УДК 517.948

В. А. ЗОЛОТАРЕВ

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ОДНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

Данная работа является продолжением исследований автора, начатых в [1], и посвящена изучению простейшей алгебры Ли линейных операторов $\{A_1, A_2\}$ в гильбертовом пространстве H, удовлетворяющей коммутационному соотношению $[A_2, A_1] = iA_1$. Эту алгебру $\{A_1, A_2\}$ удобно изучать на группе Ли аффинных преобразований прямой [3], алгебра Ли векторных полей которой удовлетворяет тому же коммутационному соотношению. Ограничимся такими операторами A_1, A_2, для которых выполняются предположения:

а) A_1 — диссипативный плотно заданный оператор с одинаковыми дефектными пространствами $E = E_\pm$, $(\dim E = r < \infty)$;

б) A_2 ограничен и $(A_2)_I H \subseteq E$, $(A_I = (A - A^*)/2i)$.

Основной результат работы состоит в том, что алгебра Ли $\{A_1, A_2\}$ реализуется в некотором пространстве мероморфных функций на соответствующей римановой поверхности $\boldsymbol{Q}$, при этом один из операторов будет действовать как оператор умножения на мероморфную функцию $f(P) \to \lambda(P) f(P)$, $P \in \boldsymbol{Q}$, а второй — будет представлять собой оператор «сдвига» $f(P) \to f(\alpha(P))$, где α — автоморфизм римановой поверхности $\boldsymbol{Q}$, $(\alpha^2 = 1,\ P \in \boldsymbol{Q})$.

1. Под функциональной моделью оператора A обычно понимают такую реализацию гильбертова пространства H, в которой оператор A действует как оператор умножения на независимую переменную. Функциональной моделью алгебры Ли $\{A_1, A_2\}$ будем называть такую реализацию пространства H, в которой хотя бы один из операторов системы $\{A_1, A_2\}$ действует посредством умножения на независимую переменную.

Из результатов работы [1] следует, что функциональная модель изучаемой алгебры Ли $\{A_1, A_n\}$, $(A_n = A_2 + nA_1,\ n \in \boldsymbol{R})$ имеет вид

$$\tilde{A}\begin{bmatrix} g_- \\ g_+ \end{bmatrix}(z) = P_{\mathscr{P}_n}\, iz \begin{bmatrix} g_- \\ g_+ \end{bmatrix}(z);$$

$$\tilde{A}_1\begin{bmatrix} g_- \\ g_+ \end{bmatrix}(z) = P_{\mathscr{P}_n} S\sigma_n^{-1}\begin{bmatrix} iz - \gamma_- & 0 \\ 0 & iz - \gamma_+ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_- \\ g_+ \end{bmatrix}(z), \qquad (1)$$

где $\sigma_n = \sigma_2 + nI_E$; S — сдвиг $Sg\pm(z) = g\pm(z-1)$; $P_{\mathscr{P}_n}$ — проектор на гильбертово пространство $\mathscr{P}_n$, в котором действуют операторы $\tilde{A}_n$, $\tilde{A}_1$;

$$\mathscr{P}_n = \left\{ \begin{bmatrix} g_- \\ g_+ \end{bmatrix} \in L^2_\Pi \begin{pmatrix} \sigma_n & S_n^*(z) \\ S_n(z) & \sigma_n \end{pmatrix};\ \begin{matrix} g_- + \sigma_n^{-1} S_n^*(z) g_+ \in H^2_+(E,\ \sigma_n d\beta) \\ \sigma_n^{-1} S(z) g_- + g_+ \in H^2_-(E,\ \sigma_n d\beta) \end{matrix} \right\}.$$

Через $L^2_\Pi(E, \sigma_n d\beta)$ обозначено пространство Харди E-значных, квадратично интегрируемых по мере $\sigma_n d\beta$ функций, отвечающих полосе $\prod = \{z = \alpha + i\beta,\ -1 < \alpha < 0\}$, а $H^2_\pm(E, \sigma_n d\beta)$ представляют собой также пространства Харди функций из $L^2_\Pi(E, \sigma_n d\beta)$, которые голоморфно продолжаемы в полуплоскости $\pm Re z > 0$. Символом $L^2_\Pi\begin{pmatrix} \sigma_n & S_n^*(z) \\ S_n(z) & \sigma_n \end{pmatrix}$ обозначено пространство $\begin{bmatrix} g_-(z) \\ g_+(z) \end{bmatrix}$ квадратично интегрируемых по мере $\begin{pmatrix} \sigma_n & S_n^*(z) \\ S_n(z) & \sigma_n \end{pmatrix} d\beta$ функций таких, что $g\pm(z) \in L^2_\Pi(E,\ \sigma_n d\beta)$. Наконец, $S_n(z)$ — характеристическая функция [1] оператора A_n; $S_n(z) = I -$

$-i\varphi\cdot(A_n - izI)^{-1}\varphi^*\sigma_n$ — действующая в пространстве E, где линейный оператор $\varphi: H \to E$ таков, что $2\mathrm{Im}\langle A_n h, h\rangle = \langle\sigma_n\varphi h, \varphi h\rangle$, $\forall h \in H$.

Операторы σ_2, $\gamma_\pm$ действуют в деффектном пространстве E, причем σ_2 — самосопряжен, а $2(\gamma_\pm)_I = I_E$.

2. Модельный оператор $A_1(I)$ на каждую из компонент $g_\pm$ действует по правилу $S\sigma_n^{-1}(iz - \gamma_\pm)g_\pm$. Приведем линейный операторный пучок $\sigma_n^{-1}(iz - \gamma_\pm)$ к диагональному виду; это впоследствии позволит реализовать $g_\pm(z)$ в некотором классе мероморфных функций на римановой поверхности.

Из самосопряженности (в σ_n-метрике) линейного операторного пучка $\sigma_n^{-1}(iz - \gamma_\pm) = \sigma_n^{-1}(\zeta - (\gamma_\pm)_R)$ при $\zeta = i\left(z + \frac{1}{2}\right) \in \boldsymbol{R}$ (где $(\gamma_\pm)_R = = \gamma_\pm - i\,0{,}5I$) следует, что существуют собственные вектор-функции $u_\pm(\zeta, w)$ в E такие, что

$$(iz - \gamma_\pm - w\sigma_n)u_\pm + (\zeta, w) = 0, \ \zeta = i(z + 1/2) \in \boldsymbol{R}.$$

Функция $u_\pm(\zeta, w) \not\equiv 0$, если только $(\zeta, w) \in \boldsymbol{Q}_\pm$, где алгебраическая кривая

$$\boldsymbol{Q}_\pm = \{(\zeta, w) \in \boldsymbol{C}^2;\ \boldsymbol{Q}_\pm(\zeta, w) = 0\} \tag{2}$$

задается многочленом $\boldsymbol{Q}_\pm(\zeta, w) = \det[\zeta - (\gamma_\pm)_R - w\sigma_n]$.

Мы ограничимся здесь не особыми [1] комплексными кривыми $\boldsymbol{Q}_\pm$ (2), т. е. такими, у которых комплексный вектор градиента $\mathrm{grad}\, Q_\pm \neq 0$ при всех $(\zeta, w) \in \boldsymbol{Q}_\pm$. Это означает, что полином $\boldsymbol{Q}_\pm(\zeta, w)$ неприводим, т. е. корни $\{w_\pm^s(\zeta)\}_1^r$ различны (исключая точки ветвления), более того $w_\pm^s(\zeta)$ — суть ветви r-значной алгебраической функции [1].

Рассмотрим одномерные (многочлен $\boldsymbol{Q}\pm(\zeta, w)$ не приводим) E-расслоения над $\boldsymbol{Q}_\pm$:

$$h\pm(P) \in \mathrm{Ker}(\sigma_1\zeta - (\gamma_\pm)_R - \omega\sigma_n),$$

где $P = (\zeta, w) \in Q_\pm$; т. е. $h^\pm(P)$ — собственные вектора линейных пучков

$$\sigma_n^{-1}(\sigma_1\zeta - (\gamma_\pm)_R)h^\pm(P) = w_\pm h^\pm(P), \tag{3}$$

которые будем нормировать условием $h_r^\pm = 1$, ($h_r^\pm$ — r-я компонента вектора $h^\pm(P)$). Очевидно, что $h^\pm(P)$ является рациональной вектор-функцией над $\boldsymbol{Q}_\pm$ (2). Как и в коммутативном случае [1], нетрудно установить, что число полюсов $h^\pm(P)$ с учетом их кратности равно $N = g + r - 1$ (здесь g — род римановой поверхности $Q_\pm$).

Выделим на римановой поверхности $Q_\pm$ (2) правильные аналоги вещественной оси $\mathrm{Im}\,\zeta = 0$, полуплоскостей $\pm\mathrm{Im}\,\zeta > 0$ и полосы $\Pi = \{\zeta \in \boldsymbol{C};\ |\mathrm{Im}\,\zeta| < 0{,}5\}$. Определим

$$\begin{gathered}\boldsymbol{C}\pm(\boldsymbol{Q}_\pm) = \{P = (\zeta, \omega_\pm) \in \boldsymbol{Q}_\pm;\ \pm\mathrm{Im}\,\zeta(P) > 0\};\\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{Q}_\pm) = \partial\boldsymbol{C}_\pm(\boldsymbol{Q}_\pm);\\ \prod(Q_\pm) = \{P \in \boldsymbol{Q}_\pm;\ |\mathrm{Im}\,\zeta(P)| < 1/2\}.\end{gathered} \tag{4}$$

По причинам, которые станут понятны ниже, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{Q}_\pm)$ будем называть разрезами римановой поверхности $Q_\pm$. Особенности $h^\pm(P)$ (3) лежат на $R(Q_\pm)$ в силу σ_n — самосопряженности пучков $\sigma_n^{-1}(\sigma_1\zeta-\gamma_\pm)_R)$ при $\zeta \in R$.

Каждую из функций $f(z) \in H^2(E, \Pi, \sigma_n d\beta)$ разложим по ортогональному базису собственных векторов $h^+(P_k)$ (3) ($P_k = (\zeta, w^k(\zeta)) \in R(Q_+)$, $\zeta = i(z+0{,}5)$), $f(z) = \sum h^+(P_k)\|\sqrt{\sigma_n}\,h^+(P_k)\|_E^{-2}\cdot g(P_k)$. При этом скалярные функции $g(P_k)$ имеют вид $g(P_k) = \langle\sigma_n f(z),\ h^+(P_k)\rangle$ (здесь $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_E$, как и $\|\cdot\|_E$, в смысле евклидового пространства E).

Определим теперь гильбертово пространство $H_2(h^+, \Pi, \sigma_n dx)$, образованное вектор-функциями $f(P) = h^+(P)\|\sqrt{\sigma_n}\,h^+(P)\|_E^{-2}$, $g(P)$, для которых

$$\sup_{P\in\Pi(Q_+)} \int\limits_{\operatorname{Im}\zeta(P)=\mathrm{const}} \|\sqrt{\sigma_n}\,f(P)\|_E^2\,dx < \infty,\ (x = Re\zeta(P)),$$

где $h^+(P)$ — собственная вектор-функция (3) пучка $\sigma_n^{-1}(\sigma_1\zeta-(\gamma_\pm)_R)$; $g(P)$ — скалярная, голоморфная в $\Pi(Q_+)$ функция, имеющая такие же особенности (с учетом их кратности, что и $h^+(P)$, причем

$$\sup_{l_t\in\Pi(Q_+)} \int |g(P)|^2 \frac{dx}{\|\sqrt{\sigma_n}h^+(P)\|_E^2} < \infty;\ (x = Re\zeta(P)). \tag{5}$$

Здесь l_t — семейство линий в $\Pi(Q_+)$, которые задаются условием $\operatorname{Im}\zeta(P) = t$, $(|t| < 0{,}5)$; при этом, когда $t \to 0$, кривые l_t стягиваются к разрезам $R(Q_+)$.

Через $H_\pm^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx)$ обозначим пространства Харди, образованные функциями из $H^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx)$, скалярные компоненты которых $g(P)$ голоморфно продолжаемы в области $C_+(Q_+)$. Очевидно, что $H^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx) = H_+^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx) \oplus H^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx)$. Аналогичным образом вводятся $H^2(h^-, \Pi, \sigma_n dx)$ и $H_\pm^2(h^-, \Pi, \sigma_n dx)$. Так как базис $h^+(P)$ фиксирован, каждая из функций $f(P) \in H^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx)$ задается своей скалярной компонентой $g(P)$. Поэтому в дальнейшем будем отождествлять $f(P)$ с $g(P)$.

3. Из уравнения для характеристической функции $S_n(z)$ следует, что

$$\langle\sigma_n[i\partial_n S_n(z)]\,h^-(P),\quad h^+(\hat P)\rangle = [\omega_-(P) + \omega_+(\hat P)]\,\langle\sigma_n S_n(z)\,h^-(P),\quad h^+(\hat P)\rangle.$$

Здесь $(\zeta,\ \omega_-) = P \in Q_-$; $(\zeta,\ \omega_+) = \hat P \in Q_+$; $\zeta = i(z+0{,}5)$. Определим

$$N_+(P)\,h^\pm(P) = \exp\left\{-i\int\limits_{n_0}^{n} \omega_\pm(P)\,dn'\right\} h^\pm(P),\ P \in Q_\pm,$$

тогда

$$\langle\sigma_n S_n(z)\,h^-(P),\ h^+(\hat P)\rangle = N_-(P)\,N_+(\hat P)\,\theta(P,\ \hat P),$$

где ядро $\theta(P,\ \hat P) = \langle\sigma_n S_{n_0}(z)\,h^-(P),\ h^+(\hat P)\rangle$ и может быть вычислено. После этого $S_n(z)$ на функцию $f(P) = h^-(P)\cdot\|\sqrt{\sigma_n}\,h^-(P)\|_E^{-2}\,g(P) \in H^2(h^-, \Pi, \sigma_n dx)$ действует следующим образом:

$$S_n(z)\,f(P) = \frac{h^+(\hat P)}{\|\sqrt{\sigma_n}\,h^+(P)\|_E^{+2}} \sum_{\zeta(P)=\zeta(P)} \frac{g-(P)}{\|\sqrt{\sigma_n}\,h^-(P)\|_E^2}\,N_+(\hat P)\,N_-(P)\,\theta(P,\ P).$$

Таким образом, характеристическая функция $S_\cdot(z)$, записанная в терминах скалярных функций $g_-(P) \to g_+(P)$, имеет вид

$$(\theta g_-)(\hat{P}) = \sum_{\substack{\zeta(P)=\zeta(\hat{P}) \\ P \in Q_-}} g_-(P) \cdot \| \sqrt{\sigma_n} h^-(P) \|_E^{-2} N_-(P) N_+(\hat{P}) \theta(P, \hat{P}), \quad (6)$$

где $P = (\zeta, w_-) \in Q_-$; $\hat{P} = (\zeta, w_+) \in Q_+$.

Обратимся к оператору $\tilde{A}_1$ (1). Сдвигу $z \to z - 1$ в терминах $\zeta = i(z + 1/2)$ отвечает $\zeta \to \bar{\zeta}$, где $\zeta, \bar{\zeta} \in \bar{\Pi}$. Оператор $S\sigma_n^{-1}(iz + \gamma_+)$ на функцию $f(z) = \sum h^+(P_k) \cdot \| \sqrt{\sigma_n} h^+(P_k) \|_E^{-2} \cdot g(P_k) \in H^2(E, \Pi, \sigma_n d\beta)$ действует следующим образом:

$$S\sigma_n^{-1}(iz + \gamma_+) f(z) = \sum_k \frac{h^+(\bar{P}_k)}{\| \sqrt{\sigma_n} h^+(P_k) \|_E^2} w_+(\bar{P}_k) g(\bar{P}_k),$$

где $P_k = (\zeta, \omega_+^k(\zeta)) \in \boldsymbol{Q}_+$, $\bar{P}_k = (\bar{\zeta}, w_+^k(\bar{\zeta})) \in \boldsymbol{Q}_+$, причем $P_k, \bar{P}_k \in \Pi(\boldsymbol{Q}_\pm)$. Легко показать, что $h^+(\bar{P}^k) = C_k h^+(P_k)$. Действительно, из

$$[\omega_+(P_k) - w_+(P_l)] \langle \sigma_n h^+(P_k), h^+(\bar{P}_l) \rangle =$$

$$= \langle ((\zeta - \gamma_+)_R) h^+(P_k), h^+(\bar{P}_l) \rangle - \langle h^+(P_k), (\bar{\zeta} - \gamma_+)_R) h(\bar{P}_l) \rangle = 0$$

следует ортогональность $h^+(P_k)$ и $h^+(\bar{P}_l)$ при $k \neq l$, так как корни $w_+(P_k)$ неприводимого многочлена $\boldsymbol{Q}_+(\zeta, w) = 0$ различны (естественно вне точек ветвления). Очевидно, что

$$c_k = \langle \sigma_n h^+(\bar{P}_k), h^+(P_k) \rangle \cdot \| \sqrt{\sigma_n} h^+(P_k) \|_E^{-2}.$$

Поэтому действие оператора $\tilde{A}_1$ (1) на скалярных функциях $g(P)$ в пространстве $H^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx)$ будет заключаться в следующем: $\tilde{A}_1 g(P) = \Lambda(P) g(\bar{P})$, где точки $\bar{P} = (\zeta, \omega_+(\zeta))$ и $\bar{P} = (\bar{\zeta}, w_+(\zeta))$ лежат в $\Pi(\boldsymbol{Q}_+)$, а $\Lambda(P) = w_+(\bar{P}) \langle \sigma_n h^+(\bar{P}), h^+(P) \rangle \cdot \| \sqrt{\sigma_n} h^+(\bar{P}) \|_E^{-2}$. В результате мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $\dim E = r < \infty$ *и алгебраические кривые* $\boldsymbol{Q}_\pm$ *(2) в* $\mathbb{C}^2$ *неособые. Тогда на* $\boldsymbol{Q}_\pm$ *существуют векторные поля* $h^\pm(P)$ *с неспециальными [1] дивизорами полюсов* $D_\pm$, $\deg D_\pm = g + r - 1$, *что функциональная модель алгебры Ли* $\{A_1, A_2\}$, *для которой имеют место а), б) п. 1, имеет вид*

$$\mathring{A}_n f(P) = \boldsymbol{P}_{\mathring{H}} (\zeta(P) - i/2) f(P); \quad (7)$$

$$\mathring{A}_1 f(P) = P_{\mathring{H}} \Lambda(P) f(\bar{P}),$$

где $\mathring{A}_n = n\mathring{A}_1 + \mathring{A}_2$; *функции* $f(P) = \begin{bmatrix} f_-(P_-) \\ f_+(P_+) \end{bmatrix} \in \mathring{H}$,

$$P_\pm = (\zeta, w_\pm) \in \Pi(\boldsymbol{Q}_\pm), \ \Lambda(P) f_\pm(P_\pm) = w_\pm(P_\pm) \times$$
$$\times \langle \sigma_n h^\pm(\bar{P}_\pm), h^\pm(P_\pm) \rangle \cdot \| \sqrt{\sigma_n} h_\pm(\bar{P}_\pm) \|_E^{-2},$$

причем $\bar{P}_{\pm} = (\bar{\zeta}, \omega_{\pm}(\bar{\zeta})) \in \Pi(Q_{\pm})$. Модельное пространство

$$\mathring{H} = \left\{ f(P) = \begin{bmatrix} f_- \\ f_+ \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} f_- \in H_+^2(h^-, \Pi, \sigma_n dx) \ominus \theta^* H_+^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx) \\ f_+ \in \overline{\Delta H^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx)} \ominus \Delta H_+^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx) \end{matrix} \right\}. \quad (8)$$

При этом $\Delta^2 = \sigma_n - \theta\sigma_n^{-1}\theta^*$, а оператор θ имеет вид (6).

Униформизируя [4] кривую $Q_{\pm}(\zeta, \omega_{\pm}) = 0$, получим $\zeta(u_{\pm}, \omega_{\pm}(u_{\pm})$, которые мероморфны в круге K ($u_{\pm} \in K$), а K является универсальной накрывающей [4] для $Q_{\pm}$ (2). Функции $\zeta(u_{\pm})$, $\omega_{\pm}(u_{\pm})$ автоморфны относительно некоторой группы дробно-линейных преобразований K в себя, которая изоморфна фундаментальной группе $F_{\pm}$ римановой поверхности $Q_{\pm}$, т. е. можно считать ζ и $\omega_{\pm}$ заданными в фундаментальной области $\Gamma_{\pm}$ (многоугольник Пуанкаре) с «правильной склейкой сторон» посредством группы $F_{\pm}$ [4]. Через $\Gamma_{\pm}(Q_{\pm})$, $\Gamma_0(Q_{\pm})$ и $\Gamma_{\Pi}(Q_{\pm})$ обозначим прообразы $C_{\pm}(Q_{\pm})$, $R(Q_{\pm})$ и $\Pi(Q_{\pm})$ при униформизации $\zeta(u_{\pm})$, $\omega_{\pm}(u_{\pm})$. Естественная переформулировка определений $H^2(h^{\pm}, \Gamma_{\Pi}, \sigma_n dx)$, $H_{\pm}^2(h^{\pm}, \Gamma_{\Pi}, \sigma_n dx)$ (6) приводит к следующей теореме, которую мы сформулируем в случае, когда θ^* является σ_n-внутренней функцией [1].

Теорема 2. *Если выполняются предположения теоремы 1, а θ^* (6) является σ_n-внутренней, то на фундаментальных областях $\Gamma_{\pm}$ кривых $Q_{\pm}$ (2) существуют такие векторные поля $h^{\pm}(u)$ с неспециальными дивизорами полюсов $D_{\pm}$, $\deg D_{\pm} = g + r - 1$, что функциональная модель алгебры Ли имеет вид*

$$\mathring{A}_n f(u) = P_{\mathring{K}}(\zeta(u) - i/2) f(u); \quad (7)$$

$$\mathring{A}_1 f(u) = P_{\mathring{K}} \Lambda(u) f(\tilde{u}),$$

где

$$\mathring{K} = H_+^2(h^-, \Gamma_{\Pi}, \sigma_n dx)\, \theta\theta^* H_+^2(h^+, \Gamma_{\Pi}, \sigma_n dx);$$

$$\mathring{A}_n = \mathring{A}_2 + n\mathring{A}_1; \ \Lambda(u) = \omega_-(u) \cdot \langle \sigma_n h^-(\tilde{u}), h^-(u) \rangle \cdot \| \sqrt{\sigma_n}\, h^-(\tilde{u}) \|_E^{-2},$$

причем $\tilde{u}$ таково, что $\overline{\zeta(u)} = \zeta(\tilde{u})$; $\overline{\omega_-(u)} = \omega_-(\tilde{u})$.

4. Выберем E, $\dim E = 3$, —

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \sigma_n^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & a \\ 0 & \alpha & 0 \\ a & 0 & \alpha \end{bmatrix}; \ \tilde{\gamma}_R = \begin{bmatrix} k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -b \\ 0 & -b & 2-k^{-1} \end{bmatrix},$$

где $\alpha > a > 0$; $k \in (0, 1)$; $b = \sqrt{2(k^{-1} - 1)}$. Тогда $Q(\zeta, \lambda) = 0$ имеет вид

$$k^2 a^2 \zeta^2 (1 - \lambda) = (1 + \lambda)(1 - k^2\lambda^2). \quad (8)$$

Полагая $ka\zeta(1 - \lambda) = \mu$, приходим к алгебраической кривой Лежандра [4]

$$\mu^2 = (1 - \lambda^2)(1 - k^2\lambda^2). \quad (9)$$

Двулистная римановая поверхность (9) рода $g=1$ образуется из двух λ плоскостей $\boldsymbol{C}$, склеенных «крест-накрест» вдоль разрезов $(-\infty, -k^{-1}] \cup [-1, 1] \cup [k^{-1}, \infty)$. Так как

$$ka \operatorname{Im} \zeta = \operatorname{Im} \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}(1-k^2\lambda^2)}$$

меняет знак лишь на разрезах, то $\boldsymbol{C}_+(\boldsymbol{Q})$, как и $\boldsymbol{C}_-(\boldsymbol{Q})$, в данном случае выделяет один из листов римановой поверхности $\boldsymbol{Q}$ (9), а $\boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{Q}$ совпадает с выбранными разрезами на $\boldsymbol{R}$. Множество $\Pi(\boldsymbol{Q})$ порождается семейством кривых

$$t = \operatorname{Im} \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}(1-k^2\lambda^2)}; \; t \in \left(-\frac{1}{2ak}, \frac{1}{2ak}\right),$$

стягивающихся к разрезам $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{Q})$. На кривой (9) существует единственный ($g=1$) абелев дифференциал первого рода [4]

$$\omega = \frac{dx}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}}. \tag{10}$$

Поэтому эллиптический интеграл

$$u(P) = \int_{P_0}^{P} \omega, \; P, \; P_0 \in \boldsymbol{Q} \tag{11}$$

конформно отображает (9) на прямоугольник $\Gamma = \{u \in \boldsymbol{C};\ |\operatorname{Re} u| < 2K, |\operatorname{Im} u| < K'\}$ с надлежащим отождествлением сторон, $P_0 = (0, 1)$, а $4K$ и $2iK'$ — периоды замкнутого дифференциала (10). Обращение эллиптического интеграла (11) приводит к униформизации (9) $\mu = \operatorname{sn}' u$, $\lambda = \operatorname{sn} u$ функциями Якоби [4] и значит

$$\zeta(u) = \frac{\operatorname{sn}' u}{ka(1-\operatorname{sn} u)}, \; \lambda(u) = \operatorname{sn} u. \tag{12}$$

Функция $\lambda(u)$ имеет два простых полюса в точках iK', $2K+iK'$, а $\zeta(u)$ — три простых полюса:

$$ka\zeta(u) = \zeta(u-iK) + \zeta(u-2K-iK') - 2\zeta(u-K),$$

где $\zeta(u)$ — дзета-функция Вейерштрасса [4]. Собственные вектора пучка $(\sigma_1\zeta - \mu_R)h = \omega\sigma_n h$ имеют вид $\tilde{h} = \sqrt{\sigma_n}\, h$. Здесь

$$\tilde{h} = \begin{bmatrix} \dfrac{ka\zeta}{1+k\lambda} \\ \dfrac{b}{\lambda-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\operatorname{sn}' u}{(1-\operatorname{sn} u)(1+k\operatorname{sn} u)} \\ \dfrac{b}{\operatorname{sn} u - 1} \\ 1 \end{bmatrix},$$

Вектор $\tilde{h}$ — имеет полюс второго порядка в точке $\lambda = -1$, $(u=K)$ и первого порядка в $\lambda = K^{-1}$ $(u = -K + iK')$ либо $N=3$.

Изоформизм (10) переводит $\boldsymbol{C}_\pm(Q)$ в прямоугольник $\Gamma_\pm(\boldsymbol{Q}) = \{u \in \Gamma;\ \pm \operatorname{Im} u > 0\}$, а $\Gamma_0(Q) = \{u \in \Gamma,\ \operatorname{Im} u = 0$ либо $\operatorname{Im} u = iK'\}$; наконец Γ_Π — область в Γ, являющаяся прообразом $\Pi(\boldsymbol{Q})$.

Функциональная модель (7) в этом примере задается в пространстве $\mathring{K}$ формулами (7), где $\zeta(u)$ имеют вид (12), $\tilde{u} = \bar{u}$ и, наконец,

$$\Lambda(u) = \frac{2}{k^2 a} \cdot \frac{[\alpha \operatorname{sn}' u + ka \operatorname{sn} u(1-\operatorname{sn} u)][1+k\operatorname{sn} u]}{|\operatorname{sn}' u|^2 + b^2|1+k\operatorname{sn} u|^2 + |1+(k-1)\operatorname{sn} u - k\operatorname{sn}^2 u|_0}.$$

Список литературы: 1. *Золотарев В. А.* Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности // Мат. сб. 1990. 181, № 7. С. 965—994. 2. *Лакс П., Филлипс Р.* Теория рассеяния. М., 1971. 235 с. 3. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М., 1965. 115 с. 4. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. М., 1960. 232 с.

Поступила в редколлегию 07.08.91