НОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

УДК 535

О СПЕКТРАХ ЗАХВАЧЕННОГО В ПОТЕНЦИАЛЬНУЮ ЯМУ ОСЦИЛЛЯТОРА

А. Г. Загородний — вице-президент НАН Украины, академик НАН Украины, академик-иностранный член РАН, директор Института теоретической физики НАН Украины.
E-mail: azagorodny@bitp.kiev.ua

А. В. Киричок — к.ф.-м.н., доцент, докторант, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина. Харьков, Украина. E-mail: sandyrcs@gmail.com

В. М. Куклин — профессор, доктор физико-математических наук, зав. кафедрой Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина. Харьков, Украина.
E-mail: kuklinvm1@gmail.com

Аннотация

Изучен спектр волн, генерируемых осциллятором, захваченным во внешнюю потенциальную яму. Собственная частота осциллятора при этом много больше частоты его колебаний в потенциальной яме. Учитывается эффект отдачи осциллятора при излучении и поглощении. В том случае, если энергия отдачи равна энергии медленных колебаний осциллятора в потенциальной яме, интенсивность линий излучения и поглощения на его собственной частоте превышает интенсивности других спектральных линий.

Ключевые слова: *излучение, осциллятор, захваченный в потенциальную яму, доминирование собственной частоты осциллятора*

Abstract

The spectrum of waves emitted by oscillator, trapped in an external potential well is analyzed. It is assumed that the eigenfrequency of the oscillator is much greater than the frequency of oscillations in the potential well. The effect of the recoil on the absorption and emission of the oscillator is discussed. Since the energy of the slow oscillations in well is equal to the recoil energy, the intensity of the absorption and emission lines at the eigenfrequency exceeds the intensity of other spectral lines.

Key words: *oscillator, potential well, recoil effect, emission, eigenfrequency dominance*

1. Введение

Обнаруженное А. Комптоном, объясненное им и П. Дебаем явление рассеяния квантов излучения на свободных электронах показало изменение частоты рассеянного излучения за счет эффекта отдачи частицы при взаимодействии. Это (наряду с явлением фотоэффекта) подтвердило основные принципы квантовой теории излучения [1–3]. Процессы взаимодействия квантов излучения с веществом за счет существования множества дополнительных взаимодействий, вследствие захваченных в потенциальные ямы периодических и непериодических пространственных структур частиц среды, отличаются впечатляющим многообразием и исследуются во многих разделах физической науки [4–6]. Одной из задач, которая возникает при рассмотрении процессов поглощения и излучения веществом является задача взаимодействия с внешним полем частицы–осциллятора, захваченной в потенциальную яму пространственной структуры среды. Обсуждаемая проблема отвечает именно квантовой модели описания поведения возбужденного осциллятора, который находится в потенциальной яме. В квантовом представлении процесс передачи энергии осциллятору при поглощении кванта (или процесс излучения осциллятором) происходит мгновенно с вероятностью, пропорциональной $\Gamma_{\omega_0}^{-1}$ (где Γ_{ω_0} – ширина линии излучения). Порой это трактуют как случайное явление в интервале времени равном $\Gamma_{\omega_0}^{-1}$. Классическая модель предполагает эти явления распределенными во времени $\Gamma_{\omega_0}^{-1}$ процессами поглощения и излучения осциллятором данной порции энергии. Хотя последнее представление характерно для интенсивных полей и не отвечает случаям поглощения или излучения отдельного кванта. Целью рассмотрения ниже будет классическая и квантовомеханическая модели взаимодействия захваченной в потенциальную яму заряженной частицы-осциллятора с внешним полем. Для простоты и наглядности описания сначала ограничимся одномерным случаем поглощения и излучения осциллятором квантов ионно-звуковых волн в неизотермической плазме, причем частота осциллятора в системе его покоя соответствует частотному диапазону этих волн (разделы 2, 3). Затем обсуждается характер излучения и поглощения электромагнитных волн осциллятором, захваченным в потенциальную яму (раздел 4).

2. Излучение одномерного осциллятора в плазме

Классическая модель. Рассмотрим излучение в плазме колеблющегося с частотой Ω осциллятора, собственная частота которого в системе его покоя равна ω_0 (причем $\omega_0 >> \Omega$). Таким колебаниям соответствует плотность заряда

$$\rho(z,t) = Q\delta(z - a\sin\omega_0 t - b\sin\Omega t) \qquad (2.1)$$

массой M_Q, причем Q имеет смысл поверхностной плотности заряда (в одномерном случае осциллятор — это заряженная плоскость перпендикулярная оси z). Будем полагать, что $a << b$. Причиной медленных осцилляций с частотой Ω и скоростью $V_Q = \Omega b$ может быть локализация осциллятора в потенциальной яме, покинуть которую он не может. Уравнение Пуассона с источником может быть представлено в виде

$$-k^2\varepsilon(k,\omega)\phi(k,\omega) = 4\pi\rho(k,\omega)\,, \qquad (2.2)$$

$$\varepsilon(k,\omega) = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{1}{k^2 a_e^2} \approx \frac{\omega^2 - k^2 v_s^2}{\omega^2 k^2 a_e^2}\,, \qquad (2.3)$$

$$\frac{1}{\varepsilon(k,\omega)} = \frac{i\pi k^2 a_e^2 \omega}{2}\left[\frac{1}{\omega - kv_s - i0} + \frac{1}{\omega + kv_s - i0}\right], \qquad (2.4)$$

где $\omega_{pi}^2 = 4\pi e^2 n_0 / m_i$, $a_e^2 = T_e / 4\pi e^2 n_0$, $a_e\omega_{pi} = v_s$. Для плотности заряда получим

$$\rho(k,\omega) = \frac{Q}{(2\pi)^2}\int \exp[i(kz - \omega t)]\delta(z - a\sin\omega_0 t - b\sin\Omega t)dzdt =$$
$$= \frac{Q}{4\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(ka)J_m(kb)\,\delta(\omega - n\omega_0 - m\Omega). \qquad (2.5)$$

Потенциал поля в этом случае принимает вид

$$\phi(k,\omega) = -\frac{Q}{k^2\varepsilon(k,\omega)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(ka)J_m(kb)\,\delta(\omega - n\omega_0 - m\Omega)\,. \qquad (2.6)$$

После обратного преобразования получим

$$\phi(z,t) = \int \exp[i(\omega t - kz)]\phi(k,\omega)dkd\omega =$$
$$= -Q\frac{i\pi a_e^2}{2v_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(m\Omega + n\omega_0)J_n(k_{nm}a)J_m(k_{nm}b)\exp[i(m\Omega + n\omega_0)t]\right], \qquad (2.7)$$
$$\left(\exp[-ik_{nm}z] + (-1)^{n+m}\exp[ik_{nm}z]\right)$$

??? для чего запятая???

Запятая здесь не нужна, вместо нее знак умножения, а запятая в конце формулы

где $k_{nm} = (n\omega_0 + m\Omega)/v_s$. Так как скорость осциллятора

$$v(t) = a\omega_0\cos\omega_0 t + b\Omega\cos\Omega t\,, \qquad (2.8)$$

то энергия, потраченная на излучение осциллятором в единицу времени, имеет вид

$$W = -2Q^2\pi a_e^2 v_s \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} k_{n,m}^2 J_n^2(k_{n,m}a)J_m^2(k_{n,m}b)\,. \qquad (2.9)$$

В частности, потери на излучение при $k_{nm}a << 1$ на частотах ω_0 и $\omega_0 \pm \Omega$ равны

$$W(\omega_0) = -\pi Q^2 \omega_0{}^4 a^2 J_0^2(k_{1,0}b) / \omega_{pi}{}^2 v_s\,, \qquad (2.10)$$

$$W(\omega_0 \pm \Omega) = -\pi Q^2(\omega_0 \pm \Omega)^4 a^2 J_{\pm 1}^2(k_{1,\pm 1}b) / \omega_{pi}{}^2 v_s\,. \qquad (2.11)$$

Квантовомеханическая модель. Представим колебания среды как набор гармонических осцилляторов
$$\ddot{q}+\omega^2 q=0\,, \tag{2.12}$$
где скорость ионов $\dot{q}=ke\varphi/\omega_0 M=\dot{z}=\omega_0 z$, энергия $Mn_0(\dot{q}^2+\omega_0{}^2\dot{q})/2$, и, соответственно, масса Mn_0. Гамильтониан взаимодействия осциллятора с полем можно [1] представить в виде
$$H=\frac{1}{2m}(\vec{p}-e\int dt\partial\varphi/\partial z)(\vec{p}-e\int dt\,\partial\varphi/\partial z)+e\Phi\,, \tag{2.13}$$
а энергия взаимодействия пропорциональна произведению скорости осциллятора на поле в точке, где он находится
$$\begin{aligned}H' &= Qvv_s{}^{-1}\varphi=-2Q\varphi_0 v_s{}^{-1}\left(a\omega_0\cos\omega_0 t+b\Omega\cos\Omega t\right)\times\\ &\times\cos[k(a\sin\omega_0 t+b\sin\Omega t)-\omega t-\delta].\end{aligned} \tag{2.14}$$
Можно показать, что при $k_{nm}a<<1$
$$H'=-\frac{Qa}{v_s}\varphi_0\sum_m(\omega_0+m\Omega)J_m(kb)\cos\delta\,. \tag{2.15}$$
Таким образом, систему «осциллятор в потенциальной яме» можно представить как набор осцилляторов. Причем, на частотах излучающего поля $\omega=\omega_0$ и $\omega=\omega_0\pm\Omega$
$$H'(\omega_0)=-\frac{Qa}{v_s}\varphi_0\omega_0 J_0(kb)\cos\delta\,, \tag{2.16}$$
$$H'(\omega_0\pm\Omega)=-\frac{Qa}{v_s}\varphi_0(\omega_0\pm\Omega)J_{\pm1}(kb)\cos\delta\,. \tag{2.17}$$
Рассмотрим для простоты случай излучения на основной частоте (2.16). Построим матричный элемент между начальным и конечным состояниями
$$H_{if}(\omega_0)=-\frac{Q}{v_s}\frac{v_s M\omega_0}{e}v_{ab}q_{nn'}J_0(kb)\cos\delta=-\frac{Q}{v_s}\frac{v_s M\omega^2{}_0}{e}z_{ab}q_{nn'}J_0(kb)\cos\delta\,, \tag{2.18}$$
где нижние индексы a и b определяют два состояния излучающей системы $v_{ab}=\dot{z}_{ab}\approx\omega_0 a$. Причем $h\omega_0=2\pi(E_a-E_b)$ и z_{ab} — матричный элемент координаты, а *n* и *n*' — два состояния гармонического осциллятора, определяющего излучение. Для случая спонтанного излучения возбужденного осциллятора можно использовать
$$|\,q_{01}\,|^2=h/4\pi Mn_0\omega_0\,, \tag{2.19}$$
где значение массы осциллятора Mn_0 (см. (1.5), $h=2\pi\hbar$ - постоянная Планка. При этом получим
$$|\,H_{if}(\omega_0)\,|^2=\frac{Q^2}{4\pi n_0}\frac{\omega_0^3 Mh}{e^2}|\,z_{ab}\,|^2\,J^2{}_0(kb)\cos^2\delta\,. \tag{2.20}$$
Вероятность перехода можно получить, умножая (2.20) на $4\pi^2h^{-2}\rho(\nu_{ab})=4\pi^2h^{-2}v_s{}^{-1}$ (где $\rho(\nu_{ab})$ — плотность колебаний в интервале частот), и учесть, что при усреднении по начальным фазам $\langle\cos^2\delta\rangle=1/2$
$$P_{if}(\omega_0)=\frac{\pi}{hv_s}\frac{Q^2\omega^3{}_0M^2}{2Mn_0e^2}|\,z_{ab}\,|^2\,J^2{}_0(kb)\,. \tag{2.21}$$
Для получения значения интенсивности излучения следует умножить (2.21) на $h\omega_0/2\pi$
$$I(\omega_0)=\frac{Q^2\omega^4{}_0M}{4n_0e^2v_s}|\,z_{ab}\,|^2\,J^2{}_0(kb)\,, \tag{2.22}$$
что согласуется с (2.10).

Аналогично получим выражения с частотой сателлитов
$$I(\omega_0\pm\Omega)=\frac{Q^2(\omega_0\pm\Omega)^4M}{4n_0e^2v_s}|\,z_{ab}\,|^2\,J^2{}_{\pm1}(kb)\,. \tag{2.23}$$

Проведенное рассмотрение справедливо в случае, если при излучении можно пренебречь энергией отдачи. Если же энергия отдачи при поглощении и излучении импульса велика, то необходимо учесть этот эффект.

3. О спектрах излучения и поглощения при конечной энергии отдачи

Предположим, что частица с зарядом Q — невозбужденный осциллятор покоится около дна внешней потенциальной ямы. Остановимся на случае, когда после поглощения или излучения квантов изменения локализации осциллятора нет, то есть он остается во внешней потенциальной яме. Здесь энергия отдачи оказывается недостаточной для того, чтобы частица покинула потенциальную яму, в которой она находится. После поглощения высокочастотного кванта $E_\nu = \hbar(\omega_0 + \Omega)$ частица с зарядом Q превращается в возбужденный осциллятор, собственная частота которого ω_0 получает импульс отдачи $M_Q V_Q$ и совершает медленные колебания в потенциальной яме. Движение частицы может быть представлено в виде

$$x = b\sin\Omega t\,. \tag{3.1}$$

При этом выполнены законы сохранения

$$\hbar(\omega_0 + \Omega)/v_s = M_Q V_Q\,, \tag{3.2}$$

$$\hbar\Omega = M_Q V_Q^{\,2}/2\,. \tag{3.3}$$

Заметим, что энергия колебаний в потенциальной яме равна $\hbar\Omega$. Именно поэтому энергия возбуждающего кванта должна на эту величину превосходить энергию осциллятора $\hbar\omega_0$. Предполагая выполненным условие

$$\hbar\omega_0 << 2M_Q v^2{}_s\,, \tag{3.4}$$

из выражений (3.2) — (3.3) найдем частоту колебаний в потенциальной яме

$$\Omega \approx \hbar\omega^2{}_0 / 2M_Q v^2{}_s\,. \tag{3.5}$$

С другой стороны, из (3.1) следует, что частота (рад/сек) колебаний в потенциальной яме равна

$$\Omega = V_Q/b\,. \tag{3.6}$$

Так как энергия кванта $\hbar\Omega$ равна энергии отдачи, то отсюда следует важное для множества приложений условие [7]

$$\omega_0 b / v_s = kb \approx 2\,. \tag{3.7}$$

Отметим, что размер потенциальной ямы должен заметно превосходить величину b и быть больше длины волны $\lambda = 2\pi/k = \pi b$, а глубина потенциальной ямы превышать энергию отдачи (3.3).

Излучение и поглощение в условиях отдачи. Энергия взаимодействия (2.14) с учетом эффекта отдачи принимает вид

$$\begin{gathered} H' = \frac{Qv}{v_s}\varphi = -\frac{Q}{v_s}\varphi_0\left(a\omega_0\cos\omega_0 t + b\Omega\cos\Omega t\right)\times \\ \times\left(\exp[-ik(a\sin\omega_0 t + b\sin\Omega t) + i(\omega \pm \Omega)t + i\delta] + kc\right). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Нижний знак соответствует случаю поглощения, когда энергия кванта падающего поля должна быть больше энергии возбуждения на величину энергии отдачи (2.3). Верхний знак соответствует изучению. При этом частота излучаемого поля меньше частоты возбуждения на значение частоты колебаний в потенциальной яме Ω. Энергия взаимодействия в рассматриваемом случае $k_{nm}a << 1$ отлична от нуля при $\omega = \omega_0 + (m \mp 1)\Omega$

$$H' = -\frac{Qa}{v_s}\varphi_0\sum_m(\omega_0 + m\Omega)J_m(kb)\cos\delta\,. \tag{3.9}$$

В случае покоящихся осцилляторов ($b = 0$), энергия взаимодействия (3.9) не равна нулю при $m = 0$, отвечает частоте поглощаемого поля $\omega = \omega_0 + \Omega$ и частоте излучаемого поля $\omega = \omega_0 - \Omega$

$$H' = -Qav_s^{-1}\omega_0\varphi_0\cos\delta\,. \tag{3.10}$$

Рассмотрим случай поглощения ($m = -1$) и излучения ($m = +1$) на собственной частоте ω_0 осциллятора в условиях, когда осциллятор колеблется во внешней потенциальной яме.

Здесь частоты поглощаемого и излучаемого поля одинаковы и равны собственной частоте покоящегося осциллятора ω_0. Энергия взаимодействия равна

$$H' = -\frac{Qa}{v_s}\cdot\varphi_0(\omega_0 \pm \Omega)J_{\pm 1}(kb)\cos\delta\,. \tag{3.11}$$

Матричный элемент принимает вид

$$H_{if} = -\frac{Q}{v_s}\frac{v_s M(\omega_0 \pm \Omega)^2}{e} z_{ab} q_{nn'} J_{\pm 1}(kb)\cos\delta \tag{3.12}$$

Величины $\omega_0 \pm \Omega$ в (3.12) и ниже соответствуют парциальным частотам колеблющегося во внешней потенциальной яме осциллятора, причем верхний знак отвечает случаю излучения, а нижний поглощения.

Для случая поглощения $|q_{nn'}|^2 = |q_{n,n-1}|^2 = n|q_{01}|^2$, а для случая излучения $|q_{nn'}|^2 = |q_{n+1,n}|^2 = (n+1)|q_{01}|^2$, $v_{ab} = \dot{z}_{ab} \approx \omega_0 a$. Отметим, что при наличии малого параметра (3.5), значения матричного элемента для случая без отдачи, обсуждаемого в предыдущем разделе (2.20) и случая с отдачей (3.12) практически не отличаются (см., например, [8]). При этом получим

$$|H_{if}|^2 = \frac{Q^2}{4\pi n_0}\frac{(\omega_0 \pm \Omega)^3 Mh}{e^2}|z_{ab}|^2\, J_1^2(kb)\cos^2\delta \begin{Bmatrix} n \\ n+1 \end{Bmatrix}. \tag{3.13}$$

Вероятность перехода можно получить, умножая (3.13) на $4\pi^2 h^{-2}\rho(\nu_{ab}) = 4\pi^2 h^{-2} v_s^{-1}$ и учитывая, что при усреднении по начальным фазам $\langle\cos^2\delta\rangle = 1/2$

$$P_{if}(\omega_0) = \frac{\pi}{hv_s}\frac{Q^2(\omega_0 \pm \Omega)^3 M^2}{2Mn_0 e^2}|z_{ab}|^2\, J^2{}_1(kb)\cdot\begin{Bmatrix} n \\ n+1 \end{Bmatrix}. \tag{3.14}$$

Интенсивность поглощения на собственной частоте покоящегося осциллятора ω_0 (верхний знак) несколько выше интенсивности излучения (нижний знак)

$$I(\omega_0) = \frac{Q^2(\omega_0 \pm \Omega)M}{4n_0 e^2 v_s}|z_{ab}|^2\, J^2{}_1(kb)\cdot\begin{Bmatrix} n \\ n+1 \end{Bmatrix}. \tag{3.15}$$

Отметим, что в условиях (3.7), интенсивности линий поглощения и излучения на частоте ω_0 значительно в $J_1^2(kb)/J_0^2(kb)$ раз превосходят интенсивности линий спектра $\omega = \omega_0 \pm \Omega$ колеблющегося во внешней потенциальной яме осциллятора.

4. Электромагнитное излучение колеблющегося осциллятора с отдачей

Рассмотрим, следуя [1], квантовую модель излучения осциллятора с собственной частотой ω_0, зарядом и массой равными e, m, и который осциллирует в потенциальной яме, ориентированной вдоль оси OZ. Вектор излучаемой электромагнитной волны пусть также ориентирован в этом же направлении. Расположим в начале координат осциллятор, компоненты скорости которого

$$v_x = v_{x0} cos\omega_0 t = a\omega_0 cos\omega_0 t\,,\; v_z = b\Omega\cos(\Omega t)\,. \tag{4.1}$$

Представим электромагнитное поле в виде

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\,,\; \vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}\,. \tag{4.2}$$

Причем векторный потенциал имеет компоненты

$$A_x = q(t)\sqrt{2}\cos(kz+\delta)\,,\; A_y = 0\,,\; A_z = 0\,. \tag{4.3}$$

Фаза δ зависит от ориентации осциллятора. Выбор вида (4.3) определяется условиями нормировки так, чтобы интеграл от квадрата векторного потенциала в единичном объеме был равен единице, а величина $q(t)$ удовлетворяла уравнению

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0\,. \tag{4.4}$$

Полная энергия поля в объеме V равна

$$U = \frac{V}{4\pi c_2}\frac{1}{2}(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2)\,. \qquad (4.5)$$

Откуда определим эффективную массу осциллятора поля

$$m_{eff} = V/4\pi c^2\,. \qquad (4.6)$$

В этом случае x-составляющая векторного потенциала в месте нахождения осциллятора принимает вид

$$A_x = \sqrt{2}q_0\cos(\omega t)\cos(kb\sin\Omega t + \delta)\,. \qquad (4.7)$$

В случае учета эффекта отдачи частота поглощенного и излученного кванта будут отличаться на $\pm\Omega$, то есть выражение (4.7) изменится [6]

$$A_x = \sqrt{2}q_0\cos((\omega\pm\Omega)t)\cos(kb\sin\Omega t + \delta)\,. \qquad (4.8)$$

Так как гамильтониан системы, состоящей из осциллятора и поля, можно представить в виде [1]

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) + e\Phi\,, \qquad (4.9)$$

то для энергии взаимодействия осциллятора и поля не трудно привести выражение

$$H' = -ev_x A_x/c\,. \qquad (4.10)$$

Пусть частота колебаний в потенциальной яме оказывается равной энергии отдачи при излучении или поглощении кванта поля. Представляя систему «осциллятор в потенциальной яме» как набор осцилляторов с частотой $\omega_0 + m\Omega$ и, добиваясь выполнения требований временного синхронизма, убедимся в том, что при значениях частоты внешнего поля

$$\omega = (m\mp 1)\Omega + \omega_0 \qquad (4.11)$$

(4.10) оказывается отличным от нуля. Причем верхний знак (4.11) отвечает излучению (частота внешнего поля меньше частоты осциллятора на величину равную $\Omega/2\pi$), а нижний поглощению (частота внешнего поля больше частоты осциллятора на величину равную $\Omega/2\pi$) кванта с учетом эффекта отдачи. Выражение (4.10) можно представить в виде

$$H' = -\frac{ev_{x0}}{c}q_0\sqrt{2}\sum_m J_m(kb)\cos\delta\,. \qquad (4.12)$$

Для покоящегося осциллятора ($b = 0$), в выражении (4.12) отличным от нуля оказывается только один член ряда с $m = 0$

$$H' = -\frac{ev_{x0}}{c}q_0\sqrt{2}\cos\delta\,. \qquad (4.13)$$

Таким образом, частота поглощаемого излучения $\omega = \omega_0 + \Omega$ отличается от частоты излучаемого $\omega = \omega_0 - \Omega$ на 2Ω. Это отвечает разнице энергий поглощаемого и излучаемого квантов в две энергии отдачи [6].

При $b \neq 0$ выражение для энергии взаимодействия осциллятора и поля для наиболее интересного случая излучения и поглощения на собственной частоте осциллятора ω_0 принимает вид

$$H' = -\frac{e\cdot v_x}{c}q\sqrt{2}J_{\pm 1}(kb)\cos\delta\,. \qquad (4.14)$$

При этом излучение на частоте $\omega = \omega_0 - \Omega$ и поглощение $\omega = \omega_0 + \Omega$ описывается подобным (4.14) выражением, где $J_{\pm 1}(kb)$ следует заменить на $J_0(kb)$. Можно показать, что при равенстве энергии кванта $\hbar\Omega$ энергии отдачи выполняется условие $\omega_0 b/c = kb \approx 2$ аналогичное условию (7).

В интересующем нас случае излучения и поглощения на собственной частоте осциллятора ω_0 матричный элемент можно представить как

$$H_{if} = -\frac{e}{c}\sqrt{2}\omega_0 x_{ab} q_{nn'} J_{\pm 1}(kb)\cos\delta\,. \qquad (4.15)$$

Два состояния осциллятора обозначены нижними индексами a,b, а индексы n,n' отвечают двум состояниям излученного $(n,n+1)$ или поглощенного $(n,n-1)$ поля. Причем, для случая поглощения $|q_{nn'}|^2 = |q_{n,n-1}|^2 = n|q_{01}|^2$, а для случая излучения $|q_{nn'}|^2 = |q_{n+1,n}|^2 = (n+1)|q_{01}|^2$. В условиях наличия малого параметра $\hbar\omega_0 / mc^2 << 1$ значения матричного элемента для случая без отдачи и случая с отдачей практически не отличаются [8], что позволяет применить данную упрощенную процедуру вычисления матричного элемента. Заметим, что поправки к величине матричного элемента, учитывающие эффект отдачи пропорциональны малому параметру $\hbar\omega_0 / mc^2$ как для отдельных процессов поглощения и излучения, а также при комптоновском рассеянии, что соответствует двум этим процессам сразу. Для случая спонтанного излучения [1] возбужденного осциллятора

$$|q_{01}|^2 = \frac{hc^2}{V\omega_0}, \tag{4.16}$$

где использовано значение эффективной массы (4.6). Учитывая, что колебания осциллятора могут происходить в плоскости XOY, для квадрата матричного элемента получим выражение

$$|H_{if}|^2 = -\frac{2e^2}{c^2}\omega_0\left(x_{ab}^2 + y_{ab}^2\right)\frac{hc^2}{V}J_1^2(kb)\cos^2\delta\begin{Bmatrix} n+1 \\ n \end{Bmatrix}, \tag{4.17}$$

где $v_{ab} = \frac{d}{dt}\sqrt{x_{ab}^2 + y_{ab}^2} \approx \omega_0 a$, верхнее значение соответствует излучению, а нижнее поглощению. Вероятность перехода можно найти, умножая на $4\pi^2\rho(\nu_{ab})/h^2$, где $\rho(\nu_{ab})$ — плотность колебаний в интервале частот, и учесть, что при усреднении по начальным фазам $\langle\cos^2\delta\rangle = 1/2$

$$P_{if} = \frac{4\pi^2}{h^2}|\mathrm{H}_{if}|^2\rho = \frac{8\pi e^2}{hc^3}\omega_0^3\left(|x_{ab}|^2 + |y_{ab}|^2\right)J_1^2(kb)\cos^2\delta\begin{Bmatrix} n+1 \\ n \end{Bmatrix}. \tag{4.18}$$

Отметим, что вероятность поглощения на частоте $\omega_0 + \Omega$ и излучения на частоте $\omega_0 - \Omega$ можно получить, заменяя в (4.18) $J_1^2(kb)$ на $J_0^2(kb)$.

Интенсивность вдоль направления OZ получим, умножая (4.18) на $\hbar\omega_0$, а полную интенсивность по всем направлениям путем интегрирования по углу $\theta = \vec{k}\wedge O\vec{Z}$.

Нетрудно заметить, что в случае колеблющегося в потенциальной яме ВЧ осциллятора с частотой Ω и амплитудой колебаний $b \approx 2/k = 2c/\omega_0$ (так как $J_1^2(kb) >> J_0^2(kb)$) интенсивность линий поглощения и излучения на собственной частоте осциллятора ω_0 на порядок превосходит интенсивность линий на частотах $\omega_0 \pm \Omega$.

5. Выводы

Показано, что классическая и квантовомеханическая модели спонтанного излучения в одномерной модели осциллятора, захваченного во внешнюю потенциальную яму, находятся в качественном соответствии и одинаковым образом описывают динамику рассматриваемых процессов. Эффект отдачи рассмотрен как для одномерного случая с излучением и поглощением звуковых волн в плазме, так и для случая излучения электромагнитных волн диполем, захваченным во внешнюю потенциальную яму. В условиях значительной энергии покоя осциллятора $(\hbar\omega_0/mc^2 << 1)$, можно пренебречь поправками к матричным элементам взаимодействия поля и захваченного в потенциальную яму осциллятора, обусловленным наличием энергии отдачи, что позволяет упростить процедуру их вычисления. Показано, что интенсивность линий поглощения и излучения на собственной частоте осциллятора ω_0 на порядок превосходит интенсивность других спектральных линий, в частности на частотах $\omega_0 \pm \Omega$. Последнее обусловлено равенством энергии колебаний в потенциальной яме энергии отдачи, и тем, что амплитуда колебаний осциллятора в потенциальной яме в этом случае оказалась сравнима с длиной волны излучения.

Подобное квантовомеханическое описание возможно более корректно поясняет явление излучения и поглощения веществом квантов поля без отдачи [6]. Действительно, излучение захваченного в потенциальную яму ВЧ осциллятора с собственной частотой ω_0 представляет собой эквидистантный спектр $\omega_0 + n\Omega$, то есть может быть представлено как излучение множества осцилляторов, амплитуда которых пропорциональна $J_n^2(kb)$. Причем так как размах медленных колебаний b в потенциальной яме сравним с длиной волны излучения $\lambda = 2\pi / k$, то в этих условиях наблюдается эффект преимущественного излучения и поглощения на собственной частоте. При этом природа ВЧ осциллятора не является определяющей для проявления описанных свойств системы.

Отметим, что ~~в~~ применение данной модели для описания излучения и поглощения гамма квантов в кристаллических структурах возможно, если время релаксации кристаллической структуры превышает период колебаний осциллятора в потенциальной яме и время жизни ВЧ осциллятора.

Список литературы

1. *Борн М.* Современная физика. М.–Л.: ОНТИ, Гл. ред. общетехн. лит, 1935. 263с.
2. *Иваненко Д. Д., Соколов А. А.,* Квантовая теория поля. М.–Л.: ГИТТЛ, 1952. 780 с.
3. *Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика /Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. // 3-е изд., испр. М.: Наука, 1989. 728 с.
4. *Абрамов А. И., Казанский Ю. А., Матусевич Е. С.,* Основы экспериментальных методов ядерной физики. М.: Атомиздат, 1977. 528 с.
5. *Винецкий В. Л., Холодарь Г. А.* Радиационная физика полупроводников. Киев: Наукова думка, 1979. 336 с.
6. *Вертхейм Г.* Эффект Мессбауэра. Принципы и применение. М.: Мир. 1966. 172 с.
7. *Куклина О. В., Куклин В. М.* Об относительной роли фононного спектра и столкновительной релаксации в процессах генерации и рассеяния. // Вісник ХНУ ім. В.Н.Каразіна. № 846. Вып. 2 (50). 2009. с.20–28. *(уточнить номер и выпуск)*
8. *Гайтлер В.* Квантовая теория излучения. М.: Иностр. лит., 1956. 250 с.

Поступила 27 июня 2013 г.

ON SPECTRUM OF OSCILLATOR TRAPPED IN A POTENTIAL WELL

A. V. KIRICHOK, V. M. KUKLIN, AND A. G. ZAGORODNY

We considered the quantum-mechanical model of electromagnetic emission by one-dimensional oscillator, trapped in the external potential well. On the assumption of the energy of the emitted quantum is much less that the rest energy of the oscillator, the perturbation of the Hamiltonian matrix elements caused by the recoil effect can be neglected, that simplifies their calculation.

It is shown that the intensity of the absorption and emission lines at the natural frequency of the oscillator significantly exceeds the intensity of other spectral lines, particularly at frequencies. This is caused by the equality of the oscillation energy in the potential well to the recoil energy, and the fact that the amplitude of the oscillation in the potential well in this case is comparable to the wavelength of the radiation.

Such a quantum-mechanical description may be more correctly explains the phenomenon of emission and absorption of electromagnetic field quanta without recoil by the matter. Really, the emission of the oscillator with eigenfrequency (natural frequency) produces the equidistant spectrum that can be considered as result of emission of a set of oscillators. Moreover, since the amplitude of low-frequency oscillations in the potential well is comparable with the emission wavelength, the emission and absorption on the proper frequency dominates in this case. The nature of the high-frequency oscillator is not critical for the manifestation of the above-described properties of the system.