіла з однорідною

густиною маємо важливе співвідношення між моментами інерції, обчисленими відносно осей, що збігаються з координатними осями:

$$I_x + I_y = I_z. \quad (1.6.19)$$

Поняття про момент інерції абсолютно твердого тіла відносно точки є зручним для розрахунків моментів інерції плоских та сферично симетричних твердих тіл.

1.6.4. Момент імпульсу абсолютно твердого тіла, що обертається

За визначенням момент імпульсу абсолютно твердого тіла дорівнює:

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i \times \vec{v}_i]. \quad (1.6.20)$$

Якщо в (1.6.20) замінити лінійну швидкість елемента абсолютно твердого тіла на його вираз через кутову швидкість $\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$, то здобудемо:

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] = \sum_i m_i [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})]. \quad (1.6.21)$$

Скористаємося відомостями з тензорної алгебри, тоді вектор моменту імпульсу абсолютно твердого тіла можна записати через символ Кронекера δ_{ik} : $\delta_{ik}=1$, коли $i=k$, та $\delta_{ik}=0$, коли $i \neq k$. Запишемо момент імпульсу абсолютно твердого тіла в тензорному вигляді, опустивши індекси "i", які позначають номер елементарної маси:

$$L_j = \sum m (\omega_j r_l r_l - r_j r_k \omega_k). \quad (1.6.22)$$

Нагадаємо, що повторення тензорних індексів означає, що відповідні величини слід просумувати: $b_k b_k \equiv \sum_{k=x,y,z} b_k b_k = b_x b_x + b_y b_y + b_z b_z$. Вираз (1.6.22) можна переписати в

інший спосіб: $L_j = I_{jk} \omega_k$, де I_{jk} – це тензор інерції:

$$I_{jk} = \sum m (\delta_{jk} r_l r_l - r_j r_k). \quad (1.6.23)$$

У випадку неперервного розподілу маси по усьому об'єму абсолютно твердого тіла замість виразу (1.6.23) слід використовувати інтегральний вираз для тензора інерції:

$$I_{jk} = \int \rho(r) (r^2 \delta_{jk} - r_j r_k) dV. \quad (1.6.24)$$

Цей тензор є симетричним: $I_{jk} = I_{kj}$, тому, його як будь-який симетричний тензор другого рангу, можна звести до діагонального вигляду шляхом відповідного вибору напрямку осей координат. Такі координатні осі, в яких тензор інерції має діагональний вигляд, звуться головними осями інерції, а відповідні значення компонентів тензора I_{jk} – головними моментами інерції.

Знаходження головних осей симетрії значно спрощується, коли абсолютно тверде тіло має якусь симетрію. Наприклад, якщо абсолютно тверде тіло є плоским, то його центр інерції лежить у цій площині, у ній також лежать дві головні осі інерції, а третя головна вісь є перпендикулярною до цієї площини.

Кожен з головних моментів інерції не більший за суму двох інших:

$$I_1 + I_2 = \sum m (x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geq \sum m (x_1^2 + x_2^2) = I_3. \quad (1.6.25)$$

Якщо для головних моментів інерції маємо нерівність $I_1 \neq I_2 \neq I_3$, то таке абсолютно тверде тіло зветься асиметричною дзигою. Якщо величини двох головних моментів інерції збігаються, $I_1 = I_2 \neq I_3$, то таке абсолютно тверде тіло зветься симетричною дзигою. А якщо $I_1 = I_2 = I_3$, тоді це – кульова дзига.

Якщо скористатися головними осями інерції, тоді в загальному випадку будь-який компонент моменту імпульсу L_j дорівнює добутку кутової швидкості обертання ω_j навколо цієї осі $\vec{j}$ на відповідний діагональний елемент тензора інерції I_j :

$\mathcal{L}_j = I_j \omega_j$. А для кульової дзиги маємо ще простіший зв'язок: $\mathcal{L}_j = I \omega_j$, оскільки при цьому $\vec{\mathcal{L}} \parallel \vec{\omega}$.

При довільному русі абсолютно твердого тіла його кінетична енергія складається з енергії поступального руху та енергії обертального руху:

$$E_{\text{кін}} = m v_{\text{ц}}^2 / 2 + I_{\text{ж}} \omega_{\text{ж}} \omega_{\text{ж}} / 2, \quad (1.6.26)$$

де $v_{\text{ц}}$ – це швидкість центра мас, ω_i – це проекція кутової швидкості обертання на певну координатну вісь $\vec{e}_i$. Якщо скористатися головними осями інерції, тоді:

$$E_{\text{кін}} = m v_{\text{ц}}^2 / 2 + (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) / 2. \quad (1.6.27)$$

1.6.5. Кочення абсолютно твердого тіла з похилої площини

Нехай абсолютно тверде тіло, що котиться, має симетрію обертання відносно геометричної осі. При цьому воно не ковзає, тобто швидкість точки, якою абсолютно тверде тіло торкається похилої площини, дорівнює нулю. На рисунку, який ілюструє задачу, A – це точка дотику, C – це точка центра мас, $|AC| = r$. Розв'яжемо цю

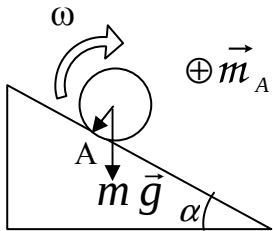


Рис. 1.6.6

задачу трьома різними способами.

1). Застосуємо **рівняння моментів** відносно миттєвої осі обертання для знаходження прискорення центра мас абсолютно твердого тіла. За умов відсутності ковзання миттєва вісь та вісь, що проходить через центр мас, рухаються паралельно одна одній. Тоді рівняння моментів має досить просту форму запису:

$$I_A d\omega / dt = m_A, \quad (1.6.28)$$

де I_A – момент інерції абсолютно твердого тіла відносно миттєвої осі обертання, m_A – сумарний момент зовнішніх сил відносно тієї ж осі (див. рис. 1.6.6).

В даному випадку зовнішніми силами є сила тяжіння $m\vec{g}$, сила тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$ та сила нормальної реакції опори $\vec{N}$, що діє з боку похилої площини на абсолютно тверде тіло. Моменти сили тертя та сили нормальної реакції опори не входять до рівняння (1.6.26), тому що ці сили проходять крізь точку A , а значить, їхні моменти відносно миттєвої осі дорівнюють нулю. Таким чином, вираз для моменту сил має вигляд: $m_A = mgr \sin \alpha$, тоді рівняння (1.6.28) можна переписати так:

$$I_A d\omega / dt = mgr \sin \alpha. \quad (1.6.29)$$

Нехай V_C – це лінійна швидкість точки C відносно площини, тоді $V_C = V_A + \omega r$. Оскільки ковзання немає, тоді швидкість точки дотику дорівнює нулю, і, значить, $V_C = \omega r$. Тому для лінійного прискорення центра мас маємо таке рівняння:

$$a = dV_C / dt = r d\omega / dt. \quad (1.6.30)$$

Тоді з (1.6.29) та (1.6.30) маємо розв'язок задачі:

$$a = mgr^2 \sin \alpha / I_A. \quad (1.6.31)$$

За теоремою Гюйгенса–Штейнера $I_A = I_C + mr^2$, тому з рівняння (1.6.31) здобудемо:

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + I_C / (mr^2)}. \quad (1.6.32)$$

Висновок: знайдено прискорення, з яким котиться абсолютно тверде тіло. До його виразу не входить реакція опори, величина якої може бути невідомою з умов задачі.

2). Застосуємо **рівняння моментів** відносно осі, що проходить крізь центр мас, точку C (див. рис. 1.6.7). Тоді воно матиме вигляд, до якого не входить сила тяжіння:

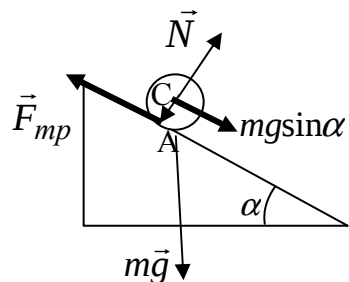


Рис. 1.6.7

$$I_C d\omega / dt = m_C. \quad (1.6.33)$$

Цікаво, що сюди не входить також і її складова $mg \sin \alpha$, що спонукає абсолютно тверде тіло до руху вздовж похилої площини. Момент сили m_C також не створюється силою нормальної реакції опори. У створенні моменту сил m_C бере участь лише сила тертя F_{mp} , яка є паралельною

похилій площині. Тоді з рівняння (1.6.33) маємо:

$$I_C d\omega / dt = r F_{mp}. \quad (1.6.34)$$

Але в цьому рівнянні невідомими є дві величини: сила тертя F_{mp} та кутове прискорення $d\omega / dt$. Тому слід залучити ще одне рівняння – закон динаміки руху центра мас даного абсолютно твердого тіла в проекції на напрямок його руху:

$$mdV / dt = mg \sin \alpha - F_{mp}. \quad (1.6.35)$$

Оскільки лінійне прискорення в лінійний спосіб пов'язано з кутовим прискоренням: $a = dV_C / dt = r d\omega / dt$, тоді з (1.6.34) отримуємо:

$$I_C a = r^2 F_{mp}. \quad (1.6.36)$$

Цікаво відзначити, що цей вираз сили тертя в даному випадку відрізняється від того, який є відомим ще з курсу фізики, що викладається в середній школі, бо там вивчався випадок тертя ковзання: $F_{mp} \leq \mu N = \mu mg \cos \alpha$. А в даному випадку ми маємо справу з явищем тертя кочення. Підставимо вираз для F_{mp} з (1.6.35) до рівняння (1.6.36):

$$I_C a / r^2 = F_{mp} = mg \sin \alpha - ma. \quad (1.6.37)$$

Звідси легко здобути вираз для прискорення абсолютно твердого тіла:

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + I_C / (mr^2)}. \quad (1.6.38)$$

Висновок: попередній результат підтверджено. Показано, що сила тертя кочення відрізняється від сили тертя ковзання.

3). Застосуємо закон збереження повної механічної енергії. Кінетична енергія $E_k = I_A \omega^2 / 2$ для тіла, яке бере участь у обертальному русі, зростає (бо спочатку абсолютно тверде тіло не рухалось) за рахунок накопиченої спочатку потенціальної енергії. Слід зазначити, що якщо за вісь обертання обрати вісь, яка проходить крізь центр мас, то вираз для кінетичної енергії ускладниться: $E_k = I_C \omega^2 / 2 + mV^2 / 2$. Для визначення положення даного тіла зручно скористатися віссю координат $\vec{x}$, яку направлено вздовж похилої площини вниз.

Запишемо закон збереження механічної енергії, користуючись виразом кінетичної енергії відносно осі, що проходить крізь точку A:

$$I_A \omega^2 / 2 = mgh, \quad (1.6.39)$$

де $h = x \sin \alpha$; x – це координата, яка характеризує положення абсолютно твердого тіла на даний момент часу відносно точки на похилій площині, в якій це тіло перебувало перед початком кочення. Візьмемо похідну за часом від (1.6.39), маючи на увазі, що для руху без ковзання $V = \omega r = dx / dt$. Тоді з (1.6.39) маємо:

$$I_A r^{-2} V dV / dt = mg \sin(\alpha) dx / dt. \quad (1.6.40)$$

З цього виразу легко знайти $dV / dt = mgr^2 \sin \alpha / I_A$. Або, якщо скористатися теоремою Гюйгенса–Штейнера:

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + I_C / (mr^2)}. \quad (1.6.41)$$

Висновок: результат, що було отримано попередніми способами, підтверджено. Показано, що законом збереження механічної енергії можна користуватися, якщо адекватно враховувати наявність процесу дисипації енергії. Дійсно, в системі є тертя, але за відсутності ковзання силу тертя прикладено до точок абсолютно твердого тіла, миттєва швидкість яких дорівнює нулю, тому сила тертя кочення не виконує роботи. Робота сили тяжіння йде на збільшення кінетичної енергії поступального та обертального рухів.

1.6.6. Обертальний рух фізичного маятника

Фізичним маятником називають абсолютно тверде тіло, що може вільно обертатися навколо *горизонтальної* осі внаслідок дії моменту зовнішніх сил. Найчастіше цей момент створює сила тяжіння.

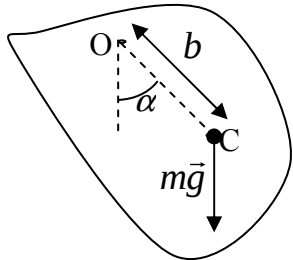


Рис. 1.6.8

Розглянемо абсолютно тверде тіло довільної плоскої форми (див. рис. 1.6.8). Нехай точка O – це точка підвісу, крізь яку проходить вісь обертання, а точка C визначає центр мас. Момент сил створюється силою тяжіння $m\vec{g}$ відносно осі обертання, що проходить крізь точку O : $M = mgb \sin \alpha$, де b – це

відстань між точками O та C , α – кут між радіусом-вектором, що з'єднує точку, відносно якої обертається абсолютно тверде тіло, з точкою C , до якої прикладено силу $m\vec{g}$, та напрямком сили $m\vec{g}$. З рівняння моментів маємо:

$$M = Id(\omega) / dt. \quad (1.6.42)$$

Похідна від кутової швидкості за часом дорівнює другій

похідній від кута повороту за часом: $d\omega / dt = d^2\alpha / dt^2$. Підставимо до (1.6.42) вираз для моменту сили тяжіння (відносно точки O):

$$-mgb \sin \alpha = I_O d^2\alpha / dt^2. \quad (1.6.43)$$

Мінус тут присутній через те, що α відраховують від нормалі, а при збільшенні величини цього кута момент сили тяжіння повертає фізичний маятник до стану рівноваги. При цьому за теоремою Гюйгенса–Штейнера: $I_O = I_C + mb^2$. Таким чином, маємо диференціальне рівняння другого порядку для α :

$$d^2\alpha / dt^2 = -mgb \sin \alpha / I_O. \quad (1.6.44)$$

Нагадаємо, що для математичного маятника з рівняння моментів можна здобути аналогічне рівняння:

$$d^2\alpha / dt^2 = -g \sin \alpha / l. \quad (1.6.45)$$

Тому фізичний маятник буде поводитися так, як математичний маятник, що має довжину $l_0 = I_O / (mb)$. Величину l_0 називають *зведеною довжиною* даного фізичного маятника. Якщо взяти математичний маятник з довжиною l_0 та підвісити його до фізичного маятника в точці O , то вони коливатимуться з однаковим періодом, а тягарець математичного маятника буде знаходитися весь час в одній точці фізичного маятника. Ця точка зветься *центром коливань* даного фізичного маятника.

1.6.7. Теорема Гюйгенса

Спочатку доведемо, що зведена довжина l_0 є завжди більшою за відстань b між точкою підвісу та центром мас, тобто центр коливань завжди лежить нижче за центр тяжіння. Дійсно, з теореми Гюйгенса–Штейнера момент інерції фізичного маятника $I_O = I_C + mb^2$, тому для його зведеної довжини має місце нерівність:

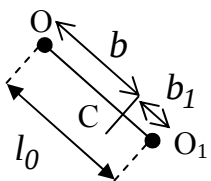


Рис. 1.6.9. O – перша точка підвісу, O₁ – перший центр коливань

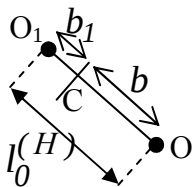


Рис. 1.6.10. O₁ – нова точка підвісу, O – новий центр коливань

$$l_0 = I_O / mb = (I_C + mb^2) / mb = b + I_C / mb > b. \quad (1.6.46)$$

Тепер доведемо теорему про те, що «точка підвісу та центр коливань фізичного маятника є взаємно оборотними точками». Це означає, що коли зняти фізичний маятник з точки підвісу та почепити його за центр коливань, то період коливань не зміниться, а попередня точка підвісу стане новим центром коливань (див. рис. 1.6.9 та рис. 1.6.10).

Для доведення теореми Гюйгенса слід обчислити відстані між точками підвісу та центрами коливань в обох випадках. В першому випадку $l_0 = b + I_C / mb$, а в другому – $l_0^{(H)} = I^{(H)} / mb_1 = I_C / mb_1 + b_1$. Оскільки $l_0 = b + b_1$, то:

$$b_1 = l_0 - b = I_C / mb. \quad (1.6.47)$$

З виразу (1.6.47) просто знайти відстань між точкою підвісу та центром коливань у другому випадку:

$$l_0^{(H)} = b_1 + \frac{I_C}{mb_1} = \frac{I_C}{mb} + \frac{I_C}{m} \frac{mb}{I_C} = \frac{I_C}{mb} + b = l_0. \quad (1.6.48)$$

Отже, відстань між точкою підвісу та центром коливань у другому випадку є такою ж, як і в першому випадку: $l_0^{(H)} = l_0$, тому і періоди коливань таких маятників є однаковими. Значить, теорему Гюйгенса доведено.

1.6.8. Пара сил

Розглянемо рух абсолютно твердого тіла за умови дії на нього двох сил, які є однаковими за модулем, але орієнтовано їх антипаралельно одна одній, і лінії їхніх дій при цьому не збігаються. Такі сили називають **парою сил**. Відстань l між лініями дії сил $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$ називають плечем пари сил. Пару сил не можна замінити рівнодіючою силою, бо векторна сума цих сил дорівнює нулю. Момент пари сил не залежить від вибору точки, відносно якої його розраховують, і дорівнює за модулем

$$M = lF, \quad (1.6.49)$$

де $F = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$. Доведемо співвідношення (1.6.49) для довільно розташованої точки O (див. рис. 1.6.11), відносно якої обчислено момент пари сил $\vec{M}$. Зрозуміло, що момент пари сил дорівнює сумі моментів кожної з цих сил. Беручи до уваги, що $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, знайдемо момент пари сил:

$$\vec{M} = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_1, \vec{F}_2] + [\vec{r}_{12}, \vec{F}_2] = [\vec{r}_{12}, \vec{F}_2]. \quad (1.6.50)$$

З рис. 1.6.11 видно, що за побудовою $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{12}$. Отже, модуль моменту пари сил дорівнює добутку: $M = r_{12} F_2 \sin \alpha = lF$. Слід відзначити, що оскільки сума зовнішніх сил дорівнює нулю

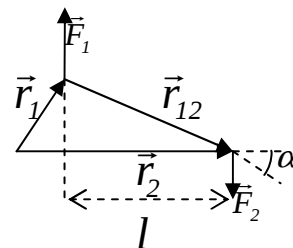


Рис. 1.6.11

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, то центр мас системи перебуває у стані спокою або у стані рівномірного прямолінійного руху. Значить, пара сил тільки обертає абсолютно тверде тіло відносно осі, що проходить крізь його центр мас. Напрямок обертання при цьому визначається напрямком векторного добутку $[\vec{R}_0 \times \vec{F}_j]$, де $\vec{R}_0$ – радіус-вектор, проведений з центра мас до певної сили $\vec{F}_j$, однієї з даної пари сил.

1.6.9. Рівновага абсолютно твердого тіла

Для опису руху абсолютно твердого тіла необхідно скористатися двома векторними рівняннями: перше – це рівняння руху центра мас $m d\vec{v}_c / dt = \vec{F}_{зовн}$ (тут $\vec{F}_{зовн}$ – це результуюча зовнішніх сил); друге – це рівняння моментів $d\vec{L} / dt = \vec{M}_{зовн}$ (тут $\vec{M}_{зовн}$ – це результуючий момент зовнішніх сил). Рівняння моментів можна обрати відносно довільного нерухомого початку відліку або відносно центра мас абсолютно твердого тіла. Можна також обрати рухомий початок, якщо тільки його швидкість у довільний момент часу є паралельною до швидкості центра мас.

З'ясуємо умови рівноваги абсолютно твердого тіла. Абсолютно тверде тіло перебуває у стані спокою, якщо результуюча зовнішніх сил та результуючий момент зовнішніх сил дорівнюють нулю:

$$\vec{F}_{зовн} = 0, \quad \vec{M}_{зовн} = 0. \quad (1.6.51)$$

Співвідношення (1.6.51) є необхідними умовами рівноваги абсолютно твердого тіла. Але вони не є достатніми, бо центр мас абсолютно твердого тіла може при цьому рухатися рівномірно та прямолінійно, а саме абсолютно тверде тіло може обертатися із збереженням моменту імпульсу ($\vec{L} = const$). Тому їх слід доповнити вимогою про рівність нулю кінетичної енергії, тобто вимогою $E = U$. Якщо до того ж $\partial^2 U / \partial \vec{r}^2 > 0$, тоді ці умови характеризуватимуть стан стійкої рівноваги в достатній мірі.

Питання для самоконтролю до розділу

§ 1.6. Обертальний рух абсолютно твердого тіла

1. Запишіть основне рівняння динаміки обертального руху (рівняння моментів) у векторній формі.
2. Запишіть основне рівняння динаміки обертального руху (рівняння моментів) у скалярній формі (у випадку обертання навколо закріпленої осі).
3. Кінетична енергія обертального руху абсолютно твердого

тіла навколо закріпленої осі.

4. Дайте визначення моменту сили.
5. Дайте визначення моменту імпульсу абсолютно твердого тіла, яке обертається навколо закріпленої осі.
6. Що таке момент інерції матеріальної точки?
7. Сформулюйте теорему Гюйгенса–Штейнера.
8. Сформулюйте умови рівноваги твердого тіла.
9. Що таке момент пари сил?
10. Що таке математичний маятник?
11. Що таке фізичний маятник?
12. Що таке зведена довжина фізичного маятника?
13. Що таке центр коливань фізичного маятника?
14. В чому полягає оборотність фізичного маятника (сформулюйте теорему Гюйгенса).
15. Які дві сили називають парою?
16. Чому дорівнює момент пари сил?

§ 1.7. Основні формули розділу «Механіка»

Радіус-вектор $\vec{r}(t)$ матеріальної точки визначається за відомими значеннями її початкового положення $\vec{r}(t_0)$ та її швидкості $\vec{v}(t)$:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt'. \quad (1.7.1)$$

Миттєва швидкість матеріальної точки $\vec{v}(t)$ визначається за відомим радіус-вектором $\vec{r}(t)$:

$$\vec{v}(t) = d\vec{r}(t) / dt. \quad (1.7.2)$$

Миттєву швидкість $\vec{v}(t)$ можна визначити також за відомою початковою швидкістю $\vec{v}(t_0)$ та прискоренням $\vec{a}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt'. \quad (1.7.3)$$

Прискорення $\vec{a}(t)$ матеріальної точки визначається за відомою залежністю її швидкості $\vec{v}(t)$ від часу

$$\vec{a}(t) = d\vec{v}(t)/dt \quad (1.7.4)$$

або за залежністю її координати від часу

$$\vec{a}(t) = d^2\vec{r}(t)/dt^2. \quad (1.7.5)$$

За умов **рівномірного прямолінійного** руху ($\vec{V}(t) = V_0 \vec{e}_x$, $V_0 = \text{const}$) прискорення відсутнє, $a_x = 0$. Тоді координата змінюється з часом в наступний спосіб:

$$x(t) = x(t_0) + V_0 \cdot (t - t_0). \quad (1.7.6)$$

За умов **рівноприскореного прямолінійного** руху ($\vec{a}(t) = a_0 \vec{e}_x$, $a_0 = \text{const}$) швидкість та координата залежать від часу в наступний спосіб:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_x(t_0) + a_0 \cdot (t - t_0); \\ x(t) &= x(t_0) + v_x(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{a_0 \cdot (t - t_0)^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.7.7)$$

Для пройденого шляху у цьому випадку можна записати:

$$S_x = [v_x(t)^2 - v_x(t_0)^2] / (2a_0). \quad (1.7.8)$$

У випадку руху матеріальної точки **по колу** радіусом R зі сталою кутовою швидкістю $\omega = d\varphi/dt$ її лінійна швидкість

дорівнює за модулем $v = \omega R$ або

$$v = 2\pi R / T, \quad (1.7.9)$$

тут T – період обертання. Лінійну швидкість обертального руху також можна переписати так: $v = 2\pi R \nu$; тут ν – частота обертання. Такий рух характеризується доцентровим прискоренням

$$a_n = v^2 / R. \quad (1.7.10)$$

Кутова швидкість пов'язана із періодом обертання $\omega = 2\pi / T$, а кутове прискорення пов'язане з кутовою швидкістю:

$$\varepsilon = d\omega / dt. \quad (1.7.11)$$

Імпульсом $\vec{p}$ тіла в класичній механіці називають добуток маси m тіла на його швидкість $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m \vec{v}. \quad (1.7.12)$$

Згідно із другим законом Ньютона, швидкість зміни імпульсу з часом дорівнює результуючій усіх зовнішніх сил, що діють на тіло:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{(\text{зовн})}. \quad (1.7.13)$$

Зазвичай в задачах механіки розглядають тіла із незмінною масою, коли другий закон Ньютона природно набуває вигляду: $m \vec{a} = \sum \vec{F}_i$ (виняток становлять задачі про реактивний рух).

Закон всесвітнього тяжіння: тіло масою m_1 притягує тіло масою m_2 , яке перебуває на відстані r від нього, із силою

$$F = G m_1 m_2 r^{-2}, \quad (1.7.14)$$

де гравітаційна стала $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{с}^2 \text{ кг})$.

Третій закон Кеплера пов'язує період T обертання планети навколо Сонця із величиною піввіссю її орбіти a :

$$T^2/a^3 = \text{const.} \quad (1.7.15)$$

Основне рівняння динаміки обертального руху визначає швидкість зміни із часом моменту імпульсу $\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ механічної системи відносно певної точки внаслідок дії на неї сумарного моменту сили $\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ відносно тієї ж точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (1.7.16)$$

У разі обертання тіла відносно закріпленої осі з проекція моменту імпульсу на цю вісь дорівнює добутку моменту інерції $I = \sum m_i r_i^2$ та кутової швидкості обертання ω_z : $L_z = I \omega_z$. Тоді основне рівняння динаміки обертального руху пов'язує кутове прискорення ε з моментом сили:

$$I \varepsilon = M_z. \quad (1.7.17)$$

Теорема Гюйгенса–Штейнера пов'язує відомий момент інерції абсолютно твердого тіла I_0 відносно першої осі, що проходить крізь центр мас тіла, із моментом інерції I відносно іншої осі, яка є паралельною до першої:

$$I = I_0 + m d^2, \quad (1.7.18)$$

де d – це відстань між осями, m – маса тіла.

Кінетична енергія тіла, що обертається навколо закріпленої осі:

$$K = 0,5 I \omega^2. \quad (1.7.19)$$

Прискорення $\vec{a}_n$ тіла відносно неінерціальної системи відліку пов'язане із:

1. силами $\vec{F}_i$, які діють на тіло з боку фізичних об'єктів (інших тіл та полів) так само, як це відбувається в інерціальних системах відліку,
2. прискоренням $\vec{A}$, з яким рухається центр неінерціальної системи відліку відносно інерціальної системи відліку,
3. кутовим прискоренням $\vec{\varepsilon}$, з яким обертається неінерціальна

система відліку,

4. кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, з якою обертається неінерціальна система відліку,

5. швидкістю $\vec{v}_n$, з якою рухається досліджуване тіло відносно неінерціальної системи відліку, в наступний спосіб:

$$m \vec{a}_n = \sum \vec{F}_i - m \vec{A} - m \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_n + m \omega^2 \vec{r}_\perp + 2m[\vec{v}_n \times \vec{\omega}]. \quad (1.7.20)$$

Тут $\vec{r}_n$ – радіус-вектор тіла відносно неінерціальної системи відліку, $\vec{r}_\perp$ – радіус-вектор тіла, який проведено від осі обертання до тіла. Другий, третій, четвертий та п'ятий доданки в правій частині рівняння виникають внаслідок неінерціальності системи відліку, їх називають силами інерції. Четвертий доданок ($m \omega^2 \vec{r}_\perp$) носить назву відцентрової сили, а п'ятий ($2m[\vec{v}_n \times \vec{\omega}]$) – сили Коріоліса.

§ 1.8. Задачі для контрольних робіт з розділу „Механіка”

Перший модуль з механіки присвячено кінематиці та динаміці матеріальної точки. У підрозділі «Кінематика матеріальної точки» важливим виглядає розвиток умінь студентів використовувати терміни математичного аналізу: похідна від певної функції за якимось із її параметрів, первісна функція від якоїсь функції, що використовується в механіці, за певним її параметром, геометричний сенс похідної функції тощо для розв'язання задач з кінематики точки. Тому майже у кожному варіанті присутня відповідна задача, в якій графічно задано швидкість матеріальної точки при її поступальному русі, а потрібно схематично намалювати зміну прискорення та координати матеріальної точки. Іншу задачу у кожному варіанті присвячено динаміці матеріальної точки, при цьому акцент зроблено на математичній стороні задачі.

Наведемо приклади розв'язання задач із зазначеної тематики.

Задача 1

Дано: Радіус-вектор тіла змінюється із часом t за законом $\vec{r} = \vec{b} t(1 - \alpha t)$, де $\vec{b}$ – сталий вектор, α – додатна стала.

Знайти:

- швидкість $\vec{v}$ і прискорення $\vec{a}$ тіла в залежності від часу;
- шлях, який тіло пройде до зупинки;
- проміжок часу Δt , після якого тіло повернеться до точки, з якої починало рух.

Розв'язання.

а) З аналізу виразу для радіус-вектора, що відомий з умов задачі, тіло починає рухатись із початку координат $\vec{r}(t=0)=0$ в напрямку вектора $\vec{b}$. За визначенням швидкості $\vec{v} = d\vec{r}/dt = \vec{b}(1 - 2\alpha t)$. З виразу для швидкості також видно, що спочатку тіло рухалось в напрямку вектора $\vec{b}$: $\vec{v}(t=0) = \vec{b}$. За визначенням прискорення $\vec{a} = d\vec{v}/dt = -2\alpha\vec{b}$. З виразу для прискорення видно, що тіло уповільнюється із сталим гальмуванням: $\vec{a} = \text{const}$. Оскільки $\alpha > 0$, прискорення спрямовано протилежно вектору $\vec{b}$, отже, спочатку прискорення спрямовано протилежно швидкості, тобто спочатку модуль швидкості зменшується, поки тіло не зупиниться.

б) Тіло зупиниться в момент t_1 , коли його швидкість дорівнюватиме нулю: $\vec{v}(t_1)=0$. Отже,

$$\vec{b}(1 - 2\alpha t_1) = 0, \quad (1.8.1)$$

звідки $t_1 = 1/(2\alpha)$ – час, який рухалось тіло до зупинки. Протягом цього часу напрямок швидкості руху збігався із напрямком вектора $\vec{b}$. За цей час пройдено шлях

$$S = \int_0^{t_1} v dt = \int_0^{t_1} b(1 - 2\alpha t) dt = b \left(t_1 - 2\alpha \frac{t_1^2}{2} \right) = \frac{b}{4\alpha}. \quad (1.8.2)$$

в) Тіло повернеться до точки, з якої починало рух, в момент часу Δt , коли його координата дорівнюватиме нулю:

$$r(\Delta t) = 0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{b} \Delta t (1 - \alpha \Delta t) = 0. \quad (1.8.3)$$

Це рівняння є справедливим, коли $\Delta t = 0$, тобто на початку руху, та коли $\Delta t = 1/\alpha$.

Відповідь: а) $\vec{v} = \vec{b}(1 - 2\alpha t)$, $\vec{a} = -2\alpha\vec{b}$; б) $S = \frac{b}{4\alpha}$; в) $\Delta t = 1/\alpha$.

Задача 2

Дано: Брусок масою m тягнуть за нитку по горизонтальній площині з коефіцієнтом тертя k так, що він рухається із сталою швидкістю.

Знайти: кут між силою, з якою тягнуть нитку, і горизонтом, при якому натяг нитки є найменшим. Визначити цю силу натягу.

Розв'язання.

Брусок рухається під дією чотирьох сил (див. рис. 1.8.1): mg – сила тяжіння, що спрямована вертикально вниз; N – сила нормальної реакції опори, що спрямована вертикально вгору; $F_{\text{тер}}$ – сила тертя, що спрямована протилежно вектору швидкості; F – сила натягу нитки. Оскільки за умовою задачі брусок рухається без прискорення, то за першим законом Ньютона геометрична сума цих тіл дорівнює нулю:

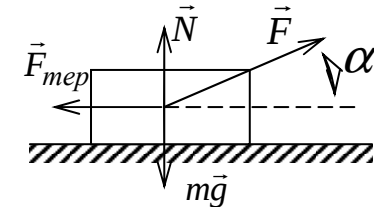


Рис. 1.8.1

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}} + \vec{F} = 0. \quad (1.8.4)$$

Спроекуємо це рівняння на горизонтальну та вертикальну осі, враховуючи, що за модулем $F_{\text{тер}} = kN$:

$$\begin{cases} 0 = -kN + F \cos \alpha, \\ 0 = mg - N - F \sin \alpha. \end{cases} \quad (1.8.5)$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо силу натягу

$$F = \frac{kmg}{\cos \alpha + k \sin \alpha}. \quad (1.8.6)$$

Дослідимо здобутий вираз $F(\alpha)$ на екстремум, тобто знайдемо похідну $dF/d\alpha$ та прирівняємо її нулю:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{kmg(-\sin\alpha_{\min} + k\cos\alpha_{\min})}{-(\cos\alpha_{\min} + k\sin\alpha_{\min})^2} = 0, \quad (1.8.7)$$

звідки дістаємо $k = \tan\alpha_{\min}$, тобто $\alpha_{\min} = \arctg k$. Відповідно мінімальна сила натягу дорівнює:

$$F_{\min} = kmg / \sqrt{1+k^2}. \quad (1.8.8)$$

Відповідь: $\alpha_{\min} = \arctg k$, $F_{\min} = kmg(1+k^2)^{-1/2}$.

Умови задач для першої модульної контрольної роботи з механіки:

1. Матеріальну точку поклали на похилу площину, що має коефіцієнт тертя k , та надали їй початкову швидкість V_0 вздовж площини вгору. При якому значенні кута нахилу матеріальна точка пройде в цьому напрямку найменшу відстань? Обчисліть цю відстань.

2. На ідеальній горизонтальній поверхні (без тертя) лежить матеріальна точка, на яку починає діяти сила $F = \varepsilon t$ (ε – константа, t – час). Напрямок дії цієї сили з горизонтом складає незмінний кут γ . Знайти швидкість матеріальної точки в момент відриву від поверхні та шлях, який матеріальна точка пройде до цього моменту часу.

3. До матеріальної точки маси m , що лежить на ідеальній (без тертя) горизонтальній поверхні, приклали сталу за величиною силу $F = mg/3$. В процесі прямолінійного руху матеріальної точки кут між напрямком дії сили та горизонтом змінюється за законом $\varphi = kS$ (k – константа, S – пройдений шлях). Знайти швидкість руху матеріальної точки як функцію кута φ .

4. Матеріальну точку маси m кинули під якимось кутом до горизонту з початковою швидкістю $\vec{V}_0$. Нехтуючи опором повітря, знайти: приріст імпульсу матеріальної точки за перші τ секунд

руху, модуль приросту імпульсу матеріальної точки за весь час польоту.

5. Матеріальна точка почала рух вгору вздовж похилої площини, що складає кут 15° з горизонтом. Знайти коефіцієнт тертя, якщо час підйому матеріальної точки вгору по похилій площині є вдвічі меншим за час спускання з неї.

6. На ідеальній поверхні, що не має тертя, лежить дошка маси m_1 , а на ній – брусок маси m_2 , до якого прикладено силу $F = \beta t$ (β – константа, t – час). Знайти залежність прискорень дошки та бруска від часу, якщо коефіцієнт тертя між ними k .

7. Матеріальна точка рухається по колу із швидкістю $V = \beta t$. Знайти її повне прискорення, коли вона пройде одну третю частину кола.

8. Матеріальна точка рухається по колу в такий спосіб, що її кутова координата визначається формулою: $\varphi = \alpha t - \beta t^3$, де α та β – додатні сталі. Знайти: час руху матеріальної точки до моменту зупинки, середні значення її кутової швидкості та кутового прискорення за час руху.

9. Матеріальна точка рухається з кутовою швидкістю, що визначається формулою: $\vec{\omega} = \alpha t \vec{e}_1 + \beta t^2 \vec{e}_2$, де α та β – додатні сталі, орти $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$. Знайти: вектор та модуль кутового прискорення цієї точки.

10. Матеріальна точка рухається по колу радіуса R з лінійною швидкістю, що змінюється з довжиною пройденого шляху S за законом $V = \beta \sqrt{S}$, де β – додатна стала. Знайти кут між вектором повного прискорення та вектором швидкості як функцію S .

11. Матеріальна точка рухається по площині так, що її тангенціальне та нормальне прискорення визначаються формулами: $a_\tau = \alpha$ та $a_\perp = \beta t^3$, де α та β – додатні сталі, t – час. Знайти величину повного прискорення як функцію пройденого шляху, якщо в початковий момент ця точка не рухалася.

12. За час T матеріальна точка, рухаючись по колу радіуса R , пройшла півкола. Знайти: середнє значення модуля швидкості та модуль середнього вектора швидкості.

13. Використовуючи геометричний сенс похідної та означеного інтеграла, побудувати графіки залежності координати, прискорення та пройденого шляху від часу для матеріальної точки, що рухається

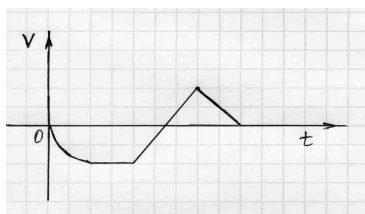


Рис. 1.8.2

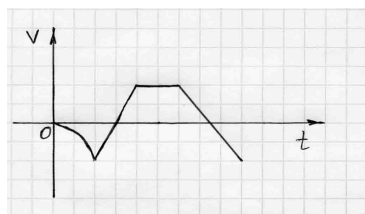


Рис. 1.8.3



Рис. 1.8.4

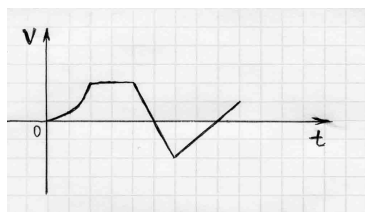


Рис. 1.8.5



Рис. 1.8.6

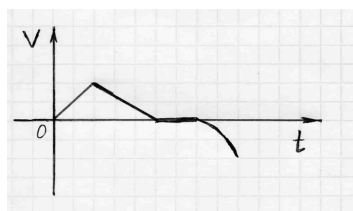


Рис. 1.8.7

прямолінійно. Вважати $X(0)=0$, шість графіків швидкості матеріальної точки наведено на рисунках 1.8.2-1.8.7.

У другому модулі вивчають механічний рух тіл із змінною масою (реактивний рух), рух у полі центральних сил і зіткнення. Відповідні задачі для цієї контрольної роботи наведено нижче.

Наведемо приклади розв'язання задач із зазначеної тематики.

Задача 1

Дано: Після абсолютно пружного зіткнення тіла масою m_1 , що рухалось поступально, із тілом масою m_2 , що було нерухомим, тіла розлетілись симетрично відносно напрямку вектора швидкості першого тіла перед зіткненням (див. рис. 1.8.8).

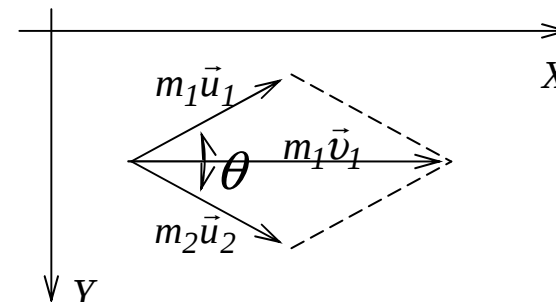


Рис. 1.8.8

Знайти: за яких значень співвідношення між масами тіл це можливо. Розрахувати це співвідношення для двох випадків, коли кут θ між векторами швидкостей тіл після зіткнення дорівнює: $\theta_1=\pi/3$ та $\theta_2=\pi/2$.

Розв'язання. За умовою задачі, в зіткненні беруть участь два тіла, тобто йдеться про ізолювану систему тіл, що складається з двох тіл, тому в цій задачі можна застосувати закон збереження імпульсу:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2, \quad (1.8.9)$$

де $\vec{v}_1$ – швидкість першого тіла перед зіткненням, $\vec{u}_1$ – швидкість першого тіла після зіткнення, $\vec{u}_2$ – швидкість другого тіла після зіткнення. Систему координат обираємо з міркувань симетрії: вісь Ox спрямовуємо вздовж вектора $\vec{v}_1$, а вісь Oy лежить в площині векторів $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$. Проекції закону збереження імпульсу на ці осі складають наступну систему рівнянь:

$$Ox: \quad m_1 v_1 = m_1 u_1 \cos(0.5 \theta) + m_2 u_2 \cos(0.5 \theta), \quad (1.8.10)$$

$$Oy: \quad 0 = m_1 u_1 \sin(0.5 \theta) - m_2 u_2 \sin(0.5 \theta), \quad (1.8.11)$$

яку згідно з умовою задачі про пружність зіткнення доповнимо законом збереження кінетичної енергії:

$$0.5m_1v_1^2 = 0.5m_1u_1^2 + 0.5m_2u_2^2. \quad (1.8.12)$$

Позначимо співвідношення між масами тіл $n = m_2/m_1$. Тоді систему наведених трьох рівнянь можна спростити:

$$v_1 = u_1 \cos(0.5 \theta) + nu_2 \cos(0.5 \theta), \quad (1.8.13)$$

$$0 = u_1 - nu_2, \quad (1.8.14)$$

$$v_1^2 = u_1^2 + nu_2^2. \quad (1.8.15)$$

Виключивши u_1 завдяки рівнянню (1.8.14) ($u_1 = nu_2$), а також u_2 – завдяки рівнянню (1.8.13) ($u_2 = v_1 / \{2n \cos[0.5 \theta]\}$), дістаємо рівняння, що пов'язує співвідношення мас і кут розсіяння (0.5θ):

$$4\cos^2(0.5 \theta) = 1 + m_1/m_2. \quad (1.8.16)$$

Проаналізуємо це рівняння.

1. Коли тіло, що налітало, є легшим за те, що було нерухомим,

$$0 \leq m_1/m_2 \leq 1, \quad (1.8.17)$$

тоді $0.25 \leq \cos^2(0.5 \theta) \leq 0.5$. Добуваючи корінь квадратний з (1.8.17), беремо до уваги, що кут θ не може бути більшим за π , оскільки тоді б тіла після зіткнення полетіли у напрямку, зворотному до $\vec{v}_1$, що є нефізичним, оскільки суперечить закону збереження імпульсу. Тому $0.5 \theta \leq 0.5 \pi$, отже, $\cos(0.5 \theta)$ не може бути від'ємним. Значить, $0.5 \leq \cos(0.5 \theta) \leq 0.5 \sqrt{2}$, а отже,

$$\pi/4 \leq 0.5 \theta \leq \pi/3. \quad (1.8.18)$$

Відповідь: коли легке тіло налітає на важче, то за умови симетричного розльоту тіл воно може бути розсіяним лише під кутами від $\pi/4$ до $\pi/3$.

2. Коли тіло, що налітало, є важчим за те, що було нерухомим,

$$m_1/m_2 \geq 1, \quad (1.8.19)$$

тоді $0.5 \leq \cos^2(0.5 \theta) \leq 1$. Обчислимо квадратний корінь з цієї нерівності $0.5 \sqrt{2} \leq \cos(0.5 \theta) \leq 1$. Отже маємо:

$$0 \leq 0.5 \theta \leq \pi/4. \quad (1.8.20)$$

Відповідь: коли важке тіло налітає на легше, то за умови симетричного розльоту тіл воно може бути розсіяним лише під малими кутами від 0 до $\pi/4$.

3. У разі найбільшого співвідношення мас $m_1/m_2 = 3$ реалізується лобове зіткнення: $\cos(0.5 \theta) = 1$, тобто $\theta = 0$.

4. Для того, щоб тіла симетрично розлетілись під кутом $\theta_1 = \pi/3$ (у цьому разі дістаємо $4\cos^2(\pi/6) = 1 + m_1/m_2 \Rightarrow 3 = 1 + m_1/m_2$), швидкість $\vec{v}_1$ слід надати рухомому тілу, яке вдвічі важче за нерухоме:

$$m_1 = 2m_2. \quad (1.8.21)$$

5. Для того, щоб тіла симетрично розлетілись під прямим кутом, $\theta_2 = \pi/2$ (у цьому разі дістаємо $4\cos^2(\pi/4) = 1 + m_1/m_2 \Rightarrow 2 = 1 + m_1/m_2$), для досліду слід взяти тіла однакової маси:

$$m_1 = m_2. \quad (1.8.22)$$

Зауваження. Вектори швидкостей $\vec{v}_1$, $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$ лежать в одній площині. Припустимо зворотне, наприклад, що вектор $\vec{u}_2$ містить складову, перпендикулярну до площини, в якій лежать вектори $\vec{v}_1$ та $\vec{u}_1$. Тоді ми входимо у суперечку із законом збереження імпульсу, оскільки внаслідок зіткнення у другого тіла нібито виникає некомпенсована складова імпульсу, якої не було перед зіткненням.

Відповідь: $\theta_1 = \pi/3$, якщо $m_1 = 2m_2$; $\theta_2 = \pi/2$, якщо $m_1 = m_2$.

Задача 2

Знайти: силу гравітаційної взаємодії матеріальної точки маси m із однорідним стрижнем масою M і довжиною L , з яким вона лежить

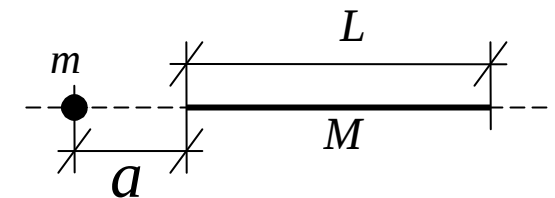


Рис. 1.8.9

на одній прямій на відстані a від його найближчого кінця (див. рис. 1.8.9).

Розв'язання.

Помістимо тіло в початок координат, назвемо вісь, на якій лежать тіло і стрижень, віссю Ox . Розіб'ємо стрижень на безкінечно велику кількість відрізків, довжина яких є нескінченно короткою. Довжина окремого відрізка dx . Внаслідок однорідності стрижня маса цього відрізка $(M/L) dx$. Окремі відрізки притягуються до даної матеріальної точки із силами $dF = G[(M/L) dx] m / x^2$, які мають напрямок ліворуч вздовж прямої, на якій лежать стрижень і матеріальна точка, тут x – відстань від матеріальної точки до окремого відрізка ($a \leq x \leq a+L$). Стрижень як ціле притягується до матеріальної точки із силою, яка має той же напрямок і складається з сил, з якими матеріальна точка притягує окремі відрізки:

$$F = \int_a^{a+L} dF = \int_a^{a+L} G \frac{Mm dx}{x^2 L} = \frac{GMm}{a(a+L)}. \quad (1.8.23)$$

Зауваження: по-перше, здобутий вираз не можна інтерпретувати як силу взаємодії матеріальної точки масою m із іншою матеріальною точкою масою M , розташованою там, де міститься центр мас стрижня ($x=a+0.5L$), тобто в задачі, що розв'язується, не можна розглядати стрижень як матеріальну точку; по-друге, здобутий вираз переходить у відомий вираз $F = GMm / a^2$ для сили гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок, відстань між якими дорівнює a , коли довжина стрижня є малою, $L \ll a$. Це зауваження позбавляє нас, зокрема, від необхідності перевіряти здобуту відповідь на розмірність.

Відповідь: $F = \frac{GMm}{a(a+L)}.$

Умови задач для другої модульної контрольної роботи з механіки:

1. Матеріальна точка падає з нульовою початковою швидкістю на похилу площину, що складає кут θ з горизонтом. Пролетівши відстань ψ , матеріальна точка пружно відбилася від площини в точці A . На якій відстані від точки A відбудеться повторна взаємодія матеріальної точки з похилою площиною?
2. Штучний супутник маси m рухається навколо Землі, радіус орбіти в λ разів більший за радіус Землі. Вважаючи, що сила опору рухові супутника залежить від його швидкості за законом $F = \sigma V^2$, де σ – мала константа, знайти час руху супутника до моменту його падіння на поверхню Землі.
3. Вагон маси M під дією сталої сили F починає рухатися вздовж залізничної колії. Одночасно з початком руху починає насипатися в бункер вагона пісок, швидкість навантаження μ є сталою величиною. Тертя немає. Знайдіть: прискорення, швидкість та координату як функції часу: $a(t)$, $V(t)$, $X(t)$.
4. Планета обертається навколо зірки. Коли відстань між ними дорівнює R_0 , швидкість планети V_0 , в цей час кут між $\vec{R}_0$ та $\vec{V}_0$ дорівнює θ . Знайти найбільшу та найменшу відстань між планетою та зіркою.
5. Снаряд, що вилетів з початковою швидкістю V_0 під кутом $\pi/4$ до горизонту, розірвався у найвищій точці траєкторії A на дві однакові частини. Перша впала точно під точкою A зі швидкістю V_1 . З якою швидкістю впала друга частина?
6. Матеріальну точку маси m кинули з початковою швидкістю V під кутом β до горизонту. Знайти момент сили тяжіння, що діє на матеріальну точку, та момент імпульсу даної матеріальної точки відносно початкової точки її траєкторії руху як функції часу.
7. Ракета рухається навколо Землі, форма орбіти – коло, радіус кола в σ разів більший за радіус Землі. Яку додаткову швидкість в радіальному напрямку (від центра Землі) слід короткочасно надати ракеті, щоб ракета змогла залишити поле тяжіння Землі?
8. Снаряд, що летів зі швидкістю $V = 500$ м/с, розривається на три уламки, маси яких є однаковими. Кінетична енергія системи

при цьому збільшилася в 1.5 рази. Яку максимальну швидкість може мати якийсь один з уламків?

9. Замкнена система складається з двох однакових частинок, які рухаються зі швидкостями V_1 та V_2 , кут між напрямками їхніх рухів складає величину θ . Після пружного зіткнення їхні швидкості стали дорівнювати u_1 та u_2 . Знайти кут між напрямками їхнього розльоту.

10. Подвійна зірка – це система, що складається з двох зірок, які обертаються навколо центра мас системи. Відомі: відстань λ між зірками цієї системи, період її обертання T . Вважаючи, що λ та T є константами, знайти сумарну масу системи.

11. Частинка маси m_1 пружно провзаємодіяла з нерухомою частинкою маси m_2 . Яку відносну кількість кінетичної енергії втратила рухома частинка, якщо вона відскочила під прямим кутом до свого первісного напрямку руху?

12. Планета маси m рухається вздовж еліптичної орбіти навколо Сонця. При цьому найбільша та найменша відстані між планетою та Сонцем становлять R_1 та R_2 , відповідно. Знайти момент імпульсу цієї планети відносно центра Сонця.

13. Частинка маси m_1 пружно зіткнулася з нерухомою частинкою маси m_2 . Яку відносну кількість кінетичної енергії втратила рухома частинка, якщо відбулося лобове зіткнення?

14. Замкнена система складається з двох частинок масами m_1 та m_2 , їхні швидкості відносно лабораторної системи відліку дорівнюють $\vec{V}_1$ та $\vec{V}_2$, відповідно. Знайти імпульси цих частинок у системі відліку центра мас.

15. Яку потужність має двигун ракети, маса якої m , якщо вона нерухомо висить над поверхнею Землі, на певній висоті? Відомо: швидкість витікання U газів, прискорення вільного падіння g .

16. Яку найменшу роботу слід виконати, щоб перенести вантаж масою m з поверхні Землі на Місяць? Відомо: маси Землі та Місяця, їхні радіуси та відстань між їхніми центрами.

17. Після пружного зіткнення частинки 1 з нерухомою частинкою 2 обидві частинки розлетілися симетрично відносно початкового напрямку руху частинки 1, кут розльоту склав величину θ . Знайти співвідношення мас цих частинок.

18. Внаслідок пружного зіткнення частинки 1 з нерухомою частинкою 2 вони розлетілися у протилежних напрямках з однаковими швидкостями. Знайти масу другої частинки.

Третій модуль програми курсу «Механіка» для студентів факультету комп'ютерних наук присвячено вивченню руху матеріальної точки в неінерціальних системах відліку та обертального руху абсолютно твердих тіл. Це визначило відповідний підбір задач.

Наведемо приклади розв'язання задач із зазначеної тематики.

Задача 1

Дано: Поверхня води в ріках відхиляється від горизонтального положення внаслідок обертання Землі.

Знайти: нахил поверхні води відносно горизонтальної площини, якщо відомо, що вода в річці тече на широті φ з півночі на південь із швидкістю u .

Розв'язання.

Якщо знехтувати силами інерції, ми приходимо до висновку, що поверхня води утворюється внаслідок взаємодії води із Землею (сила тяжіння) та реакції річища так, що рівноважна горизонтальна поверхня води є перпендикулярною до сили тяжіння.

Врахуємо дію сил інерції. Доданком „ $-m\vec{A}$ ”, який обумовлений прискоренням планети $\vec{A}$ в її русі навколо Сонця, ми

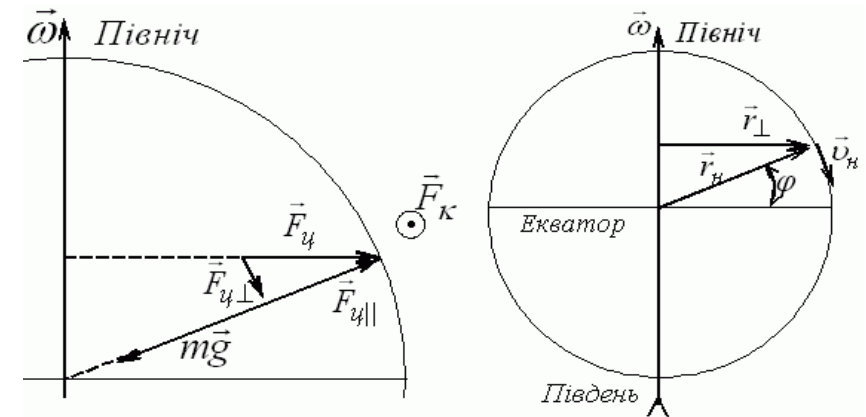


Рис. 1.8.10

знехтуємо. Доданком „ $-m\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_n$ ” ми знехтуємо, бо Земля обертається навколо власної осі без помітного кутового гальмування (тривалість доби протягом століть не скоротилась: $\varepsilon=0$). Відцентрова сила „ $m\omega^2 \vec{r}_\perp$ ” спрямована від осі обертання, тобто вона дещо послаблює дію сили тяжіння, а також дещо прискорює течію річки, але не має складової в напрямку паралелі. Єдина сила, що має складову у цьому напрямку, – це сила Коріоліса

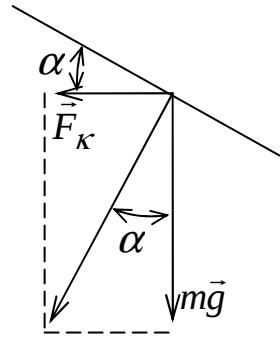


Рис. 1.8.11

$\vec{F}_K = 2m\vec{v}_n \times \vec{\omega}$, яку для умов нашої задачі (річка тече з півночі на південь) спрямовано на захід (див. рис. 1.8.10).

У вертикальній площині, перпендикулярній до вектора швидкості течії, на будь-який елемент поверхні води діють дві сили: вертикально вниз – сила тяжіння mg та на захід – сила Коріоліса $F_K = 2m\omega v \sin\phi$.

Ці сили є взаємно перпендикулярними одна одній. Їхня рівнодіюча є перпендикулярною до поверхні води. Скориставшись рис. 1.8.11, записуємо, що кут α нахилу поверхні води відносно горизонтальної площини є таким, що $\tan\alpha = F_K/(mg)$. Отже маємо:

$$\alpha = \arctg\{2v\omega \sin\phi/g\}. \quad (1.8.24)$$

Перевірка розмірності: аргумент $\arctg$ має бути безрозмірним:

$$[2v\omega \sin\phi/g] = \frac{m/c \cdot 1/c \cdot 1}{m/c^2} = 1. \quad (1.8.25)$$

Відповідь: $\alpha = \arctg[2v\omega \sin\phi/g]$.

Задача 2

Дано: Тонкий однорідний стрижень AB масою $m=1$ кг рухається поступально з прискоренням $a_O = 2$ м/с² під дією сил $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$ (див. рис. 1.8.12). Відстань між точками, до яких прикладені ці сили, $b=20$ см, $F_2=5$ Н.

Знайти: довжину стрижня L .

Розв'язання.

Оскільки стрижень є тонким та однорідним, його центр мас міститься посередині в точці O . Згідно із законом про рух центру мас:

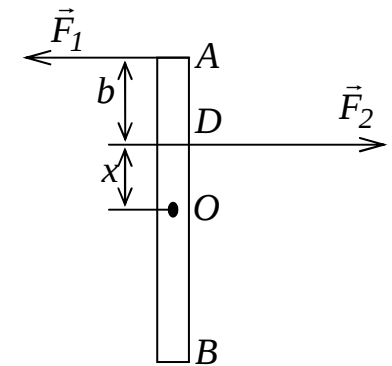


Рис. 1.8.12

$$m\vec{a}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.8.26)$$

Оскільки обидві сили паралельні одній прямій, то зручно переписати це рівняння у скалярному вигляді, спроектувавши його на цю прямую:

$$ma_O = F_2 - F_1, \quad (1.8.27)$$

тут ми вважаємо, що величини F_1 та F_2 є додатними. З останнього рівняння можна порахувати силу F_1 :

$$F_1 = F_2 - ma_O. \quad (1.8.28)$$

Оскільки за умовою задачі стрижень рухається без кутового прискорення, сума моментів сил, які діють на стрижень, дорівнює нулю: $F_1(b+x) = F_2x$. Звідси знаходимо плече x сили F_2 :

$$x = F_1b/(F_2 - F_1). \quad (1.8.29)$$

Отже, довжина L стрижня (див. рис. 1.8.12):

$$L = 2(x+b) = 2F_2b/(ma_O) = 1 \text{ м}. \quad (1.8.30)$$

Відповідь: $L=1$ м.

Умови задач для третьої модульної контрольної роботи з механіки:

1. Знайти момент інерції тонкого однорідного стрижня маси m відносно осі, що проходить перпендикулярно до стрижня крізь точку, що ділить стрижень на відтинки $l/3$ та $2l/3$, відповідно.
2. Гармаш, знаходячись в північній півкулі Землі на широті $\varphi = 45^\circ$, стріляє точно в південному напрямку, попередньо навівши приціл гармати на вертикальну риску мішені. Нехтуючи опором повітря, знайти, на скільки сантиметрів та в який бік снаряд відхилиться від риски. Вважати, що траєкторія польоту є горизонтальною, відстань до мішені $s = 10$ км, швидкість снаряда є сталою $v = 10^3$ м/с.
3. Знайти момент інерції тонкого однорідного диска маси m , радіуса R відносно осі, що проходить перпендикулярно до його площини крізь точку, яка лежить на самому краю диска.
4. Горизонтальний диск обертають із сталою кутовою швидкістю $\omega = 10$ рад/с навколо вертикальної осі, що проходить крізь його центр. По одному з діаметрів диска рухається невелике тіло маси $m = 5$ кг із сталою відносно диска швидкістю $U = 5$ см/с. Знайти силу, з якою диск діє на це тіло в момент, коли воно перебуває на відстані $r = 50$ см від осі обертання.
5. Знайти момент інерції тонкої однорідної пластини маси m у формі трикутника, усі сторони якого дорівнюють A , відносно осі, що лежить у площині трикутника та проходить крізь одну з його сторін.
6. Горизонтально розташований гладкий стрижень АВ обертають із сталою кутовою швидкістю $\omega = 5,0$ рад/с навколо вертикальної осі, що проходить через його кінець А. По стрижневі із точки А з початковою швидкістю $v = 10$ м/с почала рухатися муфта маси $m = 10$ кг. Знайти силу Коріоліса у момент, коли муфта опиниться на відстані $r = 10$ см від осі обертання, тертям знехтувати.
7. Знайти момент інерції тонкого однорідного стрижня маси m відносно осі, що проходить перпендикулярно до стрижня крізь точку, що ділить стрижень навпіл.
8. Потяг масою 1000 т рухається із сталою швидкістю 108 км/год на широті 60° у південній півкулі Землі. Знайти горизонтальну складову сили тиску потягу на рейки, якщо їх

прокладено: а) уздовж меридіана; б) уздовж паралелі.

9. Знайти момент інерції тонкої однорідної пластини маси m , що має форму прямокутника, довжина сторін якого дорівнюють A та B , відповідно, відносно осі, яка проходить крізь вершину прямокутника, перпендикулярно його площині.
10. З вершини гладкої сфери радіусом $R = 10,0$ м починає рухатися невелике тіло маси $m = 10$ кг. Сфера обертається із сталою кутовою швидкістю 36,0 рад/с навколо вертикальної осі, що проходить крізь її центр. Знайти відцентрову силу інерції та силу Коріоліса в момент відриву тіла від поверхні сфери.
11. Знайти момент інерції тонкого однорідного диска маси m , радіуса R відносно осі, що лежить у його площині та проходить крізь його центр.
12. На екваторі з висоти 1 км з початковою швидкістю 1 м/с на поверхню Землі починає падати матеріальна точка. Нехтуючи силами тертя та опору повітря, знайти, на яку відстань та в який бік від вертикалі відхилиться матеріальна точка при падінні на поверхню Землі.
13. Механічна система складається з двох однорідних циліндрів, верхній з яких причеплено горизонтально до стелі як нерухомий блок. Його вісь обертання проходить крізь вісь симетрії циліндра паралельно горизонту. Тертя в осі немає. Другий циліндр поєднано з першим двома ідеальними мотузками, які в симетричний спосіб намотано на обидва краї обох барабанів. Маса циліндрів m , їхні радіуси R . Спочатку мотузки було повністю накручено на циліндри. Потім нижній відпустили і він почав рухатися, віддаляючись від верхнього. Знайти силу натягу, що припадає на одну з мотузок в процесі руху системи.
14. Обруч маси m , радіуса r починає рух з нульовою початковою швидкістю з вершини циліндричної поверхні радіуса R . Коефіцієнт тертя між ними μ . Знайти кут відносно вертикалі, починаючи з якого почнеться ковзання обруча.
15. До горизонтальної стелі прикріплено нерухомий блок, який виготовлено у вигляді однорідного циліндра, його маса m , радіус R . Через блок перекинута ідеальна мотузка, що не ковзає по поверхні блоку, до кінців якої прикріплено два тягарці масами m_1 та m_2 , відповідно. В певний момент часу тягарцям надають можливість рухатися. Знайти кутове прискорення руху блоку.