ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXX. Серия 4 1964

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Г. Я. Любарский

§ 1. В статье изучается автономная краевая задача

$$\begin{gathered} c_n y^{(n)} + F(\varepsilon y,\ y^1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}) + \varepsilon f(y) = 0 \quad (c_n \neq 0) \\ y(-\infty) = q_1 < 0,\ y(+\infty) = q_2 > 0,\ y^1(\pm\infty) = \ldots = y^{(n)}(\pm\infty) = 0 \end{gathered} \tag{A}$$

в предположении, что параметр $\varepsilon > 0$ достаточно мал.

Получены следующие три теоремы.

Теорема 1. *Задача A разрешима при достаточно малых* ε (*то есть в некотором интервале* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$), *если* $f(q_1) = f(q_2) = 0$ *и выполнены следующие условия*:

1) *функция* $f(y)$ *определена и имеет непрерывную производную на некотором интервале* $p_1 \leqslant y \leqslant p_2$ $(p_1 < q_1 < 0 < q_2 < p_2)$;

2) *функция* $f(y)$ *монотонно возрастает на интервале* $p_1 \leqslant y < 0$ *и монотонно убывает на интервале* $0 < y < p_2$; $f(0) > 0$, $f(p_1) < 0$, $f(p_2) < 0$;

3) *производная* $f''(y)$ $(p_1 \leqslant y \leqslant p_2)$ *существует и ограничена;*

4) *функция* $F(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})$ *представима в виде*

$$F(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_{n-1}x_{n-1} + g(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}),$$

где $c_1 < 0$ *и* $g(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}) = \sum_{i,\ k=0}^{n-1} 0(x_ix_k)$;

5) *производные* $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ *существуют в некоторой окрестности точки* $x = 0$ $(x_0 = 0,\ x_1 = 0,\ \ldots,\ x_{n-1} = 0)$ *и стремятся к нулю, когда* $x \to 0$, *вторые производные* $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\, \partial x_k}$ $(i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ *существуют и ограничены в некоторой окрестности точки* $x = 0$;

6) *полином* $Q(\nu) = c_n\nu^{n-1} + \ldots + c_2\nu + c_1$ *не имеет нулей на мнимой оси.*

Введем в рассмотрение многообразие $S_k(\varepsilon)$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, состоящее из тех функций $\omega(x)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. $x\omega(x) \geqslant 0$, $\quad p_1 \leqslant \omega(x) \leqslant p_2$ $\quad(-\infty < x < \infty)$;
2. существуют производные $\omega^{(j)}(x)$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$;
3. существуют пределы $\omega(-\infty)$, $\omega(+\infty)$ и $\omega^{(j)}(\pm\infty) = 0$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$;
4. имеют место оценки $|\omega'(x)| < \varepsilon R_1$, $|\omega^{(j)}(x)| < \varepsilon^2 R_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, где $R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_k$ — некоторые фиксированные постоянные, не зависящие от ε; определение этих постоянных дано в § 3.

Теорему 1 дополняет

Теорема 2. *Если выполнены все условия теоремы 1, то среди функций многообразия* $S_n(\varepsilon)$ *существует и притом только одно решение* $y = y_0(x,\ \varepsilon)$ *краевой задачи A.*

Для приближенного вычисления функции $y_0(x, \varepsilon)$ можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда существует не зависящая от* ε *постоянная* D *такая, что*

$$|y_0(x, \varepsilon) - z(x, \varepsilon)| < D(\varepsilon + \delta(\varepsilon)), \quad |y'(x, \varepsilon) - z'(x, \varepsilon)| < D\varepsilon(\varepsilon + \delta(\varepsilon)),$$
$$(-\infty < x < \infty)$$

если параметр $\varepsilon > 0$ *достаточно мал. Здесь* $z(x, \varepsilon)$ *есть решение задачи*

$$c_1 z' + \varepsilon f(z) = 0 \quad z(-\infty) = q_1, \quad z(+\infty) = q_2,$$

принадлежащее совокупности $S \equiv S_0(\varepsilon)$, *а* $\delta(\varepsilon)$ — *максимум выражения*

$$\sum_{k=0}^{n-1} |g'_{x_k}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})| R_{k+1} \tag{1.1}$$

при условии, что $|x_0| < \varepsilon(p_2 - p_1)$, $|x_1| < \varepsilon R_1$, $|x_j| < \varepsilon^2 R_j$ $(j = 2, 3, \ldots, n-1)$.

Введем некоторые обозначения, которыми будем пользоваться на протяжении всей статьи.

1. $P(\nu) = a_n \nu^n + \ldots + a_1 \nu$ — полином степени n, у которого все нули просты и вещественны, а коэффициент $a_1 < 0$.

2. $Q(\nu) = c_n \nu^{n-1} + \ldots + c_2 \nu + c_1$ — полином степени $(n-1)$, у которого ни один нуль не лежит на мнимой оси, а коэффициент $c_1 < 0$.

3. $f(y)$ — функция, удовлетворяющая условиям 1) и 2) теоремы 1.

4. $\Psi_0(f)$ — совокупность всех непрерывных функций $\psi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, удовлетворяющих условиям

$$f(p_1) \leqslant \psi(x) \leqslant f(0) \quad (x \leqslant 0); \quad f(p_2) \leqslant \psi(x) \leqslant f(0), \quad (x \geqslant 0)$$

и имеющим пределы $\psi(-\infty)$ и $\psi(+\infty)$ (вообще говоря, разные для разных функций $\psi(x)$).

5. $\Psi_1(f)$ — совокупность дифференцируемых функций $\psi(x)$ из $\Psi_0(f)$, удовлетворяющих условию

$$|\psi'(x)| < L_1,$$

где L_1 — произвольно выбранное фиксированное число.

Определим на многообразии $\Psi_k(f)$ $(k = 0, 1)$ метрику, положив

$$\|\psi_2 - \psi_1\|_k = \sum_{j=0}^{k} \sup_x |\psi_2^{(j)}(x) - \psi_1^{(j)}(x)| \quad (k = 0, 1).$$

Ясно, что многообразие $\Psi_k(f)$ $(k = 0,1)$ замкнуто относительно этой метрики.

6. $\psi(x)$ — функция из многообразия $\Psi_0(f)$.

§ 2. В качестве первого подготовительного шага рассмотрим квазилинейное уравнение вида

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) y + \varepsilon f(y) = \varepsilon \varkappa \psi(x) \quad (0 < \varkappa < 1). \tag{2,1}$$

В [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если существуют два числа* $a_- > 0$ *и* $a_+ < 0$ *такие, что* а) $a_- p_1 = a_+ p_2$, б) $f'(y) < a_-$ $(y < 0)$, $f'(y) > a_+$ $(y > 0)$ *и* в) *все нули полиномов* $P_\pm(\nu) = P(\nu) + a_\pm$ *вещественны и просты, то уравнение* (2.1) *имеет в* S *при* $\varepsilon = 1$ *единственное решение* $y(x)$.

Непосредственным следствием этой теоремы является

Теорема 2.2. *Если число* $\varepsilon > 0$ *достаточно мало, то уравнение* (2.1) *имеет в* S *единственное решение* $y(x, \varepsilon)$.

В самом деле, благодаря ограниченности производной $f'(y)$ всегда можно подобрать два числа $a_- > 0$ и $a_+ < 0$ так, чтобы условия а) и б) теоремы 2.1 выполнялись. Условие в), относящееся к полиному $P_\pm(\nu) = P(\nu) + \varepsilon a_\pm$ будет выполнено, если число $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Теорема 2.2 показывает, что существует оператор T_ε, переводящий функции $\psi \in \Psi_0(f)$ в решения $y(x) \in S$ уравнения (2.1): $y = T_\varepsilon \psi$.

Будем говорить, что функция $\omega_1(x) \in S$ круче функции $\omega_2(x) \in S$ ($\omega_1 \geqslant \omega_2$), если $\omega_1 - \omega_2 \in S$.

Можно показать, что оператор T_ε является антимонотонным, то есть, что $T_\varepsilon\psi_2 \geqslant T_\varepsilon\psi_1$, если $\psi_1(x) \geqslant \psi_2(x)$.

Если функция $f_0(y)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 1 и $f_0(y) \geqslant f(y)$, то оператор T_ε^0, отвечающий функции $f_0(y)$, превосходит оператор T_2, то есть $T_\varepsilon^0\psi \geqslant T_\varepsilon\psi$, $\psi \in \Psi_0(f) \cap \Psi_0(f_0)$.

Введем на множестве S метрику

$$\| \omega_2 - \omega_1 \| = \sup | a(x) \{\omega_2(x) - \omega_1(x)\} |; \quad a(x) = \begin{cases} a_-, & x < 0 \\ a_+, & x > 0 \end{cases}$$

Имеет место следующая

Теорема 2.3 *Для всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *и всех* $\psi_1, \psi_2 \in \Psi_0(f)$ *справедлива оценка*

$$\| T_\varepsilon\psi_2 - T_\varepsilon\psi_1 \| \leqslant \frac{4}{d(f)} \| \psi_2 - \psi_1 \|_0, \tag{2.2}$$

где $d(f)$ — *меньшее из двух чисел*

$$d_- = \min f'(y) \left(y \leqslant y_1 = -\frac{1-\varkappa}{2a_-} f(0)\right),$$

$$d_+ = \min |f'(y)| \left(y \geqslant y_2 = -\frac{1-\varkappa}{2a_+} f(0)\right)$$

a_- *и* a_+ — *какая-либо пара чисел, удовлетворяющая условиям а) и б) теоремы 2.1.*

Доказательство. С помощью функции

$$\varphi(y) = ya(y) - f(y)$$

перепишем уравнение (2.1) так:

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) y + \varepsilon a(x) y = \varepsilon\varphi(y) + \varepsilon\varkappa\psi(x) \qquad (y \in S).$$

Из этого равенства следует, что

$$y(x) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K_\varepsilon(x, s) \varphi(y(s)) \, ds + \varepsilon\varkappa \int_{-\infty}^{\infty} K_\varepsilon(x, s) \psi(s) \, ds, \tag{2.3}$$

где $K_\varepsilon(x, s)$ — функция Грина оператора $P\left(\frac{d}{dx}\right) + \varepsilon a(x)$, выделенная условиями $K_\varepsilon(0, s) = K_\varepsilon(\pm\infty, s) = 0$. Она может быть вычислена по формуле [1—2]

$$K_\varepsilon(x, s) = \frac{\varepsilon(a_- - a_+)}{a_n^2} \int_0^x Y(\lambda^+, \mu^-, x - t) Y(\lambda^-, \mu^+, t - s) \, dt, \tag{2.4}$$

где

$$Y(\lambda^\pm, \mu^\mp, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{zs} dz}{\prod (z - \lambda^\pm) \prod (z - \mu^\mp)}$$

— функция Грина оператора $\prod\left(\frac{d}{dx}-\lambda^{\pm}\right)\prod\left(\frac{d}{dx}-\mu^{\mp}\right)$ удовлетворяющая условиям $Y(\lambda^{\pm}, \mu^{\mp}, \pm\infty)=0$; λ^{+} и λ^{-} — отрицательные нули полиномов $P(\nu)+\varepsilon a_{+}$ и $P(\nu)+\varepsilon a_{-}$, соответственно, μ^{+} и μ^{-} — положительные нули этих полиномов.

Функции Грина $Y(\lambda^{+}, \mu^{-}, s)$ и $Y(\lambda^{-}, \mu^{+}, s)$ знакопостоянны и имеют различные знаки. Отметим, что при $\varepsilon\to 0$ наименьший по абсолютной величине отрицательный нуль $\nu=\lambda_1^{+}$ полинома $P(\nu)+\varepsilon a_{+}$ и наименьший положительный нуль $\nu=\mu_1^{-}$ полинома $P(\nu)+\varepsilon a_{-}$ стремятся к нулю, причем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda_1^{+}}{\varepsilon}=-\frac{a_{+}}{a_1},\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mu_1^{-}}{\varepsilon}=-\frac{a_{-}}{a_1}.$$

Пусть ψ_1 и ψ_2 — какие-либо две функции из $\Psi_0(f)$. С помощью (2.3) получаем

$$|a(x)[T_\varepsilon\psi_2(x)-T_\varepsilon\psi_1(x)]|\leqslant \varepsilon a(x)\int_{-\infty}^{\infty}K_\varepsilon(x, s)\{|\varphi[y_2(s)]-\varphi[y_1(s)]|+ \\ +\varkappa|\psi_2(s)-\psi_1(s)|\}\,ds. \qquad (2.5)$$

Учитывая неравенство [2]

$$0<\varepsilon a(x)\int_{-\infty}^{\infty}K_\varepsilon(x, s)\,ds<1,\quad (-\infty<x<\infty)$$

и вводя обозначение $M=\|T_\varepsilon\psi_2-T_2\psi_1\|$, получим из (2.5)

$$M\leqslant M\sup_x\left\{\varepsilon a(x)\int_{-\infty}^{\infty}K_\varepsilon(x, s)\frac{\varphi(y_2(s))-\varphi(y_1(s))}{a(s)(y_2(s)-y_1(s))}\,ds\right\}+\varkappa\|\psi_2-\psi_1\|_0.$$

Из определения функции $\varphi(y)$ следует, что

$$0\leqslant\frac{\varphi'(y)}{a(y)}<\begin{cases}1, & y\in(y_1,\ y_2)\\ 1-d(f), & y\,\overline{\in}\,(y_1,\ y_2).\end{cases}$$

Из последних двух неравенств вытекает

$$M\leqslant M\left\{1-d(f)+d(f)\sup_x\varepsilon a(x)\int_{s_1}^{s_2}K_\varepsilon(x, s)\,ds\right\}+\varkappa\|\psi_2-\psi_1\|_0, \qquad (2.6)$$

где $s_1<0$ и $s_2>0$ — такие два числа, что

$$y_i(x)\begin{cases}<y_1, & x<s_1\\ >y_2, & x>s_2\end{cases}\quad (i=1,\ 2).$$

Из (2.6) получаем

$$M\leqslant\frac{\varkappa\|\psi_2-\psi_1\|_0}{d(f)[1-I(\varepsilon)]},\quad I(\varepsilon)\equiv\sup_x\varepsilon a(x)\int_{s_1}^{s_2}K_\varepsilon(x, s)\,ds. \qquad (2.7)$$

Для оценки $I(\varepsilon)$ воспользуемся следующими двумя леммами.

Лемма 2.1. *Существует число $\varepsilon_1>0$ такое, что для всех ε из интервала $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ и всех $\psi\in\Psi_0(f)$ справедливы соотношения*

$$T_\varepsilon\psi(x)\begin{cases}<y_1, & x\leqslant s_1^0=\dfrac{1}{\mu_1^{-}}\ln\dfrac{1}{3}\\[2ex] >y_2, & x\geqslant s_2^0=\dfrac{1}{\lambda_1^{+}}\ln\dfrac{1}{3}.\end{cases} \qquad (2.8)$$

Лемма 2.2. *Существует такое число* $\varepsilon_2 > 0$, *что для всех* ε *из интервала* $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ *справедливо соотношение*

$$0 < \varepsilon a(x) \int_{s_1^0}^{s_2^0} K_\varepsilon(x, s)\, ds < \frac{3}{4} \quad (-\infty < x < \infty).$$

Оценка (2.2) сразу же получается из (2.7), если принять $s_1 = s_1^0$, $s_2 = s_2^0$ и $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Доказательство леммы 2.1. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) y + \varepsilon f_0(y) = \varepsilon\varkappa\psi_0(x),$$

где $f_0(y) = f(0) + ya(y)$, $\psi_0(x) \equiv f(0)$. Это уравнение имеет в S единственное решение

$$y_0(x) = -\varepsilon(1-\varkappa) f(0) \int_{-\infty}^{\infty} K_\varepsilon(x, s)\, ds. \tag{2.9}$$

Функция $f_0(y)$ не превышает функции $f(y)$. Поэтому монотонная функция $y_0(x)$ менее крута, чем любая из функций $T_\varepsilon\psi$ $(\psi \in \Psi_0(f))$. Неравенство (2.8) будет доказано, если мы убедимся в том, что

$$y_0(s_1^0) < y_1, \quad y_0(s_2^0) > y_2 \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_1). \tag{2.10}$$

С помощью формулы (2.4) легко доказать непосредственным вычислением, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon a_- \int_{-\infty}^{\infty} K_\varepsilon(s_1^0, s)\, ds = \frac{2}{3}, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon a_+ \int_{-\infty}^{\infty} K_\varepsilon(s_2^0, s)\, ds = \frac{2}{3}.$$

Поэтому существует такое число $\varepsilon_1 < 1$, что для всех $\varepsilon < \varepsilon_1$ справедливы неравенства

$$\varepsilon a_- \int_{-\infty}^{\infty} K_\varepsilon(s_1^0, s)\, ds > \frac{1}{2}, \quad \varepsilon a_+ \int_{-\infty}^{\infty} K_\varepsilon(s_2^0, s)\, ds > \frac{1}{2} \cdot (0 < \varepsilon < \varepsilon_1).$$

Теперь из (2.9) вытекает неравенство (2.10) и, следовательно, неравенство (2.8)

Доказательство леммы 2.2. Непосредственным вычислением легко проверить, что при $x > 0$

$$\varepsilon a(x) \int_{s_1^0}^{s_2^0} K_\varepsilon(x, s)\, ds = \varepsilon\chi(x, \varepsilon) + \begin{cases} 1 - e^{\lambda_1^+ x}, & x < s_2^0 \\ e^{\lambda_1^+ x}(e^{-\lambda_1^+ s_2^0} - 1), & x > s_2^0, \end{cases}$$

где $\chi(x, \varepsilon)$ — некоторая ограниченная в полуполосе $0 \leqslant x < \infty$, $0 < \varepsilon < 1$ функция. Аналогичное соотношение имеет место и в области $x < 0$. Поэтому

$$\sup_x \varepsilon a(x) \int_{s_1^0}^{s_2^0} K_\varepsilon(x, s)\, ds < \varepsilon \sup \chi(x, \varepsilon) + \frac{2}{3} < \frac{3}{4},$$

если параметр $\varepsilon > 0$ достаточно мал.

§ 3. Среди условий теоремы 2.2 наиболее обременительным представляется условие вещественности всех нулей полинома $P(\nu)$. В этом параграфе мы заменим полином $P(\nu)$ полиномом $Q(\nu)$, от которого требуется лишь, чтобы ни один его нуль не лежал на мнимой оси. В связи с этим придется заменить функцию $\psi(x)$ функцией $\psi(\varepsilon x, \varepsilon)$.

Рассмотрим уравнение

$$Q\left(\frac{d}{dx}\right)y' + \varepsilon f(y) = \varepsilon\varkappa_1\psi(\varepsilon x, \varepsilon) \quad (\psi(x, \varepsilon) \in \Psi_1(f),\ 0 < \varkappa_1 < 1), \tag{3.1}$$

предполагая, что производная $f''(y)$ существует и ограничена.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Если параметр* $\varepsilon > 0$ *достаточно мал, то уравнение* (3.1) *имеет в* $S_n(\varepsilon)$ *решение и притом только одно.*

Доказательство. Возьмем какой-нибудь полином

$$P(\nu) = a_n\nu^n + \ldots + a_2\nu^2 + a_1\nu,$$

у которого $a_n = c_n$, $a_1 = c_1$ и все нули просты и вещественны. Перепишем уравнение (3.1) в виде

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)y + \varepsilon f(y) = \varepsilon\varkappa_1\psi(\varepsilon x, \varepsilon) + \sum_{k=2}^{n-1} A_k y^{(k)}, \tag{3.2}$$

где $A_k = a_k - c_k \quad (k = 2, 3, \ldots, n-1)$.

Выберем число $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы функция

$$\frac{1}{\varkappa}\left\{\varkappa_1\psi(\varepsilon x, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=2}^{n-1} A_k\omega^{(k)}(x)\right\} \quad (0 < \varkappa_1 < \varkappa < 1)$$

принадлежала совокупности $\Psi_1(f)$, какова бы ни была функция $\omega(x) \in S_n(\varepsilon)$. Будем искать решение $y(x, \varepsilon)$ уравнения (3.2) среди функций $\omega \in S_n(\varepsilon)$. Если $y(x) \in S_n(\varepsilon)$, то уравнение (3.2) можно переписать так:

$$y(x) = T_\varepsilon\left\{\frac{1}{\varkappa}\left[\varkappa_1\psi(\varepsilon x, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=2}^{n-1} A_k y^{(k)}(x)\right]\right\}, \tag{3.3}$$

где T_ε — оператор, определенный в параграфе 2.

Из уравнения (3.1) следует, что

$$y'(x) = \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} Y_Q(x-s)\,[\varkappa_1\psi(\varepsilon s, \varepsilon) - f(y(s))]\,ds, \tag{3.4}$$

где $Y_Q(x-s)$ — функция Грина оператора $Q\left(\frac{d}{dx}\right)$

$$Y_Q(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{\nu x}d\nu}{Q(\nu)}.$$

Дифференцируя равенство (3.4) k раз $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ и производя в полученных интегралах интегрирование по частям, найдем

$$y^{(k+1)}(x) = -\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} Y_Q^{(k-1)}(x-s)\,[\varepsilon\varkappa_1\psi'(\varepsilon s, \varepsilon) - f'(y(s))\,y'(s)]\,ds$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3.5}$$

Введем следующие переменные

$$v_0(x) = y(x),\ v_1(x) = \varepsilon^{-1} y'(x),\ v_k(x) = \varepsilon^{-2} y^{(k)}(x)\ (k = 2, 3, \dots, n). \tag{3.6}$$

С их помощью соотношения (3.3) — (3.5) можно переписать так

$$\begin{gathered} v_0(x) = T_\varepsilon \left\{ \frac{1}{\varkappa} \left[\varkappa_1 \psi(\varepsilon x, \varepsilon) + \varepsilon \sum_{k=2}^{n-1} A_k v_k(x) \right] \right\} \\ v_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_Q(x - s) [\varkappa_1 \psi(\varepsilon s, \varepsilon) - f(v_0(s))]\, ds \\ v_{k+1}(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} Y_Q^{(k-1)}(x - s) [\varkappa_1 \psi'(\varepsilon s, \varepsilon) - f'(v_0(s))\, v_1(s)]\, ds \\ (k = 1, 2, \dots, n-1). \end{gathered} \tag{3.7}$$

Легко показать, что всякому решению $v(x) = \{v_j(x)\}_0^n$ этой системы отвечает решение $y(x) \in S_n(\varepsilon)$ уравнения (3.1), связанное с $v(x)$ формулами (3.6).

Обозначим через V_n совокупность вектор-функций $v(x) = \{v_j(x)\}_0^n$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $v_0(x) \in S_1$, $|v_j(x)| < R_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$;

б) существуют пределы $v_j(\pm\infty)$ $(j = 1, 2, \dots, n)$.

Ясно, что вектор-функция $v(x)$, определенная равенствами (3.6), принадлежит V_n, если $y(x) \in S_n(\varepsilon)$.

Зададим на V_n оператор A

$$u = Av, \qquad (u = \{u_j\}_0^n),$$

положив

$$u_0(x) = T_\varepsilon \left\{ \frac{1}{\varkappa} \left[\varkappa_1 \psi(\varepsilon x, \varepsilon) + \varepsilon \sum_{k=2}^{n-1} A_k v_k(x) \right] \right\},$$

$$u_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_Q(x - s) [\varkappa_1 \psi(\varepsilon s, \varepsilon) - f(u_0(s))]\, ds,$$

$$u_{k+1}(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} Y_Q^{(k-1)}(x - s) [\varkappa_1 \psi'(\varepsilon s, \varepsilon) - f'(u_0(s))\, u_1(s)]\, ds$$

$$(k = 1, 2, \dots, n-1).$$

По определению функция $u_0(x)$ принадлежит S. Функции $u_j(x)$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ имеют пределы $u_j(\pm\infty)$ и ограничены некоторыми постоянными R_j^0, не зависящими от выбора функций $v \in V_n$ и $\psi \in \Psi_1(f)$. Поэтому, если положить постоянные R_j равными R_j^0 $(j = 1, 2, \dots, n)$, то вектор-функция $u = Av$ окажется принадлежащей совокупности V_n.

Итак, совокупность V_n инвариантна относительно оператора A.

Покажем, что оператор A является сжимающим, если ввести на V_n равномерную метрику

$$\| v(x) \| = \max_j \sup_x | v_j(x) |.$$

В самом деле, пусть v и $\tilde{v}$ — какие-либо две вектор-функции из V_n. Если $u = Av$ и $\tilde{u} = A\tilde{v}$, то, согласно теореме 2.3, имеем

$$| a(x) [u_0(x) - \tilde{u}_0(x)] | < \frac{4\varepsilon}{d(f)} \sum_{k=2}^{n-1} | A_k | \, \| v - \tilde{v} \| = \varepsilon B_0 \| v - \tilde{v} \|.$$

С помощью этого неравенства получаем

$$|u_1(x)-\tilde{u}_1(x)|<\int_{-\infty}^{\infty}|Y_Q(s)|\,ds\cdot\varepsilon B_0\|v-\tilde{v}\|=\varepsilon B_1\|v-\tilde{v}\|.$$

Из этих двух неравенств в свою очередь следует, что

$$|u_{k+1}(x)-\tilde{u}_{k+1}(x)|<\int_{-\infty}^{\infty}|Y_Q^{(k-1)}(s)|\,ds\,\{\max_x|a(x)|\times$$

$$\times B_1+B_1^0\}\,\varepsilon\|v-\tilde{v}\|=\varepsilon B_{k+1}\|v-\tilde{v}\|$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\ B_1^0=R_1\sup_y|a^{-1}(y)f''(y)|).$$

Мы видим, что при достаточно малом ε оператор A является сжимающим. Более того, существует такое число C, не зависящее от ε, что $\|Av-A\tilde{v}\|<\varepsilon C\|v-\tilde{v}\|$. Так как многообразие V_n замкнуто относительно введенной метрики, то существует и притом только один неподвижный вектор v^0: $Av^0=v^0$. Теорема 3.1 доказана.

Определим на многообразии $\Psi_1(f)$ оператор $T_\varepsilon(Q)$, сопоставляющий каждой функции $\psi(x,\varepsilon)\in\Psi_1(f)$ решение $y(x,\varepsilon)\in S_n(\varepsilon)$ уравнения (3.1).

Введем метрику на многообразии $S_n(\varepsilon)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. Положим

$$\|\omega_2-\omega_1\|_n=\sup_x|a(x)[\omega_2(x)-\omega_1(x)]|+\frac{1}{\varepsilon}\sup_x|\omega_2'(x)-\omega_1'(x)|+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=2}^{n}\sup_x|\omega_2^{(j)}(x)-\omega_1^{(j)}|.$$

Имеет место следующая

Теорема 3.2. *Существует такое число D_0, не зависящее от ε, что для любой пары функций $\psi_1,\ \psi_2\in\Psi_1(f)$ справедливо неравенство*

$$\|T_\varepsilon(Q)\psi_2-T_\varepsilon(Q)\psi_1\|_n\leqslant D_0\|\psi_2-\psi_1\|_1. \tag{3.8}$$

Доказательство. Положим $y=T_\varepsilon(Q)\psi_1$, $z=T_\varepsilon(Q)\psi_2$. Обозначим через u и v вектор-функции, связанные с $y(x)$ и $z(x)$ соотношениями (3.6).

Полагая

$$\Delta_0=\sup_x|a(x)[v_0(x)-u_0(x)]|,\quad \Delta_i=\sup_x|v_i(x)-u_i(x)|,\quad (i=1,\ 2,\ \ldots\ n),$$

получим из уравнений (3.7)

$$\Delta_0\leqslant\frac{4}{d(f)}\left\{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\|\psi_2-\psi_1\|_1+\varepsilon\sum_{k=2}^{n-1}|A_k|\Delta_k\right\},$$

$$\Delta_1\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|Y_Q(s)|\,ds\,\{\varkappa_1\|\psi_2-\psi_1\|_1+\Delta_0\},$$

$$\Delta_{k+1}\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|Y_Q^{(k-1)}(s)|\,ds\,\{\varkappa_1\|\psi_2-\psi_1\|_1+\max_x|a(x)|\Delta_1+B_1^0\Delta_0\}$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Отсюда легко заключить, что $\Delta_k < b_k \| \psi_2 - \psi_1 \|_1$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, где b_k — некоторые величины, не зависящие от ε, если параметр ε достаточно мал. Эти неравенства можно переписать так

$$\sup_x | z(x) - y(x) | < b_0 \| \psi_2 - \psi_1 \|_1$$
$$\sup_x | z'(x) - y'(x) | < \varepsilon b_1 \| \psi_2 - \psi_1 \|_1$$
$$\sup_x | z^{(k)}(x) - y^{(k)}(x) | < \varepsilon^2 b_k \| \psi_2 - \psi_1 \|_1 \quad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Мы получили неравенства, эквивалентные неравенству (3.8). Теорема 3.2 доказана.

§ 4. Докажем теоремы 1 и 2. Перепишем уравнение (A) так:

$$Q\left(\frac{d}{dx}\right) y' + \varepsilon f(y) = -g(\varepsilon y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{4.1}$$

Покажем, что, какова бы ни была функция $\omega \in S_n(\varepsilon)$, функция

$$\psi_\omega(x, \varepsilon) = -\frac{1}{\varkappa\varepsilon} g\left(\varepsilon\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \omega'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \ldots, \omega^{(n-1)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$

принадлежит $\Psi_1(f)$, если параметр ε достаточно мал. Все аргументы функции g в равенстве (4.1) имеют порядок малости по ε не ниже первого. Поэтому, выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, можно добиться того, чтобы

$$| \psi_\omega(x, \varepsilon) | < L_0 \quad (-\infty < x < \infty, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0).$$

Производная

$$\psi'_\omega(x, \varepsilon) = -\frac{1}{\varkappa\varepsilon} \frac{\partial g}{\partial x_0} \omega'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varkappa} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{1}{\varepsilon^2} \omega^{(j+1)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

при всех достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$ ограничена величиной $\frac{1}{\varkappa}\delta(\varepsilon)$, которая стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, функция $\psi_\omega(x, \varepsilon)$, действительно, принадлежит многообразию $\Psi_1(f)$, и к ней можно применить оператор $T_\varepsilon(Q)$.

Введем в рассмотрение оператор A_n, заданный на $S_n(\varepsilon)$ следующим образом

$$A_n \omega = T_\varepsilon(Q) \psi_\omega(x, \varepsilon).$$

Из этого определения следует, что функция $\omega_1 = A\omega$ принадлежит $S_n(\varepsilon)$. Уравнение (4.1) эквивалентно уравнению $y = A_n y$, если $y \in S_n(\varepsilon)$. Покажем, что оператор A_n является сжимающим, если параметр ε достаточно мал.

Пусть ω и $\tilde{\omega}$ — какие-либо две функции из $S_n(\varepsilon)$. Тогда, как легко подсчитать,

$$| \psi_{\tilde{\omega}}(x, \varepsilon) - \psi_\omega(x, \varepsilon) | \leqslant \frac{1}{\varkappa} \left\{ \left| \frac{\partial g}{\partial x_0} \right| \left| \tilde{\omega}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| + \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\partial g}{\partial x_k} \right| \| \tilde{\omega} - \omega \|_n \right\}.$$

Координаты точек, в которых берутся производные $\frac{\partial g}{\partial x_k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Вместе с ними стремятся к нулю и производные $\frac{\partial g}{\partial x_k}$. Поэтому, каково бы ни было число $\delta_1 > 0$, существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ справедливо неравенство

$$| \psi_{\tilde{\omega}}(x, \varepsilon) - \psi_\omega(x, \varepsilon) | < \delta_1 \| \omega - \omega \|_n.$$

Столь же просто получается аналогичная оценка

$$|\psi'_{\tilde{\omega}}(x, \varepsilon) - \psi'_{\omega}(x, \varepsilon)| < \delta_2 \|\tilde{\omega} - \omega\|_n \quad (\delta_2 \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0).$$

Поэтому

$$\|\psi_{\tilde{\omega}}(x, \varepsilon) - \psi_{\omega}(x, \varepsilon)\|_1 < (\delta_1 + \delta_2) \|\tilde{\omega} - \omega\|_n.$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (3.8), получим

$$\|A_n\tilde{\omega} - A_n\omega\|_n < (\delta_1 + \delta_2) D_0 \|\tilde{\omega} - \omega\|_n.$$

Таким образом, при достаточно малом ε, когда $(\delta_1 + \delta_2) D_0 < 1$, оператор A_n является сжимающим, и уравнение $A_n y = y$ имеет в $S_n(\varepsilon)$ одно и только одно решение. Теоремы 1 и 2 доказаны.

Обратимся к теореме 3. Перепишем уравнение (4.1) так:

$$c_1 y' + \varepsilon f(y) = -g(\varepsilon y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - \sum_{j=2}^{n} c_j y^{(j)}.$$

Если в правую часть этого уравнения подставить вместо искомой функции $y(x)$ решение $y_0(x, \varepsilon) \in S_n(\varepsilon)$ задачи A, то получится неоднородное уравнение первого порядка

$$Q_0\left(\frac{d}{dx}\right) y' + \varepsilon f(y) = \varepsilon \varkappa_1 [\psi_1(\varepsilon x, \varepsilon) + \psi_2(\varepsilon x, \varepsilon)] \quad (0 < \varkappa_1 < 1), \tag{4.2}$$

где

$$Q_0(\nu) \equiv c_1, \quad \psi_1(x, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon\varkappa_1} g\left(\varepsilon y_0\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right), y_0'\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right), \ldots, y_0^{(n-1)}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right)\right),$$

$$\psi_2(x, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon\varkappa_1} \sum_{j=2}^{n-1} c_j y_0^{(j)}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right).$$

При доказательстве теоремы 1 было показано, что функция $\psi_1(x, \varepsilon)$ принадлежит $\Psi_1(f)$, а ее норма $\|\psi_1\|_1$ сколь угодно мала, если достаточно мал параметр ε. Легко проверить, что такими же свойствами обладает и функция $\psi_2(x, \varepsilon)$. Поэтому из соотношения (4.2) следует, что

$$y(x) = T_\varepsilon(Q_0)\{\psi_1(x, \varepsilon) + \psi_2(x, \varepsilon)\}.$$

Обозначим через $z(x, \varepsilon) \in S_1(\varepsilon)$ решение уравнения

$$c_1 z' + \varepsilon f(z) = 0.$$

Ясно, что $z(x) = T_\varepsilon(Q_0)\{0\}$. Поэтому, согласно (3.8),

$$\|z - y_0\|_1 \leqslant D(\varepsilon + \delta(\varepsilon)).$$

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Я. Любарский. Построение переходных решений нелинейных уравнений «Докл. АН СССР», 140, № 6 (1961).

2. Г. Я. Любарский. О существовании переходных решений у некоторых нелинейных уравнений. «Уч. зап. ХГУ и ХМО», 28, серия 4 (1961).