УДК 517.948

БАЗА ХЕДИДЖА, Н. Я. ТИХОНЕНКО

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ. I

Настоящая работа посвящена обоснованию сходимости в различных функциональных пространствах метода приближенной факторизации (МПФ) решения нормального случая задачи Римана на вещественной оси $\boldsymbol{R}$,

$$K\Phi \equiv \Phi^{+}(t) - G(t)\,\Phi^{-}(t) = g(t), \quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

а также установлению оценок скоростей сходимости приближенных решений задачи (1) к ее точным решениям. Здесь $G(t)$, $g(t)$ — известные функции, которые ниже подчиним вполне определенным условиям, а $\Phi^{\pm}(t)$ — краевые значения неизвестных функций $\Phi^{\pm}(z)$, аналитических соответственно в верхней D^{+} и нижней D^{-} полуплоскостях.

Как известно, к нахождению решений задачи Римана на R сводится широкий круг задач математической физики, теории упругости и теплопроводности, дифракции и излучения [1—6], уравнения типа свертки [7, 8].

Отметим, что теория задачи (1) при самых широких предположениях относительно ее коэффициентов построена в работах [7, 9]. Согласно этих работ решения задачи (1) выражаются через интегралы типа Коши, которые, как правило [10], точно не вычисляются. В связи с этим нахождение в явном виде факторизации коэффициента задачи (1) является по-существу не разрешимой задачей. При этом [10] лишь для некоторых классов функций их факторизация не вызывает особых затруднений. Таким свойством обладают, например, рациональные функции.

Идея МПФ состоит в приближении функции $G(t)$ рациональными функциями. Впервые этот метод применил Койтер В. Т. в работе [23], однако он не установил оценок погрешности приближенных решений задачи (1). В дальнейшем этот метод был развит в работах Черского Ю. И. и Тихоненко Н. Я. [11—15], которые установили оценки погрешности приближенных решений задачи (1) в различных функциональных пространствах. Однако и им не удалось установить сходимость приближенных решений задачи (1) к точным решениям. Отметим, что приближенному решению на R задачи (1) посвящен не широкий круг работ, среди которых отметим работы [16, 17], в которых при достаточно широких предположениях относительно гладкости функций $G(t)$, $g(t)$ обоснованные как прямые (методы коллокаций, редукции, наименьших квадратов) методы приближенного решения задачи (1), так и методы, основанные на приближенном вычислении интегралов типа Коши. Однако МПФ решения задачи (1) до настоящего времени не был обоснован.

1°. Пространства функций. Пусть $t \in R$. Тогда символом $C = C(R)$ обозначим пространство функций $f(t)$, непрерывных на R, и таких, что $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = a = \text{const}$. Норму в C введем обычным образом. Через $H_\alpha = H_\alpha(R)$, $0 < \alpha \leqslant 1$ обозначим пространство функций $f(t)$, удовлетворяющих на R условию Гельдера [18]:

$$|f(t+h) - f(t)|(1+|t+h|)^\alpha(1+|t|)^\alpha \leqslant Ah^\alpha, \quad \forall t \in R, \ \forall h > 0,$$

где A, α — постоянные, $A > 0$.

Символами $L_1 = L_1(R)$ и $L_2 = L_2(R)$ обозначим соответственно пространства суммируемых или квадратично суммируемых на R функций $f(t)$ с обычной нормой. Через $L_{1\rho} = L_{1\rho}(R)$ и $L_{2\rho} = L_{2\rho}(R)$, где $\rho(t) = (1+t^2)^{-1}$ — весовая функция, обозначим пространства функций $f(t)$, заданных на R и удовлетворяющих соответственно условиям

$$\int\limits_R (1+t^2)^{-1}|f(t)|\,dt < +\infty, \quad \int\limits_R (1+t^2)^{-1}|f(t)|^2\,dt < +\infty.$$

Норму в $L_{1\rho}$ и $L_{2\rho}$ также введем обычным образом.

2°. Оператор Фейера и некоторые его свойства. Пусть функция $f(t) \in L_{1\rho}$ и пусть $\{\zeta_k\}$, $\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$ — система точек комплексной плоскости, среди которых могут встречаться и одинаковые. Тогда, согласно [19], оператор Фейера функции $f(t)$ определяется следующим образом:

$$F_{2n-2}(f, t) = \int_R f(\tau)\, k(t, \tau)\, d\tau \Big/ \int_R k(t, \tau)\, d\tau, \tag{2}$$

где $k(t, \tau) = \sin^2[\Phi_n(\tau) - \Phi_n(t)]$ **(3)**, а $\Phi_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \arg(\zeta_k - t)$ **(4).**

Справедливы [19, 20] такие представления

$$k(t, \tau) = -\frac{1}{4(\tau - t)^2}\left\{\prod_{k=1}^{n} \frac{\zeta_k - \tau}{\bar\zeta_k - \tau} \cdot \frac{\bar\zeta_k - t}{\zeta_k - t} - \prod_{k=1}^{n} \frac{\bar\zeta_k - \tau}{\zeta_k - \tau} \cdot \frac{\zeta_k - t}{\bar\zeta_k - t} - 2\right\}; \tag{5}$$

$$\int_R k(t, \tau)\, d\tau = \pi\Phi_n'(t) = \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{(t - \alpha_k)^2 + \beta_k^2}. \tag{6}$$

Из (2)—(6) следует, что $F_{2n-2}(f, t)$ является рациональной функцией и имеет следующий вид:

$$F_{2n-2}(f, t) = \frac{P_{2n-2}(f, t)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}[(t - \tilde\alpha_k)^2 + \tilde\beta_k^2]}, \tag{7}$$

где $P_{2n-2}(f, t)$ — многочлен степени $2n-2$, однозначно определяемый функцией $f(t)$ и системой точек ζ_k, а $\tilde\zeta_k = \tilde\alpha_k + i\tilde\beta_k$, $k = \overline{1, n-1}$, — нули функции $\Phi_n'(t)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Лемма 1. [19]. *Пусть $f(t) \in H_\alpha$. Тогда при $0 < \alpha < 1$*

$$|f(t) - F_{2n-2}(f, t)| \leqslant A\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\left[\frac{\pi}{(1+t^2)\Phi_n'(t)}\right]^\alpha,$$

а при $\alpha = 1$

$$|f(t) - F_{2n-2}(f, t)| \leqslant \frac{A\pi}{(1+t^2)\Phi_n'(t)}\{1 + \ln[(1+t^2)\Phi_n'(t)]\},$$

где A — постоянная Гельдера функции $f(t)$.

Обозначим

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{1 + \alpha_k^2 + \beta_k^2}. \tag{8}$$

Тогда из неравенства $(1+t^2)\Phi_n'(t) \geqslant \sigma_n$ для всех $t \in R$ и леммы 1 следует

Лемма 2. [19]. *Если* $f(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, *то последовательность* $\{F_{2n-2}(f, t)\}$ *равномерно сходится на* $\boldsymbol{R}$ *к функции* $f(t)$. *При этом справедлива оценка*

$$|f(t) - F_{2n-2}(f, t)| \leqslant A \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{\pi}{\sigma_n}\right)^\alpha.$$

Теорема 1. *Если* $f(t) \in H_1$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, *то последовательность* $\{F_{2n-2}(f, t)\}$ *равномерно сходится на* $\boldsymbol{R}$ *к функции* $f(t)$, *при этом справедлива оценка*

$$|f(t) - F_{2n-2}(f, t)| \leqslant A\pi (1 + \ln \sigma_n) \sigma_n^{-1}.$$

Доказательство теоремы следует из монотонности функции $y = (1 + \ln u) u^{-1}$ при $u \geqslant 1$. Тогда, положив $(1 + t^2) \Phi_n'(t) = u$ из неравенства $(1 + t^2) \Phi_n'(t) \geqslant \sigma_n$ для всех $t \in \boldsymbol{R}$ легко получить требуемое.

Теорема 2. *Пусть* $f(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $f(t) \neq 0$ *и система точек такова, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$. *Тогда, начиная с некоторого номера* $F_{2n-2}(f, t) \neq 0$, $\operatorname{ind} F_{2n-2}(f, t) = \operatorname{ind} f(t)$, где $\varkappa = \operatorname{ind} f(t)$ — *индекс функции* $f(t)$ *по Коши.*

Доказательство этого утверждения следует из равномерной сходимости на $\boldsymbol{R}$ последовательности $\{F_{2n-2}(f, t)\}$ к функции $f(t)$.

Из построения функции $F_{2n-2}(f, t)$ следует, что она имеет комплексно сопряженные полюса в комплексной плоскости. Из теоремы 2 следует, что функции $F_{2n-2}(f, t)$ при достаточно больших n имеют лишь комплексные корни. Более того, при $\varkappa > 0$ $F_{2n-2}(f, t)$ имеет в D^+ на $2\varkappa$ нулей больше, чем в D^-. Если же $\varkappa < 0$, то $F_{2n-2}(f, t)$ имеет в D^+ на $2|\varkappa|$ нулей меньше, чем в D^-. Если же $\varkappa = 0$, то $F_{2n-2}(f, t)$ имеет одинаковое число нулей в D^+ и D^-.

Теорема 3. *Справедливы оценки*

$$\| F_{2n-2}(f, t) \|_{C\to C} = \| F_{2n-2}(f, t) \|_{H_\alpha \to C} = 1; \tag{9}$$

$$\| F_{2n-2}(f, t) \|_{C\to L_{2\rho}} = \| F_{2n-2}(f, t) \|_{H_\alpha \to L_{2\rho}} = \sqrt{\pi}; \tag{10}$$

$$\| F_{2n-2}(f, t) \|_{L_2\to L_2} \leqslant \sqrt{n}, \quad \| F_{2n-2}(f, t) \|_{L_2\to L_{2\rho}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\beta_k}\right)^{1/2}. \tag{11}$$

Доказательство. Согласно определению функции $\Phi_n(t)$ следует, что ядро $k(t, \tau)$, определенное равенством (3), является неотрицательной функцией, т. е. $k(t, \tau) = |k(t, \tau)|$. Кроме того,

$$\lim_{\tau\to t} k(t, \tau) = \sup_\tau k(t, \tau) = [\Phi_n'(t)]^2; \tag{12}$$

$$0 < \max_t \Phi_n'(t) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\beta_k}. \tag{13}$$

Оценки (9) элементарны и следуют из того, что функция $k(t, \tau)$ неотрицательна, а $F_{2n-2}(1, t) \equiv 1$. Первая из оценок (10) следует из цепочки неравенств

$$\| F_{2n-2}(f, t)\|^2_{L_{2\rho}} = \int\limits_R \left| \frac{\int\limits_R f(\tau)\, k(t, \tau)\, d\tau}{\int\limits_R k(t, \tau)\, d\tau} \right|^2 \frac{dt}{1+t^2} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_R \frac{\left(\int\limits_R f(\tau)\, k(t, \tau)\, d\tau\right)^2}{\left(\int\limits_R k(t, \tau)\, d\tau\right)^2} \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \pi \| f(t)\|^2_C$$

и из того, что $F_{2n-2}(1, t) \equiv 1$. Вторая из оценок (10) следует из первой. Пусть теперь $f(t) \in L_2$. Докажем справедливость первой из оценок (11). Очевидно, что

$$| F_{2n-2}(f, t)|^2 \leqslant \frac{\left(\int\limits_R | f(\tau)|\, k^{1/2}(t, \tau)\, k^{1/2}(t, \tau)\, d\tau\right)^2}{\left(\int\limits_R k(t, \tau)\, d\tau\right)^2} \leqslant \tag{14}$$

$$\leqslant \frac{\int\limits_R | f(\tau)|^2 k(t, \tau)\, d\tau}{\int\limits_R k(t, \tau)\, d\tau} \leqslant \frac{\sup\limits_\tau k(t, \tau) \int\limits_R | f(\tau)|^2 d\tau}{\int\limits_R k(t, \tau)\, d\tau} \leqslant \frac{1}{\pi} \Phi'_n(t) \| f(t)\|^2_{L_2}.$$

Т гда

$$\| F_{2n-2}(f, t)\|^2_{L_2} \leqslant \frac{1}{\pi} \| f(t)\|^2_{L_2} \sum_{k=1}^n \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{dt}{(\alpha_k - t)^2 + \beta_k^2} =$$

$$= 2i \| f(t)\|^2_{L_2} \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\zeta_k - \bar{\zeta}_k} = n \| f(t)\|^2_{L_2}.$$

Откуда и следует первая из оценок (11). Вторая из оценок (11) следует из цепочки неравенств (14) н оценок (12), (13).

Из теоремы 3 следует, что оператор Фейера действует ограниченным образом из пространств C, H_α в пространства C и $L_{2\rho}$. И при каждом фиксированном n он действуег ограниченным образом из пространства L_2 в пространства L_2 и $L_{2\rho}$.

Заметим, что в случае специального выбора точек $\zeta_k = i$, $k = \overline{1, n}$, $F_{2n-2}(f, t)$, $\Phi'_n(t)$, σ_n имеют наиболее простой вид. Именно

$$F_{2n-2}(f, t) = \frac{P_{2n-2}(f, t)}{(1+t^2)^{n-1}}, \quad \Phi'_n(t) = \frac{n}{1+t^2}, \quad \sigma_n = \frac{n}{2}. \tag{15}$$

При этом очевидно, что в этом случае имеет место наиболее высокая скорость сходимости функций $F_{2n-2}(f, t)$ к функции $f(t)$.

3°. Теорема об оценке погрешности. Пусть X, Y — линейные пространства и $K: X \to Y$ — линейный оператор. Обычно при нахождении решения уравнения

$$Kx = y, \quad x \in X, \ y \in Y \tag{16}$$

строят приближенное в некотором смысле уравнение

$$\tilde{K}\tilde{x} = \tilde{y}, \quad \tilde{x} \in \tilde{X}, \ \tilde{y} \in \tilde{Y}, \tag{17}$$

считая, что его точное решение находится без особого труда, и точное решение уравнения (17) называют приближенным решением уравнения (16). Здесь $\tilde{X} \subseteq X$, $\tilde{Y} \subseteq Y$, а линейный оператор $\tilde{K}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$.

В дальнейшем будем строить такое уравнение (17), чтобы его точное решение $\tilde{x}$ обладало бы некоторыми известными свойствами решения уравнения (16) и было бы близким к нему в некотором смысле *. Это означает, что разность $x - \tilde{x}$ принадлежит пространству X_0, более узкому, чем пространства X и $\tilde{X}$. Тогда пространство X_0 будем определять так, чтобы решения уравнения (17) обладали бы известными нам свойствами решений уравнения (16) и, кроме того, уравнения (16), (17) имели бы в пространстве X_0 единственное решение. Из этого следует, что разность $y - \tilde{y}$ принадлежит более узкому пространству Y_0, чем пространства Y и $\tilde{Y}$.

В дальнейшем для простоты будем считать, что $\tilde{X} = X$, $\tilde{Y} = Y$. При этом пространства X, Y и операторы K, $\tilde{K}$ подчиним следующим условиям:

1) уравнение (16) при данном $y \in Y$ имеет решение $x \in X$, возможно, не единственное;

2) $\forall y \in Y$, при котором уравнение (16) разрешимо, $\exists \tilde{y} \in Y$ такой, что $y - \tilde{y} \in Y_0$ и уравнение (17) при этом $\tilde{y}$ имеет решение $\tilde{x} \in X$ также, возможно, не единственное. Здесь $Y_0 \subseteq Y$ — банахово пространство;

3) для любого решения x уравнения (16) $(K - \tilde{K})x \in Y_0$;

4) однородное уравнение (17) имеет в пространстве X m линейно независимых решений $\tilde{x}_{0j}$, $j = \overline{1, m}$. При этом определитель $|(T_k, \tilde{x}_{0j})| \neq 0$, где T_k, $k = \overline{1, m}$, — система линейных функционалов, определенных на пространстве X;

5) для любого $\psi \in Y_0$ уравнение (17) имеет единственное решение в пространстве $\varphi \in X_0$, где X_0 — банахово пространство $X_0 \subseteq X$. При этом $(T_k, \varphi) = 0$, $k = \overline{1, m}$, и для любого $\varphi \in X_0$ $(K - \tilde{K})\varphi \in X_0$;

6) оператор $K - \tilde{K}$ ограничен в следующем смысле $\|(K - \tilde{K})\varphi\|_{Y_0} \leqslant \|K - \tilde{K}\| \|\varphi\|_{X_0}$;

7) оператор $\tilde{K}^{-1}$ также ограничен: $\|\tilde{K}^{-1}\psi\|_{X_0} \leqslant \|\tilde{K}^{-1}\| \|\psi\|_{Y_0}$;

8) $\|K - \tilde{K}\| \|\tilde{K}^{-1}\| < 1$.

---

* Во многих случаях из структуры оператора K можно установить некоторые свойства решений уравнения (16). Например, если уравнение (16) представляет собой задачу Римана, то согласно [9, 21] можно дать асимптотику ее решений в точках разрыва коэффициентов. Или если $\varkappa = \operatorname{ind} G(t) > 0$, то исчезающие на бесконечности решения задачи Римана зависят от $\varkappa$ произвольных постоянных. Можно привести и ряд других примеров.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия 1)—8) и x^* — фиксированное решение уравнения* (16). *Если $\tilde{x}^*$ такое решение уравнения* (17), *что $(T_k, x^*) = (T_k, \tilde{x}^*)$, $k = \overline{1, m}$, то $x^* - \tilde{x}^* \in X_0$ и справедлива оценка погрешности*

$$\| x^* - \tilde{x}^* \|_{X_0} \leqslant \delta \| K\tilde{x}^* \tilde{y} \|_{Y_0}, \tag{18}$$

где

$$\delta = \| \tilde{K}^{-1} \| / [1 - \| \tilde{K}^{-1} \| \| K - \tilde{K} \|]^{-1}. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть x^* — фиксированное решение уравнения (16), соответствующее данному $y \in Y$. Тогда на основании условия 2) $\tilde{y} Y$ такой, что $y - \tilde{y} \in Y_0$ и уравнение (25) разрешимо в пространстве X. Пусть среди решений уравнения (17) существует такой элемент $\tilde{x}^*$, что $(T_k, x^*) = (T_k, \tilde{x}^*)$, $k = \overline{1, m}$. Покажем, что $x^* - \tilde{x}^* \in X_0$. Для этого рассмотрим уравнение $\tilde{K}(x^* - \tilde{x}) = \psi$ (20), где $\psi = y - \tilde{y} - (K - \tilde{K}) x^* \in Y_0$ на основании условий 2) и 3). Тогда уравнение (20) в пространстве X имеет решение $x^* - \tilde{x} = \varphi + \sum_{j=1}^{m} c_j \tilde{x}_{0j}$, где $\varphi \in X_0$, c_j — произвольные постоянные, а X_{0j} — линейно независимые решения однородного уравнения (17). В частности, для $\tilde{x}^*$ будет справедливо $x^* - \tilde{x}^* = \varphi + \sum_{j=1}^{m} c_j^* \tilde{x}_{0j}$. Так как $(T_k, x^*) = (T_k, \tilde{x}^*)$, $(T_k, \varphi) = 0$, $k = \overline{1, m}$, и определитель $(T_k, \tilde{x}_{0j}) | \neq 0$, то $c_j^* = 0$, $j = \overline{1, m}$, следовательно, $x^* - \tilde{x}^* \in X_0$.

Оценив по норме пространства X_0 равенство

$$x^* - \tilde{x}^* = \tilde{K}^{-1} (\tilde{y} - K\tilde{x}^*) - \tilde{K}^{-1} (K - \tilde{K}) (x^* - \tilde{x}^*),$$

получим оценку (18), которой без особого труда можно придать следующий вид:

$$\| x^* - \tilde{x}^* \|_{X_0} \leqslant \delta [\| (K - \tilde{K}) \tilde{x}^* \|_{Y_0} + \| y - \tilde{y} \|_{Y_0}]. \tag{21}$$

Используя результаты пп. 2° и 3°, приближенное решение задачи (1) будем находить путем точного решения задачи Римана

$$\tilde{K}\Phi \equiv \tilde{\Phi}^+(t) - \tilde{G}(t) \tilde{\Phi}^-(t) = \tilde{g}(t), \ t \in \mathbf{R}, \tag{22}$$

где $\tilde{G}(t)$, $\tilde{g}(t)$ — известные рациональные функции, аппроксимирующие функции $G(t)$ и $g(t)$ соответственно. Как известно [9, 11], в этом случае решения задачи (22) находятся путем простых вычислений на основании теории вычетов.

В дальнейшем будем предполагать, что $G(t) \neq 0$, $G(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, и $\varkappa = \operatorname{ind} G(t)$.

4°. МПФ в C. Пусть $g(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $\varkappa \geqslant -1$ и, кроме того, в окрестности бесконечно удаленной точки справедливы разложения

$$G(t) = 1 + \frac{g_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \cdots + \frac{a_\nu}{t^\nu} + \gamma_1(t); \tag{23}$$

$$g(t) = b_0 + \frac{b_1}{t} + \frac{b^2}{t^2} + \cdots + \frac{b_\nu}{t^\nu} + \gamma_2(t), \tag{24}$$

где $\nu \geqslant \varkappa + 1$, а $\lim\limits_{t\to\infty} t^{\nu}\gamma_k(t) = 0$, $k = 1, 2$. При этом решения задачи (1) разыскиваем в классе ограниченных на бесконечности функций.

Выберем теперь в комплексной плоскости систему точек $\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, и положим при $\varkappa = -1$ $\tilde{G}(t) = F_{2n-2}(G, t)$, $\tilde{g}(t) = F_{2n-2}(g, t)$, а при $\varkappa \geqslant 0$ функции $\tilde{G}(t)$ и $\tilde{g}(t)$ будем искать соответственно в виде*

$$\tilde{G}(t) = \frac{P_{2n-2}(G, t)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} [(t - \tilde{\alpha}_k)^2 + \tilde{\beta}_k^2]}, \quad \tilde{g}(t) = \frac{P_{2n-2}(g, t)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} [(t - \tilde{\alpha}_k)^2 + \tilde{\beta}_k^2]}, \tag{25}$$

где $\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k$ определяются в соответствии с (7).

Считая, что n достаточно велико, $\varkappa + 1$ коэффициент многочленов $P_{2n-2}(G, t)$ и $P_{2n-2}(g, t)$ определим из удовлетворения функциями $\tilde{G}(t)$ и $\tilde{g}(t)$ соответственно условий (23), (24), а остальную часть их коэффициентов определим из достижения

$$\min_{P_{2n-2}} \| G(t) - \tilde{G}(t) \|_C, \quad \min_{P_{2n-2}} \| g(t) - \tilde{g}(t) \|_C. \tag{27}$$

Согласно [22] многочлены $P_{2n-2}(G, t)$ и $P_{2n-2}(g, t)$ существуют, единственны и справедливы оценки

$$\| G(t) - \tilde{G}(t) \|_C \leqslant d_1 \| G(t) - F_{2n-2}(G, t) \|_C; \tag{28}$$

$$\| g(t) - \tilde{g}(t) \|_C \leqslant d_2 \| g(t) - F_{2n-2}(g, t) \|_C. \tag{29}$$

Здесь и далее ниже d_i — вполне определенные постоянные, не зависящие от n. Ясно, что при достаточно больших n $\tilde{G}(t) \neq 0$, $\operatorname{ind} \tilde{G}(t) = \varkappa$ и

$$\lim_{t\to\infty} t^{\varkappa+1} [G(t) - \tilde{G}(t)] = \lim_{t\to\infty} t^{\varkappa+1} [g(t) - \tilde{g}(t)] = 0.$$

Покажем теперь, что решения задачи (22) с построенными таким образом функциями $\tilde{G}(t)$ и $\tilde{g}(t)$ сходятся к решению задачи (1). Для этого проверим выполнимость условий теоремы 4.

1. В качестве пространства X возьмем множество вектор-функций $\Phi(t) = \{\Phi^+(t), \Phi^-(t)\}$, $\Phi^{\pm}(t) \in C$, а в качестве пространства Y возьмем множество функций из C, удовлетворяющих условию (24). Тогда при данных предложениях относительно функций $G(t)$ и $g(t)$ задача (1) разрешима при $\varkappa \geqslant -1$ [7, 9] и ее решения имеют вид $\Phi(t) = \{\Phi^+(t), \Phi^-(t)\}$, где

$$\Phi^+(t) = \chi^+(t) \left[\Psi^+(t) + \frac{P_\varkappa(t)}{(t+i)^\varkappa} \right]; \tag{30}$$

$$\Phi^-(t) = \left(\frac{t+i}{t-i}\right)^\varkappa \chi^-(t) \left[\Psi^-(t) + \frac{P_\varkappa(t)}{(t+i)^\varkappa} \right]; \tag{31}$$

$$\frac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)} = \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\varkappa} G(t), \quad \Psi^+(t) - \Psi^-(t) = \frac{g(t)}{\chi^+(t)}, \tag{32}$$

---

* Как правило, на практике полагают $\zeta_k = i$, $k = \overline{1, n}$. Тогда функции $\tilde{G}(t)$ и $\tilde{g}(t)$ в соответствии с (15) ищут соответственно в виде

$$\tilde{G}(t) = \frac{P_{2n-2}(G, t)}{(1+t^2)^{n-1}}, \quad \tilde{g}(t) = \frac{P_{2n-2}(g, t)}{(1+t^2)^{n-1}}. \tag{26}$$

а $P_\varkappa(t)$ — произвольный многочлен степени $\varkappa$, если $\varkappa \geqslant 0$; $P_\varkappa(t) \equiv 0$ при $\varkappa = -1$.

Зафиксировав коэффициенты многочлена $P_\varkappa(t) = \sum\limits_{k=0}^{\varkappa} c_k t^{\varkappa-k}$, т. е. положив $c_k = c_k^*$, получим фиксированное решение $\Phi_*(t) = \{\Phi_*^+(t), \Phi_*^-(t)\}$ задачи (1). Отметим, что при $\varkappa = -1$ задача (1) имеет единственное решение.

2. В качестве пространства Y_0 возьмем пространство функций $\psi(t) \in Y$ таких, что $\lim\limits_{t\to\infty} t^{\varkappa+1}\psi(t) = 0$. При этом $\| \psi(t) \|_{Y_0} = \| \psi(t) \|_C$. Тогда на основании (25)—(29) и леммы 2 существует элемент $\tilde g(t) \in Y$ такой, что $g(t) - \tilde g(t) \in Y_0$. При этом $\tilde g(t)$ имеет вид (25) или (26), а на основании леммы 2

$$\| g(t) - \tilde g(t) \|_{Y_0} = \| g(t) - \tilde g(t) \|_C \leqslant d_3 \sigma_n^{-\alpha}, \tag{33}$$

где σ_n определяется по формуле (8) или (15).

Так как функция $\tilde G(t)$ определена в соответствии с (25)—(28), то задача (22) разрешима, и ее решения имеют вид $\tilde\Phi(t) = \{\tilde\Phi^+(t), \tilde\Phi^-(t)\}$, где

$$\tilde\Phi^+(t) = \tilde\chi^+(t)\left[\tilde\Psi^+(t) + \frac{\tilde P_\varkappa(t)}{(t+i)^\varkappa}\right]; \tag{34}$$

$$\tilde\Phi^-(t) = \left(\frac{t+i}{t-i}\right)^\varkappa \tilde\chi(t)\left[\tilde\Psi^-(t) + \frac{\tilde P_\varkappa(t)}{(t+i)^\varkappa}\right]; \tag{35}$$

$$\frac{\tilde\chi^+(t)}{\tilde\chi^-(t)} = \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\varkappa} \tilde G(t),\quad \tilde\Psi^+(t) - \tilde\Psi^-(t) = \frac{\tilde g(t)}{\tilde\chi^+(t)}, \tag{36}$$

а $\tilde P_\varkappa(t)$ — произвольный многочлен степени $\varkappa$, если $\varkappa \geqslant 0$; $\tilde P_\varkappa(t) \equiv 0$, если $\varkappa = -1$.

Заметим, что функции $\tilde\chi^\pm(t)$, $\tilde\Psi^\pm(t)$ находятся без особого труда, поскольку функции $\tilde G(t)$ и $\tilde g(t)$ рациональные.

3. Пусть $\Phi(t)$ — произвольное решение задачи (1). Тогда $(K - \tilde K)\Phi \equiv [G(t) - \tilde G(t)]\,\Phi^-(t) \in Y_0$ в силу того, что $\Phi^-(t) \in C$ и главные части разложений на бесконечности функций $G(t)$ и $\tilde G(t)$ совпадают.

4. Однородная задача (22) при $\varkappa \geqslant 0$ имеет $\varkappa + 1$ линейно независимое решение $\tilde\Phi_j(t) = \{\Phi_j^+(t), \Phi_j^-(t)\}$, где

$$\tilde\Phi_j^+(t) = \tilde\chi^+(t)\frac{t^j}{(t+i)^\varkappa},\quad \tilde\Phi_j^-(t) = \tilde\chi^-(t)\frac{t^j}{(t-i)^\varkappa},\quad j = \overline{0, \varkappa}. \tag{37}$$

Если же $\varkappa = -1$, то однородная задача (30) имеет лишь тривиальное решение.

Согласно [15] в силу разложений (23), (24) и способа определения функций $\tilde{G}(t)$ и $\tilde{g}(t)$ на бесконечности имеют место следующие разложения:

$$\chi^{\pm}(t) = \alpha_0^{\pm} + \frac{\alpha_1^{\pm}}{t} + \frac{\alpha_2^{\pm}}{t^2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu^{\pm}}{t^\nu} + \gamma_1^{\pm}(t), \tag{38}$$

$$\tilde{\chi}^{\pm}(t) = \alpha_0^{\pm} + \frac{\alpha_1^{\pm}}{t} + \frac{\alpha_2^{\pm}}{t^2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu^{\pm}}{t^\nu} + \tilde{\gamma}_2^{\pm}(t), \tag{39}$$

$$\Psi^{\pm}(t) = \beta_0^{\pm} + \frac{\beta_1^{\pm}}{t} + \frac{\beta_2^{\pm}}{t^2} + \cdots + \frac{\beta_\nu^{\pm}}{t^\nu} + \gamma_2^{\pm}(t), \tag{40}$$

$$\tilde{\Psi}^{\pm}(t) = \beta_0^{\pm} + \frac{\beta_1^{\pm}}{t} + \frac{\beta_2^{\pm}}{t^2} + \cdots + \frac{\beta_\nu^{\pm}}{t^\nu} + \tilde{\gamma}^{\pm}(t), \tag{41}$$

где $\alpha_0^{\pm} = 1$, $\nu \geqslant \varkappa + 1$, а $\lim\limits_{t\to\infty} t^\nu \gamma_k^{\pm}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} t^\nu \tilde{\gamma}_k^{\pm}(t) = 0$, $k = 1, 2$.

Тогда систему функционалов $T_k^{\pm}$, $k = \overline{0, \varkappa}$ в пространстве X определим следующим образом:

$$(T_k^{\pm}, \Phi^{\pm}) = 0, \ (T_k^{\pm}, \Phi^{\pm}) = \sum_{s=0}^{k} \alpha_s^{\pm} (\beta_s^{\pm} + c_s). \tag{42}$$

Ясно, что в силу разложений (38)—(41) существует такое решение $\Phi_*(t) = \{\tilde{\Phi}_*^{+}(t), \tilde{\Phi}_*^{-}(t)\}$ задачи (22), что $(T_k^{\pm}, \Phi_*^{\pm}) = (T_k^{\pm}, \tilde{\Phi}_*^{\pm})$, $(T_k^{\pm}, \Phi_*^{\mp}) = (T_k^{\pm}, \tilde{\Phi}_*^{\mp}) = 0$, $k = \overline{1, \varkappa}$. Для этого необходимо положить $P_\varkappa(t) = \sum\limits_{k=0}^{\varkappa} c_k^* t^{\varkappa-k}$. Тогда на линейно независимых решениях (37) однородной задачи (22) функционалы $T_k^{\pm}$ принимают следующие значения:

$$(T_k^{\pm}, \tilde{\Phi}_j^{\mp}) = 0; \ (T_k^{\pm}, \tilde{\Phi}_j^{\pm}) = \alpha_{j-k}, \ j \leqslant k; \ (T_k^{\pm}, \tilde{\Phi}_j^{\pm}) = 0, \ j > k. \tag{43}$$

Ясно, что определитель $|(T_k^{\pm}, \tilde{\Phi}_j^{\pm})| = 1$.

V. В качестве пространства X_0 возьмем пространство вектор-функций $\varphi(t) = \{\varphi^+(t); \varphi^-(t)\}$, $\varphi^{\pm}(t) \in C$, $\lim\limits_{t\to\infty} t^{\varkappa+1}\varphi^{\pm}(t) = 0$. При этом $\|\varphi(t)\|_{X_0} = \|\varphi^+(t)\|_C + \|\varphi^-(t)\|_C$. Тогда для любого $\psi(t) \in Y_0$ задача (22) в пространстве X_0 имеет единственное решение

$$\varphi(t) = \left\{\tilde{\chi}^+(t)\,\Omega^+(t);\ \left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa} \tilde{\chi}^-(t)\,\Omega^-(t)\right\}, \tag{44}$$

где

$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = \frac{\psi(t)}{\tilde{\chi}^+(t)}. \tag{45}$$

Очевидно, что в силу определения функции $\tilde{G}(t)$ для любого $\varphi(t) \in X_0$ $(K - \tilde{K})\varphi \equiv [G(t) - \tilde{G}(t)]\,\varphi^-(t) \in Y_0$. При этом $(T_k^{\pm}, \varphi^{\pm}) = (T_k^{\pm}, \varphi^{\mp}) = 0$, $k = \overline{0, \varkappa}$.

VI. Так как

$$\|(K - \tilde{K})\varphi\|_{Y_0} \leqslant \|G(t) - \tilde{G}(t)\|_C \, \|\varphi^-(t)\|_C,$$

то на основании оценки (28) и леммы 2 справедлива оценка

$$\| K - \tilde{K} \| \leqslant d_4 \sigma_n^{-\alpha}. \tag{46}$$

Поскольку

$$\| \tilde{K}^{-1} \psi \|_{X_0} = \| \tilde{\chi}^+ (t) \, \Omega^+ (t) \|_C + \left\| \left(\frac{t+i}{t-i} \right)^{\varkappa} \tilde{\chi}^- (t) \, \Omega^- (t) \right\|_C \leqslant$$
$$\leqslant \max_{+,-} \| \tilde{\chi}^{\pm} (t) \|_C \, [\| \Omega^+ (t) \|_C + \| \Omega^- (t) \|_C],$$

то в силу (45) и совпадения пространства X_0 с пространством W, изученным в [16], в котором норма оператора Коши равна единице, получим оценку

$$\| \tilde{K}^{-1} \| \leqslant \left\| \frac{1}{\tilde{\chi}^+ (t)} \right\|_C \max_{+,-} \| \chi^{\pm} (t) \|_C. \tag{47}$$

VIII. Потребуем теперь, чтобы произведение правых частей неравенств (46) и (47) было бы меньше единицы. Это достигается при достаточно больших n, так как $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \infty$.

Отметим, что при $\varkappa = -1$ $X_0 = X$, $Y_0 = Y$, и для обоснования МПФ в C в этом случае достаточно проведения оценок (46) и (47) и выполнения неравенства $\| K - \tilde{K} \| \| \tilde{K}^{-1} \| < 1$. Таким образом доказана

Теорема 5. Пусть $G(t)$, $g(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $G(t) \neq 0$, $\varkappa \geqslant -1$ и справедливы разложения (23), (24), а $\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, — такая система точек, что $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \infty$. Тогда приближенные решения задачи (1) строятся по формулам (34)—(36) и имеет место следующая оценка скорости сходимости приближенных решений задачи (1) к ее некоторому фиксированному решению

$$\| \Phi_*^{\pm} (t) - \tilde{\Phi}_*^{\pm} (t) \|_C \leqslant d_5 \sigma_n^{-\alpha}. \tag{48}$$

Заметим, что если $\zeta_k = i$, $k = \overline{1, n}$, то в условиях теоремы 5 имеет место следующая оценка

$$\| \Phi_*^{\pm} (t) - \tilde{\Phi}_*^{\pm} (t) \|_C \leqslant d_6 n^{-\alpha}. \tag{49}$$

Если же $G(t)$, $g(t) \in H_1$, то оценки (47) и (48) примут соответственно вид

$$\| \Phi_*^{\pm} (t) - \tilde{\Phi}_*^{\pm} (t) \|_C \leqslant d_7 \sigma_n^{-1} \ln \sigma_n,$$
$$\| \Phi_*^{\pm} (t) - \tilde{\Phi}_*^{\pm} (t) \|_C \leqslant d_8 n^{-1} \ln n.$$

5°. МПФ в $L_{2\rho}$. Пусть $g(t) \in L_{2\rho}$, $\varkappa \geqslant -1$ и справедливы представления (23), (24).

1. Положим $Y = L_{2\rho}$, а в качестве пространства X возьмем пространство вектор-функций $\Phi(t) = \{\Phi^+(t), \Phi^-(t)\}$, $\Phi^{\pm}(t) \in L_{2\rho}$. Тогда, согласно [7, 9], задача (1) разрешима при всех $g(t) \in Y$ и ее решения, определяя формулами (30)—(32), принадлежат пространству X. Зафиксировав коэффициенты многочлена $P_\varkappa(t)$, получим фиксированное решение $\Phi_*^{\pm}(t)$ задачи (1).

II. В качестве пространства Y_0 возьмем пространство функций $\psi(t) \in Y$ и таких, что

$$(t^2+1)^{\frac{\varkappa+1}{2}}\psi(t)\in L_{2\rho},\ \|\psi(t)\|_{Y_0}=\|\psi(t)\|_{L_{2\rho}}.$$

Пусть $g(t)\in Y$. Тогда функцию $\tilde{g}(t)$ ищем в виде (25) или (26). При этом $\varkappa+1$ коэффициент многочлена $P_{2n-2}(g,t)$ определяем из условия совпадения главных частей разложений функций $g(t)$ и $\tilde{g}(t)$ на бесконечности, а остальные коэффициенты многочлена $P_{2n-2}(g,t)$ определяем из условия достижения

$$\min_{P_{2n-2}}\|g(t)-\tilde{g}(t)\|_{L_{2\rho}}.$$

Согласно [22] многочлен $P_{2n-2}(g,t)$ существует и единственен. Функцию $\tilde{G}(t)$ определяем в соответствии с (25)—(28). Тогда задача (22) разрешима и ее решение имеет вид (34)—(36).

III. Пусть $\Phi(t)$ — произвольное решение задачи (1). Тогда

$$(K-\tilde{K})\Phi\equiv[G(t)-\tilde{G}(t)]\Phi^-(t)\in Y_0$$

в силу совпадения на бесконечности главных частей разложений функций $G(t)$ и $\tilde{G}(t)$.

IV. Однородная задача (22) при $\varkappa\geqslant 0$ имеет $\varkappa+1$ линейно независимое решение (37). Если же $\varkappa=-1$, то она имеет лишь тривиальное решение. В соответствии с (38)—(41) систему линейных функционалов $T_k^{\pm}$ определим соотношениями (42), где c_k имеют смысл п. 4°. Тогда существует такое фиксированное решение $\tilde{\Phi}_*(t)$ задачи (22), что $(T_k^{\pm},\Phi_*^{\pm})=(T_k^{\pm},\tilde{\Phi}_*^{\pm})$, $(T_k^{\pm},\Phi_*^{\mp})=(T_k^{\pm},\tilde{\Phi}_*^{\mp})=0$. На решениях (37) однородной задачи (22) система линейных функционалов $T_k^{\pm}$, $k=\overline{0,\varkappa}$, примет значения (43). Тогда определитель $|(T_k^{\pm},\tilde{\Phi}_j^{\pm})|=1$.

V. В качестве пространства возьмем пространство вектор-функций

$$\varphi(t)=\{\varphi^+(t),\ \varphi^-(t)\},\ \varphi^{\pm}(t)\in L_{2\rho},\ \lim_{t\to\infty}(t^2+1)^{\frac{\varkappa+1}{2}}\varphi^{\pm}(t)=0.$$

При этом $\|\varphi(t)\|_{X_0}=\|\varphi^+(t)\|_{L_{2\rho}}+\|\varphi^-(t)\|_{L_{2\rho}}$. Тогда для любого $\psi(t)\in Y_0$ задача (22) разрешима, ее решение принадлежит пространству X_0 и имеет вид (43). Ясно, что в силу определения функции $\tilde{G}(t)$ для любого $\varphi(t)\in X_0$ $(K-\tilde{K})\varphi\equiv[G(t)-\tilde{G}(t)]\varphi^-(t)\in Y_0$ и $(T_k^{\pm},\varphi^{\pm})=(T_k^{\pm},\varphi^{\mp})=0$.

VI. Так как

$$\|(K-\tilde{K})\varphi\|_{L_{2\rho}}^2\leqslant\int_R|G(t)-\tilde{G}(t)|^2|\varphi^-(t)|^2\frac{dt}{1+t^2}\leqslant d_9\sigma_n^{-2\alpha}\|\varphi(t)\|_{X_0},$$

то норма оператора $K-\tilde{K}$ оценивается неравенством (45).

VII. Легко видеть, что

$$\|\tilde{K}^{-1}\|\leqslant\left\|\frac{1}{\tilde{\chi}^+(t)}\right\|_C[\|\tilde{\chi}^+(t)\|_C+\|\tilde{\chi}^-(t)\|_C]. \tag{50}$$

VIII. Потребуем, чтобы произведение правых частей неравенств (50) и (46) было бы меньше единицы. Это можно сделать при достаточно больших n, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \infty$.

Теорема 6. Пусть $G(t) \in H_\alpha$, $0<\alpha<1$, $G(t)\neq 0$, $\varkappa \geqslant -1$, $g(t)\in L_{2\rho}$ и справедливы разложения (23), (24), а $\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, — такая система точек, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \infty$. Тогда приближенные решения задачи (1) строятся по формулам (34)—(36) и имеет место следующая оценка погрешности приближенных решений задачи (1):

$$\| \Phi_*^{\pm}(t) - \tilde{\Phi}_*^{\pm}(t) \|_{L_{2\rho}} \leqslant \delta\,[d_{10}\sigma_n^{-\alpha} + \| g(t) - \tilde{g}(t) \|_{L_{2\rho}}], \tag{51}$$

где δ определяется по формуле (19) с учетом (46) и (50).

Отметим, что если $g(t)\in H_\alpha$, $0<\alpha<1$, то оценка (51) примет вид

$$\| \Phi_*^{\pm}(t) - \tilde{\Phi}_*^{\pm}(t) \|_{L_{2\rho}} \leqslant \alpha_{11}\sigma_n^{-\alpha}. \tag{52}$$

Если же $\zeta_k = i$, $k = \overline{1, n}$, то оценка (52) будет следующей:

$$\| \Phi_*^{\pm}(t) - \tilde{\Phi}_*^{\pm}(t) \|_{L_{2\rho}} \leqslant d_{12} n^{-\alpha}.$$

Если же $G(t)$, $g(t) \in H_1$, то оценки (52) и (53) примут соответственно вид

$$\| \Phi_*^{\pm}(t) - \tilde{\Phi}_*^{\pm}(t) \|_{L_{2\rho}} \leqslant d_{13}\sigma_n^{-1}\ln\sigma_n,$$

$$\| \Phi_*^{\pm}(t) - \tilde{\Phi}_*^{\pm}(t) \|_{L_{2\rho}} \leqslant d_{14} n^{-1}\ln n.$$

6°. МПФ в L_2. Пусть $g(t)\in L_2$, $\varkappa \geqslant 0$ и справедливы представления (23), (24), причем $b_0 = 0$ и $\nu \geqslant \varkappa$. Чтобы обосновать МПФ, в этом случае пространства X, Y, X_0, Y_0 определим следующим образом:

$$X = \{\Phi(t) : \Phi(t) = \{\Phi^+(t),\ \Phi^-(t)\},\ \Phi^{\pm}(t)\in L_2\},\ \ Y = L_2,$$

$$Y_0 = \{\psi(t) : \psi(t)\in L_2,\ (t^2+1)^{\frac{\varkappa}{2}}\psi(t)\in L_2\},\ \ \|\psi(t)\|_{Y_0} = \|\psi(t)\|_{L_2},$$

$$X_0 = \{\varphi(t) : \varphi(t) = \{\varphi^+(t),\ \varphi^-(t)\},\ \varphi^{\pm}(t)\in L_2,\ (t^2+1)^{\frac{\varkappa}{2}}\varphi^{\pm}(t)\in L_2\},$$
$$\|\varphi(t)\|_{X_0} = \|\varphi^+(t)\|_{L_2} + \|\varphi^-(t)\|_{L_2}.$$

В этом случае функция $\tilde{G}(t)$ определяется в соответствии с (25)—(27), а функция $\tilde{g}(t)$ ищется в виде (25), где многочлен $P_{2n-2}(g, t)$ имеет степень $2n-3$ и $\varkappa$ его коэффициентов определяются из условия совпадения главных частей разложений на бесконечности функций $g(t)$ и $\tilde{g}(t)$, а остальные его коэффициенты определяются из условия достижения

$$\min_{P_{2n-3}} \| g(t) - \tilde{g}(t) \|_{L_2}.$$

Тогда задачи (1) и (22) разрешимы и их решения имеют соответственно вид (30)—(32) и (34—36), где многочлены $P_\alpha(t)$ и $\tilde{P}_\varkappa(t)$ необходимо заменить на многочлены $P_{\varkappa-1}(t)$, $\tilde{P}_{\varkappa-1}(t)$, если $\varkappa > 0$. Если же $\varkappa = 0$, то $P_{\varkappa-1}(t) = \tilde{P}_{\varkappa-1}(\tilde{t}) \equiv 0$. Однородная задача (22) имеет при

$\varkappa > 0$ $\varkappa$ линейно независимое решение (37), где t^j необходимо заменить на t^{j-1}, а $j=\overline{1, \varkappa}$. В силу предположений относительно функций $G(t)$, $g(t)$ и способа определения функций $\tilde{G}(t)$, $\tilde{g}(t)$ имеют представления (38)—(41), в которых $\beta_0^{\pm}=0$, $\nu \geqslant \varkappa$. Линейные функционалы $T_k^{\pm}$, $k=\overline{1, \varkappa}$, определяются соотношениями

$$(T_k^{\pm}, \Phi^{\pm}) = \sum_{s=1}^{k} \alpha_{s-1}^{\pm} (\beta_s^{\pm} + c_s), \ (T_k^{\pm}, \Phi^{\mp}) = 0, \quad k = \overline{1, \varkappa}.$$

При данном определении функционалов $T_k^{\pm}$ определитель $|(T_k^{\pm}, \tilde{\Phi}_j^{\pm})|=1$. Операторы $K-\tilde{K}$ и $\tilde{K}^{-1}$ ограничиваются соответственно правыми частями неравенств (46) и (50).

Теорема 7. Пусть $G(t) \in H_\alpha$, $0<\alpha<1$, $G(t) \neq 0$, $\varkappa \geqslant 0$, $g(t) \in L_2$ и справедливы представления (23), (24) с $b_0 = 0$; а система точек $\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, такова, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$. Тогда приближенные решения задачи (1) строятся по формулам (34)—(36) с $\tilde{P}_{\varkappa-1}(t)$ и имеет место следующая оценка скорости сходимости приближенных решений задачи (1) к ее некоторому фиксированному решению:

$$\| \Phi_*^{\pm}(t) - \tilde{\Phi}_*^{\pm}(t) \|_{L_2} \leqslant \delta [d_{15} \sigma_n^{-\alpha} + \| g(t) - \tilde{g}(t) \|_{L_2}]. \tag{53}$$

Заметим, что если $g(t) \in H_\alpha \cap L_2$, $0<\alpha<1$, то оценка (53) имеет вид

$$\| \Phi_*^{\pm}(t) - \tilde{\Phi}_*^{\pm}(t) \|_{L_2} \leqslant d_{16} \sigma_n^{-\alpha}. \tag{54}$$

Если же $\zeta_k = i$, $k=\overline{1, n}$, то оценка (54) будет следующей:

$$\| \Phi_*^{\pm}(t) - \tilde{\Phi}_*^{\pm}(t) \|_{L_2} \leqslant d_{17} n^{-\alpha}. \tag{55}$$

Если же $G(t) \in H_1$, $g(t) \in H_1 \cap L_2$, то оценки (54) и (55) примут соответственно вид

$$\| \Phi_*^{\pm}(t) - \tilde{\Phi}_*^{\pm}(t) \|_{L_2} \leqslant d_{18} \sigma_n^{-1} \ln \sigma_n,$$

$$\| \Phi_*^{\pm}(t) - \tilde{\Phi}_*^{\pm}(t) \|_{L_2} \leqslant d_{19} n^{-1} \ln n.$$

7°. Известно [7], что если функции $k_1(t)$, $k_2(t) \in L_1$ и такие, что их интегралы Фурье $K_1(t)$, $K_2(t) \in H_\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, причем $1+K_j(t) \neq 0$, $j=1, 2$, а функции $\varphi(t)$, $h(t) \in L_2$, то уравнение

$$\varphi(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k_1(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 k_2(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau = h(t), \ t \in R \tag{56}$$

эквивалентно задаче Римана

$$\Phi^+(t) - \frac{1+K_2(t)}{1+K_1(t)} \Phi^-(t) = \frac{H(t)}{1+K_1(t)}, \ t \in R, \tag{57}$$

где $H(t)$, $\Phi^{\pm}(t)$ — преобразование Фурье соответственно функций $h(t)$, $\varphi_{\pm}(t)$, а $\varphi(t) = \varphi_+(t) - \varphi_-(t)$, где

$$\varphi_+(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \geqslant 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \varphi_-(t) = \begin{cases} 0, & t \geqslant 0; \\ -\varphi(t), & t < 0. \end{cases}$$

Задача (57) играет роль задачи (1). Тогда приближенные решения задачи (57) строим посредством точного решения задачи (22), а приближенные решения уравнения (56) определяем по формуле

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R [\tilde{\Phi}^+(\tau) - \tilde{\Phi}^-(\tau)] e^{i\tau t}\, d\tau.$$

При этом в силу равенства Парсеваля и теоремы 7 получим следующую оценку скорости сходимости приближенных решений уравнения (56) к его некоторому зафиксированному решению

$$\| \varphi_*(t) - \tilde{\varphi}_*(t) \|_{L_2} \leqslant d_{20} [\sigma_n^{-\alpha} + \| h(t) - \tilde{h}(t) \|_{L_2}].$$

Заметим, что по этой же схеме строятся приближенные решения уравнения Винера — Хопфа и «парного» уравнения [7].

Список литературы: 1. *Бабенко В. А.* Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики // П ПММ. 1976 Т. 31, вып. 1. С. 80—89. 2. *Нобл Б.* Метод Винера — Хопфа М.: ИИЛ, 1962. 344 с. 3. *Попов Г. Я.* Контактные задачи для линейно деформируемого основания. Киев — Одесса: Вища школа, 1982. 168 с. 4. *Попов Г. Я.* К решению задач теории упругости методом факторизации // ПММ. 1974. Т. 38, вып. 1. С. 178—183. 5 *Попов Г. Я., Паскаленко А. А.* Плоская задача об изгибе бесконечной балки на линейно деформируемом основании // ПММ. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 178—183. 6. *Черский Ю. И.* Задачи математической физики, сводящиеся к задаче Римана // Тр. матем. ин-та АН грузССР. 1961. Т. 28. С. 209—246. 7. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения пита свертки. М.: Наука, 1978. 296 с. 8. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13, вып. 5. С. 3—120. 9. *Гахов Ф. Д* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с. 10 *Пыхтеев Г. Н.* Точные методы вычисления интегралов типа Коши. Новосибирск: Наука, 1980. 121 с. 11. *Черский Ю. И.* Две теоремы об оценке погрешности и некоторые их приложения // ДАН СССР. 1963. Т. 150, № 2. С. 271—274. 12. *Черский Ю. И.* К решению смешанных задач для уравнений в частных производных // Диф. уравн. 1965. Т. 1, № 5. С. 647—662. 13. *Черский Ю. И.* Приближенное решение уравнения Винера — Хопфа в одном исключительном случае // Диф. уравн. 1966. Т. 2, № 8. С. 1093—1100. 14. *Тихоненко Н. Я.* К приближенному решению исключительного случая задачи Римана теории аналитических функций // Теория функций, функ. анализ и их прилож. 1970. Вып. 10 С. 27—35. 15. *Тихоненко Н. Я.* О методе приближенной факторизации // Изв. вузов. Матем. 1976. № 4. С. 74—86. 16. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев: Наукова думка, 1968. 288 с. 17. *Касьянов В. И.* Рациональная аппроксимация интегралов типа Коши и приближенное решение задачи Римана для полуплоскости // Изв. вузов. Матем. 1981. № 11. С. 50—55. 18. *Виноградова Г. Ю.* Сингулярные интегральные операторы на оси с дробно-линейным сдвигом в пространствах с весом // Изв. вузов. Матем. 1979. № 3. С. 67—72. 19. *Русак В. Н.* Рациональные функции, как аппарат приближения. Минск: Изд-во БГУ, 1979. 174 с. 20. *Русак В. Н.* Об одном методе приближения рациональными функциями на вещественной оси // Мат. замет. 1977. Т. 22, № 3. С. 375—380. 21. *Светной А. П., Тихоненко Н. Я.* К приближенному решению краевой задачи Римана с разрывными коэффициентами и правой частью // ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22, № 2. С. 128—136. 22. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 252 с. 23. *Koiter W. T.* Approximate solution of Wiener — Hopf type integrale equations wite applicatious, parts I, II // Konike. Ned. Akad. Weteushap. Proc. 1954. B 57. P. 552—579.