Объ устойчивости движенія въ одномъ частномъ случаѣ задачи о трехъ тѣлахъ.

А. М. Ляпунова.

Примѣры рѣшенія тѣхъ вопросовъ объ устойчивости движенія, въ которыхъ дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія въ первомъ приближеніи суть линейныя съ *перемѣнными* коэффиціентами, до настоящаго времени еще на столько немногочисленны, что всякій примѣръ этого рода, по моему мнѣнію, представляетъ нѣкоторый интересъ.

Предлагаемое изслѣдованіе представляетъ попытку рѣшенія такого вопроса для одного извѣстнаго частнаго случая задачи о трехъ тѣлахъ.

Еще Лапласомъ было замѣчено, что задача о трехъ тѣлахъ, при произвольномъ законѣ притяженія, допускаетъ частное рѣшеніе, въ которомъ притягивающіяся матерьяльныя точки всегда остаются въ вершинахъ равносторонняго треугольника, плоскость котораго сохраняетъ перпендикулярность къ неизмѣнному направленію въ пространствѣ.

Въ числѣ движеній этого рода находятся между прочимъ такія, въ которыхъ упомянутый треугольникъ остается неизмѣняемымъ. Эти движенія я называю *постоянными*.

Вопросъ объ устойчивости постоянныхъ движеній приводится (въ первомъ приближеніи) къ интегрированію системы линейныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами, и для притяженія, пропорціональнаго какой-либо степени разстоянія, былъ рѣшенъ Routh'омъ *). Предполагая возмущенія такими, вслѣдствіе которыхъ движеніе плоскости треугольника не нарушается, Routh пришелъ къ слѣдующему результату: Если притяженіе пропорціонально произведенію изъ массъ и обратно пропорціонально N-ой степени разстоянія, то при $N > 3$ движеніе

*) Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. VI. 1875. Менѣе подробное рѣшеніе той-же задачи можно найти въ сочиненіи Routh'a: „Dynamik of a system of rigid bodies“. Part II. 1884.

всегда неустойчиво. Если-же $N < 3$, и M, m, m' суть массы трехъ матерьяльныхъ точекъ, то оно устойчиво, когда выполнено условіе

$$\frac{(M+m+m')^2}{Mm+Mm'+mm'} > 3\left(\frac{1+N}{3-N}\right)^2.$$

Изъ послѣдняго слѣдуетъ, что при $N < 1$ движеніе всегда устойчиво.

Здѣсь признакомъ устойчивости считается то обстоятельство, чтобы послѣ безконечно-малыхъ возмущеній стороны треугольника въ каждый моментъ послѣдующаго движенія безконечно-мало отличались отъ той неизмѣнной длины, которую онѣ сохраняли въ невозмущенномъ движеніи.

Если-же удержать, какъ признакъ устойчивости, только то требованіе, чтобы послѣ безконечно-малыхъ возмущеній треугольникъ во все время движенія безконечно-мало отличался отъ равносторонняго (т. е. чтобы углы его безконечно-мало отличались отъ $\frac{\pi}{3}$), то можетъ быть поставленъ вопросъ и объ устойчивости непостоянныхъ движеній разсматриваемаго рода.

Въ особенности интересно было-бы рѣшить этотъ вопросъ для *движеній періодическихъ*, т. е. тѣхъ, въ которыхъ стороны треугольника съ теченіемъ времени періодически измѣняются между извѣстными предѣлами.

Въ предлагаемомъ изслѣдованіи показывается, къ чему приводится рѣшеніе этого вопроса, если при интегрированіи дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія ограничиться однимъ первымъ приближеніемъ. Такое ограниченіе, конечно, равносильно замѣнѣ разсматриваемой задачи нѣкоторою другою, простѣйшею.

Это изслѣдованіе состоитъ изъ трехъ главъ. Первая содержитъ выводъ дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія и нѣкоторыя замѣчанія о ихъ интегрированіи. Во второй рѣшеніе вопроса объ устойчивости приводится къ опредѣленію двухъ постоянныхъ. Въ третьей излагаются два способа для приближеннаго вычисленія этихъ постоянныхъ; и здѣсь-же рѣшаются нѣкоторые вопросы объ устойчивости. Перечисленіе полученныхъ при этомъ результатовъ читатель найдетъ въ концѣ всего изслѣдованія.

Законъ притяженія я предполагаю произвольнымъ, подчиняя функцію разстоянія, которою выражается притяженіе, только нѣкоторымъ условіямъ общаго характера.

Также и возмущенія я оставляю совершенно произвольными. Изъ полученныхъ мною уравненій видно, что ограниченіе, которое дѣлаетъ въ этомъ отношеніи Routh, по крайней мѣрѣ въ первомъ приближеніи, не имѣетъ существеннаго значенія.

I.

1. Точкою отправленія намъ будутъ служить дифференціальныя уравненія движенія задачи о трехъ тѣлахъ въ особой формѣ, подобной той, которою пользуется Routh.

Пусть M, m и m' суть наши матерьяльныя точки. Массы ихъ будемъ означать тѣми-же буквами.

Пусть r, r' и R суть разстоянія Mm, Mm' и mm', и ψ, φ, φ' — углы треугольника соотвѣтственно при точкахъ: M, m и m'.

Разсматриваемъ неизмѣняемую систему, опредѣляемую точкою M, направленіемъ Mm и плоскостью треугольника Mmm'. Угловую скорость этой системы опредѣляемъ ея проэкціями: ω_1 — на направленіе Mm, ω_2 — на направленіе перпендикуляра къ Mm въ плоскости Mmm', составляющее острый уголъ съ направленіемъ Mm', и ω_3 — на направленіе перпендикуляра къ плоскости Mmm'.

Величины r, r', ψ, ω_1, ω_2, ω_3 будутъ неизвѣстными функціями времени t въ разсматриваемой задачѣ, для которыхъ составлены ниже дифференціальныя уравненія. Первыя три изъ этихъ уравненій получаются изъ разсмотрѣнія относительнаго движенія точки m по отношенію къ только-что упомянутой неизмѣняемой системѣ, а послѣднія три — изъ разсмотрѣнія относительнаго движенія точки m' по отношенію къ неизмѣняемой системѣ, опредѣляемой точкою M, направленіемъ Mm' и плоскостью Mmm'.

Если взаимное притяженіе всякихъ двухъ массъ μ и μ', находящихся одна отъ другой въ разстояніи r, выражается формулой $\mu\mu' f(r)$, то уравненія эти будутъ слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r}{dt^2} - r(\omega_2^2 + \omega_3^2) + (M+m)f(r) + \\
&\qquad + m'f(r')\cos\psi + m'f(R)\cos\varphi = 0\,, \\
&\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\omega_3) + r\omega_1\omega_2 + m'f(r')\sin\psi - m'f(R)\sin\varphi = 0\,, \\
&\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\omega_2) - r\omega_1\omega_3 = 0\,, \\
&\frac{d^2r'}{dt^2} - r'(\omega'^2_2 + \omega'^2_3) + (M+m')f(r') + \\
&\qquad + mf(r)\cos\psi + mf(R)\cos\varphi' = 0\,, \\
&\frac{1}{r'}\frac{d}{dt}(r'^2\omega'_3) + r'\omega'_1\omega'_2 + mf(R)\sin\varphi' - mf(r)\sin\psi = 0\,, \\
&\frac{1}{r'}\frac{d}{dt}(r'^2\omega'_2) - r'\omega'_1\omega'_3 = 0\,,
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (1)$$

*

гдѣ

$$\omega'_1 = \omega_1 \cos\psi + \omega_2 \sin\psi\,,$$

$$\omega'_2 = -\,\omega_1 \sin\psi + \omega_2 \cos\psi\,,$$

$$\omega'_3 = \omega_3 + \frac{d\psi}{dt}\,,$$

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi}\,,$$

$$\sin\varphi = \frac{r'}{R}\sin\psi\,, \qquad \sin\varphi' = \frac{r}{R}\sin\psi\,.$$

Этимъ уравненіямъ мы можемъ удовлетворить, полагая

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \psi = \frac{\pi}{3}\,, \quad r = r' = \varrho, \quad \omega_3 = \omega\,,$$

и подчиняя ϱ и ω уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varrho}{dt^2} - \varrho\omega^2 + (M+m+m')\,f(\varrho) = 0\,, \\ \varrho^2\omega = C\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

гдѣ C постоянная произвольная.

Получаемое такимъ образомъ движеніе будемъ называть *Лапласовымъ*.

Вмѣсто времени t примемъ за независимую перемѣнную полярный уголъ ϑ, опредѣляемый уравненіемъ:

$$\omega dt = C\frac{dt}{\varrho^2} = d\vartheta\,,$$

и положимъ

$$\frac{M+m+m'}{C^2} = g\,.$$

Тогда первое изъ уравненій (2) обратится въ слѣдующее

$$\frac{d^2\frac{1}{\varrho}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{\varrho} - gf(\varrho)\varrho^2 = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

откуда найдемъ:

$$d\vartheta = \pm\frac{d\frac{1}{\varrho}}{\sqrt{h - \frac{1}{\varrho^2} - 2g\int f(\varrho)\,d\varrho}} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Здѣсь h постоянная произвольная.

Постоянныя g и h характеризуютъ Лапласово движеніе.

Предположимъ функцію $f(\varrho)$ и эти постоянныя такими, чтобы уравненіе

$$h - \frac{1}{\varrho^2} - 2g \int f(\varrho)\, d\varrho = 0 ,$$

имѣло въ числѣ другихъ два *простыхъ* положительныхъ корня ϱ_0 и $\varrho_1 > \varrho_0$, и чтобы для $\varrho_0 < \varrho < \varrho_1$ постоянно было

$$h - \frac{1}{\varrho^2} - 2g \int f(\varrho)\, d\varrho > 0 .$$

При этомъ, если начальное значеніе ϱ заключается между предѣлами ϱ_0 и ϱ_1, то получается періодическое движеніе разсматриваемаго рода, въ которомъ ϱ будетъ періодической функціей ϑ съ періодомъ:

$$\Omega = 2 \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\varrho \sqrt{h\varrho^2 - 1 - 2g\varrho^2 \int f(\varrho)\, d\varrho}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Въ постоянныхъ Лапласовыхъ движеніяхъ постоянныя величины ϱ и ω связаны уравненіемъ:

$$(M + m + m') f(\varrho) = \varrho\omega^2 .$$

При томъ

$$g\varrho^3 f(\varrho) = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Разсматривая одно изъ Лапласовыхъ движеній, какъ невозмущенное, выведемъ дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія, ограничиваясь первымъ приближеніемъ.

2. Полагаемъ:

$$r = \varrho(1 + \xi) , \qquad r' = \varrho(1 + \xi + x) ,$$

$$\psi = \frac{\pi}{3} + y , \qquad \omega_3 = \omega(1 + \eta),$$

и разсматриваемъ величины x, y, ξ, η, ω_1, ω_2 и ихъ производныя по t, какъ безконечно-малыя одного и того-же порядка.

При этомъ, удерживая въ разложеніяхъ только члены не выше перваго порядка, найдемъ:

$$R = \varrho\left(1 + \xi + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right),$$

$$\cos\psi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad \sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}y,$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y,$$

$$\cos\varphi' = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y, \quad \sin\varphi' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y,$$

$$\omega'_3 = \omega(1+\eta) + \frac{dy}{dt},$$

$$\omega'_1 = \frac{1}{2}\omega_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_2, \quad \omega'_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2.$$

Предполагая функцію $f(r)$ такою, чтобы функція $f(\varrho+\zeta)$ для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній ϱ и для достаточно малыхъ ζ была разложима въ абсолютно сходящійся рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ζ, вносимъ эти величины въ уравненія (1) и удерживаемъ въ послѣднихъ только члены не выше перваго порядка. Тогда уравненія эти, послѣ сокращенія членовъ нулеваго порядка вслѣдствіе (2), примутъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d^2\varrho\xi}{dt^2} - \varrho\omega^2\xi - 2\varrho\omega^2\eta + (M+m+m')\varrho f'(\varrho)\xi -$$
$$- m'\Big(f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)\Big)\left(\frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y\right) = 0, \quad \ldots\ldots (7)$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}\varrho^2\omega(2\xi+\eta) + m'\Big(f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)\Big)\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y\right) = 0, \quad \ldots (8)$$

$$\frac{d^2\varrho(\xi+x)}{dt^2} - \varrho\omega^2(\xi + x + 2\eta) - 2\varrho\omega\frac{dy}{dt} +$$
$$+ (M+m+m')\varrho f'(\varrho)(\xi+x) + m\Big(f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)\Big)\left(\frac{3}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y\right) = 0, \quad . (9)$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}\varrho^2\left(2\omega(\xi+x) + \omega\eta + \frac{dy}{dt}\right) -$$
$$- m\Big(f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)\Big)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y\right) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}(\varrho^2\omega_2) - \varrho\omega\omega_1 = 0\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}\varrho^2(\omega_2 - \sqrt{3}\,\omega_1) - \varrho\omega(\sqrt{3}\,\omega_2 + \omega_1) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (12)$$

Въ этой системѣ уравненія (9), (10) и (12) вслѣдствіе (7), (8) и (11) приводятся къ болѣе простому виду:

$$\frac{d^2\varrho x}{dt^2} - \varrho\omega^2 x - 2\varrho\omega\frac{dy}{dt} + (M + m + m')\varrho f'(\varrho)x +$$

$$+ \Big(f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)\Big)\left(\frac{3}{4}(m + m')x - \frac{\sqrt{3}}{4}(m - m')y\right) = 0\,, \; . \; . \; (13)$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}\varrho^2\left(2\omega x + \frac{dy}{dt}\right) - \Big(f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)\Big)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(m - m')x + \frac{3}{4}(m + m')y\right) = 0\,,$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}(\varrho^2\omega_1) + \varrho\omega\omega_2 = 0\,.$$

Наконецъ, при помощи (2) можемъ привести уравненія (7) и (13) къ виду:

$$\frac{d^2\varrho\xi}{dt^2} - \xi\frac{d^2\varrho}{dt^2} - 2\varrho\omega^2\eta - (M + m + m')\Big(f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)\Big)\xi -$$

$$- m'\Big(f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)\Big)\left(\frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y\right) = 0\,,$$

$$\frac{d^2\varrho x}{dt^2} - x\frac{d^2\varrho}{dt^2} - 2\varrho\omega\frac{dy}{dt} - (M + m + m')\Big(f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)\Big)x +$$

$$+ \Big(f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)\Big)\left(\frac{3}{4}(m + m')x - \frac{\sqrt{3}}{4}(m - m')y\right) = 0\,.$$

Принимаемъ за независимую перемѣнную во всѣхъ этихъ уравненіяхъ опредѣленный выше уголъ ϑ. Тогда замѣчая, что вообще

$$\frac{d^2\varrho\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \frac{C^2}{\varrho^3}\frac{d^2\zeta}{d\vartheta^2}\,,$$

и полагая для сокращенія

$$\frac{M + m + m'}{C^2} = g\,, \quad g\varrho^3\Big(f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)\Big) = u\,, \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

$$\frac{3}{4}\,\frac{m+m'}{M+m+m'}=\mu\,, \quad \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{m-m'}{M+m+m'}=\mu'\,, \quad \ldots \; (15)$$

получимъ окончательно слѣдующую систему уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{d\vartheta^2}-2\,\frac{dy}{d\vartheta}=u\Big((1-\mu)x+\mu' y\Big)\,, \\ &\frac{d^2y}{d\vartheta^2}+2\,\frac{dx}{d\vartheta}=u\,(\mu' x+\mu y)\,, \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; (16)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\xi}{d\vartheta^2}-2\eta-u\xi=\frac{\mu-\sqrt{3}\,\mu'}{2}\,u\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,y+x\right)\,, \\ &\frac{d\eta}{d\vartheta}+2\,\frac{d\xi}{d\vartheta}=\frac{\mu-\sqrt{3}\,\mu'}{2}\,u\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,x-y\right)\,, \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; (17)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varrho^2\omega_1}{d\vartheta}+\varrho^2\omega_2=0\,, \\ &\frac{d\varrho^2\omega_2}{d\vartheta}-\varrho^2\omega_1=0\,. \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (18)$$

3. Изъ полученныхъ нами уравненій уравненія (18) тотчасъ-же интегрируются и даютъ:

$$\varrho^2\omega_1 = A\sin\vartheta + B\cos\vartheta\,,$$
$$\varrho^2\omega_2 = -A\cos\vartheta + B\sin\vartheta\,,$$

гдѣ A и B постоянныя произвольныя.

Отсюда видно, что ω_1 и ω_2 остаются всегда безконечно-малыми одного порядка съ своими начальными значеніями, если ϱ никогда не обращается въ нуль. Это послѣднее условіе мы будемъ всегда предполагать удовлетвореннымъ.

Затѣмъ легко показать, что если функціи x и y, удовлетворяющія уравненіямъ (16), найдены, то функціи ξ и η, удовлетворяющія уравненіямъ (17), найдутся при помощи квадратуръ и дифференцированій.

Для этого прежде всего замѣтимъ слѣдующее свойство уравненій (16):

Если за неизвѣстныя функціи вмѣсто x и y принять x_1 и y_1, связанныя съ первыми уравненіями

$$x+ay=x_1\,, \quad y-ax=y_1\,,$$

гдѣ a какая-либо постоянная, то для опредѣленія ихъ получатся уравненія прежняго типа:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{d\vartheta^2} - 2\frac{dy_1}{d\vartheta} &= u\left((1-\mu_1)x_1 + \mu'_1 y_1\right), \\ \frac{d^2y_1}{d\vartheta^2} + 2\frac{dx_1}{d\vartheta} &= u\left(\mu'_1 x_1 + \mu_1 y_1\right), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (19)$$

гдѣ

$$\mu_1 = \frac{\mu - 2\mu' a + (1-\mu)a^2}{1+a^2},$$

$$\mu'_1 = \frac{\mu' + (2\mu - 1)a - \mu' a^2}{1+a^2},$$

Опредѣлимъ a и новую постоянную b изъ условія

$$\mu'_1 x_1 + \mu_1 y_1 = b\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x - y\right) \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

Послѣднее дастъ для нихъ уравненія

$$\mu_1 + \mu'_1 a = -b, \quad \mu'_1 - \mu_1 a = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

вслѣдствіе которыхъ удовлетворится также условіе

$$-\mu_1 x_1 + \mu'_1 y_1 = b\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y + x\right) \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

При томъ величины a и b, слѣдующія изъ уравненій (21), будутъ:

$$a = \frac{\mu + \mu'\sqrt{3}}{\mu' + (1-\mu)\sqrt{3}}, \quad b = -\frac{\mu - \mu^2 - \mu'^2}{\mu' + (1-\mu)\sqrt{3}}\sqrt{3}.$$

Но вслѣдствіе (19), (20) и (22) уравненія (17) могутъ быть представлены подъ видомъ:

$$\frac{d^2\xi}{d\vartheta^2} - 2\eta - u\xi = \frac{\mu - \sqrt{3}\mu'}{2b}\left(\frac{d^2x_1}{d\vartheta^2} - 2\frac{dy_1}{d\vartheta} - ux_1\right),$$

$$\frac{d\eta}{d\vartheta}+2\frac{d\xi}{d\vartheta}=\frac{\mu-\sqrt{3}\,\mu'}{2b}\left(\frac{d^2y_1}{d\vartheta^2}+2\frac{dx_1}{d\vartheta}\right),$$

а отсюда слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{\mu-\sqrt{3}\,\mu'}{2b}x_1+\Xi\,,\\ \eta&=\frac{\mu-\sqrt{3}\,\mu'}{2b}\frac{dy_1}{d\vartheta}+\Upsilon\,,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(23)$$

гдѣ Ξ и Υ общія величины, удовлетворяющія уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\Xi}{d\vartheta^2}-2\Upsilon-u\Xi=0\,,\\ &\frac{d\Upsilon}{d\vartheta}+2\frac{d\Xi}{d\vartheta}=0\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(24)$$

Наконецъ, замѣчая, что этими послѣдними уравненіями опредѣляется переходъ отъ одного Лапласова движенія къ другому такому-же, въ которомъ постоянныя g и h безконечно-мало отличаются отъ своихъ значеній въ первомъ движеніи, находимъ общій интегралъ этихъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\Xi&=\frac{1}{\varrho^3}\frac{d\varrho}{d\vartheta}\int\frac{C_2\varrho^6-C_1\varrho^4}{\left(\dfrac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2}d\vartheta+\frac{C_3}{\varrho^3}\frac{d\varrho}{d\vartheta}\,,\\ \Upsilon&=-2\Xi+C_1\,,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(25)$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 постоянныя произвольныя *).

Такимъ образомъ, если x и y извѣстны, то ξ и η найдутся по формуламъ (25) и (23). Послѣднія, если въ нихъ подставить вмѣсто x_1, y_1, a, b ихъ значенія и затѣмъ μ и μ' замѣнить ихъ выраженіями (15), примутъ видъ:

---

*) Формулы эти легко провѣрить, замѣчая, что вслѣдствіе (3) выраженіе (14) приводится къ виду

$$u=4+\frac{\dfrac{d^3v}{d\vartheta^3}}{\dfrac{dv}{d\vartheta}}\,,$$

гдѣ $v=\dfrac{1}{\rho^2}$.

$$\left.\begin{aligned}\xi &= -\frac{\left(M+\frac{m}{2}\right)m'x+\frac{\sqrt{3}}{2}mm'y}{Mm+Mm'+mm'}+\Xi\,,\\ \eta &= -\frac{\left(M+\frac{m}{2}\right)m'\frac{dy}{d\vartheta}-\frac{\sqrt{3}}{2}mm'\frac{dx}{d\vartheta}}{Mm+Mm'+mm'}+\Upsilon\,.\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots (26)$$

При томъ, если мы положимъ здѣсь $\Xi = \Upsilon = 0$, то это будетъ только равносильно предположенію, что вмѣсто прежняго Лапласова движенія берется для сравненія съ возмущеннымъ нѣкоторое новое такое-же, въ которомъ постоянныя g и h безконечно-мало отличаются отъ своихъ прежнихъ значеній.

Возвращаемся теперь къ уравненіямъ (16).

При помощи вышеприведенной подстановки преобразовываемъ ихъ къ виду (19). Затѣмъ можемъ воспользоваться неопредѣленностью параметра a для приведенія послѣднихъ уравненій къ возможно болѣе простому виду. Мы остановимся на такомъ выборѣ a, для котораго $\mu'_1 = 0$.

Такимъ образомъ получимъ уравненіе

$$\mu' a^2 - (2\mu - 1)a - \mu' = 0\,.$$

Называя соотвѣтствующую величину μ_1 черезъ λ, найдемъ для нея въ силу этого уравненія слѣдующее выраженіе:

$$\lambda = \mu - \mu' a\,.$$

Поэтому для опредѣленія λ получимъ уравненіе:

$$\lambda^2 - \lambda + \mu - \mu^2 - \mu'^2 = 0\,,$$

которое вслѣдствіе формулъ (15) приводится къ виду:

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{3}{4}\,\frac{Mm+Mm'+mm'}{(M+m+m')^2} = 0 \quad \ldots\ldots (27)$$

Если теперь назовемъ величины x_1 и y_1, соотвѣтствующія разсматриваемому опредѣленію a, черезъ X и Y, то будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \frac{\mu - \lambda}{\mu'} y\,, \\ Y &= y - \frac{\mu - \lambda}{\mu'} x\,, \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (28)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2X}{d\vartheta^2} - 2\,\frac{dY}{d\vartheta} &= (1-\lambda)\,u\,X\,, \\ \frac{d^2Y}{d\vartheta^2} + 2\,\frac{dX}{d\vartheta} &= \lambda\,u\,Y\,. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (29)$$

Вопросъ приводится такимъ образомъ къ интегрированію уравненій (29).

Въ этихъ уравненіяхъ λ есть какой-либо изъ корней уравненія (27). Послѣдніе-же, какъ нетрудно убѣдиться, всегда вещественны и заключаются: одинъ — между 0 и $\frac{1}{2}$, другой — между $\frac{1}{2}$ и 1. При томъ, этихъ предѣловъ они могутъ достигать только въ двухъ случаяхъ: когда масса одной изъ точекъ безконечно-велика сравнительно съ массами двухъ остальныхъ, или когда массы всѣхъ трехъ точекъ равны между собою. Въ первомъ случаѣ корни уравненія (27) суть 0 и 1; во второмъ оба корня равны $\frac{1}{2}$.

4. Проинтегрировать уравненія (29), не дѣлая никакихъ частныхъ предположеній относительно функціи u и постоянной λ, едва-ли возможно.

Мы обратимъ вниманіе только на слѣдующую теорему: если найдены двѣ системы частныхъ рѣшеній уравненій (29), удовлетворяющія нѣкоторому условію, то окончательное интегрированіе ихъ приводится къ квадратурамъ.

Пусть X_i, Y_i и X_j, Y_j суть двѣ какія-либо системы частныхъ рѣшеній. Будемъ имѣть:

$$X_i \frac{d^2X_j}{d\vartheta^2} - X_j \frac{d^2X_i}{d\vartheta^2} - 2X_i \frac{dY_j}{d\vartheta} + 2X_j \frac{dY_i}{d\vartheta} = 0\,,$$

$$Y_i \frac{d^2Y_j}{d\vartheta^2} - Y_j \frac{d^2Y_i}{d\vartheta^2} + 2Y_i \frac{dX_j}{d\vartheta} - 2Y_j \frac{dX_i}{d\vartheta} = 0\,.$$

Складывая почленно эти уравненія и затѣмъ интегрируя, находимъ:

$$X_i \frac{dX_j}{d\vartheta} - X_j \frac{dX_i}{d\vartheta} + Y_i \frac{dY_j}{d\vartheta} - Y_j \frac{dY_i}{d\vartheta} + 2(Y_iX_j - Y_jX_i) = \text{const}\,.$$

Такимъ условіемъ связаны всякія двѣ системы рѣшеній уравненій (29).

Означая первую часть этого условія черезъ (X_i, X_j), покажемъ, что всегда можно найти такія двѣ различныя системы частныхъ рѣшеній X_i, Y_i и X_j, Y_j, для которыхъ $(X_i, X_j) = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, если (X_i, X_j) не равно нулю, пусть X_l, Y_l новая система частныхъ рѣшеній, отличная отъ двухъ предыдущихъ, такъ-что между X_i, X_j и X_l не существуетъ зависимости вида

$$C_i X_i + C_j X_j + C_l X_l = 0 ,$$

гдѣ C_i, C_j и C_l постоянныя. Система частныхъ рѣшеній

$$X = a X_j + X_l ,$$

$$Y = a Y_j + Y_l ,$$

гдѣ a какая-либо постоянная, также будетъ отличною отъ системъ X_i, Y_i и X_j, Y_j. При томъ найдемъ

$$(X_i, X) = a(X_i, X_j) + (X_i, X_l) ,$$

и если припишемъ a значеніе

$$a = -\frac{(X_i, X_l)}{(X_i, X_j)} ,$$

то будемъ имѣть

$$(X_i, X) = 0 .$$

Пусть найдены двѣ различныя системы частныхъ рѣшеній X_1, Y_1 и X_2, Y_2, удовлетворяющія условію

$$(X_1, X_2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Покажемъ, что окончательное интегрированіе уравненій (29) приводится къ квадратурамъ.

Пусть X и Y какія-либо функціи, удовлетворяющія уравненіямъ (29). Будемъ имѣть:

$$(X_1, X) = C_1 , \quad (X_2, X) = C_2 , \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

гдѣ C_1 и C_2 постоянныя. Легко также убѣдиться, что всякія функціи X и Y, удовлетворяющія уравненіямъ (31) при *произвольныхъ* постоянныхъ C_1 и C_2, удовлетворятъ также уравненіямъ (29).

Въ самомъ дѣлѣ, дифференцированіемъ уравненій (31) находимъ:

$$X_1\left(\frac{d^2X}{d\vartheta^2}-2\frac{dY}{d\vartheta}\right)-X\left(\frac{d^2X_1}{d\vartheta^2}-2\frac{dY_1}{d\vartheta}\right)+$$

$$+Y_1\left(\frac{d^2Y}{d\vartheta^2}+2\frac{dX}{d\vartheta}\right)-Y\left(\frac{d^2Y_1}{d\vartheta^2}+2\frac{dX_1}{d\vartheta}\right)=0\,,$$

$$X_2\left(\frac{d^2X}{d\vartheta^2}-2\frac{dY}{d\vartheta}\right)-X\left(\frac{d^2X_2}{d\vartheta^2}-2\frac{dY_2}{d\vartheta}\right)+$$

$$+Y_2\left(\frac{d^2Y}{d\vartheta^2}+2\frac{dX}{d\vartheta}\right)-Y\left(\frac{d^2Y_2}{d\vartheta^2}+2\frac{dX_2}{d\vartheta}\right)=0\,,$$

или

$$X_1\left(\frac{d^2X}{d\vartheta^2}-2\frac{dY}{d\vartheta}-(1-\lambda)uX\right)+Y_1\left(\frac{d^2Y}{d\vartheta^2}+2\frac{dX}{d\vartheta}-\lambda uY\right)=0\,,$$

$$X_2\left(\frac{d^2X}{d\vartheta^2}-2\frac{dY}{d\vartheta}-(1-\lambda)uX\right)+Y_2\left(\frac{d^2Y}{d\vartheta^2}+2\frac{dX}{d\vartheta}-\lambda uY\right)=0\,,$$

откуда вслѣдствіе сдѣланнаго предположенія о различности системъ X_1, Y_1 и X_2, Y_2, которое равносильно предположенію, что $X_1Y_2-X_2Y_1$ не равно нулю, получаемъ уравненія (29).

Такимъ образомъ общій интегралъ уравненій (31) при произвольности постоянныхъ C_1 и C_2 дастъ общій интегралъ уравненій (29).

Положимъ

$$X=P_1X_1+P_2X_2\,,\qquad Y=P_1Y_1+P_2Y_2\,.$$

Тогда вслѣдствіе (30) уравненія (31) примутъ видъ:

$$(X_1{}^2+Y_1{}^2)\frac{dP_1}{d\vartheta}+(X_1X_2+Y_1Y_2)\frac{dP_2}{d\vartheta}=C_1\,,$$

$$(X_1X_2+Y_1Y_2)\frac{dP_1}{d\vartheta}+(X_2{}^2+Y_2{}^2)\frac{dP_2}{d\vartheta}=C_2\,,$$

а отсюда, полагая для сокращенія

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = Z,$$

найдемъ:

$$P_1 = C_1 \int \frac{X_2{}^2 + Y_2{}^2}{Z^2} d\vartheta - C_2 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta + \text{const.},$$

$$P_2 = - C_1 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta + C_2 \int \frac{X_1{}^2 + Y_1{}^2}{Z^2} d\vartheta + \text{const}.$$

Такимъ образомъ, если

$$\left.\begin{aligned} X_3 &= X_1 \int \frac{X_2{}^2 + Y_2{}^2}{Z^2} d\vartheta - X_2 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta, \\ Y_3 &= Y_1 \int \frac{X_2{}^2 + Y_2{}^2}{Z^2} d\vartheta - Y_2 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta, \\ X_4 &= X_2 \int \frac{X_1{}^2 + Y_1{}^2}{Z^2} d\vartheta - X_1 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta, \\ Y_4 &= Y_2 \int \frac{X_1{}^2 + Y_1{}^2}{Z^2} d\vartheta - Y_1 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (32)$$

мы получаемъ двѣ новыя системы частныхъ рѣшеній X_3, Y_3 и X_4, Y_4, которыя вмѣстѣ съ прежними X_1, Y_1 и X_2, Y_2 даютъ возможность составить общій интегралъ уравненій (29).

Замѣтимъ еще, что въ томъ случаѣ, когда массы всѣхъ трехъ точекъ равны между собою, интегрированіе уравненій (29) приводится къ интегрированію нѣкотораго линейнаго уравненія второго порядка.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ $\lambda = \frac{1}{2}$, а при этомъ уравненіямъ (29) удовлетворимъ, полагая

$$\left.\begin{aligned} X &= S_1 \cos\vartheta + S_2 \sin\vartheta, \\ Y &= - S_1 \sin\vartheta + S_2 \cos\vartheta, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (33)$$

гдѣ S_1 и S_2 суть какія-либо рѣшенія уравненія:

$$\frac{d^2 S}{d\vartheta^2} = \left(\frac{u}{2} - 1\right) S \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (34)$$

При томъ, найдя общій интегралъ этого послѣдняго уравненія, получимъ общій интегралъ уравненій (29) по формуламъ (33), если для S_1 и S_2 возьмемъ двѣ различныя линейныя комбинаціи частныхъ рѣшеній уравненія (34) съ произвольными постоянными коэффиціентами.

Изъ случаевъ, когда уравненіе (34) при непостоянномъ u интегрируется въ квадратурахъ, укажемъ на одинъ: $f(r)=\frac{\alpha}{r}$, гдѣ α нѣкоторая постоянная. Въ этомъ случаѣ по формулѣ (14) находимъ:

$$u=2g\alpha\varrho^2,$$

а потому уравненіе (3), которому удовлетворяетъ ϱ, приводится къ

$$\frac{d^2\frac{1}{\sqrt{u}}}{d\vartheta^2}+\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{\sqrt{u}}{2}=0,$$

изъ котораго слѣдуетъ, что $\frac{1}{\sqrt{u}}$ есть одно изъ частныхъ рѣшеній уравненія (34). Поэтому общій интегралъ его имѣетъ видъ:

$$S=\frac{C_1}{\sqrt{u}}+\frac{C_2}{\sqrt{u}}\int u\,d\vartheta\,, \qquad (35)$$

гдѣ C_1 и C_2 постоянныя произвольныя.

Наконецъ замѣтимъ, что когда $\lambda=0$ или $\lambda=1$, уравненія (29) приводятся къ (24) и, слѣдовательно, интегрируются въ квадратурахъ. Но въ этомъ случаѣ масса одной изъ точекъ безконечно-велика сравнительно съ массами двухъ остальныхъ, и потому задача о трехъ тѣлахъ распадается на двѣ задачи о двухъ тѣлахъ.

II.

5. Переходя теперь къ изслѣдованію устойчивости, разсмотримъ сначала случай, когда u есть постоянная величина.

Въ этомъ случаѣ интегрированіе уравненій (29) вообще даетъ:

$$X=A_1\cos(k_1\vartheta+\alpha_1)+A_2\cos(k_2\vartheta+\alpha_2),$$

$$Y=-\frac{k_1{}^2+(1-\lambda)u}{2k_1}A_1\sin(k_1\vartheta+\alpha_1)-\frac{k_2{}^2+(1-\lambda)u}{2k_2}A_2\sin(k_2\vartheta+\alpha_2),$$

гдѣ A_1, A_2, α_1, α_2 суть произвольныя постоянныя, а $k_1{}^2$ и $k_2{}^2$ корни квадратнаго относительно k^2 уравненія:

$$k^4-(4-u)k^2+\lambda(1-\lambda)u^2=0 \qquad (36)$$

Кромѣ того, непосредственное интегрированіе уравненій (24) даетъ:

$$\Xi = C_1 + C_2 \cos\left(\sqrt{4-u}\,\vartheta + \gamma\right),$$

$$\Upsilon = -2\Xi + \frac{4-u}{2} C_1 ,$$

гдѣ C_1, C_2 и γ произвольныя постоянныя.

Изъ этихъ послѣднихъ выраженій видно, что для устойчивости необходимо условіе

$$4 - u > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Изъ выраженій-же для X и Y видно, что для этого еще необходимо, чтобы обѣ величины k^2, удовлетворяющія уравненію (36), были вещественными, положительными и различными. Выражая это обстоятельство, получаемъ, кромѣ условія (37), еще слѣдующее:

$$\left(\frac{4-u}{u}\right)^2 - 4\lambda(1-\lambda) > 0 , \ldots\ldots \quad (38)$$

при добавочномъ условіи, что $\lambda(1-\lambda)u^2$ не есть нуль.

Величина u можетъ быть постоянною въ двухъ случаяхъ: во первыхъ—для всякой функціи $f(r)$, если разсматриваемое Лапласово движеніе есть постоянное; во вторыхъ—для всякаго Лапласова движенія, но при нѣкоторомъ опредѣленномъ типѣ функціи $f(r)$.

Въ первомъ случаѣ ϱ есть постоянная величина, и формулы (14) и (6) даютъ:

$$u = 1 - \frac{\varrho f'(\varrho)}{f(\varrho)} ,$$

а потому условія (37) и (38), если еще примемъ въ разсчетъ уравненіе (27), приводятся къ слѣдующему виду:

$$\left.\begin{aligned} 3 + \frac{\varrho f'(\varrho)}{f(\varrho)} > 0 , \\ \frac{(M+m+m')^2}{Mm+Mm'+mm'} > 3\left[\frac{\left(1-\frac{\varrho f'(\varrho)}{f(\varrho)}\right)^2}{3+\frac{\varrho f'(\varrho)}{f(\varrho)}}\right] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (39)$$

При $f(\varrho)=\frac{1}{\varrho^N}$ условія эти обращаются въ данныя Routh'омъ.

Замѣтимъ, что первое изъ нихъ есть условіе возможности періодическихъ Лапласовыхъ движеній, безконечно-близкихъ къ разсматриваемому постоянному.

Во второмъ случаѣ изъ условія, что

$$u=g\varrho^3\left(f(\varrho)-\varrho f'(\varrho)\right)=\text{const.}$$

для всякаго ϱ, находимъ:

$$f(\varrho)=\frac{\alpha}{\varrho^3}+\beta\varrho\,,$$

гдѣ α и β постоянныя.

Нетрудно убѣдиться, что въ этомъ случаѣ Лапласовы движенія будутъ періодическими, только когда $1-g\alpha>0$ и $\beta>0$. Неравенство (38), приводящееся къ виду:

$$\frac{(M+m+m')^2}{Mm+Mm'+mm'}>3\left(\frac{g\alpha}{1-g\alpha}\right)^2,$$

представляетъ условіе устойчивости этихъ періодическихъ движеній.

6. Обращаемся теперь къ общему случаю.

Мы будемъ предполагать, что ϱ всегда заключается между предѣлами ϱ_0 и $\varrho_1>\varrho_0$, изъ которыхъ первый не нуль, второй не безконеченъ, и что разсматриваемое Лапласово движеніе есть періодическое, такъ-что ϱ есть періодическая функція ϑ съ періодомъ Ω, опредѣляемымъ формулою (5).

Для этого необходимо, чтобы ϱ_0 и ϱ_1 были простыми корнями уравненія

$$h-\frac{1}{\varrho^2}-2g\int f(\varrho)d\varrho=0\,,\quad\ldots\ldots\ldots\ (40)$$

и чтобы между предѣлами ϱ_0 и ϱ_1 первая часть послѣдняго не обращалась въ нуль, и при томъ была положительною.

Будемъ искать условія, при которыхъ функціи ξ, η, x, y остаются конечными для всякихъ вещественныхъ значеній ϑ. Эти условія и будутъ условіями устойчивости разсматриваемаго движенія.

Прежде всего разсмотримъ выраженія (25) для Ξ и Υ.

Нетрудно убѣдиться, что функціи Ξ и Υ, опредѣляемыя этими формулами, вообще суть слѣдующаго типа

$$P(\vartheta)+\vartheta Q(\vartheta),$$

гдѣ $P(\vartheta)$ и $Q(\vartheta)$ суть періодическія функціи ϑ съ періодомъ Ω.

Но изъ уравненія (пар. 1)

$$C\frac{dt}{\varrho^2}=d\vartheta,$$

въ которомъ, чтобы остановиться на чемъ-либо опредѣленномъ, будемъ считать C положительнымъ, слѣдуетъ, что ϑ есть непрерывная возрастающая функція t, получающая приращеніе Ω каждый разъ, какъ t получаетъ приращеніе

$$T=\frac{1}{C}\int_0^{\Omega}\varrho^2 d\vartheta .$$

Поэтому всякая функція типа

$$P(\vartheta)+\vartheta Q(\vartheta)$$

приводится къ виду

$$p(t)+tq(t),$$

гдѣ $p(t)$ и $q(t)$ суть періодическія функціи t съ періодомъ T.

Такого вида будутъ, слѣдовательно, вообще Ξ и Υ, какъ функціи t.

Отсюда слѣдуетъ, что если признакомъ устойчивости считать то обстоятельство, чтобы въ возмущенномъ движеніи стороны треугольника всегда безконечно мало отличались отъ тѣхъ длинъ, которыя имъ соотвѣтствовали-бы въ невозмущенномъ движеніи *въ тотъ-же моментъ времени*, то непостоянныя Лапласовы движенія вообще неустойчивы.

Это обстоятельство впрочемъ очевидно изъ слѣдующихъ соображеній:

Когда мы переходимъ отъ одного періодическаго Лапласова движенія къ другому, то при этомъ вообще измѣняется и періодъ T, а коль скоро это происходитъ, то хотя-бы постоянныя g и h, характеризующія новое движеніе, и отличались безконечно-мало отъ своихъ прежнихъ значеній, очевидно, что разности между одновременными длинами сторонъ треугольника въ обоихъ движеніяхъ, не могутъ оставаться всегда безконечно-малыми. Послѣднее возможно только при условіи, что періодъ T не измѣнился.

Интересно найти законъ притяженія, для котораго періодическія Лапласовы движенія могутъ быть устойчивыми въ только-что опредѣленномъ смыслѣ. Вопросъ этотъ, по только-что замѣченному, приводится къ разысканію такого закона притяженія, для котораго періодъ T въ этихъ движеніяхъ не зависитъ отъ постоянныхъ g и h.

Мы рѣшимъ этотъ вопросъ при сдѣланномъ уже предположеніи относительно функціи $f(\varrho)$, что $f(\varrho+\zeta)$ для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній ϱ и для достаточно малыхъ ζ разложима въ рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ζ. То-же предположеніе дѣлаетъ Бертранъ, разыскивая всевозможные законы притяженія, для которыхъ траекторія точки, притягиваемой неподвижнымъ центромъ, есть всегда замкнутая кривая *). Пріемъ нашъ будетъ вполнѣ аналогиченъ Бертранову.

Полагая

$$\frac{1}{\varrho}=s\,, \qquad \int f(\varrho)\,d\varrho=\varphi(s)\,,$$

приводимъ уравненіе (4) къ виду:

$$d\vartheta=\pm\frac{ds}{\sqrt{h-s^2-2g\,\varphi(s)}}\,.$$

При томъ имѣемъ:

$$dt=\frac{\varrho^2}{C}\,d\vartheta=\sqrt{\frac{g}{M+m+m'}}\,\frac{d\vartheta}{s^2}\,.$$

Поэтому, если положимъ

$$\frac{1}{\varrho_0}=s_0\,, \qquad \frac{1}{\varrho_1}=s_1\,,$$

то найдемъ:

$$T=2\sqrt{\frac{g}{M+m+m'}}\int\limits_{s_1}^{s_0}\frac{ds}{s^2\sqrt{h-s^2-2g\,\varphi(s)}}\,.$$

Но изъ уравненій

$$h-s_0{}^2-2g\,\varphi(s_0)=0\,,$$

$$h-s_1{}^2-2g\,\varphi(s_1)=0$$

находимъ:

$$h=\frac{s_0{}^2\varphi(s_1)-s_1{}^2\varphi(s_0)}{\varphi(s_1)-\varphi(s_0)}\,, \quad 2g=\frac{s_0{}^2-s_1{}^2}{\varphi(s_1)-\varphi(s_0)}\,,$$

*) Comptes rendus, t. LXXVII, 1873, p. 849.

вслѣдствіе чего формула наша принимаетъ видъ:

$$T=\sqrt{\frac{2(s_0{}^2-s_1{}^2)}{M+m+m'}}\int\limits_{s_1}^{s_0}\frac{ds}{s^2\sqrt{s_0{}^2\varphi(s_1)-s_1{}^2\varphi(s_0)-[\varphi(s_1)-\varphi(s_0)]s^2-(s_0{}^2-s_1{}^2)\varphi(s)}}\,.$$

Вопросъ приводится къ разысканію функціи $\varphi(s)$ изъ условія, чтобы это выраженіе не зависѣло отъ s_1 и s_0.

Сдѣлаемъ подстановку

$$s=s_1+(s_0-s_1)u\,,$$

и предположимъ разность s_0-s_1 на столько малою, чтобы функція $\varphi(s)$ была разложима въ рядъ по восходящимъ степенямъ $(s_0-s_1)u$ для всякаго u, лежащаго между предѣлами 0 и 1.

Тогда предполагая, что $s_1\varphi''(s_1)-\varphi'(s_1)$ не нуль, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій найдемъ:

$$T=\frac{1}{\sqrt{M+m+m'}}\sqrt{\frac{2(s_0+s_1)}{s_1\varphi''(s_1)-\varphi'(s_1)}}\int\limits_0^1\frac{du}{[s_1+(s_0-s_1)u]^2\sqrt{u(1-u)}\sqrt{1+(s_0-s_1)\psi(u)}}\,,$$

гдѣ $\psi(u)$ есть непрерывная функція отъ u, остающаяся конечною при $s_0-s_1=0$.

Для того, чтобы выраженіе это не зависѣло отъ s_1 и s_0, необходимо, чтобы выраженіе

$$\frac{2}{\sqrt{M+m+m'}}\,\frac{1}{\sqrt{s_1{}^4\varphi''(s_1)-s_1{}^3\varphi'(s_1)}}\int\limits_0^1\frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}\,,$$

въ которое оно обращается при $s_0=s_1$, не зависѣло отъ s_1, а для этого функція $\varphi(s)$ должна удовлетворять уравненію:

$$s^4\varphi''(s)-s^3\varphi'(s)=\text{const.}$$

Послѣднее приводится къ виду

$$f'(\varrho)+\frac{3}{\varrho}f(\varrho)=\text{const.}$$

и слѣдовательно даетъ:

$$f(\varrho)=\frac{\alpha}{\varrho^3}+\beta\varrho\,,$$

гдѣ α и β постоянныя.

Что при этомъ законѣ притяженія періодъ T дѣйствительно не зависитъ отъ s_1 и s_0, убѣждаемся непосредственнымъ вычисленіемъ, которое даетъ:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\beta(M + m + m')}} .$$

Такимъ образомъ мы получили тотъ самый законъ притяженія, для котораго устойчивость Лапласовыхъ движеній была изслѣдована въ предыдущемъ параграфѣ. Мы видѣли, что при этомъ законѣ притяженія функціи Ξ и Υ дѣйствительно содержатъ только періодическіе члены.

Далѣе мы будемъ говорить объ устойчивости иного рода. А именно, мы будемъ періодическое Лапласово движеніе считать устойчивымъ, когда послѣ всякихъ безконечно-малыхъ возмущеній, треугольникъ, въ вершинахъ котораго находятся матерьяльныя точки, всегда безконечно-мало отличается отъ равносторонняго, при чемъ стороны его измѣняются между предѣлами, безконечно-мало отличающимися отъ прежнихъ.

Для рѣшенія вопроса объ устойчивости въ этомъ смыслѣ, мы можемъ сравнивать возмущенное движеніе не съ разсматриваемымъ, а съ какимъ-либо другимъ періодическимъ Лапласовымъ движеніемъ, въ которомъ постоянныя g и h имѣютъ значенія, безконечно-мало отличающіяся отъ соотвѣтствующихъ разсматриваемому. Вслѣдствіе этого можемъ предполагать $\Xi = \Upsilon = 0$, откуда слѣдуетъ, что рѣшеніе нашего вопроса исключительно зависитъ отъ интегрированія уравненій, которымъ удовлетворяютъ x и y, или — что все равно — отъ интегрированія уравненій (29).

Теперь и обращаемся къ этимъ уравненіямъ.

7. Мы уже сдѣлали предположеніе, что функція $f(\varrho + \zeta)$ при $\varrho_0 \leqq \varrho \leqq \varrho_1$ разложима въ абсолютно сходящійся рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ζ для всякихъ достаточно малыхъ значеній послѣдняго. Мы примемъ теперь этотъ рядъ за опредѣленіе функціи $f(\varrho + \zeta)$ для комплексныхъ значеній ζ, модули которыхъ достаточно малы.

Такимъ образомъ функція $f(\varrho)$ будетъ опредѣлена для комплексныхъ значеній ϱ, достаточно близкихъ къ вещественнымъ, лежащимъ между предѣлами ϱ_0 и ϱ_1, и для этой области будетъ синектичною.

Уравненіе (4) опредѣлитъ затѣмъ ϱ, какъ періодическую функцію ϑ съ періодомъ Ω, и при томъ синектичную для всякихъ значеній ϑ, достаточно близкихъ къ вещественнымъ, если предположимъ вещественнымъ одно изъ значеній ϑ, для которыхъ $\varrho = \varrho_0$. Функція u, входящая въ уравненія (29), будетъ такого-же характера.

Включивши въ разсмотрѣніе комплексныя значенія ϑ, мы можемъ приложить къ нашимъ уравненіямъ общія теоремы теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій при помощи безконечныхъ рядовъ.

Во первыхъ, изъ свойства синектичности функціи u заключаемъ, что X и Y можно разсматривать, какъ синектичныя функціи ϑ, вблизи всякихъ вещественныхъ конечныхъ значеній ϑ.

Во вторыхъ, изъ періодичности функціи u выводимъ, что если

$$X_i(\vartheta),\ Y_i(\vartheta),\ (i=1,2,3,4)\ \ldots\ldots\ldots (41)$$

суть четыре независимыя системы частныхъ рѣшеній уравненій (29), то

$$\left.\begin{aligned} X_i(\vartheta+\Omega) &= a_{i1}X_1(\vartheta)+a_{i2}X_2(\vartheta)+a_{i3}X_3(\vartheta)+a_{i4}X_4(\vartheta),\\ Y_i(\vartheta+\Omega) &= a_{i1}Y_1(\vartheta)+a_{i2}Y_2(\vartheta)+a_{i3}Y_3(\vartheta)+a_{i4}Y_4(\vartheta),\end{aligned}\right\}\ldots (42)$$

$$(i=1,2,3,4),$$

гдѣ a_{ij} суть нѣкоторыя постоянныя.

При томъ, если уравненіе

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11}-q, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}-q, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}-q, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}-q \end{vmatrix} = 0\ \ldots\ldots (43)$$

приведемъ къ виду

$$q^4+b_1q^3+b_2q^2+b_3q+b_4=0,$$

то коэффиціенты b будутъ оставаться неизмѣнными при замѣнѣ выбранной нами группы (41) какою-либо другою группою четырехъ независимыхъ системъ частныхъ рѣшеній уравненій (29).

Наконецъ, предполагая инваріанты b извѣстными, и называя корни уравненія (43) черезъ q_1, q_2, q_3, q_4, найдемъ общій интегралъ уравненій (29), когда эти корни различны, подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{4} C_i P_i(\vartheta) q_i^{\frac{\vartheta}{\Omega}},\\ Y &= \sum_{i=1}^{4} C_i Q_i(\vartheta) q_i^{\frac{\vartheta}{\Omega}},\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

гдѣ $P(\vartheta)$ и $Q(\vartheta)$ суть періодическія функціи ϑ съ періодомъ Ω, при томъ—однозначныя и непрерывныя для всѣхъ значеній ϑ, достаточно близкихъ къ вещественнымъ, а C — постоянныя произвольныя.

Въ случаѣ равенства между нѣкоторыми изъ корней уравненія (43) выраженія для X и Y будутъ вообще нѣсколько иного вида. А именно, нѣкоторыя изъ постоянныхъ C замѣнятся вообще цѣлыми функціями ϑ степени не выше числа, на единицу меньшаго кратности соотвѣтствующаго корня. Такъ если $q_2 = q_1$, и если *всѣ* миноры опредѣлителя $\triangle$ не обращаются въ нуль при $q = q_1$, то члены выраженія X, соотвѣтствующіе разсматриваемому корню, будутъ вида:

$$(C_1 + C_2\vartheta)P_1(\vartheta)q_1^{\frac{\vartheta}{\Omega}} + C_2P_2(\vartheta)q_1^{\frac{\vartheta}{\Omega}}.$$

Типъ (44) общаго интеграла для двукратнаго корня q_1 сохранится только въ томъ случаѣ, когда при $q = q_1$ всѣ миноры опредѣлителя $\triangle$ обращаются въ нуль. Вообще въ случаѣ μ-кратнаго корня этого уравненія, типъ (44) общаго интеграла сохранится только при условіи, что для этого корня обращаются въ нуль всѣ младшіе опредѣлители опредѣлителя $\triangle$ до порядка μ невключительно *).

Наша задача приводится такимъ образомъ къ составленію и изслѣдованію уравненія (43). Въ случаѣ, когда корни послѣдняго различны, условія устойчивости будутъ состоять въ томъ, чтобы модули этихъ корней были равны или меньше 1. Въ случаѣ кратныхъ корней получатся еще добавочныя условія, если только они возможны, — чтобы кратный корень обращалъ въ нуль всѣ младшіе опредѣлители опредѣлителя $\triangle$ до извѣстнаго порядка.

Къ сожалѣнію, задача о составленіи опредѣлителя $\triangle$ на столько трудна, что можно дать только способы для приближеннаго вычисленія его элементовъ, которые и будутъ изложены далѣе.

Теперь-же покажемъ, что здѣсь задача приводится главнымъ образомъ къ вычисленію только двухъ величинъ, ибо характеристичное уравненіе (43) въ разсматриваемомъ вопросѣ всегда будетъ слѣдующаго типа:

$$\triangle = q^4 - 2Aq^3 + 2Bq^2 - 2Aq + 1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (45)$$

Чтобы доказать это, прежде всего замѣчаемъ, что если $\vartheta = 0$ есть одно изъ значеній ϑ, для которыхъ $\varrho = \varrho_0$, что всегда можно предположить, то ϱ, а слѣд. и u есть четная функція ϑ. Это представляетъ непосредственное слѣдствіе уравненія (4).

*) См. наприм. *Floquet.* „Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques".—Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure. Tome 12, 1883.

Но если u есть четная функція ϑ, то уравненія (29) не мѣняются при одновременной замѣнѣ ϑ черезъ $-\vartheta$ и Y черезъ $-Y$. Поэтому если

$$X = \varphi(\vartheta)\,, \quad Y = \psi(\vartheta)$$

есть какая-либо система рѣшеній этихъ уравненій, то

$$X = \varphi(-\vartheta)\,, \quad Y = -\psi(-\vartheta)$$

представитъ также нѣкоторую систему рѣшеній этихъ уравненій.

Пусть q есть одинъ изъ корней уравненія (43). Мы будемъ имѣть систему частныхъ рѣшеній уравненій (29) слѣдующаго вида

$$X = P(\vartheta) q^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \quad Y = Q(\vartheta) q^{\frac{\vartheta}{\Omega}},$$

гдѣ $P(\vartheta)$ и $Q(\vartheta)$ суть періодическія функціи ϑ съ періодомъ Ω. Но по только-что замѣченному, существованіе этой системы рѣшеній влечетъ за собою заключеніе о существованіи слѣдующей

$$X = P(-\vartheta) q^{-\frac{\vartheta}{\Omega}}, \quad Y = -Q(-\vartheta) q^{-\frac{\vartheta}{\Omega}},$$

въ которой $P(-\vartheta)$ и $Q(-\vartheta)$ суть періодическія функціи ϑ съ тѣмъ-же періодомъ Ω. Эта-же послѣдняя система рѣшеній возможна только при условіи, что $\frac{1}{q}$ есть корень уравненія (43).

И такъ, каждому корню q этого уравненія соотвѣтствуетъ корень $\frac{1}{q}$. Другими словами, уравненіе это должно приводиться къ виду (45).

Наше доказательство основывалось на томъ свойствѣ функціи u, что ее можно разсматривать, какъ четную функцію ϑ. Но разсматриваемая теорема можетъ быть доказана и независимо отъ этого свойства функціи u.

Приводимъ другое доказательство ея.

Прежде всего замѣчаемъ, что корни уравненія (43) вообще различны. Это слѣдуетъ изъ того обстоятельства, что уже въ частномъ случаѣ, когда u есть постоянная величина, корни его вообще различны.

Пусть q_1 и q_2 два различныхъ корня уравненія (43) и при томъ такихъ, что $q_1 q_2$ не равно 1. Мы будемъ имѣть двѣ различныхъ системы частныхъ рѣшеній уравненій (29) слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= P_1(\vartheta)\, q_1^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \quad Y_1 = Q_1(\vartheta)\, q_1^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \\ X_2 &= P_2(\vartheta)\, q_2^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \quad Y_2 = Q_2(\vartheta)\, q_2^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

гдѣ P и Q по прежнему означаютъ періодическія функціи ϑ съ періодомъ Ω.

Составляемъ изъ этихъ частныхъ рѣшеній выраженіе (X_1, X_2) (см. пар. 4). Вслѣдствіе періодичности функцій P и Q, а слѣдовательно — и ихъ производныхъ, выраженіе это, при увеличеніи ϑ на Ω, возвращается къ прежнему значенію, умноженному на величину $q_1 q_2$, отличную отъ 1. Но мы знаемъ, что выраженіе это представляетъ постоянную величину. Поэтому приходимъ къ заключенію, что

$$(X_1, X_2) = 0 .$$

Но въ такомъ случаѣ, какъ мы видѣли въ параграфѣ 4, двѣ другія системы частныхъ рѣшеній X_3, Y_3 и X_4, Y_4, изъ которыхъ вмѣстѣ съ (46) можетъ быть составленъ общій интегралъ уравненій (29), будутъ опредѣляться формулами (32).

Опредѣлимъ болѣе точнымъ образомъ эти частныя рѣшенія.

Будемъ изображать комплексныя значенія ϑ точками на нѣкоторой плоскости, и предположимъ, что во всѣхъ интегралахъ, входящихъ въ формулы (32), интегрированіе начинается отъ какой-либо точки $\vartheta = \vartheta$ на вещественной оси, для которой функція

$$Z = X_1 Y_2 - X_2 Y_1$$

не обращается въ нуль, и затѣмъ ведется до точки, изображающей разсматриваемое значеніе ϑ, по какой-либо кривой, всѣ точки которой достаточно близки къ вещественной оси, и на которой не лежатъ точки, изображающія корни уравненія $Z = 0$. Мы знаемъ, что функціи X и Y для всѣхъ значеній ϑ, достаточно близкихъ къ вещественнымъ, однозначны. Поэтому кривыя эти въ извѣстныхъ предѣлахъ можно выбирать произвольно, не измѣняя значеній интеграловъ. Мы удержимъ для обозначенія послѣднихъ обычныя означенія, принятыя для опредѣленныхъ интеграловъ.

Разсматриваемъ выраженія:

$$X_3 = X_1 \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_2{}^2 + Y_2{}^2}{Z^2}\, d\vartheta - X_2 \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2}\, d\vartheta\,,$$

$$X_4 = X_2 \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_1{}^2 + Y_1{}^2}{Z^2}\, d\vartheta - X_1 \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2}\, d\vartheta\,.$$

Дѣлаемъ въ нихъ замѣну ϑ черезъ $\vartheta + \Omega$; затѣмъ интегралы, взятые въ предѣлахъ отъ ϑ_0 до $\vartheta + \Omega$, преобразовываемъ по слѣдующей схемѣ

$$\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta+\Omega} = \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\Omega} + \int\limits_{\vartheta_0+\Omega}^{\vartheta+\Omega},$$

и наконецъ замѣчаемъ, что при указанной замѣнѣ X_1, Y_1, X_2, Y_2, Z обращаются соотвѣтственно въ $q_1 X_1$, $q_1 Y_1$, $q_2 X_2$, $q_2 Y_2$, $q_1 q_2 Z$, вслѣдствіе чего

$$\int\limits_{\vartheta_0+\Omega}^{\vartheta+\Omega} \frac{X_2{}^2 + Y_2{}^2}{Z^2}\, d\vartheta = \frac{1}{q_1{}^2} \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_2{}^2 + Y_2{}^2}{Z^2}\, d\vartheta\,,$$

$$\int\limits_{\vartheta_0+\Omega}^{\vartheta+\Omega} \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2}\, d\vartheta = \frac{1}{q_1 q_2} \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2}\, d\vartheta\,,$$

$$\int\limits_{\vartheta_0+\Omega}^{\vartheta+\Omega} \frac{X_1{}^2 + Y_1{}^2}{Z^2}\, d\vartheta = \frac{1}{q_2{}^2} \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_1{}^2 + Y_1{}^2}{Z^2}\, d\vartheta\,.$$

Послѣ этихъ преобразованій находимъ:

$$\left.\begin{aligned} X_3(\vartheta + \Omega) &= q_1 c_{22} X_1(\vartheta) - q_2 c_{12} X_2(\vartheta) + \frac{1}{q_1}\, X_3(\vartheta)\,, \\ X_4(\vartheta + \Omega) &= q_2 c_{11} X_2(\vartheta) - q_1 c_{12} X_1(\vartheta) + \frac{1}{q_2}\, X_4(\vartheta)\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (47)$$

гдѣ c_{ij} постоянныя, опредѣляемыя формулами

$$c_{11} = \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\Omega} \frac{X_1{}^2 + Y_1{}^2}{Z^2}\, d\vartheta\,,$$

$$c_{12} = \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\Omega} \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2}\, d\vartheta\,,$$

$$c_{22} = \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\Omega} \frac{X_2{}^2 + Y_2{}^2}{Z^2}\, d\vartheta\,.$$

Присоединивши къ формуламъ (47) слѣдующія

$$X_1(\vartheta + \Omega) = q_1 X_1(\vartheta)\,, \qquad X_2(\vartheta + \Omega) = q_2 X_2(\vartheta)\,,$$

можемъ составить уравненіе (43), которое будетъ слѣдующаго вида:

$$\begin{vmatrix} q_1 - q\,, & 0\,, & 0\,, & 0 \\ 0\,, & q_2 - q\,, & 0\,, & 0 \\ q_1 c_{22}\,, & -q_2 c_{12}\,, & \dfrac{1}{q_1} - q\,, & 0 \\ -q_1 c_{12}\,, & q_2 c_{11}\,, & 0\,, & \dfrac{1}{q_2} - q \end{vmatrix} = 0\,.$$

Корни этого уравненія суть $q_1\,, q_2\,, \dfrac{1}{q_1}$ и $\dfrac{1}{q_2}$.

И такъ, вопросъ приводится вообще къ опредѣленію двухъ постоянныхъ A и B, входящихъ въ уравненіе (45).

Въ частномъ случаѣ $\lambda = \dfrac{1}{2}$ интегрированіе уравненій (29) зависитъ, какъ мы видѣли, отъ интегрированія линейнаго уравненія второго порядка (34). Характеристичное уравненіе $\triangle = 0$, соотвѣтствующее послѣднему, будетъ типа

$$q^2 - 2A_1 q + 1 = 0\,,$$

и потому въ этомъ случаѣ вопросъ приводится къ опредѣленію одной только постоянной A_1.

8. Такъ-какъ каждому корню q уравненія (45) соотвѣтствуетъ корень $\frac{1}{q}$, то условіе устойчивости приводится главнымъ образомъ къ тому, чтобы модули всѣхъ корней этого уравненія были равны 1.

Найдемъ условія, которымъ должны удовлетворять для этого коэффиціенты A и B.

Пусть $e^{\varphi_1 i}, e^{-\varphi_1 i}, e^{\varphi_2 i}, e^{-\varphi_2 i}$, гдѣ $i=\sqrt{-1}$, а φ_1 и φ_2 вещественныя величины, суть всѣ корни уравненія (45).

Будемъ имѣть:

$$A=\cos\varphi_1+\cos\varphi_2\,,\qquad B=1+2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\,,$$

откуда слѣдуетъ, что $\cos\varphi_1$ и $\cos\varphi_2$ суть корни квадратнаго уравненія:

$$x^2-Ax+\frac{B-1}{2}=0\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (48)$$

Условіе, что корни этого уравненія вещественны и различны, выразится неравенствомъ:

$$A^2-2(B-1)>0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (49)$$

а что они по числовымъ значеніямъ меньше 1 — неравенствами:

$$\sqrt{A^2-2(B-1)}<2-A\,,$$

$$\sqrt{A^2-2(B-1)}<2+A\,.$$

Изъ послѣднихъ во первыхъ слѣдуетъ, что

$$2-A>0 \quad \text{и} \quad 2+A>0$$

или

$$A^2<4\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (50)$$

и во вторыхъ — что

$$B+1>2A>-B-1\,,$$

откуда

$$B+1>0 \quad \text{и} \quad A^2<\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (51)$$

Условія (49), (50) и (51) равносильны слѣдующимъ:

$$\left.\begin{array}{c} -1 < B < 3\,, \\ 2(B-1) < A^2 < \left(\dfrac{B+1}{2}\right)^2. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

При этихъ условіяхъ корни уравненія (48) вещественны, различны и по числовымъ значеніямъ меньше 1, а потому корни уравненія (45) различны и имѣютъ модули, равные 1.

Въ предѣльныхъ случаяхъ неравенствъ (52) получается слѣдующее:

При $B=3$ оба корня уравненія (48) равны ± 1, и слѣдовательно всѣ четыре корня уравненія (45) равны ± 1.

При $B=-1$ одинъ корень уравненія (48) равенъ, 1, другой -1, и слѣдовательно — два корня уравненія (45) равны 1, а два остальныхъ равны -1.

При $A^2 = \left(\dfrac{B+1}{2}\right)^2$ одинъ корень уравненія (48) равенъ ± 1, другой представляетъ вообще правильную дробь, и слѣдовательно два корня уравненія (45) равны ± 1, а остальные два вообще отличны отъ ± 1.

При $A^2 = 2(B-1)$ корни уравненія (48) равны, будучи вообще отличными отъ ± 1, и слѣдовательно уравненіе (45) имѣетъ двѣ пары равныхъ корней, вообще отличныхъ отъ ± 1.

Въ непредѣльныхъ случаяхъ условій (52) устойчивость, по крайней мѣрѣ для перваго приближенія, несомнѣнна. Предѣльные случаи требуютъ еще дополнительныхъ изслѣдованій.

III.

9. Обращаемся къ вопросу о приближенномъ вычисленіи инваріантовъ A и B.

Прилагая къ уравненіямъ (29) общую теорію интегрированія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, основанную на изслѣдованіи интеграловъ вблизи ихъ критическихъ точекъ, мы можемъ для каждаго даннаго частнаго вида функціи u найти способы какъ для приближеннаго вычисленія неизвѣстныхъ функцій для каждаго значенія независимой перемѣнной, такъ и для приближеннаго вычисленія постоянныхъ A и B. Способы эти могутъ быть весьма разнообразны какъ въ зависимости отъ вида функціи u, такъ и въ зависимости отъ различныхъ преобразованій, которымъ могутъ быть подвергаемы наши уравненія путемъ перемѣны независимой перемѣнной.

Приложеніе способовъ этого рода въ особенности къ случаю притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія, конечно было-бы не лишено интереса. Но мы отложимъ это до другаго изслѣдованія. Здѣсь-же изложимъ два общихъ для нашей задачи способа, основанныхъ на иныхъ началахъ. Однимъ изъ нихъ можно пользоваться всегда, хотя практически полезенъ онъ можетъ быть только въ случаѣ, когда масса одной изъ точекъ весьма велика сравнительно съ массами двухъ остальныхъ; другимъ — когда разсматриваемое періодическое Лапласово движеніе достаточно близко къ постоянному.

Только-что упомянутые способы основываются на слѣдующей теоремѣ:

Дана система n линейныхъ однородныхъ дифференціальныхъ уравненій съ n неизвѣстными функціями $X_1, X_2, \ldots X_n$ и независимой перемѣнной t:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= P_{11}X_1 + P_{12}X_2 + \ldots + P_{1n}X_n, \\ \frac{dX_2}{dt} &= P_{21}X_1 + P_{22}X_2 + \ldots + P_{2n}X_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dX_n}{dt} &= P_{n1}X_1 + P_{n2}X_2 + \ldots + P_{nn}X_n, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (53)$$

въ которой P_{ij} суть періодическія функціи t съ однимъ и тѣмъ-же вещественнымъ періодомъ ω, содержащія нѣкоторый параметръ α. Называя черезъ T и A нѣкоторыя положительныя постоянныя и черезъ τ — произвольную конечную вещественную величину, допустимъ, что P_{ij} суть синектичныя функціи двухъ перемѣнныхъ t и α для всѣхъ значеній послѣднихъ, удовлетворяющихъ условіямъ:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{mod}(t-\tau) < \mathrm{T}, \\ &\operatorname{mod}\alpha < \mathrm{A}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (54)$$

при всякомъ τ. Тогда, разумѣя подъ $C_1, C_2, \ldots C_n$ произвольно заданныя значенія функцій $X_1, X_2, \ldots X_n$ для какого-либо частнаго вещественнаго значенія t, положимъ, $t = t_0$, и представляя общій интегралъ уравненій (53) подъ видомъ

$$X_j = C_1 Q_j^{(1)} + C_2 Q_j^{(2)} + \ldots + C_n Q_j^{(n)}$$

$$(j = 1, 2, \ldots n),$$

найдемъ, что функціи $Q_j^{(i)}$ разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ α, абсолютно сходящіеся для всѣхъ значеній α и t, удовлетворяющихъ условіямъ (54). Кромѣ того, если

$$q^n + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \ldots + a_{n-1} q + a_n = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (55)$$

есть характеристичное уравненіе, соотвѣтствующее періоду ω, то и инваріанты a_1, a_2 и т. д. разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ α, абсолютно сходящіеся, пока $\mathrm{mod}\,\alpha < \mathrm{A}$.

Теорема эта докажется слѣдующимъ образомъ.

Пусть T_1 и A_1 суть какія-либо положительныя величины, соотвѣтственно меньшія T и A, и пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ суть значенія функцій $X_1, X_2, \ldots X_n$ для $t = \tau$.

Функціи P_{ij} могутъ быть представлены подъ видомъ двойныхъ рядовъ

$$P_{ij} = \sum_{k,\ l=0}^{\infty} A_{ij}^{(kl)} (t-\tau)^k \alpha^l, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (56)$$

абсолютно сходящихся для всѣхъ значеній t и α, удовлетворяющихъ условіямъ:

$$\mathrm{mod}(t-\tau) \leqq \mathrm{T}_1, \qquad \mathrm{mod}\,\alpha \leqq \mathrm{A}_1 .$$

При томъ, если P есть наибольшій изъ модулей всѣхъ значеній функцій P_{ij} для $\mathrm{mod}\,(t-\tau) = \mathrm{T}_1$ и $\mathrm{mod}\,\alpha = \mathrm{A}_1$, то

$$\mathrm{mod}\,A_{ij}^{(kl)} \leqq \frac{P}{\mathrm{T}_1^{\,k} \mathrm{A}_1^{\,l}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (57)$$

Вносимъ въ уравненія (53) вмѣсто каждой изъ функцій P_{ij} ряды (56), а вмѣсто каждой изъ функцій X_j ряды слѣдующаго вида

$$X_j = \Gamma_j + (t-\tau) \sum_{k,\ l=0}^{\infty} B_j^{(kl)} (t-\tau)^k \alpha^l, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (58)$$

и затѣмъ приравниваемъ коэффиценты при одинаковыхъ произведеніяхъ $(t-\tau)^k \alpha^l$ въ обѣихъ частяхъ равенствъ.

Такимъ путемъ получимъ уравненія, изъ которыхъ каждый изъ коэффиціентовъ $B_j^{(kl)}$ найдется подъ видомъ выраженія, линейнаго и однороднаго относительно всѣхъ Γ_i, въ которомъ послѣднія будутъ множителями при цѣлыхъ раціональныхъ функціяхъ съ *положительными* коэффиціентами отъ тѣхъ изъ величинъ $A_{i_1 j_1}^{(k_1 l_1)}$, для которыхъ k_1 не больше k и l_1 не больше l.

Ряды (58) будутъ абсолютно сходящимися для всѣхъ значеній t и α, для которыхъ суть абсолютно сходящіеся ряды, получаемые изъ (58) замѣною коэффиціентовъ $B_j^{(kl)}$ высшими предѣлами ихъ модулей. Но такіе предѣлы получимъ, замѣняя въ упомянутыхъ выраженіяхъ этихъ коэффиціентовъ величины $A_{ij}^{(kl)}$ вторыми частями неравенствъ (57), а величины Γ_j — наибольшимъ изъ ихъ модулей, который назовемъ черезъ Γ. Замѣчая-же, что вслѣдствіе этой замѣны каждая изъ функцій P_{ij} обращается въ

$$\frac{P}{\left(1-\frac{t-\tau}{\mathrm{T}_1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{\mathrm{A}_1}\right)},$$

найдемъ, что при этомъ каждый изъ рядовъ (58) обратится въ рядъ, удовлетворяющій уравненію

$$\frac{dX}{dt}=\frac{nPX}{\left(1-\frac{t-\tau}{\mathrm{T}_1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{\mathrm{A}_1}\right)}$$

и обращающійся въ Γ для $t=\tau$. Этотъ рядъ представитъ, слѣдовательно, разложеніе по восходящимъ степенямъ $t-\tau$ и α функціи

$$X=\Gamma\left(1-\frac{t-\tau}{\mathrm{T}_1}\right)^{-\frac{nP\mathrm{T}_1}{1-\frac{\alpha}{\mathrm{A}_1}}},$$

которая остается синектичною, пока $\mathrm{mod}(t-\tau)<\mathrm{T}_1$ и $\mathrm{mod}\,\alpha<\mathrm{A}_1$. Поэтому для такихъ значеній t и α рядъ этотъ есть абсолютно сходящійся.

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что если $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ суть значенія функцій $X_1, X_2, \ldots X_n$ для какого либо вещественнаго $t=\tau$, то для всякаго t, удовлетворяющаго условію $\mathrm{mod}(t-\tau)<\mathrm{T}$, функціи эти опредѣлятся уравненіями вида

$$X_j=\Gamma_1 R_j^{(1)}+\Gamma_2 R_j^{(2)}+\ldots.+\Gamma_n R_j^{(n)}$$
$$(j=1,\ 2,\ \ldots.\ n),$$

въ которыхъ $R_j^{(i)}$ суть функціи t и α, разлагающіяся въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ α, абсолютно сходящіеся, пока $\operatorname{mod} \alpha < A$.

Отсюда нетрудно заключить, что величины $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ могутъ быть представлены подъ видомъ линейныхъ функцій постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_n$ съ коэффиціентами, разлагающимися въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ α, абсолютно сходящіеся при томъ же условіи.

Изъ сопоставленія этихъ двухъ результатовъ слѣдуетъ справедливость первой части теоремы.

Для доказательства второй части ея замѣчаемъ, что

$$Q_j^{(i)}(t+\omega) = D_1^{(i)} Q_j^{(1)}(t) + D_2^{(i)} Q_j^{(2)}(t) + \ldots + D_n^{(i)} Q_j^{(n)}(t),$$

гдѣ $D_j^{(i)}$ суть величины, независящія отъ t.

Отсюда, принимая въ разсчетъ, что $Q_i^{(i)}(t_0) = 1$ и что $Q_j^{(i)}(t_0) = 0$, если $j \lesseqgtr i$, находимъ:

$$D_j^{(i)} = Q_j^{(i)}(t_0 + \omega),$$

откуда слѣдуетъ, что всѣ $D_j^{(i)}$ разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ α, абсолютно сходящіеся, пока $\operatorname{mod} \alpha < A$. То же можно утверждать, слѣдовательно, и относительно коэффиціентовъ при различныхъ степеняхъ q въ уравненіи

$$\begin{vmatrix} D_1^{(1)} - q, & D_2^{(1)} & , \ldots & D_n^{(1)} \\ D_1^{(2)} & , D_2^{(2)} - q, & \ldots & D_n^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ D_1^{(n)} & , D_2^{(n)} & , \ldots & D_n^{(n)} - q \end{vmatrix} = 0,$$

а послѣднее тожественно съ уравненіемъ (55).

10. Въ уравненіяхъ (29) роль параметра α можетъ играть постоянная λ, для которой $A = \infty$. Поэтому при сдѣланныхъ предположеніяхъ относительно функціи u и согласно съ только-что доказанною теоремою, можемъ утверждать, что функціи X и Y (для всякихъ значеній ϑ, достаточно близкихъ къ вещественнымъ) и инваріанты A и B могутъ быть представлены подъ видомъ рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ λ и абсолютно сходящихся для всякаго λ.

Положимъ

$$X = \sum_{0}^{\infty} \lambda^n P_n\,, \quad Y = \sum_{0}^{\infty} \lambda^n Q_n\,,$$

предполагая P_n и Q_n функціями ϑ, не зависящими отъ λ. Въ случаѣ надобности функціи эти будемъ означать также черезъ $P_n(\vartheta)$ и $Q_n(\vartheta)$.

Тогда, означая дифференцированія по ϑ значками, получимъ изъ (29) слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} &P_0'' - 2Q_0' - uP_0 = 0\,, \\ &Q_0'' + 2P_0' = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

и для $n > 0$

$$\left.\begin{aligned} &P_n'' - 2Q_n' - uP_n = -uP_{n-1}\,, \\ &Q_n'' + 2P_n' = uQ_{n-1}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

Уравненія (59), какъ мы знаемъ, интегрируются въ квадратурахъ. Поэтому можемъ послѣдовательно найти P_0, Q_0, P_1, Q_1 и т. д. При этомъ, согласно съ предыдущей теоремой, постоянныя, вводимыя интегрированіемъ каждой изъ системъ уравненій (60), должны быть опредѣляемы изъ условія, чтобы функціи P_n, P_n', Q_n, Q_n' обращались въ нуль для нѣкотораго даннаго (одного и того-же для всякаго n) значенія ϑ. Постоянныя-же, введенныя интегрированіемъ уравненій (59), могутъ быть опредѣлены изъ условія, чтобы для этого значенія ϑ функціи P_0, P_0', Q_0, Q_0' обращались въ заданныя значенія функцій X, X', Y, Y'.

Чтобы составить формулы для послѣдовательнаго вычисленія функцій P_n и Q_n, мы должны сначала обратить вниманіе на нѣкоторыя общія свойства функціи

$$\frac{1}{\varrho^2} = v(\vartheta) = v\,.$$

При разсматриваемыхъ предположеніяхъ, v есть синектичная функція ϑ для значеній послѣдняго, достаточно близкихъ къ вещественнымъ, и при томъ — періодическая съ періодомъ Ω, всѣ значенія которой для вещественнаго ϑ лежатъ между предѣлами, изъ которыхъ низшій не нуль, высшій не безконеченъ. Первый назовемъ черезъ v_0, второй — черезъ v_1.

Мы будемъ предполагать, что $\vartheta = 0$ есть одно изъ значенiй ϑ, для которыхъ $v = v_0$. Тогда, разумѣя подъ m произвольное цѣлое число, найдемъ всѣ другiя вещественныя значенiя ϑ, удовлетворяющiя этому уравненiю, по формулѣ $\vartheta = m\Omega$, а всѣ вещественныя значенiя ϑ, удовлетворяющiя уравненiю $v = v_1$, — по формулѣ $\vartheta = (2m+1)\frac{\Omega}{2}$.

Вслѣдствiе только-что сдѣланнаго предположенiя, изъ уравненiя (4) легко выводимъ слѣдующее равенство

$$v\left(m\frac{\Omega}{2} + \vartheta\right) = v\left(m\frac{\Omega}{2} - \vartheta\right),$$

справедливое для всякаго цѣлаго m. Изъ этого равенства слѣдуетъ, что если $v_0^{(n)}$ и $v_1^{(n)}$ суть значенiя производной $v^{(n)}$ для $\vartheta = m\Omega$ и для $\vartheta = (2m+1)\frac{\Omega}{2}$, то вообще $v_0^{(2n+1)} = v_1^{(2n+1)} = 0$.

Отсюда заключаемъ, что для значенiй ϑ, достаточно близкихъ къ значенiямъ типа $m\Omega$ или $(2m+1)\frac{\Omega}{2}$, функцiя v разложится въ рядъ одного изъ двухъ слѣдующихъ видовъ:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + \frac{v_0''}{1\cdot 2}\bar{\vartheta}^2 + \frac{v_0^{IV}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\bar{\vartheta}^4 + \ldots, \\ v &= v_1 + \frac{v_1''}{1\cdot 2}\bar{\vartheta}^2 + \frac{v_1^{IV}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\bar{\vartheta}^4 + \ldots, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (61)$$

гдѣ $\bar{\vartheta} = \vartheta - m\Omega$ для перваго ряда и $\bar{\vartheta} = \vartheta - (2m+1)\frac{\Omega}{2}$ — для второго.

Наконецъ, замѣтимъ, что v_0'' и v_1'' всегда отличны отъ нуля, какъ это слѣдуетъ изъ того, что ϱ_0 и ϱ_1 суть *простые* корни уравненiя (40).

Возвращаемся къ нашей задачѣ.

Принимая въ разсчетъ уравненiе (3) и формулу (14), опредѣляющую u, легко находимъ:

$$u = 4 + \frac{v'''}{v'},$$

вслѣдствiе чего уравненiя (59) даютъ:

$$Q_0' = C_1 - 2P_0,$$

$$P_0'v' - v''P_0 = 2C_1 v + C_2, \quad \ldots\ldots\ldots (62)$$

гдѣ C_1 и C_2 произвольныя постоянныя. Для опредѣленія ихъ, называемъ черезъ X_0, X_0', Y_0, Y_0' значенія функцій X, X', Y, Y' для $\vartheta = 0$, которыя предположимъ заданными. Тогда найдемъ:

$$C_1 = Y_0' + 2X_0 ,$$
$$2C_1 v_0 + C_2 = - v_0'' X_0 .$$

Вслѣдствіе этого уравненіе (62) можетъ быть представлено подъ видомъ:

$$\frac{P_0' v' - v''(P_0 - X_0)}{v'^2} = \frac{2C_1(v - v_0) + (v'' - v_0'')X_0}{v'^2} ,$$

откуда замѣчая, что вторая часть равенства остается въ силу (61) конечною для $\vartheta = 0$, и что

$$\lim \left\{ \frac{P_0 - X_0}{v'} \right\}_{\vartheta=0} = \frac{X_0'}{v_0''} ,$$

находимъ:

$$P_0 = X_0 + X_0' \frac{v'}{v_0''} + v' \int_0^{\vartheta} \frac{2C_1(v - v_0) + (v'' - v_0'')X_0}{v'^2} d\vartheta .$$

Входящій сюда интегралъ теряетъ опредѣленный смыслъ, коль скоро въ числѣ значеній ϑ, черезъ которыя проводится интегрированіе, встрѣчаются значенія типа $\vartheta = (2m+1)\frac{\Omega}{2}$. Поэтому эти значенія ϑ будемъ разсматривать, только какъ предѣльныя. Интегрированіе-же будемъ вести по какой-либо кривой, начинающейся въ точкѣ $\vartheta = 0$, на которой не находятся точки $\vartheta = (2m+1)\frac{\Omega}{2}$, и которая достаточно близка къ вещественной оси для того, чтобы функція v оставалась синектичною, и не достигались мнимые корни уравненія $v' = 0$. Такъ-какъ при этомъ условіи разсматриваемый интегралъ остается однозначнымъ (см. (61)), то не теряя опредѣленности результата, можно не означать точнымъ образомъ пути интегрированія. Но въ случаѣ вещественныхъ значеній ϑ его всегда можно привести къ пути, состоящему изъ отрѣзковъ вещественной оси и полукруговъ безконечно-малыхъ радіусовъ, описанныхъ изъ центровъ $\vartheta = (2m+1)\frac{\Omega}{2}$.

Далѣе мы встрѣтимся съ другими подобными-же интегралами, и для избѣжанія недоразумѣній введемъ для нихъ особыя обозначенія. А именно, интегралъ отъ какой-либо функцiи $F(\vartheta)$, взятый по пути, подобному только-что описанному, при помощи котораго обходятся всѣ точки вещественной оси, для которыхъ $F(\vartheta) = \infty$, условимся обозначать такъ:

$$\int_0^{\vartheta}\Big|\, F(\vartheta) d\vartheta \, .$$

Такимъ образомъ для опредѣленiя P_0 получаемъ слѣдующую формулу:

$$P_0 = X_0 + X_0' \frac{v'}{v_0''} + v' \int_0^{\vartheta}\Big|\, \frac{2C_1(v - v_0) + (v'' - v_0'')X_0}{v'^2} d\vartheta \quad . \; . \; . \; (63)$$

Найдя P_0, получимъ Q_0 по формулѣ:

$$Q_0 = Y_0 + C_1\vartheta - 2\int_0^{\vartheta} P_0 \, d\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (64)$$

Здѣсь

$$C_1 = 2X_0 + Y_0' \, .$$

Предполагая теперь всѣ P_m и Q_m, для которыхъ $m < n$, извѣстными, составимъ формулы для вычисленiя функцiй P_n и Q_n.

Такъ-какъ при $\vartheta = 0$ функцiи эти вмѣстѣ со своими первыми производными должны обращаться въ нуль, то уравненiя (60) дадутъ:

$$Q_n' + 2P_n = \int_0^{\vartheta} u Q_{n-1} d\vartheta \, ,$$

$$P_n'v' - P_n v'' = \int_0^{\vartheta} \left\{ 2\int_0^{\vartheta} u Q_{n-1} d\vartheta - u P_{n-1} \right\} v' d\vartheta \, .$$

Положимъ

$$\int_0^{\vartheta} u \, Q_{n-1} d\vartheta = R_n(\vartheta) = R_n \, ,$$

$$\int_0^{\vartheta} (2R_n - uP_{n-1}) v' d\vartheta = S_n(\vartheta) = S_n \, .$$

Тогда, замѣчая, что S_n и S_n' обращаются въ нуль при $\vartheta = 0$, изъ послѣдняго уравненiя найдемъ

$$P_n = v' \int_0^{\vartheta} \frac{S_n \, d\vartheta}{v'^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

гдѣ при интегрированіи должно обходить не только всѣ точки типа $\vartheta = (2m+1)\frac{\Omega}{2}$, но также и всѣ точки типа $\vartheta = m\Omega$, для которыхъ m отлично отъ нуля.

Функція Q_n опредѣлится уравненіемъ:

$$Q_n = \int_0^{\vartheta} R_n d\vartheta - 2\int_0^{\vartheta} P_n d\vartheta \, . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

Составимъ формулы для опредѣленія постоянныхъ $P_n(\Omega)$, $P_n'(\Omega)$, $Q_n(\Omega)$ и $Q_n'(\Omega)$, которыя необходимы для вычисленія инваріантовъ A и B.

Постоянныя $P_0(\Omega)$ и $P_0'(\Omega)$ легко находятся изъ уравненія (63), которое даетъ:

$$P_0(\Omega) = X_0 \, ,$$

$$P_0'(\Omega) = X_0' + v_0'' \int_0^{\Omega} \frac{S d\vartheta}{v'^2},$$

гдѣ

$$S = 2C_1(v - v_0) + (v'' - v_0'')X_0 \, .$$

Затѣмъ, замѣчая, что интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int_0^{\Omega} P_0 \, d\vartheta = \Omega X_0 - \int_0^{\Omega} \frac{(v - v_0) S d\vartheta}{v'^2},$$

изъ (64) находимъ:

$$Q_0(\Omega) = Y_0 + (C_1 - 2X_0)\Omega + 2\int_0^{\Omega} \frac{(v - v_0) S d\vartheta}{v'^2} \, .$$

Изъ того-же уравненія слѣдуетъ:

$$Q_0'(\Omega) = C_1 - 2X_0 \, .$$

Замѣняя постоянную C_1 ея значеніемъ, получаемъ такимъ образомъ слѣдующія формулы:

$$\left.\begin{aligned}
&P_0(\Omega) = X_0\,,\\
&P_0'(\Omega) = v_0'' \int_0^{\Omega} \frac{4(v-v_0)+v''-v_0''}{v'^2}\,d\vartheta\, X_0 + \\
&\qquad + X_0' + 2v_0'' \int_0^{\Omega} \frac{(v-v_0)d\vartheta}{v'^2}\, Y_0'\,,\\
&Q_0(\Omega) = 2\int_0^{\Omega} \frac{(v-v_0)[4(v-v_0)+v''-v_0'']d\vartheta}{v'^2}\, X_0 + \\
&\qquad + Y_0 + \left\{\Omega + 4\int_0^{\Omega} \frac{(v-v_0)^2 d\vartheta}{v'^2}\right\} Y_0'\,,\\
&Q_0'(\Omega) = Y_0'\,.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (67)$$

Предположимъ теперь функціи P_{n-1} и Q_{n-1} для какого-либо n извѣстными. Тогда изъ (65), принимая въ разсчетъ разложенія (61), найдемъ:

$$P_n(\Omega) = -\frac{1}{v_0''} S_n(\Omega)\,,$$

послѣ чего изъ (66) найдемъ $Q_n'(\Omega)$.

Для опредѣленія $P_n'(\Omega)$ беремъ уравненіе

$$P_n'' v' - P_n v''' = S_n'\,,$$

которое даетъ:

$$P_n'(\Omega) = \int_0^{\Omega} \frac{P_n}{v'}\, v''' d\vartheta + \int_0^{\Omega} \frac{S_n' d\vartheta}{v'}\,.$$

Отсюда, интегрируя по частямъ, принимая въ разсчетъ формулу (65), и замѣчая, что въ силу (61)

$$\lim \left\{(v''-v_0'') \int_0^{\vartheta} \frac{S_n d\vartheta}{v'^2}\right\}_{\vartheta=\Omega} = 0\,,$$

находимъ:

$$P_n'(\Omega) = -\int_0^\Omega \frac{(v'' - v_0'')S_n\,d\vartheta}{v'^2} + \int_0^\Omega \frac{S_n'\,d\vartheta}{v'}.$$

Точно также замѣчая, что

$$\lim\left\{(v - v_0)\int_0^\vartheta \frac{S_n d\vartheta}{v'^2}\right\}_{\vartheta=\Omega} = 0\,,$$

изъ (66) находимъ:

$$Q_n(\Omega) = \int_0^\Omega R_n\,d\vartheta + 2\int_0^\Omega \frac{(v - v_0)S_n\,d\vartheta}{v'^2}.$$

Когда нѣтъ надобности знать функціи P_n и Q_n, а вся задача состоитъ только въ опредѣленіи постоянныхъ $P_n(\Omega)$, $P_n'(\Omega)$ и т. д., то можно избѣжать составленія функціи S_n, что для вычисленій представитъ нѣкоторыя выгоды.

Съ этою цѣлью находимъ два интеграла:

$$\int_0^\vartheta \frac{(v - v_0)d\vartheta}{v'^2} = V$$

и

$$\int_0^\vartheta \frac{(v'' - v_0'')d\vartheta}{v'^2} = V_1\,,$$

знать которые уже необходимо для опредѣленія P_0 по формулѣ (63).

Послѣ этого интегрированіемъ по частямъ найдемъ:

$$\int_0^\Omega \frac{(v - v_0)S_n\,d\vartheta}{v'^2} = V(\Omega)\,S_n(\Omega) - \int_0^\Omega VS_n'\,d\vartheta\,,$$

$$\int_0^\Omega \frac{(v'' - v_0'')S_n d\vartheta}{v'^2} = V_1(\Omega)\,S_n(\Omega) - \int_0^\Omega V_1 S_n'\,d\vartheta\,.$$

Вслѣдствіе этого получаемъ слѣдующія формулы:

$$\left.\begin{aligned}
P_n(\Omega) &= -\frac{1}{v_0''}\int_0^\Omega (2R_n - uP_{n-1})v'\,d\vartheta\,,\\
P_n'(\Omega) &= \int_0^\Omega (2R_n - uP_{n-1})(1+V_1 v')\,d\vartheta\,-\\
&\quad - V_1(\Omega)\int_0^\Omega (2R_n - uP_{n-1})v'\,d\vartheta\,,\\
Q_n(\Omega) &= \int_0^\Omega R_n\,d\vartheta - 2\int_0^\Omega (2R_n - uP_{n-1})Vv'\,d\vartheta\,+\\
&\quad + 2V(\Omega)\int_0^\Omega (2R_n - uP_{n-1})v'\,d\vartheta\,,\\
Q_n'(\Omega) &= R_n(\Omega) + \frac{2}{v_0''}\int_0^\Omega (2R_n - uP_{n-1})v'\,d\vartheta\,.
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (68)$$

Для вычисленія по этимъ формуламъ необходимо составить только одну новую функцію

$$R_n = \int_0^\vartheta uQ_{n-1}\,d\vartheta\,.$$

Когда всѣ постоянныя $P_n(\Omega)$, $P_n'(\Omega)$ и т. д., которыя будутъ линейными однородными функціями X_0, X'_0, Y_0 и Y'_0, найдены, инваріанты A и B опредѣлятся слѣдующимъ образомъ:

Пусть

$$P_n(\Omega) = (a\,,a)_n X_0 + (a\,,a')_n X_0' + (a\,,b)_n Y_0 + (a\,,b')_n Y_0'\,,$$

$$P_n'(\Omega) = (a',a)_n X_0 + (a',a')_n X_0' + (a',b)_n Y_0 + (a',b')_n Y_0'\,,$$

$$Q_n(\Omega) = (b\,,a)_n X_0 + (b\,,a')_n X_0' + (b\,,b)_n Y_0 + (b\,,b')_n Y_0'\,,$$

$$Q_n'(\Omega) = (b',a)_n X_0 + (b',a')_n X_0' + (b',b)_n Y_0 + (b',b')_n Y_0'\,,$$

гдѣ $(a\,,a)_n$, $(a\,,a')_n$ и т. д. извѣстныя постоянныя.

Тогда характеристичное уравненіе, соотвѣтствующее періоду Ω, будетъ:

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_0^\infty (a\,,\,a)_n\lambda^n - q\,, & \sum\limits_0^\infty (a'\,,\,a)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (b\,,\,a)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (b'\,,\,a)_n\lambda^n \\ \sum\limits_0^\infty (a\,,\,a')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (a'\,,\,a')_n\lambda^n - q\,, & \sum\limits_0^\infty (b\,,\,a')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (b'\,,\,a')_n\lambda^n \\ \sum\limits_0^\infty (a\,,\,b)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (a'\,,\,b)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (b\,,\,b)_n\lambda^n - q\,, & \sum\limits_0^\infty (b'\,,\,b)_n\lambda^n \\ \sum\limits_0^\infty (a\,,\,b')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (a'\,,b')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (b\,,\,b')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (b',b')_n\lambda^n - q \end{vmatrix} = 0.$$

Изъ сравненія этого уравненія съ (45) получимъ A и B подъ видомъ рядовъ, расположенныхъ по восходящимъ степенямъ λ.

11. Когда $\lambda = 0$, разсматриваемыя здѣсь движенія, очевидно, неустойчивы. Но это не исключаетъ возможности устойчивыхъ движеній для достаточно малыхъ значеній λ, ибо при $\lambda = 0$ всѣ четыре корня характеристичнаго уравненія равны 1.

Предыдущія формулы могутъ служить для рѣшенія вопроса объ устойчивости въ этомъ предположеніи, для чего достаточно составить только немногіе первые члены разложеній A и B по восходящимъ степенямъ λ.

Покажемъ, къ чему вообще приводится рѣшеніе этого вопроса.

Изъ формулъ (67) находимъ:

$$(a\,,\,a)_0 = (a',\,a')_0 = (b\,,\,b)_0 = (b',\,b')_0 = 1\,,$$

вслѣдствіе чего наше характеристичное уравненіе будетъ вида:

$$(1-q)^4 + \sum_1^\infty \left\{ K_n(1-q)^3 + L_n(1-q)^2 + M_n(1-q) + N_n \right\} \lambda^n = 0\,,$$

гдѣ $K_n\,, L_n\,, M_n\,, N_n$ суть величины, не зависящія ни отъ q, ни отъ λ.

Но уравненіе это должно приводиться къ виду (45), вслѣдствіе чего между четырьмя величинами $K_n\,, L_n\,, M_n$ и N_n должны существовать двѣ зависимости:

$$K_n + L_n = -\frac{M_n}{2} = N_n \qquad \text{. . . . . (69)}$$

Такимъ образомъ для каждаго значенія n достаточно вычислить только двѣ величины K_n и N_n.

Нетрудно видѣть, что первая опредѣляется формулой

$$K_n = (a\,,\,a)_n + (a',\,a')_n + (b\,,\,b)_n + (b',\,b')_n \quad . \; . \; . \; . \; (70)$$

Что-же касается второй, то замѣчая, что изъ (67) слѣдуетъ

$$(a\,,\,a')_0 = 0\,,\ (a\,,\,b)_0 = 0\,,\ (a\,,\,b')_0 = 0\,,\ (a',\,b)_0 = 0\,,$$

$$(b\,,\,a')_0 = 0\,,\ (b',\,a)_0 = 0\,,\ (b',\,a')_0 = 0\,,\ (b',\,b)_0 = 0\,,$$

получаемъ для опредѣленія ея тожественное относительно λ равенство:

$$\sum_1^\infty N_n\lambda^n = \begin{vmatrix} \sum\limits_1^\infty (a\,,\,a)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (a',\,a)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (b\,,\,a)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_1^\infty (b',\,a)_n\lambda^n \\ \sum\limits_1^\infty (a\,,\,a')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_1^\infty (a',\,a')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_1^\infty (b\,,\,a')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_1^\infty (b',\,a')_n\lambda^n \\ \sum\limits_1^\infty (a\,,\,b)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_1^\infty (a',\,b)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_1^\infty (b\,,\,b)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_1^\infty (b',\,b)_n\lambda^n \\ \sum\limits_1^\infty (a\,,\,b')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (a',\,b')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (b\,,\,b')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_1^\infty (b',\,b')_n\lambda^n \end{vmatrix} \quad (71)$$

Изъ этого равенства находимъ:

$$N_1 = 0\,,$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} (a\,,\,a)_1\,, & (a'\,,\,a)_0\,, & (b\,,\,a)_0\,, & (b'\,,\,a)_1 \\ (a\,,\,a')_1\,, & 0\,, & 0\,, & (b',\,a')_1 \\ (a\,,\,b)_1\,, & 0\,, & 0\,, & (b'\,,\,b)_1 \\ (a\,,\,b')_1\,, & (a'\,,b')_0\,, & (b\,,\,b')_0\,, & (b'\,,\,b')_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a'\,,\,a)_0\,, & (b\,,\,a)_0 \\ (a'\,,b')_0\,, & (b\,,b')_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (a\,,\,a')_1\,, & (a\,,\,b)_1 \\ (b'\,,\,a')_1\,, & (b'\,,\,b)_1 \end{vmatrix}\,, \quad . \; . \; . \; (72)$$

и т. д.

Принимая въ разсчетъ (69), находимъ для инваріантовъ A и B слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned}A &= 2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} K_n \lambda^n\,,\\ B &= 3 + K_1\lambda + \frac{1}{2}\sum_{2}^{\infty}(2K_n + N_n)\lambda^n\,.\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (73)$$

Вслѣдствіе этого условія (52) приводятся къ виду:

$$\left.\begin{aligned}&-4 < K_1\lambda + \frac{1}{2}\sum_{2}^{\infty}(2K_n + N_n)\lambda^n < 0\,,\\ &N_2\lambda^2 + \left(\frac{1}{4}K_1N_2 + N_3\right)\lambda^3 + \ldots > 0\,,\\ &\left(\frac{1}{4}K_1{}^2 - N_2\right)\lambda^2 + \left(\frac{1}{2}K_1K_2 - N_3\right)\lambda^3 + \ldots > 0\,,\end{aligned}\right\} \; . \; . \; (74)$$

гдѣ невыписанные члены содержатъ степени λ выше третьей.

Отсюда видно, что условіями устойчивости разсматриваемыхъ движеній для достаточно малыхъ значеній λ вообще служатъ неравенства:

$$K_1 < 0\,, \qquad 0 < N_2 < \frac{1}{4}K_1{}^2\,.$$

Въ предѣльныхъ случаяхъ послѣднихъ должны быть удовлетворены конечно еще другія неравенства, зависящія отъ членовъ высшихъ порядковъ.

Такъ, когда $N_2 = 0$, условіями устойчивости вообще служатъ неравенства:

$$K_1 < 0\,, \qquad N_3 > 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (75)$$

Это послѣднее обстоятельство, какъ увидимъ, представляется въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія. Величина N_2 въ этомъ случаѣ обращается въ нуль вслѣдствіе того, что между $(a', a)_0$, $(b, a)_0$, $(a', b')_0$ и $(b, b')_0$ существуетъ соотношеніе

$$\frac{(b\,,\,a)_0}{(a',\,a)_0} = \frac{(b\,,\,b')_0}{(a',\,b')_0}\,.$$

Пользуясь послѣднимъ и полагая

$$(b\,,\,a)_0 = -k\,(a',\,a)_0\,,$$

легко находимъ изъ (71) слѣдующее выраженіе N_3:

$$N_3 = \begin{vmatrix} (a\,,\,a)_1\,, & (a'\,,\,a)_0\,, & (b\,,\,a)_1 + k(a'\,,\,a)_1\,, & (b',\,a)_1 \\ (a\,,\,a')_1\,, & 0\,, & (b\,,\,a')_1 + k(a',\,a')_1\,, & (b',\,a')_1 \\ (a\,,\,b)_1\,, & 0\,, & (b\,,\,b)_1 + k(a',\,b)_1\,, & (b',\,b)_1 \\ (a\,,\,b')_1\,, & (a',\,b')_0\,, & (b\,,\,b')_1 + k(a',\,b')_1\,, & (b',\,b')_1 \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; (76)$$

12. Приложимъ наши формулы къ случаю притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія.

Во всякомъ періодическомъ Лапласовомъ движеніи въ этомъ случаѣ относительная траекторія каждой изъ точекъ по отношенію къ одной изъ двухъ остальныхъ есть эллипсъ, въ фокусѣ котораго находится послѣдняя.

Называя черезъ p параметръ и черезъ ε эксцентриситетъ этого эллипса, будемъ имѣть:

$$\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\vartheta}\,,$$

вслѣдствіе чего найдемъ:

$$p^2 v = (1 - \varepsilon\cos\vartheta)^2\,,$$

$$u = \frac{3}{1 - \varepsilon\cos\vartheta}\,.$$

Кромѣ истинной аномаліи ϑ, мы будемъ разсматривать также эксцентрическую φ.

Для облегченія интегрированій, которыя намъ придется произвести, полезно имѣть въ виду извѣстныя соотношенія между φ и ϑ:

$$1 + \varepsilon\cos\varphi = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon\cos\vartheta}\,,$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\vartheta}{1 - \varepsilon\cos\vartheta}\,, \quad \cos\varphi = \frac{\cos\vartheta - \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\vartheta}\,,$$

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\varphi}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\,, \quad \cos\vartheta = \frac{\cos\varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\,,$$

$$\frac{d\varphi}{1 + \varepsilon\cos\varphi} = \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,, \quad \frac{d\vartheta}{1 - \varepsilon\cos\vartheta} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,.$$

Мы предполагаемъ, что уголъ φ обращается въ нуль одновременно съ ϑ. При этомъ φ также одновременно съ ϑ будетъ обращаться въ каждое значеніе типа $m\pi$, гдѣ m цѣлое.

Періодъ Ω въ разсматриваемомъ случаѣ равенъ 2π.

Прежде всего интегрированіемъ уравненій (59) находимъ:

$$P_0 = -C_1 \cos\vartheta\,(1-\varepsilon\cos\vartheta) + C_2\varepsilon\sin\vartheta\,(1-\varepsilon\cos\vartheta) +$$

$$+ C_3\left\{2+\varepsilon^2 - 3\varepsilon\cos\vartheta + \frac{3\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,\varepsilon\sin\vartheta(1-\varepsilon\cos\vartheta)\right\},$$

$$Q_0 = C_1\sin\vartheta\,(2-\varepsilon\cos\vartheta) - C_2(1-\varepsilon\cos\vartheta)^2 +$$

$$+ 3C_3\left\{\varepsilon\sin\vartheta - \frac{\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}(1-\varepsilon\cos\vartheta)^2\right\} + C_4,$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 и C_4 постоянныя, для которыхъ получаемъ слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned}
C_1 &= \frac{3(1-2\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)}X_0 + \frac{2-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}Y_0',\\
C_3 &= \frac{2-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)}X_0 + \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}Y_0',\\
C_2 &= \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}X_0',\\
C_4 &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}X_0' + Y_0.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (77)$$

Отсюда, замѣчая, что

$$P_0'(2\pi) = \varepsilon(1-\varepsilon)C_2 + \frac{6\pi\varepsilon(1-\varepsilon)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}C_3,$$

$$Q_0(2\pi) = -(1-\varepsilon)^2C_2 - \frac{6\pi(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}C_3 + C_4,$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
(a', a)_0 &= \frac{6\pi\varepsilon(2-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}, & (a', b')_0 &= \frac{6\pi\varepsilon(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}},\\
(b, a)_0 &= -\frac{6\pi(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}, & (b, b')_0 &= -\frac{6\pi(1-\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}.
\end{aligned}\right\}\ .\ (78)$$

Формулы эти даютъ:

$$\frac{(b, a)_0}{(a', a)_0} = \frac{(b, b')_0}{(a', b')_0} = -\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\quad\ldots\ldots\ldots\ (79)$$

Затѣмъ составляемъ функцію

$$R_1 = \int_0^\vartheta u\, Q_0\, d\vartheta\ .$$

Находимъ:

$$R_1 = 3C_1\left(1 - \cos\vartheta + \frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1-\varepsilon\cos\vartheta}{1-\varepsilon}\right) - 3C_2(\vartheta - \varepsilon\sin\vartheta) +$$

$$+ 9C_3\left(\frac{\varepsilon\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin\vartheta - \int_0^\varphi \frac{\varphi d\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}\right) + 3C_4\frac{\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Входящій сюда интегралъ не выражается въ конечномъ видѣ, но значеніе его для $\varphi = 2\pi$ легко находимъ, замѣняя интегральную перемѣнную φ черезъ $2\pi - \varphi$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varphi d\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\ .$$

Такимъ образомъ получаемъ:

$$R_1(2\pi) = -6\pi C_2 - \frac{18\pi^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}C_3 + \frac{6\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}C_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

Далѣе, замѣчая, что

$$p^2(2R_1 - uP_0)v' =$$

$$= 6\varepsilon C_1\left\{(2-\cos\vartheta)(1-\varepsilon\cos\vartheta)\sin\vartheta + \frac{2}{\varepsilon}\log\frac{1-\varepsilon\cos\vartheta}{1-\varepsilon}(1-\varepsilon\cos\vartheta)\sin\vartheta\right\} +$$

$$+ 6\varepsilon C_3\left\{\frac{3\varepsilon\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin^2\vartheta(1-\varepsilon\cos\vartheta) - 6\sin\vartheta(1-\varepsilon\cos\vartheta)\int_0^\varphi\frac{\varphi d\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} -\right.$$

$$\left. - (2+\varepsilon^2 - 3\varepsilon\cos\vartheta)\sin\vartheta\right\} -$$

$$- 6\varepsilon C_2(2\vartheta - \varepsilon\sin\vartheta)(1-\varepsilon\cos\vartheta)\sin\vartheta + 12\varepsilon C_4\frac{\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}(1-\varepsilon\cos\vartheta)\sin\vartheta\ ,$$

находимъ:

$$p^2\int_0^{2\pi}(2R_1 - uP_0)v'\,d\vartheta =$$

$$= 24\pi\varepsilon C_2 + \frac{72\pi^2\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}C_3 - 12\pi\left(1 - \frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)C_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

При составленіи этой формулы, а также и тѣхъ, съ которыми мы встрѣтимся далѣе, полезно имѣть въ виду, что если $f(x)$ есть непрерывная и однозначная функція x, то

$$\int_0^{2\pi} \vartheta f(\cos\vartheta)\, d\vartheta = \pi \int_0^{2\pi} f(\cos\vartheta)\, d\vartheta$$

и

$$\int_0^{2\pi} \varphi f(\cos\vartheta)\, d\vartheta = \pi \int_0^{2\pi} f(\cos\vartheta)\, d\vartheta\,,$$

какъ нетрудно убѣдиться, замѣняя интегральную перемѣнную ϑ черезъ $2\pi-\vartheta$ и замѣчая, что при этомъ φ переходитъ въ $2\pi-\varphi$.

Вслѣдствіе (80) и (81) изъ (68) находимъ:

$$P_1(2\pi) = -\frac{12\pi}{1-\varepsilon} C_2 - \frac{36\pi^2}{(1-\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}} C_3 + \frac{6\pi}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\left(1-\frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right) C_4\,,$$

$$Q_1'(2\pi) = 6\pi\frac{3+\varepsilon}{1-\varepsilon} C_2 + \frac{18\pi^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,\frac{3+\varepsilon}{1-\varepsilon} C_3 + \frac{6\pi}{\varepsilon}\left(\frac{2-\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{2}{1-\varepsilon}\right) C_4\,,$$

откуда вслѣдствіе (77) получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}
(a\,,a)_1 &= -\frac{36\pi^2(2-\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}\,,\\
(a\,,a')_1 &= \frac{6\pi}{\varepsilon^2}\left(\frac{1-4\varepsilon+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2} - \frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right),\\
(a\,,b)_1 &= \frac{6\pi}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\left(1-\frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right),\\
(a\,,b')_1 &= -\frac{36\pi^2}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\\
(b',a)_1 &= \frac{18\pi^2(3+\varepsilon)(2-\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}\,,\\
(b',a')_1 &= \frac{6\pi}{\varepsilon^2}\left(\frac{(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{2-7\varepsilon+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2}\right),\\
(b',b)_1 &= \frac{6\pi}{\varepsilon}\left(\frac{2-\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{2}{1-\varepsilon}\right),\\
(b',b')_1 &= \frac{18\pi^2(3+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\,.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (82)$$

Далѣе, замѣчая, что изъ формулъ

$$\frac{1}{p^2}V = \int_0^{\vartheta}\frac{(v-v_0)d\vartheta}{p^2 v'^2} =$$

$$= \frac{1-\cos\vartheta}{2\varepsilon(1+\varepsilon)^2\sin\vartheta} + \frac{\varepsilon\sin\vartheta}{4(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon\cos\vartheta)} + \frac{3\varphi}{4(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

$$\frac{1}{p^2}V_1 = \int_0^{\vartheta}\frac{(v''-v_0'')d\vartheta}{p^2 v'^2} =$$

$$= \frac{\varepsilon(1+2\varepsilon^2)\sin^2\vartheta - (1-\varepsilon^2)(1-\cos\vartheta)}{2\varepsilon(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)\sin\vartheta(1-\varepsilon\cos\vartheta)} + \frac{3\varepsilon\varphi}{2(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

слѣдуетъ

$$(1-\varepsilon)(V_1 v' + 1) - 2\varepsilon V v' = \cos\vartheta(1-\varepsilon\cos\vartheta),$$

откуда

$$(1-\varepsilon)V_1(2\pi) - 2\varepsilon V(2\pi) = 0,$$

изъ (68) находимъ:

$$(1-\varepsilon)P_1'(2\pi) + \varepsilon Q_1(2\pi) = \varepsilon\int_0^{2\pi} R_1 d\vartheta + \int_0^{2\pi}(2R_1 - uP_0)\cos\vartheta(1-\varepsilon\cos\vartheta)d\vartheta.$$

Отсюда

$$(1-\varepsilon)P_1'(2\pi) + \varepsilon Q_1(2\pi) =$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\frac{\sin\vartheta(2-\varepsilon\cos\vartheta)}{1-\varepsilon\cos\vartheta}Q_0\,d\vartheta - 3\int_0^{2\pi}\cos\vartheta P_0\,d\vartheta =$$

$$= -6\pi\left(\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\right)C_1 + 6\pi\left(\frac{(1-\varepsilon)(5-\varepsilon+2\varepsilon^2)}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{5+\varepsilon^2}{\varepsilon}\right)C_3.$$

Равенство это въ силу (77) даетъ:

$$(1-\varepsilon)(a', a')_1 + \varepsilon(b, a')_1 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (83)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1-\varepsilon)(a', a)_1+\varepsilon(b\,, a)_1=\\&=-\frac{6\pi(3+\varepsilon)}{\varepsilon^2}+\frac{6\pi(2-\varepsilon)(5-\varepsilon+2\varepsilon^2)}{\varepsilon(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}+\frac{18\pi(1-2\varepsilon)}{\varepsilon^2(1+\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,,\\&(1-\varepsilon)(a', b')_1+\varepsilon(b\,, b')_1=\\&=-\frac{12\pi}{\varepsilon^2}+\frac{6\pi(1-\varepsilon)(5-\varepsilon+2\varepsilon^2)}{\varepsilon(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}+\frac{6\pi(2-\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2}\,.\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (84)$$

Намъ остается теперь составить выраженіе для $Q_1(2\pi)$. Но такъ-какъ мы встрѣтимъ надобность только въ членахъ этого выраженія, зависящихъ отъ постоянныхъ C_2 и C_4, то въ послѣдующемъ вычисленіи опускаемъ члены съ постоянными C_1 и C_3.

Имѣемъ:

$$\int_0^{2\pi} R_1 d\vartheta=-6\pi^2 C_2+\frac{6\pi^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}C_4+\cdots,$$

$$2(1+\varepsilon)^2(2R_1-uP_0)Vv'=$$

$$=-3C_2(2\vartheta-\varepsilon\sin\vartheta)\left\{2(1-\cos\vartheta)(1-\varepsilon\cos\vartheta)+\varepsilon^2\sin^2\vartheta+\right.$$

$$\left.+\frac{3\varepsilon\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin\vartheta(1-\varepsilon\cos\vartheta)\right\}+$$

$$+6C_4\frac{\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left\{2(1-\cos\vartheta)(1-\varepsilon\cos\vartheta)+\varepsilon^2\sin^2\vartheta+\right.$$

$$\left.+\frac{3\varepsilon\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin\vartheta(1-\varepsilon\cos\vartheta)\right\}+\cdots,$$

$$\int_0^{2\pi}(2R_1-uP_0)Vv'd\vartheta=$$

$$=-3\pi^2\left(\frac{3(1-4\varepsilon+\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}+1\right)C_2+\frac{3\pi^2}{(1+\varepsilon)^2}\left(\frac{\varepsilon^2+2\varepsilon-2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}+6\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)C_4+\ldots,$$

$$2V(2\pi)\int_0^{2\pi}(2R_1-uP_0)v'd\vartheta=$$

$$=\frac{72\pi^2\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}C_2-\frac{36\pi^2}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(1-\frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)C_4+\cdots,$$

откуда по (68)

$$Q_1(2\pi)=\frac{18\pi^2(1+\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,C_2-\frac{18\pi^2}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,C_4+\ldots,$$

а отсюда вслѣдствіе (77):

$$(b\,,\,b)_1=-\frac{18\pi^2}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,,\quad\ldots\ldots\ldots\quad(85)$$

$$(b,a')_1=\frac{36\pi^2}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Послѣдняя формула въ силу (83) даетъ:

$$(a',\,a')_1=-\frac{36\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(86)$$

Теперь мы имѣемъ всѣ необходимыя формулы для вычисленія величинъ K_1 и N_3.

Согласно (70), имѣемъ:

$$K_1=(a\,,\,a)_1+(a',\,a')_1+(b\,,\,b)_1+(b',\,b')_1\,,$$

и формула эта вслѣдствіе (82), (85) и (86) даетъ:

$$K_1=-\frac{36\pi^2(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}\,.$$

Отсюда видно, что первое изъ условій (75) всегда удовлетворено. Затѣмъ, замѣчая, что изъ (82) и (78) слѣдуетъ

$$\frac{(a\,,\,a)_1}{(a\,,\,b')_1}=\frac{(b',\,a)_1}{(b',\,b')_1}=\frac{(a',\,a)_0}{(a',\,b')_0}\,,$$

приводимъ формулу (76) къ виду:

$$N_3=\begin{vmatrix} 0 & ,\,(a',\,a)_0\,, & (b\,,\,a)_1+k\,(a',\,a)_1\,, & 0 \\ (a\,,\,a')_1, & 0 & ,\,(b,\,a')_1+k\,(a',a')_1\,, & (b',\,a')_1 \\ (a\,,\,b)_1\,, & 0 & ,\,(b\,,\,b)_1+k\,(a',\,b)_1\,, & (b'\,,\,b)_1 \\ 0 & ,\,(a',b')_0\,, & (b\,,\,b')_1+k\,(a',b')_1\,, & 0 \end{vmatrix},$$

гдѣ, согласно (79), $k=\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Отсюда находимъ:

$$N_3 = \begin{vmatrix} (a,a')_1\,, & (b',a')_1 \\ (a\,,b)_1\,, & (b',b)_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (a',a)_0\,, & (b\,,a)_1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}(a',a)_1 \\ (a',b')_0\,, & (b\,,b')_1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}(a',b')_1 \end{vmatrix},$$

что вслѣдствіе (78), (82) и (84) приводится къ:

$$N_3 = \left\{\frac{36\pi^2}{\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)}\left(\frac{1+\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-1\right)\right\}^2.$$

Второе изъ условій (75), слѣдовательно, также всегда удовлетворено.

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую теорему:

Въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія, всякое періодическое Лапласово движеніе устойчиво, если масса одной изъ точекъ достаточно велика сравнительно съ массами двухъ остальныхъ.

13. Обращаемся къ изложенію второго общаго способа вычисленія инваріантовъ A и B.

Прежде всего выведемъ нѣкоторыя вспомогательныя формулы.

Положимъ, какъ въ параграфѣ 7,

$$\frac{1}{\varrho} = s\,, \quad \frac{1}{\varrho_0} = s_0\,, \quad \frac{1}{\varrho_1} = s_1\,,$$

$$\int f(\varrho)\,d\varrho = \varphi(s)\,.$$

Дифференціальное уравненіе, связывающее s и ϑ, будетъ:

$$\left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)^2 = h - s^2 - 2g\varphi(s)\,,$$

гдѣ

$$h = \frac{s_0{}^2\varphi(s_1) - s_1{}^2\varphi(s_0)}{\varphi(s_1) - \varphi(s_0)}, \qquad 2g = \frac{s_0{}^2 - s_1{}^2}{\varphi(s_1) - \varphi(s_0)}\,.$$

Положимъ далѣе

$$\frac{s_0+s_1}{2} = \sigma\,, \qquad \frac{s_0-s_1}{s_0+s_1} = \varepsilon\,.$$

Когда $\varepsilon = 0$, разсматриваемое періодическое движеніе обращается въ постоянное. Вообще ε будетъ нѣкоторою положительною правильною дробью. Въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія, это есть эксцентриситетъ эллипса, описываемаго каждою изъ трехъ точекъ по отношенію къ одной изъ двухъ остальныхъ.

Введемъ вмѣсто ϑ новую независимую перемѣнную ψ, полагая

$$s=\sigma(1-\varepsilon\cos\psi)\,,$$

которую опредѣлимъ болѣе точнымъ образомъ условіемъ, чтобы ψ обращалась въ нуль одновременно съ ϑ, и чтобы ϑ была возрастающею функціей ψ, когда послѣдняя переходитъ черезъ вещественныя значенія.

Будемъ имѣть:

$$s_0=\sigma(1+\varepsilon)\,,\qquad s_1=\sigma(1-\varepsilon)\,.$$

Предположимъ функцію $\varphi(s)$ такою, чтобы функція $\varphi(\sigma+\zeta)$ при достаточно маломъ ζ была разложима въ абсолютно сходящійся рядъ:

$$\varphi(\sigma+\zeta)=\varphi(\sigma)+\zeta\varphi'(\sigma)+\frac{\zeta^2}{1.2}\varphi''(\sigma)+\ldots.$$

Тогда, означая для сокращенія $\varphi(\sigma)$, $\varphi'(\sigma)$ и т. д. черезъ φ, φ' и т. д., и полагая

$$\cos\psi=t\,,$$

будемъ имѣть слѣдующія разложенія

$$\varphi(s)=\varphi-\sigma\varepsilon t\varphi'+\frac{\sigma^2\varepsilon^2t^2}{1.2}\varphi''-\frac{\sigma^3\varepsilon^3t^3}{1.2.3}\varphi'''+\ldots\,,$$

$$\varphi(s_0)=\varphi+\sigma\varepsilon\varphi'+\frac{\sigma^2\varepsilon^2}{1.2}\varphi''+\frac{\sigma^3\varepsilon^3}{1.2.3}\varphi'''+\ldots\,,$$

$$\varphi(s_1)=\varphi-\sigma\varepsilon\varphi'+\frac{\sigma^2\varepsilon^2}{1.2}\varphi''-\frac{\sigma^3\varepsilon^3}{1.2.3}\varphi'''+\ldots\,,$$

абсолютно сходящіяся для всякаго вещественнаго ψ и для всякаго ε, модуль котораго достаточно малъ.

Мы будемъ предполагать, что $\varphi'(\sigma)$ отлична отъ нуля. Предположеніе это равносильно тому, что $f\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ не нуль.

Полагая

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\,\frac{\sigma^n\varphi^{(n+1)}}{\varphi'}=\Phi_n\,,\quad\ldots\ldots\,(87)$$

вслѣдствіе этихъ разложеній находимъ:

$$g = -\frac{\sigma}{\varphi'} \frac{1}{1+\sum\limits_{1}^{\infty}\Phi_{2n}\varepsilon^{2n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (88)$$

Далѣе, имѣемъ:

$$[\varphi(s_0)-\varphi(s_1)][h-s^2-2g\varphi(s)] =$$

$$= 2\sigma^3\varepsilon^3\sin^2\psi(\varphi'-\sigma\varphi'')(1+T) \,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (89)$$

гдѣ

$$(\varphi'-\sigma\varphi'')T =$$

$$= \varphi' \sum_{1}^{\infty}\left\{2\Phi_{2n}\frac{1-t^{2n}}{1-t^2}\,t\,\varepsilon^{2n-1} + \left(\Phi_{2n}-2\Phi_{2n+1}\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}\right)\varepsilon^{2n}\right\}.$$

Отсюда, замѣчая, что для достаточно малаго ε

$$\frac{\varphi(s_0)-\varphi(s_1)}{\varphi'} > 0 \,,$$

приходимъ къ заключенію, что для возможности періодическихъ движеній, безконечно близкихъ къ постоянному, соотвѣтствующему данному σ, необходимо условіе:

$$1-\frac{\sigma\varphi''}{\varphi'} \geqq 0 \,.$$

Это условіе, приводящееся къ виду:

$$3+\frac{f'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma f\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \geqq 0 \,,$$

мы всегда будемъ предполагать удовлетвореннымъ со знакомъ неравенства, ибо случай, когда

$$3+\frac{f'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma f\left(\frac{1}{\sigma}\right)} = 0$$

вслѣдствіе выбора нѣкотораго опредѣленнаго значенія σ, не представляетъ интереса. Если же это равенство удовлетворено для всякаго σ, то

$$f(\varrho)=\frac{\alpha}{\varrho^3},$$

гдѣ α постоянная; а въ послѣднемъ случаѣ между Лапласовыми движеніями не можетъ быть періодическихъ.

Полагая

$$\sqrt{1-\frac{\sigma\varphi''}{\varphi'}}=k,$$

получимъ:

$$k^2T=\sum_1^\infty\left\{2\Phi_{2n}\frac{1-t^{2n}}{1-t^2}t\varepsilon^{2n-1}+\left(\Phi_{2n}-2\Phi_{2n+1}\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}\right)\varepsilon^{2n}\right\}. \quad (90)$$

Затѣмъ, полагая

$$\frac{k}{\sqrt{1+\sum\limits_1^\infty\Phi_{2n}\varepsilon^{2n}}}=l, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (91)$$

найдемъ:

$$\frac{d\psi}{d\vartheta}=l\sqrt{1+T}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (92)$$

откуда

$$\vartheta=\frac{1}{l}\int\limits_0^\psi\frac{d\psi}{\sqrt{1+T}},$$

и слѣдовательно

$$\Omega=\frac{1}{l}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{1+T}}.$$

Увеличенію ψ на 2π будетъ соотвѣтствовать увеличеніе ϑ на Ω.

Мы должны еще составить формулы для разложенія функціи u.

Формула (14) даетъ:

$$u=-g\left(3\,\frac{\varphi'(s)}{s}+\varphi''(s)\right).$$

Поэтому замѣчая, что

$$\frac{3\varphi'(s)+s\varphi''(s)}{\varphi'}=$$

$$=4-k^2+\sum_1^\infty(-1)^n(n+1)\Big((n+3)\Phi_n+(n+2)\Phi_{n+1}\Big)t^n\varepsilon^n,$$

и полагая для сокращенія:

$$S=\sum_1^\infty(-1)^n(n+1)\Big((n+3)\Phi_n+(n+2)\Phi_{n+1}\Big)t^n\varepsilon^n, \quad . \; . \; (93)$$

вслѣдствіе (88) находимъ:

$$u=\frac{4-k^2+S}{\left(1+\sum\limits_1^\infty\Phi_{2n}\varepsilon^{2n}\right)(1-\varepsilon t)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (94)$$

Положимъ теперь

$$\frac{d\vartheta}{d\psi}=\vartheta' \quad \text{и} \quad \frac{d^2\vartheta}{d\psi^2}=\vartheta''.$$

Тогда преобразованія уравненій (29) для независимой перемѣнной ψ будутъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2X}{d\psi^2}-\frac{\vartheta''}{\vartheta'}\frac{dX}{d\psi}-2\vartheta'\frac{dY}{d\psi}-(1-\lambda)u\vartheta'^2X=0\,,\\&\frac{d^2Y}{d\psi^2}-\frac{\vartheta''}{\vartheta'}\frac{dY}{d\psi}+2\vartheta'\frac{dX}{d\psi}-\lambda u\vartheta'^2Y=0\,.\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (95)$$

Коэффиціенты въ этихъ уравненіяхъ суть періодическія функціи ψ съ періодомъ 2π. При томъ, для достаточно малыхъ значеній модуля ε и для значеній ψ, достаточно близкихъ къ вещественнымъ, это суть синектичныя функціи ψ и ε. Поэтому къ уравненіямъ (95) можетъ быть приложена общая теорема параграфа 9, если за параметръ α принять величину ε.

Для приложенія этой теоремы къ нашимъ уравненіямъ должно составить разложенія по восходящимъ степенямъ ε трехъ функцій:

$$\left.\begin{aligned}&k^2u\vartheta'^2=\frac{4-k^2+S}{(1+T)(1-\varepsilon t)}\,,\\&k\vartheta'=\frac{\sqrt{1+\sum\limits_1^\infty\Phi_{2n}\varepsilon^{2n}}}{\sqrt{1+T}}\,,\\&k^2\frac{\vartheta''}{\vartheta'}=-\frac{k^2T'}{2(1+T)}\,,\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (96)$$

гдѣ T' есть производная функціи T по ψ.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} k^2 u\vartheta'^2 &= 4 - k^2 + \sum_1^\infty u_n \varepsilon^n , \\ k\vartheta' &= 1 + \sum_1^\infty v_n \varepsilon^n , \\ k^2 \frac{\vartheta''}{\vartheta'} &= \sin\psi \sum_1^\infty w_n \varepsilon^n , \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

суть эти разложенія. На основаніи предыдущихъ формулъ нетрудно убѣдиться, что здѣсь u_n, v_n и w_n суть раціональныя цѣлыя функціи t, изъ которыхъ первыя двѣ суть n-ой, послѣдняя (n—1)-ой степени.

Ряды (97) будутъ абсолютно сходящимися для всякаго ψ, достаточно близкаго къ какому-либо вещественному значенію, пока $\operatorname{mod}\varepsilon$ достаточно малъ. Между прочимъ ряды эти будутъ абсолютно сходящимися для всякаго вещественнаго ψ, пока модуль ε менѣе нѣкотораго предѣла E.

Отсюда на основаніи упомянутой теоремы заключаемъ, что инваріанты A и B могутъ быть представлены подъ видомъ рядовъ, расположенныхъ по восходящимъ степенямъ ε и абсолютно сходящихся, пока $\varepsilon < E$. Для $\varepsilon = E$ ряды эти могутъ дѣлаться расходящимися.

Замѣтимъ одно свойство этихъ разложеній A и B.

Изъ формулъ (90) и (93) видно, что функціи

$$T, \quad S, \quad \frac{T'}{\varepsilon\sin\psi}$$

не мѣняются вслѣдствіе одновременной замѣны t черезъ $-t$ и ε черезъ $-\varepsilon$. Поэтому коэффиціенты въ уравненіяхъ (95), а слѣдовательно и самыя уравненія не мѣняются при одновременной замѣнѣ ε черезъ $-\varepsilon$ и ψ черезъ $\psi + \pi$.

Отсюда слѣдуетъ, что если

$$X = F(\psi), \qquad Y = \Phi(\psi)$$

есть какая-либо система рѣшеній уравненій (95), то

$$X = F(\psi + \pi), \qquad Y = \Phi(\psi + \pi)$$

представитъ нѣкоторую систему рѣшеній для уравненій, получаемыхъ изъ (95) замѣною ε черезъ $-\varepsilon$.

Отсюда заключаемъ, что корни характеристичнаго уравненія, соотвѣтствующаго уравненіямъ (95) и періоду 2π, при замѣнѣ ε черезъ

$-\varepsilon$ переходятъ одинъ въ другой, а слѣдовательно инваріанты A и B при этой замѣнѣ не мѣняются.

Вслѣдствіе этого разложенія A и B по восходящимъ степенямъ ε будутъ содержать всегда только четныя степени ε.

14. Замѣняемъ коэффиціенты въ уравненіяхъ (95) ихъ разложеніями (97). Затѣмъ полагаемъ

$$X = \sum_0^\infty \mathrm{P}_n \varepsilon^n, \qquad Y = \sum_0^\infty \mathrm{Q}_n \varepsilon^n,$$

и разсматриваемъ P_n и Q_n, какъ функціи ψ, не зависящія отъ ε. Тогда, означая дифференцированія по ψ значками, получимъ для опредѣленія этихъ функцій слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} k^2\mathrm{P}_0'' - 2k\,\mathrm{Q}_0' - (1-\lambda)(4-k^2)\,\mathrm{P}_0 = 0\,, \\ k^2\mathrm{Q}_0'' + 2k\,\mathrm{P}_0' - \lambda(4-k^2)\mathrm{Q}_0 = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (98)$$

и для $n > 0$

$$\left.\begin{aligned} k^2\mathrm{P}_n'' - 2k\,\mathrm{Q}_n' - (1-\lambda)(4-k^2)\,\mathrm{P}_n = \mathrm{S}_n\,, \\ k^2\mathrm{Q}_n'' + 2k\,\mathrm{P}_n' - \lambda(4-k^2)\,\mathrm{Q}_n = \mathrm{T}_n\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (99)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{S}_n = (1-\lambda)\sum_{j=0}^{j=n-1} u_{n-j}\,\mathrm{P}_j + \sin\psi \sum_{j=0}^{j=n-1} w_{n-j}\,\mathrm{P}_j' + 2k\sum_{j=0}^{j=n-1} v_{n-j}\,\mathrm{Q}_j', \\ \mathrm{T}_n = \lambda\sum_{j=0}^{j=n-1} u_{n-j}\,\mathrm{Q}_j + \sin\psi \sum_{j=0}^{j=n-1} w_{n-j}\,\mathrm{Q}_j' - 2k\sum_{j=0}^{j=n-1} v_{n-j}\,\mathrm{P}_j'. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (100)$$

Непосредственное приложеніе теоремы параграфа 9 требуетъ, чтобы при интегрированіи каждой изъ системъ уравненій (99) постоянныя произвольныя опредѣлялись изъ условія, чтобы функціи $\mathrm{P}_n, \mathrm{P}_n', \mathrm{Q}_n, \mathrm{Q}_n'$ обращались въ нуль для нѣкотораго частнаго значенія ψ, одного и того-же для всякаго n, положимъ, $\psi = 0$. Если при томъ постоянныя интегрированія уравненій (98) опредѣлены изъ условія, чтобы для $\psi = 0$ функціи $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_0', \mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_0'$ соотвѣтственно принимали значенія X_0, X_0', Y_0, Y_0', то постоянныя $\mathrm{P}_n(2\pi), \mathrm{P}_n'(2\pi), \mathrm{Q}_n(2\pi), \mathrm{Q}_n'(2\pi)$ найдутся подъ видомъ линейныхъ и однородныхъ функцій постоянныхъ X_0, X_0', Y_0, Y_0'. Затѣмъ при помощи коэффиціентовъ этихъ функцій составится характеристичное уравненіе, какъ это было показано въ концѣ параграфа 10.

Этотъ способъ вычисленія инваріантовъ A и B, вполнѣ аналогичный изложенному въ параграфахъ 10 и 11, можно приложить напримѣръ къ случаю $k=2$, когда интегрированіе уравненій (98) и (99) даетъ:

$$\mathrm{P}_0 = X_0 + Y_0' + X_0' \sin\psi - Y_0' \cos\psi\,,$$

$$\mathrm{Q}_0 = Y_0 - X_0' + X_0' \cos\psi + Y_0' \sin\psi\,,$$

и для $n > 0$:

$$4\mathrm{P}_n = \int\limits_0^\psi \mathrm{T}_n d\psi + \sin\psi \int\limits_0^\psi (\mathrm{S}_n \cos\psi - \mathrm{T}_n \sin\psi) d\psi -$$

$$- \cos\psi \int\limits_0^\psi (\mathrm{S}_n \sin\psi + \mathrm{T}_n \cos\psi) d\psi\,,$$

$$4\mathrm{Q}_n = -\int\limits_0^\psi \mathrm{S}_n d\psi + \sin\psi \int\limits_0^\psi (\mathrm{S}_n \sin\psi + \mathrm{T}_n \cos\psi) d\psi +$$

$$+ \cos\psi \int\limits_0^\psi (\mathrm{S}_n \cos\psi - \mathrm{T}_n \sin\psi) d\psi\,.$$

Вообще-же онъ ведетъ къ довольно сложнымъ вычисленіямъ. Поэтому укажемъ на другіе, болѣе общіе способы.

Предыдущій способъ даетъ для X и Y выраженія подъ видомъ линейныхъ и однородныхъ функцій постоянныхъ X_0, X_0', Y_0, Y_0', въ которыхъ коэффиціенты суть функціи ψ и ε, разлагающіяся въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ε, абсолютно сходящіеся для всякаго вещественнаго ψ, пока $\varepsilon < E$. Замѣнимъ въ этихъ выраженіяхъ постоянныя X_0, X_0', Y_0, Y_0' линейными и однородными независимыми между собою функціями четырехъ новыхъ постоянныхъ C_1, C_2, C_3, C_4 съ коэффиціентами, представляющими ряды, расположенные по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ε и абсолютно сходящіеся, пока $\varepsilon < E$. Тогда получимъ общій интегралъ уравненій (95) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + C_4 X_4\,,$$

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 + C_4 Y_4\,,$$

гдѣ X_j, Y_j суть функціи ψ и ε, разлагающіяся въ ряды прежняго вида, абсолютно сходящіеся при томъ-же условіи.

Положимъ

$$\left.\begin{aligned} X_j(\psi+2\pi) &= (j1)X_1+(j2)X_2+(j3)X_3+(j4)X_4\,, \\ X_j'(\psi+2\pi) &= (j1)X_1'+(j2)X_2'+(j3)X_3'+(j4)X_4'\,, \\ Y_j(\psi+2\pi) &= (j1)Y_1+(j2)Y_2+(j3)Y_3+(j4)Y_4\,, \\ Y_j'(\psi+2\pi) &= (j1)Y_1'+(j2)Y_2'+(j3)Y_3'+(j4)Y_4'\,, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (101)$$

$$(j=1\,,2\,,3\,,4)\,,$$

гдѣ (ji) суть нѣкоторыя постоянныя.

Если четыре независимыя системы частныхъ рѣшеній X_j, Y_j $(j=1\,,2\,,3\,,4)$ остаются независимыми и для $\varepsilon=0$, что мы всегда будемъ предполагать, то отсюда, когда разложенія функцій X_j, Y_j извѣстны, получимъ постоянныя (ji) подъ видомъ рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ε и абсолютно сходящихся при ε достаточно маломъ *).

Положимъ

$$(ji)=\sum_0^\infty (ji)_n\varepsilon^n\,,$$

$$(j\,,i=1\,,2\,,3\,,4)\,,$$

и

$$X_j=\sum_0^\infty \mathrm{P}_{j,n}\varepsilon^n\,,\qquad Y_j=\sum_0^\infty \mathrm{Q}_{j,n}\varepsilon^n\,.$$

Тогда для опредѣленія коэффиціентовъ $(ji)_n$ получимъ изъ уравненій (101) слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} (j1)_n\mathrm{P}_{1,0}+(j2)_n\mathrm{P}_{2,0}+(j3)_n\mathrm{P}_{3,0}+(j4)_n\mathrm{P}_{4,0} &= G_{j,n}\,, \\ (j1)_n\mathrm{P}_{1,0}'+(j2)_n\mathrm{P}_{2,0}'+(j3)_n\mathrm{P}_{3,0}'+(j4)_n\mathrm{P}_{4,0}' &= G_{j,n}'\,, \\ (j1)_n\mathrm{Q}_{1,0}+(j2)_n\mathrm{Q}_{2,0}+(j3)_n\mathrm{Q}_{3,0}+(j4)_n\mathrm{Q}_{4,0} &= H_{j,n}\,, \\ (j1)_n\mathrm{Q}_{1,0}'+(j2)_n\mathrm{Q}_{2,0}'+(j3)_n\mathrm{Q}_{3,0}'+(j4)_n\mathrm{Q}_{4,0}' &= H_{j,n}'\,, \end{aligned}\right\} \quad . \quad (102)$$

---

*) Радіусъ круга общей сходимости этихъ рядовъ вообще будетъ менѣе E.

гдѣ

$$G_{j,0} = \mathrm{P}_{j,0}(\psi + 2\pi),$$

$$G_{j,n} = \mathrm{P}_{j,n}(\psi + 2\pi) -$$

$$-\sum_{l=1}^{l=n}\Big\{(j1)_{n-l}\,\mathrm{P}_{1,l} + (j2)_{n-l}\,\mathrm{P}_{2,l} + (j3)_{n-l}\,\mathrm{P}_{3,l} + (j4)_{n-l}\,\mathrm{P}_{4,l}\Big\},$$

а $G_{j,n}{}'$, $H_{j,n}$, $H_{j,n}{}'$ получаются изъ выраженія $G_{j,n}$ замѣною буквы P соотвѣтственно черезъ P', Q, Q'.

Когда разложенія (ji) найдены, составимъ характеристичное уравненіе:

$$\begin{vmatrix} (11)-q, & (12), & (13), & (14) \\ (21), & (22)-q, & (23), & (24) \\ (31), & (32), & (33)-q, & (34) \\ (41), & (42), & (43), & (44)-q \end{vmatrix} = 0.$$

Сравнивая послѣднее съ (45), найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} &2A = (11) + (22) + (33) + (44), \\ &2B = \begin{vmatrix} (11), (12) \\ (21), (22) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (11), (13) \\ (31), (33) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (11), (14) \\ (41), (44) \end{vmatrix} + \\ &\quad + \begin{vmatrix} (22), (23) \\ (32), (33) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (22), (24) \\ (42), (44) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (33), (34) \\ (43), (44) \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \quad (103)$$

Можно предположить въ упомянутыхъ выше выраженіяхъ X_0, $X_0{}'$, Y_0, $Y_0{}'$ черезъ постоянныя C_1, C_2, C_3, C_4 коэффиціенты цѣлыми функціями ε какой-либо степени n_1. Функціи эти могутъ быть взяты произвольно подъ тѣмъ условіемъ, чтобы опредѣлитель, составленный изъ нихъ, не обращался въ нуль при $\varepsilon = 0$. А надлежащимъ выборомъ этихъ функцій можно сдѣлать величины $\mathrm{P}_{j,n}$, $\mathrm{Q}_{j,n}$ для $n \leq n_1$ какими угодно частными рѣшеніями уравненій (99).

Отсюда видно, что при интегрированіи уравненій (99) можно не стѣснять себя какимъ-либо напередъ поставленнымъ условіемъ для опредѣленія постоянныхъ произвольныхъ до значенія n, равнаго произвольному числу n_1. Въ каждомъ частномъ случаѣ постояннымъ этимъ можно приписывать значенія, наиболѣе упрощающія дальнѣйшія вычисленія.

Въ общемъ случаѣ можно напримѣръ вести вычисленія слѣдующимъ образомъ:

Беремъ общій интегралъ уравненій (98) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$P_0 = C_1 e^{p_1 i\psi} + C_2 e^{p_2 i\psi} + C_3 e^{p_3 i\psi} + C_4 e^{p_4 i\psi},$$

$$Q_0 = C_1 \eta_1 i\, e^{p_1 i\psi} + C_2 \eta_2 i\, e^{p_2 i\psi} + C_3 \eta_3 i\, e^{p_3 i\psi} + C_4 \eta_4 i\, e^{p_4 i\psi},$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$, а $p_1, p_2, p_3 = -p_1$ и $p_4 = -p_2$ суть корни уравненія

$$p^4 - p^2 + \lambda(1-\lambda)\left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

которые предполагаются здѣсь всѣ различными. Наконецъ, η_j суть постоянныя, опредѣляемыя формулой

$$\eta_j = \frac{p_j^2 k^2 + (1-\lambda)(4-k^2)}{2kp_j}.$$

Изъ разсмотрѣнія формулъ (100) легко убѣждаемся, что интегрированіе каждой изъ системъ уравненій (99) можно затѣмъ вести такъ, чтобы для функцій $P_{j,n}, Q_{j,n}$ получались выраженія вида:

$$P_{j,n} = e^{p_j i\psi} M_{j,n}, \quad Q_{j,n} = e^{p_j i\psi} N_{j,n},$$

гдѣ $M_{j,n}$ и $N_{j,n}$ суть раціональныя цѣлыя функціи отъ $\sin\psi$, $\cos\psi$ и ψ. Функціи эти можно находить по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, замѣчая, что степень ихъ относительно $\sin\psi$ и $\cos\psi$ будетъ n, а относительно ψ — вообще не выше $n-1$.

Пусть n_1 есть наибольшее значеніе n, до котораго вычисленіе ведется по этому плану. Тогда для $n \leqq n_1$ изъ уравненій (102), очевидно, найдемъ:

$$(jl)_n = 0,$$

если j и l различны, и

$$(jj)_n P_{j,0} = P_{j,n}(\psi + 2\pi) - \sum_{l=1}^{l=n} (jj)_{n-l} P_{j,l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

Легко видѣть, что вообще можно полагать $n_1 = \infty$. Въ самомъ дѣлѣ, если корни характеристичнаго уравненія для всѣхъ комплексныхъ значеній ε, модули которыхъ не превосходятъ нѣкотораго предѣла $E_1 \leqq E$, различны, то корни эти разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ε, абсолютно сходящіеся, пока $\varepsilon < E_1$. Съ другой стороны изъ самаго характеристичнаго уравненія видно, что если для j и l различныхъ и для $n \leqq n_1$

$$(jl)_n = 0 ,$$

то разложенія эти до членовъ съ $2n_1$-ой степенью ε включительно суть:

$$\sum_{n=0}^{n=2n_1} (jj)_n \varepsilon^n ,$$

$$(j = 1 , 2 , 3 , 4) .$$

Такимъ образомъ, если всѣ корни характеристичнаго уравненія для $\varepsilon = 0$ различны, для чего необходимо и достаточно, чтобы разности между корнями уравненія (104) не были цѣлыми числами, то предполагая $n_1 = \infty$ и составляя изъ вычисляемыхъ въ этомъ предположеніи величинъ $(jj)_n$ ряды

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (jj)_n \varepsilon^n , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

найдемъ, что послѣдніе для достаточно малыхъ значеній ε будутъ абсолютно сходящимися и представятъ разложенія по восходящимъ степенямъ ε корней характеристичнаго уравненія.

Радіусомъ круга сходимости этихъ рядовъ будетъ или наименьшій изъ непревосходящихъ E модулей тѣхъ значеній ε, для которыхъ по крайней мѣрѣ одно изъ условій (52) есть равенство, или E, когда такихъ значеній ε не существуетъ.

Замѣтимъ, что для нечетныхъ n всѣ $(jj)_n$, вычисляемыя въ разсматриваемомъ предположеніи, будутъ равны нулю, ибо изъ того обстоятельства, что разложенія A и B содержатъ только четныя степени ε, слѣдуетъ, что тѣмъ-же свойствомъ будутъ обладать и разложенія (106).

15. Величины A и B вообще зависятъ отъ σ. Въ случаѣ-же притяженія, пропорціональнаго какой-либо степени разстоянія, зависимость эта исчезаетъ, потому что, если

$$f(r) = \frac{\alpha}{r^N} ,$$

то

$$\varphi' = -\alpha\, \sigma^{N-2} ,$$

и формула (87) даетъ:

$$\Phi_n = \frac{(N-2)(N-3)\ldots(N-n-1)}{1.2.3\ldots(n+1)}.$$

Въ этомъ случаѣ A и B зависятъ только отъ трехъ параметровъ: N, λ и ε.

Уравненіе, которому удовлетворяютъ s_0 и s_1, если положимъ

$$s = \sqrt{a}\, g^{\frac{1}{3-N}} \zeta,$$

принимаетъ въ этомъ случаѣ видъ:

$$\frac{2}{N-1}\zeta^{N-1} - \zeta^2 + h_1 = 0,$$

если $N \gtrless 1$, и

$$2\log\zeta - \zeta^2 + h_1 = 0,$$

если $N=1$. Здѣсь h_1 представляетъ произвольное число.

Отсюда видно, что при $N \geqq 3$ въ числѣ Лапласовыхъ движеній не можетъ быть періодическихъ. Напротивъ, при $N \leqq 1$ всѣ Лапласовы движенія суть періодическія.

Покажемъ, какими условіями опредѣляется при разсматриваемомъ законѣ притяженія величина E — радіусъ круга сходимости разложеній A и B по восходящимъ степенямъ ε.

Величина E есть высшій предѣлъ модулей тѣхъ значеній ε, для которыхъ при всякомъ вещественномъ t, лежащемъ между -1 и $+1$, ряды (97) суть абсолютно сходящіеся.

Обращаясь къ формуламъ (96), видимъ, что это есть также высшій предѣлъ модулей тѣхъ значеній ε, для которыхъ при такихъ-же значеніяхъ t разложенія функцій

$$\frac{4-k^2+S}{1-\varepsilon t}, \quad T', \quad \ldots\ldots\ldots \quad (107)$$

$$\sqrt{1+\sum_0^\infty \Phi_{2n}\varepsilon^{2n}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

$$(1+T)^{-1}, \quad (1+T)^{-\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

суть абсолютно сходящіяся.

Замѣчая, что

$$k^2 = 1 - \frac{\sigma\varphi''}{\varphi'} = 3 - N,$$

и принимая въ разсчетъ выраженіе (93) для S, находимъ:

$$\frac{4-k^2+S}{1-\varepsilon t}=\frac{N+1}{(1-\varepsilon t)^{3-N}}.$$

Далѣе, изъ (89) получаемъ:

$$1+T=\frac{4(1-\varepsilon t)^{N-1}-2(1+\varepsilon)^{N-1}-2(1-\varepsilon)^{N-1}+[2t+\varepsilon(1-t^2)][(1+\varepsilon)^{N-1}-(1-\varepsilon)^{N-1}]}{2(3-N)(N-1)\varepsilon^2(1-t^2)}.$$

Отсюда видно, что при разсматриваемыхъ значеніяхъ t разложенія функцій (107) суть абсолютно сходящіяся, пока $\operatorname{mod}\varepsilon<1$.

При томъ-же условіи и разложенія функцій: T и

$$\frac{(1+\varepsilon)^{N-1}-(1-\varepsilon)^{N-1}}{2(N-1)\varepsilon}=1+\sum_1^\infty \Phi_{2n}\varepsilon^{2n}$$

суть абсолютно сходящіяся.

Поэтому радіусомъ круга сходимости разложенія функціи (108) служитъ или наименьшій изъ непревосходящихъ 1 модулей корней уравненія

$$\frac{(1+\varepsilon)^{N-1}-(1-\varepsilon)^{N-1}}{2(N-1)\varepsilon}=0,$$

или 1, когда уравненіе это такихъ корней не имѣетъ. Назовемъ этотъ радіусъ черезъ ε_0.

Подобнымъ-же образомъ для всякаго даннаго t, лежащаго между предѣлами -1 и $+1$ включительно, радіусомъ круга сходимости разложеній каждой изъ функцій (109) будетъ или наименьшій изъ непревосходящихъ 1 модулей корней уравненія

$$1+T=0$$

или 1, если послѣднее не имѣетъ такихъ корней. Этотъ радіусъ будетъ нѣкоторою функціей t, наименьшее значеніе которой въ разсматриваемыхъ предѣлахъ измѣняемости t назовемъ черезъ ε_1.

Наименьшее изъ чиселъ ε_0 и ε_1 и будетъ E.

Останавливаться на опредѣленіи числа E для всякаго даннаго N не будемъ. Замѣтимъ только, что для случая $3>N>2$ предыдущія формулы весьма легко даютъ $E=1$.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ

$$\Phi_{2n} = -(N-2)\frac{(3-N)(4-N)\ldots(2n+1-N)}{1.2.3\ldots(2n+1)}$$

всегда отрицательно, а потому при $\operatorname{mod}\varepsilon < 1$

$$\operatorname{mod}\left(1+\sum_1^\infty \Phi_{2n}\varepsilon^{2n}\right) > 1 + \sum_1^\infty \Phi_{2n} = \frac{2^{N-2}}{N-1}\,.$$

Точно такъ-же, замѣчая, что Φ_{2n+1} въ разсматриваемомъ случаѣ положительно, изъ разложенія (90) при условіи $\operatorname{mod}\varepsilon < 1$ заключаемъ:

$$\operatorname{mod}(1+T) > 1 + (T)_{t=\varepsilon=1} = 0\,.$$

При $N = 2$ конечно также $E = 1$.

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ наши формулы значительно упрощаются вслѣдствіе того, что $\Phi_n = 0$, $k = 1$. Уравненіе (92) при этомъ даетъ $\psi = \vartheta$.

Уравненія (99) обращаются въ слѣдующія:

$$\frac{d^2\mathrm{P}_n}{d\vartheta^2} - 2\frac{d\mathrm{Q}_n}{d\vartheta} - 3(1-\lambda)\mathrm{P}_n = 3(1-\lambda)\sum_{l=0}^{l=n-1}\cos^{n-l}\vartheta\,\mathrm{P}_l\,,$$

$$\frac{d^2\mathrm{Q}_n}{d\vartheta^2} + 2\frac{d\mathrm{P}_n}{d\vartheta} - 3\lambda\mathrm{Q}_n = 3\lambda\sum_{l=0}^{l=n-1}\cos^{n-l}\vartheta\,\mathrm{Q}_l\,.$$

16. Возможность разложенія A и B въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ε, для достаточно малыхъ значеній послѣдняго, позволяетъ рѣшать вопросы объ устойчивости періодическихъ Лапласовыхъ движеній, достаточно близкихъ къ постояннымъ.

Возвращаясь опять къ произвольному закону притяженія, положимъ, что при какихъ-либо данныхъ λ и σ *неравенства* (52) удовлетворены для $\varepsilon = 0$. Изъ этого мы заключимъ, что при тѣхъ-же λ и σ неравенства эти удовлетворятся также и для другихъ достаточно малыхъ значеній ε. Въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, не только постоянное, но и достаточно близкія къ нему непостоянныя періодическія движенія, соотвѣтствующія тому-же σ, устойчивы.

Напротивъ, если при данныхъ λ и σ для $\varepsilon = 0$ удовлетворено хотя одно изъ неравенствъ, противоположныхъ (52), то же будетъ и для достаточно малыхъ значеній ε, а слѣдовательно періодическія движенія, достаточно близкія къ постоянному, не будутъ устойчивыми.

Когда для $\varepsilon = 0$ удовлетворяются только нѣкоторыя изъ неравенствъ (52), а остальныя переходятъ въ равенства, разсматриваемыя движенія могутъ быть какъ устойчивыми, такъ и неустойчивыми.

Займемся рѣшеніемъ этого вопроса. Но прежде опредѣлимъ всѣ случаи, въ которыхъ только-что упомянутое обстоятельство можетъ представиться.

Неравенства (52) могутъ обращаться въ равенства только въ случаяхъ, когда по крайней мѣрѣ два изъ корней характеристичнаго уравненія дѣлаются равными. А для того, чтобы послѣднее имѣло мѣсто при $\varepsilon = 0$, уравненіе (104) должно имѣть по крайней мѣрѣ одну пару корней, разность между которыми есть число цѣлое.

Положимъ

$$\lambda(1-\lambda)\left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 = \tau .$$

Мы будемъ предполагать $\tau \leqq \frac{1}{4}$, потомучто должны разсмотрѣть только случай, когда корни уравненія (104) вещественны.

Пусть эти корни суть: $p_1, p_2, -p_1$ и $-p_2$.

Предполагая $p_2 \geqq p_1 \geqq 0$, легко убѣдиться, что p_1 и p_2 удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqq p_1 \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq p_2 \leqq 1 . \end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

Числовыя величины всевозможныхъ разностей, которыя могутъ быть составлены изъ этихъ четырехъ корней, взятыхъ попарно, приводятся къ четыремъ:

$$p_2 - p_1, \qquad p_1 + p_2, \qquad 2p_1, \qquad 2p_2 .$$

Предположеніе, что одна изъ этихъ величинъ есть число цѣлое, влечетъ за собою вслѣдствіе (110) одно изъ шести слѣдующихъ равенствъ:

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= 0 , \\ p_2 - p_1 &= 1 , \\ p_1 + p_2 &= 1 , \\ 2p_1 &= 0 , \\ 2p_1 &= 1 , \\ 2p_2 &= 2 . \end{aligned}$$

Первое изъ этихъ равенствъ даетъ $\tau=\frac{1}{4}$. Изъ второго выводимъ: $p_1=0$, $p_2=1$, и слѣд. $\tau=0$. Третье требуетъ совмѣстнаго существованія двухъ равенствъ

$$p_2{}^4-p_2{}^2+\tau=0\,,$$

$$(1-p_2)^4-(1-p_2)^2+\tau=0\,,$$

изъ которыхъ въ силу (110) слѣдуетъ: $p_2=1$, $\tau=0$. Четвертое приводитъ къ тому-же результату. Пятое даетъ $\tau=\frac{3}{16}$, и шестое: $\tau=0$.

Такимъ образомъ получаемъ три слѣдующихъ случая:

$$\text{I.}\qquad \tau=\frac{1}{4}\,;\quad p_1=p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

$$\text{II.}\qquad \tau=\frac{3}{16}\,;\quad p_1=\frac{1}{2}\,,\quad p_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

$$\text{III.}\qquad \tau=0\,;\quad p_1=0\,,\quad p_2=1\,.$$

Это суть единственно возможные случаи, въ которыхъ для $\varepsilon=0$ нѣкоторыя изъ условій (52) обращаются въ равенства, а остальныя остаются удовлетворенными.

Равенства эти суть слѣдующія:

$$\text{I.}\qquad A^2=2(B-1)\,.$$

$$\text{II.}\qquad A^2=\left(\frac{B+1}{2}\right)^2.$$

$$\text{III.}\qquad B=3\,,\quad 2(B-1)=A^2=\left(\frac{B+1}{2}\right)^2.$$

Случай III возможенъ только при одномъ изъ трехъ предположеній: $k^2=4$, $\lambda=0$, $\lambda=1$, изъ которыхъ два послѣднихъ не различаются существенно между собою.

Перваго предположенія разсматривать не будемъ, потомучто случай, когда $k^2=4$ вслѣдствіе выбора опредѣленнаго значенія σ, не представляетъ особаго интереса. Если-же $k^2=4$ для всякаго σ, то притяженіе пропорціонально первой степени разстоянія, а въ этомъ случаѣ a priori извѣстно, что всѣ Лапласовы движенія устойчивы.

Въ предположеніи $\lambda=0$ или $\lambda=1$ результатъ извѣстенъ заранѣе.

Поэтому случая III нѣтъ надобности разсматривать, и вмѣсто этого случая мы разсмотримъ тотъ, когда, при k^2 отличномъ отъ 4, λ есть величина безконечно-малая, ибо здѣсь представляется слѣдующій вопросъ:

Когда λ, не будучи равнымъ нулю, достаточно-мало, неравенства (52), очевидно, удовлетворяются для $\varepsilon = 0$. Поэтому періодическія движенія, достаточно близкія къ постояннымъ, въ этомъ случаѣ устойчивы. Пусть E_1 есть высшій предѣлъ, котораго при данныхъ λ и σ не должно превосходить ε для сохраненія устойчивости. Величина E_1 будетъ нѣкоторою функціей λ и σ. Когда, при постоянномъ σ, λ стремится къ нулю, функція эта приближается къ нѣкоторому предѣлу, который въ иныхъ случаяхъ можетъ быть нулемъ, въ другихъ — отличнымъ отъ нуля. Вопросъ о томъ, когда имѣетъ мѣсто тотъ или другой изъ этихъ двухъ случаевъ, мы и предложимъ себѣ для рѣшенія.

Важность рѣшенія этого вопроса обусловливается тѣмъ, что только въ случаяхъ второго рода существуютъ такія отличныя отъ нуля положительныя числа ε' и λ', что всѣ періодическія движенія, соотвѣтствующія одной и той-же величинѣ σ, для которыхъ $\varepsilon < \varepsilon'$, устойчивы, когда λ, будучи отличнымъ отъ нуля, не превосходитъ λ'.

Начнемъ съ разсмотрѣнія случая I.

17. Въ случаѣ I

$$\tau = \lambda(1-\lambda)\left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (111)$$

Такъ-какъ $\lambda(1-\lambda)$ не можетъ выходить изъ предѣловъ 0 и $\frac{1}{4}$, то τ не можетъ превосходить величины $\frac{1}{4}\left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2$. Поэтому разсматриваемый случай можетъ имѣть мѣсто только при условіи

$$\left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 \geqq 1,$$

приводящемся къ

$$k^2 \leqq 2.$$

Условіе это и будемъ здѣсь предполагать удовлетвореннымъ.

Мы будемъ разсматривать случай I, какъ предѣльный общаго, когда λ при постоянномъ σ приближается къ нѣкоторому значенію λ_0, удовлетворяющему уравненію (111). Законность такой точки зрѣнія слѣдуетъ изъ того, что согласно теоремѣ параграфа 9 величины A и B могутъ быть представлены подъ видомъ абсолютно сходящихся рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $\lambda - \lambda'$, гдѣ λ' произвольное число.

Чтобы остановиться на чемъ-либо опредѣленномъ, будемъ считать λ_0 не превосходящимъ $\frac{1}{2}$.

Положимъ

$$A = \sum_{0}^{\infty} A_n \varepsilon^{2n}, \quad B = \sum_{0}^{\infty} B_n \varepsilon^{2n},$$

и начнемъ съ составленія общихъ формулъ для вычисленія четырехъ величинъ: A_0, A_1, B_0 и B_1.

Формулы (90), (93) и (96), если примемъ въ разсчетъ, что $\Phi_1 = \frac{1-k^2}{2}$, даютъ слѣдующія выраженія функцій $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$, входящихъ въ разложенія (97):

$$u_1 = u_{11} t, \qquad v_1 = v_{11} t, \qquad w_1 = w_{10},$$

$$u_2 = u_{20} + u_{22} t^2, \quad v_2 = v_{20} + v_{22} t^2, \quad w_2 = w_{21} t,$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned}
u_{11} &= 3(k^2 - 2\Phi_2) - 2\frac{4-k^2}{k^2}\Phi_2, \\
v_{11} &= -\frac{1}{k^2}\Phi_2, \\
w_{10} &= \Phi_2, \\
u_{20} &= \frac{4-k^2}{k^2}(2\Phi_3 - \Phi_2), \\
u_{22} &= 2\frac{4+5k^2}{k^2}\Phi_3 + \frac{3}{k^2}(k^2-2\Phi_2)^2 + 15\Phi_2 + \frac{4(4-k^2)}{k^4}\Phi_2{}^2, \\
v_{20} &= \frac{1}{k^2}\Phi_3 + \frac{k^2-1}{2k^2}\Phi_2, \\
v_{22} &= \frac{1}{k^2}\Phi_3 + \frac{3}{2k^4}\Phi_2{}^2.
\end{aligned}\right\} (112)$$

Постоянная w_{21} намъ не понадобится.

Вслѣдствіе этого формулы (100) даютъ:

$$\mathrm{S}_1 = (1-\lambda) u_{11} t \,\mathrm{P}_0 + w_{10} \sin\psi \,\mathrm{P}_0' + 2k\, v_{11} t \,\mathrm{Q}_0',$$

$$\mathrm{T}_1 = \lambda u_{11} t \,\mathrm{Q}_0 + w_{10} \sin\psi \,\mathrm{Q}_0' - 2k\, v_{11} t \,\mathrm{P}_0',$$

$$\mathrm{S}_2 = (1-\lambda)[(u_{20} + u_{22} t^2)\mathrm{P}_0 + u_{11} t \,\mathrm{P}_1] + \sin\psi\,(w_{21} t \,\mathrm{P}_0' + w_{10}\mathrm{P}_1') + \\ + 2k[(v_{20} + v_{22} t^2)\mathrm{Q}_0' + v_{11} t \,\mathrm{Q}_1'],$$

$$\mathrm{T}_2 = \lambda[(u_{20} + u_{22} t^2)\mathrm{Q}_0 + u_{11} t \,\mathrm{Q}_1] + \sin\psi\,(w_{21} t \,\mathrm{Q}_0' + w_{10}\mathrm{Q}_1') - \\ - 2k[(v_{20} + v_{22} t^2)\mathrm{P}_0' + v_{11} t \,\mathrm{P}_1'].$$

Будемъ разумѣть въ этихъ формулахъ подъ P_n и Q_n какія-либо изъ функцій $P_{j,n}$, $Q_{j,n}$ $(j=1,2,3,4)$.

Поэтому положимъ:

$$P_0 = e^{p\psi i}, \qquad Q_0 = \eta i e^{p\psi i},$$

гдѣ p есть одинъ изъ корней уравненія (104), и

$$\eta = \frac{p^2k^2+(1-\lambda)(4-k^2)}{2kp}.$$

Тогда для S_1 и T_1 получимъ выраженія вида:

$$S_1 = K e^{(p+1)\psi i} + K' e^{(p-1)\psi i},$$

$$T_1 = L e^{(p+1)\psi i} + L' e^{(p-1)\psi i},$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned}
K &= \frac{1-\lambda}{2}u_{11} + \frac{p}{2}w_{10} - kp\eta v_{11},\\
L &= \frac{\lambda}{2}\eta i u_{11} + \frac{p\eta i}{2}w_{10} - kpi v_{11},\\
K' &= \frac{1-\lambda}{2}u_{11} - \frac{p}{2}w_{10} - kp\eta v_{11},\\
L' &= \frac{\lambda}{2}\eta i u_{11} - \frac{p\eta i}{2}w_{10} - kpi v_{11}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (113)$$

Вслѣдствіе этого, если будемъ стараться удовлетворить уравненіямъ (99) для $n=1$ величинами

$$P_1 = a e^{(p+1)\psi i} + a' e^{(p-1)\psi i},$$

$$Q_1 = b e^{(p+1)\psi i} + b' e^{(p-1)\psi i},$$

то для опредѣленія постоянныхъ a, b, a', b' получимъ слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned}
[k^2(p+1)^2+(1-\lambda)(4-k^2)]\,a + 2k(p+1)\,i\,b &= -K,\\
-2k(p+1)\,i\,a + [k^2(p+1)^2+\lambda(4-k^2)]\,b &= -L,\\
[k^2(p-1)^2+(1-\lambda)(4-k^2)]\,a' + 2k(p-1)\,i\,b' &= -K',\\
-2k(p-1)\,i\,a' + [k^2(p-1)^2+\lambda(4-k^2)]\,b' &= -L'.
\end{aligned}\right\} \quad . . (114)$$

Полезно замѣтить, что при замѣнѣ p черезъ $-p$ и k черезъ $-k$ коэффиціенты двухъ первыхъ уравненій переходятъ въ соотвѣтственные коэффиціенты двухъ послѣднихъ. То-же происходитъ и при одновременной замѣнѣ p черезъ $-p$ и i черезъ $-i$, ибо при этомъ η переходитъ въ $-\eta$.

Для S_2 и T_2 получаемъ затѣмъ слѣдующія выраженія:

$$S_2 = (M + M' \cos 2\psi + M'' \sin 2\psi)\, e^{p\psi i},$$

$$T_2 = (N + N' \cos 2\psi + N'' \sin 2\psi)\, e^{p\psi i},$$

гдѣ M, N, M', N', M'', N'' суть нѣкоторыя постоянныя. Для вычисленія первыхъ двухъ находимъ формулы:

$$\left.\begin{aligned} M = {} & \frac{1-\lambda}{2}(2u_{20} + u_{22}) - kp\eta(2v_{20} + v_{22}) + \frac{1-\lambda}{2}(a + a')u_{11} + \\ & + ki\Big((p+1)b + (p-1)b'\Big)v_{11} - \Big((p+1)a - (p-1)a'\Big)\frac{w_{10}}{2}, \\ N = {} & \frac{\lambda}{2}\eta i(2u_{20} + u_{22}) - kpi(2v_{20} + v_{22}) + \frac{\lambda}{2}(b + b')u_{11} - \\ & - ki\Big((p+1)a + (p-1)a'\Big)v_{11} - \Big((p+1)b - (p-1)b'\Big)\frac{w_{10}}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (115)$$

Отсюда видно, что для P_2 и Q_2 можно принять выраженія:

$$P_2 = (\alpha i \psi + \beta + \beta' \cos 2\psi + \beta'' \sin 2\psi)\, e^{p\psi i},$$

$$Q_2 = (-\eta\alpha\psi + \gamma' \cos 2\psi + \gamma'' \sin 2\psi)\, e^{p\psi i},$$

при чемъ для опредѣленія постоянныхъ α и β получатся уравненія:

$$2k(\eta - kp)\alpha - [k^2p^2 + (1-\lambda)(4-k^2)]\,\beta = M,$$

$$2k(1 - kp\eta)\, i\alpha + 2kpi\beta = N.$$

Изъ послѣднихъ, припоминая значеніе η, найдемъ:

$$\alpha = \frac{M - N\eta i}{2k(2\eta - kp - kp\eta^2)},$$

или, вслѣдствіе (104)

$$\alpha = \frac{M - N\eta i}{k^3(1-2p^2)\eta} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (116)$$

Изъ предыдущихъ выраженій функцій P_n и Q_n слѣдуетъ:

$$P_0(\psi + 2\pi) = e^{2\pi p i} P_0 ,$$

$$P_1(\psi + 2\pi) = e^{2\pi p i} P_1 ,$$

$$P_2(\psi + 2\pi) = e^{2\pi p i} P_2 + 2\pi i \alpha e^{2\pi p i} P_0 .$$

Поэтому, если величину α, соотвѣтствующую корню p_j, назовемъ черезъ α_j, то уравненія (105) дадутъ:

$$(jj)_0 = e^{2\pi p_j i} ,$$

$$(jj)_1 = 0 ,$$

$$(jj)_2 = 2\pi i \alpha_j e^{2\pi p_j i} .$$

Замѣтимъ здѣсь, что если по прежнему $p_3 = -p_1$ и $p_4 = -p_2$, то

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0 , \qquad \alpha_2 + \alpha_4 = 0 ,$$

какъ это слѣдуетъ изъ того, что выраженія

$$q_j = (jj)_0 + (jj)_2 \varepsilon^2 + \ldots ,$$

$$(j = 1 , 2 , 3 , 4)$$

представляютъ корни характеристичнаго уравненія, и слѣдовательно $q_1 q_3 = 1$, $q_2 q_4 = 1$.

Вслѣдствіе этого формулы

$$2A_0 = (11)_0 + (22)_0 + (33)_0 + (44)_0 ,$$

$$2A_1 = (11)_2 + (22)_2 + (33)_2 + (44)_2 ,$$

$$2B_0 = (11)_0(33)_0 + (22)_0(44)_0 + [(11)_0 + (33)_0][(22)_0 + (44)_0] ,$$

$$\begin{aligned} 2B_1 = {} & (11)_0(33)_2 + (11)_2(33)_0 + (22)_0(44)_2 + (22)_2(44)_0 + \\ & + [(11)_0 + (33)_0][(22)_2 + (44)_2] + [(22)_0 + (44)_0][(11)_2 + (33)_2] , \end{aligned}$$

слѣдующія изъ уравненій (103), принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \cos 2\pi p_1 + \cos 2\pi p_2 , \\ A_1 &= -2\pi(\alpha_1 \sin 2\pi p_1 + \alpha_2 \sin 2\pi p_2) , \\ B_0 &= 1 + 2 \cos 2\pi p_1 \cos 2\pi p_2 , \\ B_1 &= -4\pi(\alpha_1 \sin 2\pi p_1 \cos 2\pi p_2 + \alpha_2 \sin 2\pi p_2 \cos 2\pi p_1) . \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (117)$$

Такимъ образомъ задача о вычисленiи A_1 и B_1 приводится къ вычисленiю α_1 и α_2.

Изъ изложеннаго въ предыдущемъ параграфѣ слѣдуетъ, что въ случаѣ I единственное условiе устойчивости перiодическихъ движенiй, достаточно близкихъ къ постоянному, выражается неравенствомъ:

$$\lim\left\{A^2 - 2(B-1)\right\}_{\lambda=\lambda_0} > 0,$$

которое должно быть удовлетворено для достаточно малыхъ значенiй ε. А такъ-какъ

$$A^2 - 2(B-1) = A_0{}^2 - 2(B_0-1) + 2(A_0A_1 - B_1)\varepsilon^2 + \ldots,$$

и

$$\lim\left\{A_0{}^2 - 2(B_0-1)\right\}_{\lambda=\lambda_0} = 0,$$

то вообще оно приводится къ слѣдующему:

$$\lim\left\{A_0A_1 - B_1\right\}_{\lambda=\lambda_0} > 0.$$

Но формулы (117) даютъ

$$A_0A_1 - B_1 = 4\pi\sin\pi(p_1+p_2)\sin\pi(p_2-p_1)\left(\alpha_2\sin 2\pi p_2 - \alpha_1\sin 2\pi p_1\right).$$

При томъ имѣемъ:

$$\lim p_1 = \lim p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

а потому послѣднее неравенство можно замѣнить слѣдующимъ:

$$\lim\left\{(p_2-p_1)(\alpha_2\sin 2\pi p_2 - \alpha_1\sin 2\pi p_1)\right\}_{\lambda=\lambda_0} < 0 \quad . \; . \; . \; . \; (118)$$

Полагая

$$\sqrt{2-k^2} = k_1,$$

изъ уравненiя (111) находимъ:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} - \frac{k_1\sqrt{2}}{4-k^2} = \frac{(\sqrt{2}-k_1)^2}{2(4-k^2)}.$$

Предположимъ сначала k^2 не равнымъ 2. Тогда, если положимъ

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{\zeta^2}{2\sqrt{2}\,k_1(4-k^2)},$$

и разложимъ p_1 и p_2 въ ряды по восходящимъ степенямъ ζ, то выписывая только члены съ нулевою и первою степенями ζ, получимъ:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\zeta}{\sqrt{2}\,k^2} + \ldots, \qquad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\zeta}{\sqrt{2}\,k^2} + \ldots.$$

Также найдемъ:

$$k^3(1 - 2p_1^2)\eta_1 = 2(\sqrt{2} + k_1)\zeta + \ldots,$$

$$k^3(1 - 2p_2^2)\eta_2 = -2(\sqrt{2} + k_1)\zeta + \ldots.$$

При $k^2 = 2$, замѣчая, что $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, полагаемъ:

$$\lambda = \frac{1-\zeta}{2}.$$

При этомъ для предыдущихъ величинъ получимъ разложенія, въ которыхъ члены съ первою степенью ζ могутъ быть выведены изъ соотвѣтственныхъ членовъ предыдущихъ разложеній, если въ нихъ сдѣлаемъ $k^2 = 2$.

Поэтому во всякомъ случаѣ найдемъ:

$$p_2 - p_1 = \frac{\sqrt{2}}{k^2}\,\zeta + \ldots,$$

а формула (116) дастъ:

$$\alpha_1 = \frac{\lim(M - N\eta i)_{\zeta=0}}{2(\sqrt{2} + k_1)\zeta} + \ldots,$$

$$\alpha_2 = -\frac{\lim(M - N\eta i)_{\zeta=0}}{2(\sqrt{2} + k_1)\zeta} + \ldots,$$

гдѣ невыписанные члены содержатъ нулевую и положительныя степени ζ.

Вслѣдствіе этого неравенство (118) приведется къ слѣдующему виду:

$$\lim(M - N\eta i)_{\zeta=0} < 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (119)$$

При всѣхъ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ мы будемъ разсматривать только одно предѣльное значеніе λ. Поэтому, для сокращенія, переходовъ къ предѣлу означать не будемъ.

Полагаемъ

$$\lambda = \frac{(\sqrt{2}-k_1)^2}{2(4-k^2)}$$

и соотвѣтственно этому

$$1-\lambda = \frac{(\sqrt{2}+k_1)^2}{2(4-k^2)}, \quad p = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{\sqrt{2}+k_1}{k}.$$

Тогда вслѣдствіе (112) величины (113) получатъ слѣдующія выраженія:

$$K = \frac{3(\sqrt{2}+k_1)^2}{4(4-k^2)}(k^2-2\Phi_2) + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{(\sqrt{2}+k_1)k_1}{2k^2}\right)\Phi_2,$$

$$L = \frac{3(\sqrt{2}-k_1)ki}{4(4-k^2)}(k^2-2\Phi_2) + \left(\frac{k_1}{2k} + \frac{\sqrt{2}+k_1}{2\sqrt{2}\,k}\right)i\,\Phi_2,$$

$$K' = \frac{3(\sqrt{2}+k_1)^2}{4(4-k^2)}(k^2-2\Phi_2) - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{(\sqrt{2}+k_1)k_1}{2k^2}\right)\Phi_2,$$

$$L' = \frac{3(\sqrt{2}-k_1)ki}{4(4-k^2)}(k^2-2\Phi_2) + \left(\frac{k_1}{2k} - \frac{\sqrt{2}+k_1}{2\sqrt{2}\,k}\right)i\,\Phi_2,$$

а уравненія (114) дадутъ:

$$a = -\frac{3(\sqrt{2}-1)}{2k^2(4-k^2)}\left(k_1+\sqrt{2}+\frac{4-k^2}{2}\right)(k^2-2\Phi_2) - \frac{\Phi_2}{2\sqrt{2}\,k^2},$$

$$a' = -\frac{3(\sqrt{2}+1)}{2k^2(4-k^2)}\left(k_1+\sqrt{2}-\frac{4-k^2}{2}\right)(k^2-2\Phi_2) + \frac{\Phi_2}{2\sqrt{2}\,k^2},$$

$$b = -\frac{3(\sqrt{2}-1)}{2k^3}\left(\frac{\sqrt{2}+k_1}{2} + \frac{k^2}{4-k^2}\right)i(k^2-2\Phi_2) - \frac{(\sqrt{2}+k_1)i}{2\sqrt{2}\,k^3}\Phi_2,$$

$$b' = \frac{3(\sqrt{2}+1)}{2k^3}\left(\frac{\sqrt{2}+k_1}{2} - \frac{k^2}{4-k^2}\right)i(k^2-2\Phi_2) + \frac{(\sqrt{2}+k_1)i}{2\sqrt{2}\,k^3}\Phi_2.$$

Отсюда:

$$a+a'=-\frac{3(k^2+2\sqrt{2}\,k_1)}{2k^2(4-k^2)}(k^2-2\Phi_2)\,,$$

$$b+b'=-\frac{3(k_1+\sqrt{2})(k^2-2\sqrt{2}\,k_1)i}{2k^3(4-k^2)}(k^2-2\Phi_2)\,,$$

$$(\sqrt{2}+1)a+(\sqrt{2}-1)a'=-\frac{3(k_1+\sqrt{2})}{k^2(4-k^2)}(k^2-2\Phi_2)-\frac{\Phi_2}{\sqrt{2}\,k^2}\,,$$

$$(\sqrt{2}+1)b-(\sqrt{2}-1)b'=-\frac{3(k_1+\sqrt{2})i}{2k^3}(k^2-2\Phi_2)-\frac{(\sqrt{2}+k_1)i}{k^3}\Phi_2\,,$$

$$(\sqrt{2}+1)b+(\sqrt{2}-1)b'=-\frac{3i}{k(4-k^2)}(k^2-2\Phi_2)-\frac{(\sqrt{2}+k_1)i}{\sqrt{2}\,k^3}\Phi_2\,,$$

$$(\sqrt{2}+1)a-(\sqrt{2}-1)a'=-\frac{3}{2k^2}(k^2-2\Phi_2)-\frac{\Phi_2}{k^2}\,.$$

Вслѣдствіе этого, принимая въ разсчетъ (112), изъ (115) находимъ:

$$\frac{M}{\sqrt{2}+k_1}=\frac{\sqrt{2}+k_1}{4(4-k^2)}(2u_{20}+u_{22})-\frac{1}{\sqrt{2}}(2v_{20}+v_{22})-$$

$$-\frac{9(\sqrt{2}+k_1)(k^2+2\sqrt{2}\,k_1)}{8k^2(4-k^2)^2}(k^2-2\Phi_2)^2-\frac{\sqrt{2}+k_1}{4k^4}\Phi_2{}^2+$$

$$+\frac{3[\sqrt{2}\,k^2+(4+k^2)k_1]}{4k^4(4-k^2)}\Phi_2(k^2-2\Phi_2)\,,$$

$$-\frac{Ni}{k}=\frac{\sqrt{2}-k_1}{4(4-k^2)}(2u_{20}+u_{22})-\frac{1}{\sqrt{2}}(2v_{20}+v_{22})-$$

$$-\frac{9(\sqrt{2}-k_1)(k^2-2\sqrt{2}\,k_1)}{8k^2(4-k^2)^2}(k^2-2\Phi_2)^2-\frac{\sqrt{2}-k_1}{4k^4}\Phi_2{}^2+$$

$$+\frac{3[\sqrt{2}\,k^2-(4+k^2)k_1]}{4k^4(4-k^2)}\Phi_2(k^2-2\Phi_2)\,,$$

откуда

$$\frac{M - N\eta i}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+k_1)} = \frac{2u_{20}+u_{22}}{2(4-k^2)} - (2v_{20}+v_{22}) - \frac{\Phi_2{}^2}{2k^4} -$$

$$- \frac{9(k^2-2\Phi_2)^2}{4k^2(4-k^2)} + \frac{3\Phi_2(k^2-2\Phi_2)}{2k^2(4-k^2)}.$$

Вслѣдствіе (112) равенство это принимаетъ окончательно слѣдующій видъ:

$$\frac{4-k^2}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+k_1)}(M - N\eta i) = 6\Phi_3 + (8+k^2)\Phi_2 - \frac{3}{4}k^2 - \frac{6}{k^2}\Phi_2{}^2.$$

Такимъ образомъ условіе (119) приводится къ слѣдующему:

$$\frac{6}{k^2}\Phi_2{}^2 + \frac{3}{4}k^2 - (8+k^2)\Phi_2 - 6\Phi_3 > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

Въ случаѣ I при выполненіи этого условія для какого-либо даннаго σ, соотвѣтствующія послѣднему непостоянныя періодическія движенія, достаточно близкія къ постоянному, устойчивы. При выполненіи противоположнаго условія — неустойчивы.

Когда условіе (120) обращается въ равенство, рѣшеніе вопроса объ устойчивости требуетъ дополнительнаго изслѣдованія, на которомъ останавливаться не будемъ.

Разсмотримъ періодическія движенія, соотвѣтствующія какому-либо значенію σ, для котораго неравенство (120) удовлетворено.

Вслѣдствіе выполненія этого условія можно найти такое отличное отъ нуля и не превосходящее E число E_1, что при $\lambda = \lambda_0$ неравенства (52) будутъ удовлетворены, пока $0 < \varepsilon < E_1$.

Тогда всякому ε, лежащему между предѣлами 0 и E_1 невключительно, будетъ соотвѣтствовать періодическое движеніе, устойчивое не только при $\lambda = \lambda_0$, но и при всякомъ λ, достаточно близкомъ къ λ_0.

Пусть λ имѣетъ какое-либо данное значеніе, достаточно близкое къ λ_0. Если это значеніе менѣе λ_0, всѣ періодическія движенія, для которыхъ ε достаточно мало, будутъ устойчивы. Напротивъ, если оно болѣе λ_0, періодическія движенія будутъ устойчивы, только пока ε заключается между нѣкоторыми предѣлами, изъ которыхъ низшій навѣрно не нуль, ибо при $\frac{1}{2} > \lambda > \lambda_0$ періодическія движенія, достаточно близкія къ постоянному, неустойчивы.

Такимъ образомъ, при выполненіи извѣстныхъ условій, устойчивыя періодическія движенія существуютъ только между достаточно удаленными отъ постояннаго.

Для притяженія, обратно пропорціональнаго N-ой степени разстоянія

$$k^2 = 3 - N\,, \quad \Phi_2 = \frac{(N-2)(N-3)}{6}\,, \quad \Phi_3 = \frac{(N-2)(N-3)(N-4)}{24}\,,$$

вслѣдствіе чего условіе (120) приводится къ виду:

$$(3-N)(N^2-1) > 0\,.$$

Такъ-какъ періодическія движенія возможны только при $N < 3$, а разсматриваемый случай I — только при $N \geqq 1$, то условіе это будетъ удовлетворено для всякихъ значеній N, которыя должны быть принимаемы въ разсчетъ въ случаѣ I, за исключеніемъ $N = 1$.

Что-же касается послѣдняго значенія N (для котораго $\lambda_0 = \frac{1}{2}$), то для него при $\lambda = \lambda_0$ равенство

$$A^2 - 2(B-1) = 0$$

будетъ имѣть мѣсто для всякаго ε, какъ это слѣдуетъ изъ найденныхъ въ параграфѣ 4 формулъ (33) и (35), которыми для $N = 1$ опредѣляются функціи X и Y въ предположеніи $\lambda = \frac{1}{2}$.

Изъ формулъ этихъ видно, что упомянутыя функціи будутъ типа

$$\Big(P_1(\vartheta) + \vartheta Q_1(\vartheta)\Big)\cos\vartheta + \Big(P_2(\vartheta) + \vartheta Q_2(\vartheta)\Big)\sin\vartheta\,,$$

гдѣ $P_j(\vartheta)$ и $Q_j(\vartheta)$ суть періодическія функціи ϑ съ періодомъ Ω.

Поэтому для $N = 1$ Лапласовы движенія при $\lambda = \lambda_0$ неустойчивы.

Переходимъ къ случаю II.

18. Въ случаѣ II

$$\tau = \lambda(1-\lambda)\left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 = \frac{3}{16} \quad \ldots\ldots\ldots (121)$$

Поэтому онъ возможенъ только при условіи

$$\left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 \geqq \frac{3}{4}\,,$$

изъ котораго слѣдуетъ или

$$k^2 \leqq 8(2-\sqrt{3})\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (122)$$

или

$$k^2 \geqq 8(2+\sqrt{3})\,.$$

Предполагая условіе это выполненнымъ, будемъ разсматривать случай II, подобно предыдущему, какъ предѣльный общаго, когда λ при постоянномъ σ приближается къ одному изъ корней уравненія (121). Корень этотъ назовемъ черезъ λ_1.

Полагая

$$\pm\sqrt{k^4-32k^2+64}=R\,,$$

найдемъ:

$$\lambda_1=\frac{1}{2}+\frac{R}{4(4-k^2)}\,.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ устойчивость періодическихъ движеній, достаточно близкихъ къ постоянному, опредѣляется знакомъ выраженія

$$\lim\left\{\left(\frac{B+1}{2}\right)^2-A^2\right\}_{\lambda=\lambda_1}$$

при достаточно малыхъ значеніяхъ ε. А такъ-какъ

$$\left(\frac{B+1}{2}\right)^2-A^2=\left(\frac{B_0+1}{2}\right)^2-A_0{}^2+\left(\frac{B_0+1}{2}\,B_1-2A_0A_1\right)\varepsilon^2+\ldots\,,$$

и

$$\lim\left\{\left(\frac{B_0+1}{2}\right)^2-A_0{}^2\right\}_{\lambda=\lambda_1}=0\,,$$

то знакъ послѣдняго для такихъ значеній ε вообще будетъ опредѣляться знакомъ выраженія

$$\lim\left\{\frac{B_0+1}{2}\,B_1-2\,A_0A_1\right\}_{\lambda=\lambda_1}.$$

Движенія эти будутъ устойчивы или неустойчивы, смотря по тому, положительно или отрицательно это выраженіе.

Вслѣдствіе формулъ (117) имѣемъ:

$$\frac{B_0+1}{2}B_1-2A_0A_1=$$

$$=4\pi\sin 2\pi p_1 \sin 2\pi p_2(\alpha_1\cos 2\pi p_1\sin 2\pi p_2+\alpha_2\cos 2\pi p_2 \sin 2\pi p_1)\,.$$

Пусть $p_2>p_1>0$. Тогда, съ приближеніемъ λ къ λ_1, p_1 будетъ приближаться къ $\frac{1}{2}$, а p_2 — къ $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Поэтому найдемъ:

$$\lim\eta_1=\frac{8-k^2-R}{4k}\,,\qquad \lim\eta_2=\frac{8+k^2-R}{4\sqrt{3}\,k}\,.$$

Отсюда видно, что знаменатель въ выраженіи (116) стремится къ отличному отъ нуля предѣлу какъ въ случаѣ $p=p_1$, такъ и въ случаѣ $p=p_2$.

Кромѣ того, изъ уравненій (114) видно, что въ случаѣ $p=p_2$ предѣльныя величины a, b, a', b' конечны.

Отсюда заключаемъ, что предѣльное значеніе α_2 при $\lambda=\lambda_1$ конечно. А потому имѣемъ:

$$\lim\left\{\frac{B_0+1}{2}B_1-2A_0A_1\right\}=$$

$$=\lim 4\pi\alpha_1\sin 2\pi p_1\cos 2\pi p_1 \sin^2 2\pi p_2=4\pi^2\sin^2\sqrt{3}\,\pi\lim\alpha_1(2p_1-1)\,.$$

Далѣе мы будемъ имѣть дѣло только съ величинами, относящимися къ корню $p=p_1$. Поэтому значка 1, указывающаго на этотъ корень, приписывать не будемъ.

Согласно (116), имѣемъ:

$$\lim\alpha(2p-1)=\frac{2}{k^3}\lim\frac{(2p-1)(M-N\eta i)}{\eta}\,.$$

Далѣе, замѣчая, что предѣльныя величины a и b, слѣдующія изъ уравненій (114), конечны, по формуламъ (115) находимъ:

$$\lim(2p-1)M=\lim(2p-1)\left\{\frac{1-\lambda}{2}a'u_{11}+(p-1)kib'v_{11}+(p-1)a'\frac{w_{10}}{2}\right\},$$

$$\lim(2p-1)N=\lim(2p-1)\left\{\frac{\lambda}{2}b'u_{11}-(p-1)kia'v_{11}+(p-1)b'\frac{w_{10}}{2}\right\}.$$

Уравненія (114) даютъ:

$$\lim \frac{b'}{a'} = i \lim \frac{k^2(p-1)^2 + (1-\lambda)(4-k^2)}{2k(p-1)} = -i \lim \eta\,,$$

$$a' = \frac{2k(p-1)iL' - [k^2(p-1)^2 + \lambda(4-k^2)]K'}{k^4(p-1)^4 - k^4(p-1)^2 + \lambda(1-\lambda)(4-k^2)^2}\,.$$

Знаменатель послѣдняго выраженія въ силу уравненія (104) приводится къ

$$2\,k^4 p\,(1-p)\,(2p-1)\,.$$

Поэтому, замѣчая, что въ силу того-же уравненія

$$\eta = \frac{2kp}{k^2p^2 + \lambda(4-k^2)}\,,$$

находимъ:

$$\lim (2p-1)\,a' = -\frac{2}{k^3} \lim \frac{K' + L'\eta i}{\eta}\,.$$

Отсюда, припоминая значенія величинъ K' и L' (формулы (113)), получаемъ:

$$\lim (2p-1) M = \lim K'(2p-1)a'\,,$$

$$\lim (2p-1)\,N = -\lim L'(2p-1)a'\,,$$

$$\lim (2p-1)(M - N\eta i) = -\frac{2}{k^3} \lim \frac{(K' + L'\eta i)^2}{\eta}\,.$$

Если-же будемъ разумѣть подъ K', L', η предѣльныя значенія, то принимая въ разсчетъ (112), найдемъ:

$$K' + L'\eta\, i = \left(\frac{1-\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_1}{2}\eta^2\right) u_{11} - \frac{1-\eta^2}{4}\,\Phi_2 = -\frac{3kR\eta}{16(4-k^2)}(k^2 - 2\Phi_2)\,.$$

Такимъ образомъ получаемъ:

$$\lim \left\{\frac{B_0+1}{2}\,B_1 - 2A_0A_1\right\} = -\frac{9}{16}\,\frac{\pi^2 \sin^2 \sqrt{3}\,\pi}{k^4(4-k^2)^2}\,R^2(k^2 - 2\Phi_2)^2\,.$$

Отсюда видимъ, что въ случаѣ II періодическія движенія, достаточно близкія къ постоянному, вообще неустойчивы. Сомнительными остаются только тѣ случаи, когда $R^2(k^2-2\Phi_2)^2=0$, т. е. когда имѣетъ мѣсто одно изъ трехъ слѣдующихъ равенствъ:

$$k^2-2\Phi_2=0,$$

$$\left.\begin{aligned} k^2&=8(2-\sqrt{3}),\\ k^2&=8(2+\sqrt{3}).\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(123)$$

Изъ нихъ двумя послѣдними опредѣляются предѣлы, между которыми не должно лежать k^2 для возможности случая II.

Когда первое изъ этихъ трехъ равенствъ удовлетворено для всякаго σ, то замѣчая, что при $\sigma=\frac{1}{\varrho}$ оно приводится къ

$$\varrho^2 f''(\varrho)+3\varrho f'(\varrho)-3f(\varrho)=0,$$

находимъ

$$f(\varrho)=\frac{\alpha}{\varrho^3}+\beta\varrho,$$

гдѣ α и β постоянныя.

Вопросъ объ устойчивости періодическихъ движеній при этомъ законѣ притяженія мы уже разсматривали въ параграфѣ 5. Изъ изложеннаго тамъ легко вывести, что въ случаѣ II при этомъ законѣ притяженія всѣ періодическія движенія устойчивы.

Когда удовлетворяется для всякаго σ одно изъ двухъ равенствъ (123), имѣемъ:

$$f(\varrho)=\alpha\varrho^{13\mp8\sqrt{3}},$$

(α — постоянная), гдѣ верхній знакъ относится къ первому, нижній —ко второму изъ этихъ двухъ равенствъ. Останавливаться на рѣшеніи вопроса объ устойчивости при этомъ законѣ притяженія не будемъ.

Для притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія, $k^2=1$, и слѣдовательно условіе (122) удовлетворено. Случай II поэтому возможенъ для этого закона притяженія.

Обращаемся къ случаю безконечно-малаго λ.

19 Для изслѣдованія устойчивости періодическихъ движеній, достаточно близкихъ къ постоянному, въ предположеніи безконечно-малаго λ можно было-бы воспользоваться, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, общими формулами параграфа 17. Но мы предпочитаемъ дать еще одинъ примѣръ вычисленія при помощи формулъ параграфовъ 10 и 11.

Возвращаясь къ обозначеніямъ этихъ параграфовъ, составимъ первый членъ разложенія по восходящимъ степенямъ ε величины N_2, опредѣляемой формулою (72).

Полагая

$$\int_0^\Omega \frac{v - v_0}{v'^2}\, d\vartheta = V,$$

$$\int_0^\Omega \frac{v'' - v_0''}{v'^2}\, d\vartheta = V_1,$$

$$\int_0^\Omega \frac{(v - v_0)^2}{v'^2}\, d\vartheta = V_2,$$

изъ формулъ (67) выводимъ:

$$(a', a)_0 = 4\, v_0'' V + v_0'' V_1,$$

$$(a', b')_0 = 2\, v_0'' V,$$

$$(b\,, b')_0 = \Omega + 4\, V_2,$$

$$(b\,, a)_0 = 2\,(b\,, b')_0 - (a', b')_0\,.$$

Чтобы найти величины $(a\,, a')_1$, $(a\,, b)_1$, $(b', a')_1$, $(b', b)_1$, полагаемъ $X_0 = Y_0' = 0$. Тогда изъ (63) и (64) найдемъ:

$$P_0 = X_0' \frac{v'}{v_0''}, \qquad Q_0 = Y_0 - 2 X_0' \frac{v - v_0}{v_0''},$$

а замѣчая, что

$$\int_0^\Omega R_1 v'\, d\vartheta = -\int_0^\Omega (v - v_0) R_1'\, d\vartheta = -\int_0^\Omega u\,(v - v_0) Q_0\, d\vartheta,$$

изъ (68) получимъ:

$$P_1(\Omega) = \frac{X_0'}{v_0''^2}\left\{\int_0^\Omega u\, v'^2 d\vartheta - 4\int_0^\Omega u\,(v - v_0)^2 d\vartheta\right\} + \frac{2\,Y_0}{v_0''}\int_0^\Omega u\,(v - v_0)\, d\vartheta,$$

$$Q_1(\Omega) = Y_0 \int_0^\Omega u\, d\vartheta - \frac{2\,X_0'}{v_0''}\int_0^\Omega u\,(v - v_0)\, d\vartheta - 2 P_1(\Omega).$$

Отсюда

$$(a\,,a')_1 = \frac{1}{v_0''^2}\int\limits_0^{\Omega} u\,v'^2 d\vartheta - \frac{4}{v_0''^2}\int\limits_0^{\Omega} u\,(v-v_0)^2 d\vartheta\,,$$

$$(a\,,\,b)_1 = \frac{2}{v_0''}\int\limits_0^{\Omega} u\,(v-v_0)\,d\vartheta\,,$$

$$(b',a')_1 = -(a\,,b)_1 - 2(a\,,a')_1\,,$$

$$(b',\,b)_1 = \int\limits_0^{\Omega} u\,d\vartheta - 2(a\,,b)_1\,.$$

Здѣсь

$$v - v_0 = s^2 - s_1{}^2 = 2\sigma^2\varepsilon(1-t) - \sigma^2\varepsilon^2\sin^2\psi\,,$$

откуда, согласно (92),

$$v' = 2\sigma^2 l\,\varepsilon(1-\varepsilon t)\sin\psi\sqrt{1+T}\,,$$

и слѣдовательно

$$\frac{d\vartheta}{v'^2} = \frac{(1-\varepsilon t)^{-2}(1+T)^{-\frac{3}{2}}\,d\psi}{4\sigma^4 l^3\varepsilon^2\sin^2\psi}\,.$$

При помощи формулъ (90), ... (94) разлагаемъ всѣ разсматриваемыя величины въ ряды по восходящимъ степенямъ ε.

Полагая

$$k^2 - \frac{5}{2}\,\Phi_2 + \frac{5}{2k^2}\,\Phi_2{}^2 + 2\Phi_3 = F\,,$$

$$k^2 - 2\Phi_2 + \frac{5}{2k^2}\,\Phi_2{}^2 + \Phi_3 = G\,,$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} l^3\frac{d\vartheta}{v'^2} &= \frac{d\psi}{4\sigma^4\sin^2\psi}\,\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{(2k^2-3\Phi_2)\,t\,d\psi}{4\sigma^4k^2\sin^2\psi}\,\frac{1}{\varepsilon} + \\ &+ \frac{3F d\psi}{4\sigma^4k^2\sin^2\psi} - \frac{3G d\psi}{4\sigma^4k^2} + \ldots, \end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;(124)$$

$$l = k + \ldots,$$

$$\frac{(v-v_0)\,d\vartheta}{v'^2}=\frac{(1-t)d\psi}{2\sigma^2k^3\sin^2\psi}\,\frac{1}{\varepsilon}-\frac{(2k^2-3\Phi_2)(1-t)\,d\psi}{2\sigma^2k^5\sin^2\psi}+\frac{3(k^2-2\Phi_2)d\psi}{4\sigma^2k^5}+\ldots,$$

$$\frac{(v-v_0)^2\,d\vartheta}{v'^2}=\frac{(1-t)^2\,d\psi}{k^3\sin^2\psi}+\ldots,$$

$$d\vartheta=\frac{d\psi}{k}+\ldots,\qquad u=4-k^2+\ldots,$$

$$v'=2\sigma^2k\varepsilon\sin\psi+\ldots,\qquad v_0''=2\sigma^2k^2\varepsilon+\ldots.$$

Отсюда

$$V=\frac{3\pi(k^2-2\Phi_2)}{2\sigma^2k^5}+\ldots,\qquad V_2=-\frac{2\pi}{k^3}+\ldots,\qquad \Omega=\frac{2\pi}{k}+\ldots,$$

$$\int_0^\Omega u\,d\vartheta=\frac{2\pi}{k}(4-k^2)+\ldots,$$

$$\int_0^\Omega u(v-v_0)\,d\vartheta=\frac{4\pi}{k}(4-k^2)\sigma^2\varepsilon+\ldots,$$

$$\int_0^\Omega uv'^2d\vartheta=4\pi k(4-k^2)\sigma^4\varepsilon^2+\ldots,$$

$$\int_0^\Omega u(v-v_0)^2\,d\vartheta=12\pi\,\frac{4-k^2}{k}\,\sigma^4\varepsilon^2+\ldots.$$

Для вычисленія интеграла V_1 замѣчаемъ, что при интегрированіи въ разсматриваемыхъ предѣлахъ періодическіе члены разложенія неопредѣленнаго интеграла

$$\int\frac{v''-v_0''}{v'^2}\,d\vartheta$$

исчезаютъ. Поэтому, принимая въ разсчетъ, что интегралъ

$$\int\frac{v''d\vartheta}{v'^2}=-\frac{1}{v'}+\text{const.}$$

можетъ содержать только періодическіе члены, и что такіе-же члены даетъ интегрированіе трехъ первыхъ членовъ выраженія (124), находимъ:

$$V_1=\frac{v_0''}{l^3}\,\frac{3\pi G}{2\sigma^4k^2}+\ldots=\frac{3\pi G}{\sigma^2k^3}\,\varepsilon+\ldots.$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ:

$$(a', a)_0 - 2(a', b')_0 = v_0'' V_1 = \frac{6\pi}{k} G\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$(b, a)_0 - 2(b, b')_0 = -(a', b')_0 = -\frac{6\pi}{k^3}(k^2 - 2\Phi_2)\varepsilon + \ldots,$$

$$(b, b')_0 = -\frac{2\pi}{k^3}(4 - k^2) + \ldots,$$

$$(a, a')_1 = -\frac{\pi}{k^5}(4 - k^2)(12 - k^2) + \ldots,$$

$$(a, b)_1 = \frac{4\pi}{k^3}(4 - k^2) + \ldots,$$

$$(b', a')_1 = -\frac{4\pi}{k^3}(4 - k^2) + \ldots - 2(a, a')_1,$$

$$(b', b)_1 = \frac{2\pi}{k}(4 - k^2) + \ldots - 2(a, b)_1.$$

Отсюда

$$\begin{vmatrix} (a, a')_1, & (a, b)_1 \\ (b', a')_1, & (b', b)_1 \end{vmatrix} = -\frac{2\pi^2}{k^6}(4 - k^2)^3 + \ldots,$$

$$\begin{vmatrix} (a', a)_0, & (b, a)_0 \\ (a', b')_0, & (b, b')_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a', a)_0 - 2(a', b')_0, & (a', b')_0 \\ (b, a)_0 - 2(b, b')_0, & (b, b')_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{12\pi^2}{k^6}\left\{3(k^2 - 2\Phi_2)^2 - (4 - k^2)k^2 G\right\}\varepsilon^2 + \ldots,$$

и слѣдовательно

$$N_2 = \frac{24\pi^4}{k^{12}}(4 - k^2)^3\left\{(4 - k^2)k^2 G - 3(k^2 - 2\Phi_2)^2\right\}\varepsilon^2 + \ldots.$$

Внося сюда вмѣсто G его выраженіе, находимъ:

$$N_2 = \frac{24\pi^4}{k^{12}}(4 - k^2)^3 J\varepsilon^2 + \ldots,$$

гдѣ

$$J = (4 - k^2)\left(k^2\Phi_3 - \frac{3}{2}\Phi_2{}^2 + 2k^2\Phi_2\right) + (1 - k^2)(k^2 - 2\Phi_2)^2.$$

Слѣдующіе члены содержатъ степени ε выше второй.

Составимъ еще первые члены разложеній по восходящимъ степенямъ ε величинъ K_1 и N_3. Члены эти вообще будутъ значеніями этихъ величинъ при $\varepsilon = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, для $\varepsilon = 0$ имѣемъ:

$$A = \cos 2\pi p_1 + \cos 2\pi p_2 ,$$

$$B = 1 + 2\cos 2\pi p_1 \cos 2\pi p_2 ,$$

откуда

$$\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 - A^2 = \sin^2 2\pi p_1 \sin^2 2\pi p_2 .$$

Съ другой стороны, формулы (73) даютъ:

$$A = 2 + \frac{1}{2} K_1 \lambda + \ldots ,$$

$$\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 - A^2 = N_2 \lambda^2 + \left(\frac{1}{4} K_1 N_2 + N_3\right) \lambda^3 + \ldots .$$

Послѣдняя формула для $\varepsilon = 0$ обращается въ слѣдующую:

$$\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 - A^2 = N_3 \lambda^3 + \ldots .$$

Отсюда, принимая въ разсчетъ, что уравненіе (104) даетъ слѣдующія разложенія по восходящимъ степенямъ λ:

$$p_1{}^2 = \left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 \lambda + \ldots ,$$

$$1 - p_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 \lambda + \ldots ,$$

находимъ:

$$K_1 = -4\pi^2 \left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 + \ldots ,$$

$$N_3 = 4\pi^4 \left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^6 + \ldots ,$$

гдѣ слѣдующіе члены содержатъ положительныя степени ε.

Изъ найденныхъ формулъ видно, что если для какого-либо даннаго σ удовлетворено неравенство

$$(4-k^2)J>0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (125)$$

то при томъ-же σ для достаточно малыхъ значенiй ε удовлетворятся условiя:

$$K_1<0\,,\qquad N_2\geqq 0\,,\qquad \frac{1}{4}K_1{}^2-N_2>0\,,\qquad N_3>0\,,$$

а при этомъ могутъ быть найдены такiя отличныя отъ нуля положительныя числа ε' и λ', что для всякихъ ε и λ, удовлетворяющихъ условiямъ

$$0\leqq\varepsilon<\varepsilon',\qquad 0<\lambda<\lambda',$$

неравенства (74) будутъ удовлетворены.

Поэтому при выполненiи условiя (125) для какого-либо σ, всякое перiодическое Лапласово движенiе, соотвѣтствующее этому σ и достаточно близкое къ постоянному, при достаточно малыхъ значенiяхъ λ (исключая $\lambda=0$) устойчиво.

При выполненiи противоположнаго условiя, N_2 для достаточно малыхъ значенiй ε отрицательно, и слѣдовательно въ этомъ случаѣ всякое перiодическое движенiе, достаточно близкое къ постоянному, при достаточно малыхъ значенiяхъ λ становится неустойчивымъ.

Въ предѣльномъ случаѣ неравенства (125) необходимо дополнительное изслѣдованiе, на которомъ останавливаться не будемъ.

Въ случаѣ

$$f(r)=\frac{\alpha}{r^N}$$

имѣемъ:

$$k^2=3-N,\quad \Phi_2=\frac{(N-2)(N-3)}{6},\quad \Phi_3=\frac{(N-2)(N-3)(N-4)}{24},$$

вслѣдствiе чего

$$4-k^2=N+1\,,\quad J=\frac{(N-2)(3-N)^2(N+1)^2}{36}\,.$$

Условiе (125) въ этомъ случаѣ приводится поэтому къ виду:

$$(N+1)(N-2)>0\,,$$

откуда слѣдуетъ или

$$N>2\,,$$

или

$$N < -1 .$$

Такимъ образомъ въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго N-ой степени разстоянія, если N лежитъ между предѣлами -1 и 2 невключительно, періодическія движенія, достаточно близкія къ постоянному, при достаточно малыхъ значеніяхъ λ становятся неустойчивыми. Для всѣхъ-же другихъ значеній N они при этомъ не теряютъ устойчивости.

Въ заключеніе сопоставляемъ всѣ найденные результаты.

Имѣемъ три матерьяльныя точки, массы которыхъ суть M, m и m', и которыя взаимно притягиваются пропорціонально произведеніямъ изъ массъ и пропорціонально нѣкоторой функціи $f(r)$ ихъ взаимныхъ разстояній r.

Разсматриваемъ одно изъ періодическихъ Лапласовыхъ движеній, въ которомъ точки остаются въ вершинахъ равносторонняго треугольника, стороны котораго съ теченіемъ времени измѣняются періодически между нѣкоторыми предѣлами ϱ_0 и ϱ_1, изъ которыхъ низшій ϱ_0 не нуль и высшій ϱ_1 не безконеченъ.

Полагаемъ:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_0}+\frac{1}{\varrho_1}\right)=\sigma, \qquad \frac{\varrho_1-\varrho_0}{\varrho_1+\varrho_0}=\varepsilon,$$

$$\int f\left(\frac{1}{\sigma}\right) d\,\frac{1}{\sigma}=\varphi(\sigma)=\varphi,$$

$$1-\frac{\sigma\varphi''}{\varphi'}=k^2, \qquad \frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\,\frac{\sigma^n\varphi^{(n+1)}}{\varphi'}=\Phi_n,$$

предполагая, что φ' не нуль, и что

$$1-\frac{\sigma\varphi''}{\varphi'}>0 .$$

Вслѣдствіе послѣдняго предположенія возможны періодическія движенія, для которыхъ ε на сколько угодно мало.

Кромѣ того, предполагаемъ, что рядъ

$$\varphi+\varphi'\,\frac{\zeta}{1}+\varphi''\,\frac{\zeta^2}{1.2}+\varphi'''\,\frac{\zeta^3}{1.2.3}+\ldots.$$

для достаточно малыхъ значеній $\mathrm{mod}\,\zeta$ есть абсолютно сходящійся и представляетъ функцію $\varphi(\sigma+\zeta)$.

Наконецъ, полагаемъ

$$3\,\frac{Mm+Mm'+mm'}{(M+m+m')^2}=\mu\,.$$

Величина μ будетъ положительною правильною дробью, достигающею своего высшаго предѣла 1 только при $M=m=m'$. Значеніе $\mu=0$, соотвѣтствующее случаю $M=\infty$ или $m=m'=0$, будемъ исключать.

Условимся періодическое Лапласово движеніе считать устойчивымъ, если послѣ безконечно-малыхъ возмущеній треугольникъ, въ вершинахъ котораго находятся матерьяльныя точки, во всякій моментъ возмущеннаго движенія безконечно-мало отличается отъ равносторонняго, а предѣлы измѣняемости сторонъ его безконечно-мало отличаются отъ соотвѣтственныхъ предѣловъ въ невозмущенномъ движеніи.

При этомъ будутъ имѣть мѣсто слѣдующія теоремы:

I. Если

$$\mu \lessgtr \frac{3}{4}\left(\frac{k^2}{4-k^2}\right)^2 \quad \text{и} \quad \mu<\left(\frac{k^2}{4-k^2}\right)^2,$$

то всѣ періодическія движенія, для которыхъ ε менѣе нѣкотораго предѣла, устойчивы. Напротивъ, если

$$\mu>\left(\frac{k^2}{4-k^2}\right)^2,$$

что возможно только при условіи $k^2<2$, то всѣ періодическія движенія, для которыхъ ε менѣе нѣкотораго предѣла, неустойчивы.

II. Если

$$(4-k^2)\left\{(4-k^2)\left(k^2\Phi_3-\frac{3}{2}\,\Phi_2{}^2+2k^2\Phi_2\right)+(1-k^2)(k^2-2\Phi_2)^2\right\}>0,$$

то всякое періодическое движеніе, для котораго ε менѣе нѣкотораго предѣла, остается устойчивымъ для всякихъ достаточно малыхъ значеній μ. Если-же имѣетъ мѣсто противоположное неравенство, то всякое періодическое движеніе, для котораго ε менѣе нѣкотораго предѣла, для достаточно малыхъ значеній μ становится неустойчивымъ.

III. Когда выполнено одно изъ двухъ неравенствъ:

$$k^2<8(2-\sqrt{3}) \qquad \text{или} \qquad k^2>8(2+\sqrt{3}),$$

для μ возможно значеніе $\frac{3}{4}\left(\frac{k^2}{4-k^2}\right)^2$. Если при этомъ $k^2-2\Phi_2$ не равно нулю, то всякое періодическое движеніе, для котораго ε не превосходитъ нѣкотораго предѣла, при значеніяхъ μ, достаточно близкихъ къ $\frac{3}{4}\left(\frac{k^2}{4-k^2}\right)^2$, становится неустойчивымъ.

IV. Если $k^2 \leqq 2$, то для μ возможно значеніе $\left(\frac{k^2}{4-k^2}\right)^2$. Если при этомъ

$$6\Phi_2{}^2+\frac{3}{4}k^4-k^2(8+k^2)\Phi_2-6k^2\Phi_3>0\,,$$

то всякое періодическое движеніе, для котораго ε, не будучи равнымъ нулю, менѣе нѣкотораго предѣла, при значеніяхъ μ, достаточно близкихъ къ $\left(\frac{k^2}{4-k^2}\right)^2$, остается устойчивымъ. Напротивъ, если выполнено противоположное неравенство, то всякое періодическое движеніе, для котораго ε не превосходитъ нѣкотораго предѣла, при такихъ значеніяхъ μ становится неустойчивымъ.

Изъ этихъ теоремъ, какъ слѣдствіе, можетъ быть выведена слѣдующая:

Если при $k^2<2$

$$6\Phi_2{}^2+\frac{3}{4}k^4-k^2(8+k^2)\Phi_2-6k^2\Phi_3>0\,,$$

то для $\mu-\left(\frac{k^2}{4-k^2}\right)^2$ достаточно малаго и при томъ положительнаго могутъ быть найдены такія положительныя числа ε_1 и $\varepsilon_2>\varepsilon_1$, что всѣ періодическія движенія, для которыхъ $\varepsilon<\varepsilon_1$, неустойчивы, а тѣ, для которыхъ $\varepsilon_1<\varepsilon<\varepsilon_2$, устойчивы.

Въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго N-ой степени разстоянія, непостоянныя періодическія Лапласовы движенія возможны только при $N<3$.

Предполагая такой законъ притяженія, разсмотримъ періодическія движенія, для которыхъ ε не превосходитъ нѣкотораго предѣла ε'.

Разумѣя подъ α, β . γ, δ вообще нѣкоторыя *положительныя* функціи ε, обращающіяся въ нуль при $\varepsilon=0$, и предполагая ε' достаточно малымъ, будемъ имѣть слѣдующую теорему:

V. Когда $3 > N \geq 2$, разсматриваемыя періодическія движенія устойчивы при выполненіи одного изъ двухъ слѣдующихъ условій:

$$\mu < \frac{3}{4}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 - \alpha \qquad \text{или} \qquad \frac{3}{4}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 + \beta < \mu < \left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 + \gamma$$

и неустойчивы въ противномъ случаѣ.

Когда $2 > N > 1$, движенія эти устойчивы при выполненіи одного изъ двухъ слѣдующихъ условій:

$$\alpha < \mu < \frac{3}{4}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 - \beta$$

или

$$\frac{3}{4}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 + \gamma < \mu < \left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 + \delta$$

и неустойчивы въ противномъ случаѣ.

Когда $1 > N > 8\sqrt{3} - 13$, эти движенія устойчивы при одномъ изъ двухъ слѣдующихъ условій:

$$\alpha < \mu < \frac{3}{4}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 - \beta \qquad \text{или} \qquad \mu > \frac{3}{4}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 + \gamma$$

и неустойчивы въ противномъ случаѣ.

Когда $8\sqrt{3} - 13 > N > -1$, движенія эти устойчивы при $\mu > \alpha$ и неустойчивы при $\mu < \alpha$.

Когда $-1 \geq N > -(13 + 8\sqrt{3})$, эти движенія всегда устойчивы.

Когда $N < -(13 + 8\sqrt{3})$, движенія эти устойчивы при выполненіи одного изъ двухъ слѣдующихъ условій:

$$\mu < \frac{3}{4}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 - \alpha \qquad \text{или} \qquad \mu > \frac{3}{4}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 + \beta$$

и неустойчивы въ противномъ случаѣ.

Кромѣ того, имѣемъ слѣдующую теорему:

VI. Въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія, всякое періодическое Лапласово движеніе при достаточно маломъ μ устойчиво.

ОПЕЧАТКИ

въ статьѣ А. М. Ляпунова.

Стран.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
25	10 сверху	$Y = Q(\vartheta) q^{\frac{\theta}{\Omega}}$,	$Y = Q(\vartheta) q^{\frac{\vartheta}{\Omega}}$,
65	5 —	$s = \sqrt{\alpha} g^{\frac{1}{3-N}} \zeta$,	$s = (\alpha g)^{\frac{1}{3-N}} \zeta$,
—	11 —	въ числѣ Лапласовыхъ	въ числѣ непостоянныхъ Лапласовыхъ
67	14 —	$= \underset{0}{3} \lambda$	$= 3 \lambda$

На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать разрѣшается.

Предсѣдатель Общества *К. Андреевъ*.