## III.

# ЗАМѢТКА

### о функціяхъ комплекснаго перемѣннаго.

Элементарныя трансцендентныя функціи

$$e^z, \operatorname{Sin} z, \operatorname{Cos} z, \operatorname{Sh} z, \operatorname{Ch} z$$

вводятся въ анализъ сначала съ опредѣленіями, предполагающими только дѣйствительныя значенія $z$. Поэтому когда представленіе объ измѣняемости $z$ расширяется, такъ-что допускаются и комплексныя значенія $z = x + yi$, съ дѣйствительными $x, y$ и $i = \sqrt{-1}$; то и первоначальныя опредѣленія упомянутыхъ функцій должны быть обобщены. Такъ-какъ всѣ эти функціи разлагаются въ безконечные ряды, сходящіеся не только для всѣхъ дѣйствительныхъ, но и для всѣхъ комплексныхъ значеній $z$; то суммы этихъ рядовъ, въ послѣднемъ случаѣ, и принимаются, обыкновенно, за обобщенныя опредѣленія соотвѣтствующихъ имъ функцій. Такой пріемъ хотя и вполнѣ строгій, однако не единственный и притомъ едвали самый простой. Употребленіе безконечныхъ рядовъ дѣлаетъ его довольно сложнымъ даже при доказательствѣ такого простого равенства, какъ

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}$$

для комплексныхъ $z$ и $z'$; такъ-какъ при этомъ необходимо основываться на перемноженіи двухъ безконечныхъ рядовъ. Кромѣ того не видно тѣсной связи этого пріема съ первыми основаніями теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго.

Приведенныя соображенія и подали поводъ къ составленію этой краткой замѣтки, гдѣ рѣшеніе указаннаго выше вопроса выводится изъ извѣстныхъ простѣйшихъ общихъ свойствъ функцій комплекснаго перемѣннаго безъ всякой помощи безконечныхъ рядовъ.

Сначала разсмотримъ въ общемъ видѣ рѣшеніе этого вопроса, и потомъ — на нѣсколькихъ частныхъ примѣрахъ.

Предположимъ, что двѣ функціи

$$u = u(x, y) \text{ и } v = v(x, y)$$

двухъ дѣйствительныхъ перемѣнныхъ $x$ и $y$ удовлетворяютъ условіямъ

$$u' = v_{,} \text{ и } u_{,} = -v', \qquad \text{(a)}$$

гдѣ для краткости частныя производныя въ отношеніи $x$ и $y$ означены соотвѣтственно удареніями вверху и внизу. Изъ условія (a) получаются многія слѣдствія, изъ которыхъ замѣтимъ слѣдующія:

1. $u'v_{,} - u_{,}v' = u'^2 + u_{,}^2 = v'^2 + v_{,}^2 = \Delta > 0;$

2. $u'v' + u_{,}v_{,} = 0;$

3. $u'' + u_{,,} = 0$ и $v'' + v_{,,} = 0.$

4. Разсматривая въ уравненіяхъ $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ $x$ и $y$ какъ функціи независимыхъ перемѣнныхъ $u$ и $v$ и дифференцируя эти уравненія послѣдовательно въ отношеніи $u$ и $v$, находимъ:

$$1 = u'x' + u_{,}y', \; 0 = u'x_{,} + u_{,}y_{,},$$

$$0 = v'x' + v_{,}y', \; 1 = v'x_{,} + v_{,}y_{,},$$

гдѣ также для краткости частныя производныя отъ $x$ и $y$ въ отношеніи $u$ и $v$ означены соотвѣтственно удареніями вверху и внизу.

Отсюда выводимъ

$$x' = \frac{v_{,}}{\Delta},\ x_{,} = -\frac{u_{,}}{\Delta},\ y' = -\frac{v'}{\Delta},\ y_{,} = \frac{u'}{\Delta};$$

слѣдовательно, принимая во вниманіе условія (a), имѣемъ

$$x' = y_{,}\ \text{и}\ x_{,} = -y',$$

т. е. функціи $x$ и $y$ отъ $u$ и $v$ подчинены тѣмъ-же условіямъ, какъ функціи $u$ и $v$ отъ $x$ и $y$ и, вслѣдствіе этого, то, что доказано для послѣднихъ, вѣрно и для первыхъ.

5. Если изъ двухъ функцій $u$ и $v$ одна, напр. $u$, дана, какъ рѣшеніе уравненія

$$u'' + u_{,,} = 0;$$

тогда другую $v$ легко получить посредствомъ вычисленія квадратуры. Для этого имѣемъ

$$dv = v'dx + v_{,}dy.$$

или, на основаніи условій (a),

$$dv = -u_{,}dx + u'dy.$$

Повѣряя условіе интегрируемости второй части,

$$(-u_{,})_{,} = (u')',\ \text{находимъ}\ u'' + u_{,,} = 0,$$

т. е. что оно выполнено. Слѣдовательно $v$ можно получить посредствомъ вычисленія двучленной квадратуры

$$v = \int(-u_{,}dx + u'dy).$$

Но легко убѣдиться, что для полученія полнаго выраженія $v$ достаточно вычислить только тотъ или другой членъ этой формулы. Въ самомъ дѣлѣ, напр., полагая

$$v = -\int u_{,}dx + \Phi(y),$$

гдѣ $\Phi(y)$ неизвѣстная функція отъ $y$, и дифференцируя въ отношеніи $y$, находимъ

$$v_{,} = -\int u_{,,}dx + \Phi'(y) = \int u'' dx + \Phi'(y) = u' + \Phi'(y)$$

откуда, на основанiи условiй (а), имѣемъ

$$\Phi'(y) = v_{,} - u' = 0.$$

Слѣдовательно $\Phi$ есть произвольное постоянное, подразумѣвая которое, какъ слѣдствiе неопредѣленнаго интегрированiя, имѣемъ

$$v = -\int u_{,}dx$$

и точно такъ-же получимъ

$$v = \int u' dy, \quad u = \int v_{,}dx = -\int v' dy.$$

6. Далѣе, полагая

$$w = u + vi \text{ и } z = x + yi$$

и подставляя въ первое уравненiе выведенное изъ второго значенiя $x = z - yi$, находимъ

$$\overline{w} = u(z - yi, y) + v(z - yi, y)i,$$

гдѣ $\overline{w}$ условно означаетъ то, во что обращается $w$ вслѣдствiе предыдущей подстановки.

Разсматривая $\overline{w}$ какъ функцiю $y$ и $z$ и дифференцируя ее въ отношенiи $y$, находимъ:

$$\overline{w}_{,} = w_{,} + w' \frac{dx}{dy} = w_{,} - w' i = u_{,} + v_{,} i - (u' + v' i) i,$$

откуда, на основанiи условiй (а), имѣемъ

$$w_{,} = u_{,} + v' + (v_{,} - u') i = 0.$$

Слѣд. $\overline{w}$ не будетъ содержать явно $y$ и сдѣлается функцiей одного $z$. Для опредѣленiя вида этой функцiи безъ помощи предыдущей подстановки, достаточно замѣтить, что при $y = 0$

$$\overline{w} = u(z, 0) + iv(z, 0),$$

а

$$w_{y=0} = u(x, 0) + iv(x, 0).$$

Слѣдовательно выраженіе $w$ въ $z$ получится, если въ данномъ выраженіи

$$w = u + vi$$

сдѣлаемъ $y = 0$ и вмѣсто $x$ поставимъ $z$. Подобныя же заключенія имѣютъ мѣсто относительно обратной функціи, которой $z$ выражается посредствомъ $w$.

7. Наконецъ замѣтимъ еще, что, вслѣдствіе условій (a),

$$w' = u' + v'i,\ w_{,} = u_{,} + v_{,}i = -v' + u'i = iw';$$

слѣдовательно

$$dw = w'dx + w_{,}dy = w'(dx + idy) = w'dz$$

или

$$\frac{dw}{dz} = w' = \frac{1}{i}\, w_{,}.$$

---

Въ изложенномъ выше и заключается общій пріемъ рѣшенія разсматриваемой задачи, для большаго уясненія котораго разберемъ далѣе нѣсколько примѣровъ его приложенія.

Для этого найдемъ рѣшеніе уравненія

$$u'' + u_{,,} = 0$$

вида

$$u = X.Y,$$

предполагая $X$ функціей одного $x$, а $Y$ — функціей одного $y$. Подстановку такого выраженія $u$ въ предыдущее уравненіе можно привести къ виду

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}.$$

Означивъ черезъ $\alpha$ дѣйствительное постоянное и приравнивая $\pm\alpha^2$ каждую часть послѣдняго уравненія, получимъ:

$$\frac{d^2X}{dx^2} \mp \alpha^2 X = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2Y}{dy^2} \pm \alpha^2 Y = 0,$$

обыкновенныя линейныя уравненія, изъ которыхъ, при верхнихъ знакахъ, находимъ

$$X = ae^{\alpha x} + a'e^{-\alpha x} \text{ и } Y = b\,\mathrm{Cos}\,\alpha y + b'\,\mathrm{Sin}\,\alpha y$$

съ произвольными постоянными $a$, $a'$, $b$, $b'$, $\alpha$. Слѣдовательно

$$u = (ue^{\alpha x} + a'e^{-\alpha x})\,(b\,\mathrm{Cos}\,\alpha y + b'\,\mathrm{Sin}\,\alpha y).$$

Разсматривая теперь $u$ какъ дѣйствительную часть функціи $w$ комплекснаго перемѣннаго $z = x + yi$, найдемъ коэффиціентъ $v$ при $i$ мнимой ея части по формулѣ

$$v = \int\frac{du}{dx}dy = \alpha\int(ae^{\alpha x} - a'e^{-\alpha x})\,(b\,\mathrm{Cos}\,\alpha y + b'\,\mathrm{Sin}\,\alpha y)\,dy$$

$$= (ae^{\alpha x} - a'e^{-\alpha x})\,(b\,\mathrm{Sin}\,\alpha y - b'\,\mathrm{Cos}\,\alpha y);$$

слѣдовательно

$$w = (ae^{\alpha x} + a'e^{-\alpha x})\,(b\,\mathrm{Cos}\,\alpha y + b'\,\mathrm{Sin}\,\alpha y)$$

$$+ (ae^{\alpha x} - a'e^{-\alpha x})\,(b\,\mathrm{Sin}\,\alpha y - b'\,\mathrm{Cos}\,\alpha y)\,.\,i$$

есть функція $z = x + yi$.

Для опредѣленія вида этой функціи, слѣдуя общему способу, дѣлаемъ $y = 0$, что доставитъ

$$w_{y=0} = a\,(b - b'i)\,e^{\alpha x} + a'\,(b + b'i)\,e^{-\alpha x},$$

и, подставивъ $z = x + yi$ вмѣсто $x$, получимъ

$$w = a\,(b - b'i)\,e^{\alpha z} + a'\,(b + b'i)\,e^{-\alpha z}.$$

---

Располагая значеніями произвольныхъ постоянныхъ $\alpha, a, a', b, b'$, можно выбрать эти значенія такимъ образомъ, что $w_{y=0}$ последовательно будетъ равно $e^x$, $\mathrm{Ch}x$, $\mathrm{Sh}x$ и вмѣстѣ съ тѣмъ получатся выраженія $e^z$, $\mathrm{Ch}z$ $\mathrm{Sh}z$.

Такимъ образомъ, во 1-хъ, для $\alpha = 1$, $b = \dfrac{1}{a}$, $a' = 0$, $b' = 0$, имѣемъ

$$w_{y=0} = e^x$$

и $$w = e^x\,(\mathrm{Cos}\,y + i\,\mathrm{Sin}\,y) = e^z;$$

во 2-хъ, для $\alpha = 1$, $a = a'$, $b = \dfrac{1}{2}$, $b' = 0$, имѣемъ

$$w_{y=0} = \mathrm{Ch}\,x \text{ и } w = \mathrm{Ch}\,x\,\mathrm{Cos}\,y + i\,\mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Sin}\,y = Ch\,z;$$

въ 3-хъ, для $\alpha = 1$, $a = -a'$, $b = \dfrac{1}{2}$, $b' = 0$, получимъ:

$$w_{y=0} = \mathrm{Sh}\,x \text{ и } w = \mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Cos}\,y + i\,\mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Sin}\,y = \mathrm{Sh}\,z.$$

Такимъ образомъ мы пришли совершенно логическимъ путемъ, къ опредѣленію аналитическихъ значеній функцій $e^z$, $\mathrm{Ch}\,z$, $\mathrm{Sh}\,z$, при $z = x + yi$, выраженныхъ *конечнымъ образомъ*, посредствомъ другихъ элементовъ, аналитическое значеніе которыхъ вполнѣ извѣстно.

Отсюда непосредственно слѣдуетъ:

1) Что функціи $e^z$, $\mathrm{Ch}\,z$, $\mathrm{Sh}\,z$ не измѣняютъ своихъ значеній, когда $y$ получаетъ приращеніе $\pm 2\pi n$, если $n$ цѣлое число и $\pi$ отношеніе окружности къ діаметру, а этому приращенію соотвѣтствуетъ измѣненіе $z$ на $\pm 2\pi ni$.

Слѣд. эти функціи также не измѣняютъ своихъ значеній при измѣненіи $x$ на $\pm 2\pi ni$, которымъ соотвѣтствуютъ точно такія-же измѣненія $z$.

2) По общей формулѣ $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{dw}{dx}$, находимъ:

$$\frac{de^z}{dz} = e^z, \quad \frac{d\,\mathrm{Ch}\,z}{dz} = \mathrm{Sh}\,z, \quad \frac{d\,\mathrm{Sh}\,z}{dz} = \mathrm{Ch}\,z.$$

3) Полагая $z = x + yi$ и $z_1 = x_1 + y_1 i$, найдемъ

$$\begin{aligned} e^z . e^{z_1} &= e^x . e^{x_1}\,(\mathrm{Cos}\,y + i\,\mathrm{Sin}\,y)\,(\mathrm{Cos}\,y_1 + i\,\mathrm{Sin}\,y_1) \\ &= e^{x+x_1}\,[\mathrm{Cos}\,(y + y_1) + i\,\mathrm{Sin}\,(y + y_1)] = e^{z+z_1}. \end{aligned}$$

4) Пользуясь значеніями $2\operatorname{Ch} x = e^x + e^{-x}$ и $2\operatorname{Sh} x = e^x - e^{-x}$, находимъ:

$$2\operatorname{Ch} z = e^x(\operatorname{Cos} y + i\operatorname{Sin} y) + e^{-x}(\operatorname{Cos} y - i\operatorname{Sin} y) = e^z + e^{-z},$$

$$2\operatorname{Sh} z = e^x(\operatorname{Cos} y + i\operatorname{Sin} y) - e^{-x}(\operatorname{Cos} y - i\operatorname{Sin} y) = e^z - e^{-z},$$

слѣдовательно

$$4\operatorname{Ch} z.\operatorname{Ch} z_1 = e^{z+z_1} + e^{-z-z_1} + e^{z-z_1} + e^{z_1-z}$$

$$4\operatorname{Sh} z.\operatorname{Sh} z_1 = e^{z+z_1} + e^{-z-z_1} - e^{z-z_1} - e^{z_1-z}$$

$$4\operatorname{Sh} z.\operatorname{Ch} z_1 = e^{z+z_1} - e^{-z_1-z} + e^{z-z_1} - e^{z_1-z}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\operatorname{Ch} z \operatorname{Ch} z_1 \pm \operatorname{Sh} z \operatorname{Sh} z_1 = \operatorname{Ch}(z \pm z_1),$$

$$\operatorname{Sh} z \operatorname{Ch} z_1 \pm \operatorname{Sh} z_1 \operatorname{Ch} z = \operatorname{Sh}(z \pm z_1).$$

---

Теперь, удерживая нижніе знаки въ уравненіяхъ:

$$\frac{d^2X}{dx^2} \mp \alpha^2 X = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2Y}{dy^2} \pm \alpha^2 Y = 0,$$

получимъ $X = b\operatorname{Cos}\alpha x + b'\operatorname{Sin}\alpha x$ и $Y = ae^{\alpha y} + a'e^{-\alpha y}$; слѣдовательно $u = (ae^{\alpha y} + a'e^{-\alpha y})(b\operatorname{Cos}\alpha x + b'\operatorname{Sin}\alpha x)$, а потому коэффиціентъ при $i$ въ функціи $w$ будетъ

$$v = -\int\frac{du}{dy}dx = -\alpha\int(ae^{\alpha y} - a'e^{-\alpha y})(b\operatorname{Cos}\alpha x + b'\operatorname{Sin}\alpha x)dx$$

$$= (ae^{\alpha y} - a'e^{-\alpha y})(b'\operatorname{Cos}\alpha x - b\operatorname{Sin}\alpha x).$$

Такимъ образомъ заключаемъ, что

$$w = (ae^{\alpha y} + a'e^{-\alpha y})(b\operatorname{Cos}\alpha x + b'\operatorname{Sin}\alpha x)$$

$$+ (ae^{\alpha y} - a'e^{-\alpha y})(b'\operatorname{Cos}\alpha x - b\operatorname{Sin}\alpha x).i$$

есть функція отъ $z = x + yi$. Для опредѣленія аналитическаго вида этой функціи полагая $y = 0$ имѣемъ:

$$w_{y=0} = [(a+a')b + (a-a')b'i]\operatorname{Cos}\alpha x$$

$$+ [(a+a')b' - (a-a')bi]\operatorname{Sin}\alpha x.$$

Слѣдовательно предыдущее выраженіе $w$ опредѣляетъ функцію комплекснаго перемѣннаго $z$.

$$w=[(a+a')b+(a-a')b'i]\operatorname{Cos}\alpha z$$
$$+[a+a')b'-(a-a')bi]\operatorname{Sin}\alpha z.$$

Полагая здѣсь, во 1-хъ, $\alpha=1,\ a=a',\ b=\frac{1}{2a},\ b'=0$, имѣемъ:

$w_{y=0}=\operatorname{Cos}x$ и $w=\operatorname{Cos}x\operatorname{Ch}y-i\operatorname{Sin}x\operatorname{Sh}y=\operatorname{Cos}z;$

во 2-хъ, полагая $\alpha=1,\ a=a',\ b=0,\ b'=\frac{1}{2a}$, получимъ

$w_{y=0}=\operatorname{Sin}x$ и $w=\operatorname{Sin}x\operatorname{Ch}y+i\operatorname{Cos}x\operatorname{Sh}y=\operatorname{Sin}z.$

Такимъ образомъ выведены опредѣленія функцій $\operatorname{Cos} z$ и $\operatorname{Sin} z$, комплекснаго перемѣннаго $z=x+yi$, выраженныя конечнымъ числомъ дѣйствій надъ извѣстными аналитическими элементами. Изъ этихъ опредѣленій слѣдуетъ:

1. Значенія функцій $\operatorname{Cos} z$ и $\operatorname{Sin} z$ не измѣняются, когда $x$ и $y$ получаютъ соотвѣтственно приращенія $\pm 2\pi n$ и $\pm 2\pi n'i$, если $n$ и $n'$ цѣлыя числа, — при этомъ $z$ измѣняется на $\pm 2\pi(n-n')$.

2. По формулѣ $\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{dx}$, находимъ

$$\frac{d\operatorname{Cos}z}{dz}=-\operatorname{Sin}z \text{ и } \frac{d\operatorname{Sin}z}{dz}=\operatorname{Cos}z.$$

3. Пользуясь выраженіями $2\operatorname{Ch}y=e^y+e^{-y}$ и $2\operatorname{Sh}y=e^y-e^{-y}$, находимъ:

$$2\operatorname{Cos}z=(e^y+e^{-y})\operatorname{Cos}x-i(e^y-e^{-y})\operatorname{Sin}x$$
$$=e^y(\operatorname{Cos}x-i\operatorname{Sin}x)+e^{-y}(\operatorname{Cos}x+i\operatorname{Sin}x)=e^{zi}+e^{-zi},$$

$$2i\operatorname{Sin}z=(e^{-y}-e^y)\operatorname{Cos}x+i(e^y+e^{-y})\operatorname{Sin}x$$
$$=e^{-y}(\operatorname{Cos}x+i\operatorname{Sin}x)-e^y(\operatorname{Cos}x-i\operatorname{Sin}x)=e^{zi}-e^{-zi}.$$

Поэтому

$$4\,\mathrm{Cos}\,z\,\mathrm{Cos}\,z_1 = e^{(z+z_1)i} + e^{-(z+z_1)i} + e^{(z-z_1)i} + e^{(z_1-z)i},$$

$$-4\,\mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Sin}\,z_1 = e^{(z+z_1)i} + e^{-(z+z_1)i} - e^{(z-z_1)i} - e^{(z_1-z)i},$$

$$4i\,\mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Cos}\,z_1 = e^{(z+z_1)i} - e^{(z_1-z)i} + e^{(z-z_1)i} - e^{-(z+z_1)i},$$

$$4i\,\mathrm{Sin}\,z_1\,\mathrm{Cos}\,z = e^{(z_1+z)i} - e^{(z-z_1)i} + e^{(z_1-z)i} - e^{-(z_1+z)i}.$$

Слѣдовательно

$$\mathrm{Cos}\,z\,\mathrm{Cos}\,z_1 \mp \mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Sin}\,z_1 = \mathrm{Cos}\,(z \pm z_1)$$

$$\mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Cos}\,z_1 \pm \mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Cos}\,z_1 = \mathrm{Sin}\,(z \pm z_1).$$

---

Опредѣливъ Ch $z$, Sh $z$, Cos $z$, Sin $z$ для комплекснаго $z$ вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣляемъ и всѣ составленныя изъ нихъ сложныя функціи, какъ напр. остальныя тригонометрическія и гиперболическія.

Что касается обратныхъ элементарныхъ функцій, то, при комплексномъ значеніи ихъ аргумента, аналитическія значенія ихъ à priori неизвѣстны, если эти функціи первоначально опредѣлены лишь для дѣйствительныхъ значеній аргумента.

Но такъ-какъ всѣ разсмотрѣнныя выше функціи составляются алгебраически изъ $e^z$, то достаточно вывести обратную только этой функціи, слѣдуя указанному выше пріему.

Для этого имѣемъ

$$e^z = e^x\,(\mathrm{Cos}\,y + i\,\mathrm{Sin}\,y) = u + vi = w,$$

т. е.

$$e^x\,\mathrm{Cos}\,y = u \quad \text{и} \quad e^x\,\mathrm{Sin}\,y = v$$

или

$$e^{2x} = u^2 + v^2 \quad \text{и} \quad \mathrm{tg}\,y = \frac{v}{u}.$$

Разсматривая $u$ и $v$ какъ данныя величины, а $x$ и $y$ какъ неизвѣстныя и опредѣляя только дѣйствительный корень перваго уравненія и абсолютно наименьшій втораго, находимъ

$$x = \frac{1}{2}\log(u^2+v^2) \quad \text{и} \quad y = \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}.$$

Слѣдовательно

$$z = \frac{1}{2}\log(u^2+v^2) + i \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}$$

должно быть функціей отъ $w = u + vi$.

Далѣе, слѣдуя общему пріему, дѣлая $v = o$, имѣемъ

$$z_{v=o} = \frac{1}{2}\log u^2 = \log u$$

и, ставя $u + vi = w$ на мѣсто $u$, заключаемъ, что аналитическое выраженіе искомой функціи должно быть

$$z = \log(u + vi) = \log w.$$

Вслѣдствіе принятыхъ условій при выводѣ значеній $x$ и $y$, полученный результатъ представляетъ только одно изъ значеній $z$, удовлетворяющихъ уравненію

$$e^z = w.$$

Но было доказано, что $e^z$ возвращается періодически къ прежнимъ значеніямъ когда одно и то-же значеніе $z$ измѣняется на $\pm 2\pi n i$; поэтому, если условимся, что $\log w$ долженъ представлять всѣ значенія $z$, удовлетворяющія предъидущему уравненію, то будемъ имѣть

$$z = \log w = \frac{1}{2}\log(u^2+v^2) + i \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u} \pm 2\pi n i,$$

гдѣ

$$n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Теперь обращеніе остальныхъ элементарныхъ функцій отъ $z = x + yi$ сведется уже на извѣстныя дѣйствія и функціи.

Въ близкой связи съ предыдущими простыми примѣрами находятся только по-видимому болѣе сложные примѣры, образцы которыхъ можно заимствовать изъ теоретической механики и физики.

Такъ, мы имѣли рѣшеніе

$$u=(ae^{\alpha y}+a'e^{-y})\,(b\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,x+b'\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,x)$$

уравненія

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0,$$

которому предыдущее рѣшеніе очевидно будетъ удовлетворять и послѣ слѣдующихъ измѣненій въ его выраженіи,

Напишемъ $x-\beta$ вмѣсто $x$ и положимъ

$$a=a'=\frac{1}{2\pi}\,f(\beta)\,d\beta d\alpha,\quad b=\frac{1}{2},\ b'=0,$$

означая черезъ $f(\beta)$ произвольно данную функцію съ конечными значеніями для всѣхъ дѣйствительныхъ и комплексныхъ значеній $\beta$. Вслѣдствіе этого данное рѣшеніе получитъ видъ $\frac{1}{2\pi}\,f(\beta)\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,(x-\beta)\,\mathrm{Ch}\,\alpha y d\alpha d\beta$. Но, по свойству линейнаго уравненія, ему удовлетворяетъ и сумма подобныхъ рѣшеній, распространенная на непрерывный рядъ значеній $\alpha$ и $\beta$ отъ $-\infty$ до $+\infty$. Вслѣдствіе этого замѣчанія получаемъ

$$u=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,(x-\beta)\,\mathrm{Ch}\,\alpha y d\alpha d\beta$$

рѣшеніе, данное *Фурье*.

Разсматривая это значеніе $u$ какъ дѣйствительную часть функціи $w$ отъ $z=x+yi$, находимъ, что коеффиціентъ при $i$ въ этой функціи будетъ

$$v=\int\frac{du}{dx}dy=-\frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)\operatorname{Sin}\alpha(x-\beta)\operatorname{Ch}\alpha y.\,\alpha d\alpha\, d\beta\, dy$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)\operatorname{Sin}\alpha(x-\beta)\operatorname{Sh}\alpha y\, d\alpha\, d\beta.$$

Слѣдовательно

$$w=u+vi=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)\left\{\operatorname{Cos}\alpha(x-\beta)\operatorname{Ch}\alpha y\right.$$

$$\left.-i\operatorname{Sin}\alpha(x-\beta)\operatorname{Sh}\alpha y\right\}d\alpha\, d\beta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)\operatorname{Cos}\alpha(x+yi-\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

есть функція отъ $z=x+yi$. Для опредѣленія вида этой функціи, по общему способу дѣлая $y=0$, на основаніи извѣстной формулы, также принадлежащей Фурье, имѣемъ

$$w_{y=0}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)\operatorname{Cos}\alpha(x-\beta)\, d\alpha\, d\beta=f(x),$$

а замѣнивъ здѣсь $x$ на $x+yi=z$, будемъ имѣть

$$w=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)\operatorname{Cos}\alpha(z-\beta)\, d\alpha\, d\beta=f(z)$$

предыдущую формулу Фурье, распространенную на комплексныя значенія $z$.

Сложивъ последнюю формулу съ тою, которая изъ нея получится при подстановкѣ $z' = x - yi$ вмѣсто $z$ и замѣчая, что

$$\operatorname{Cos}\alpha(z-\beta) + \operatorname{Cos}\alpha(z'-\beta) = 2\operatorname{Cos}(x-\beta)\operatorname{Ch}\alpha y,$$

находимъ для даннаго выше рѣшенія Фурье выраженіе

$$u = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)\operatorname{Cos}\alpha(x-\beta)\operatorname{Ch}\alpha y\, d\alpha\, d\beta = \frac{f(z)+f(z')}{2},$$

показывающее его общность.

---

Подобнымъ же образомъ формула

$$\log(x+yi) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

показываетъ, что ея дѣйствительная часть и коеффиціентъ при $i$ суть частныя рѣшенія уравненія

$$\frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{dy^2} = 0,$$

отсюда легко заключить о существованіи двухъ другихъ рѣшеній:

$$U = \iint f(\alpha,\beta)\log\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\, d\alpha\, d\beta$$

и $$V = \iint f(\alpha,\beta)\operatorname{arc\,tg}.\frac{y-\beta}{x-\alpha}\, d\alpha\, d\beta$$

того-же уравненія, гдѣ $f(\alpha,\beta)$ имѣетъ конечныя значенія въ границахъ интегрированія, а эти послѣднія обнимаютъ всѣ точки (съ прямоугольными координитами $\alpha$ и $\beta$) нѣкоторой конечной площади $A$, не заключающей въ себѣ точку съ координатами $x$ и $y$.

Функціи $U$ и $V$ вычисляются помощію данныхъ выше квадратуръ одна посредствомъ другой и выраженіе

$$W = U + Vi$$

есть функція комплекснаго перемѣннаго $z = x + yi$.

Можно еще замѣтить, что $U$ есть потенціалъ (такъ называемый логариѳмическій) силы притяженія точки $(x, y)$, съ массой $= 1$, всѣми точками $(\alpha, \beta)$, имѣющими плотность $f(\alpha, \beta)$, обратно пропорціональной разстояніямъ и пропорціональной массамъ этихъ точекъ.

Вслѣдствіе же равенства

$$\frac{\partial U}{dx}\frac{\partial V}{dx} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

уравненіе

$$V = \iint f(\alpha, \beta) \operatorname{arc\,tg} \frac{y - \beta}{x - \alpha}\, d\alpha\, d\beta = \text{Const}$$

представляетъ *линіи силъ*, т. е. линіи, касательныя къ которымъ во всякой точкѣ $(x, y)$, не принадлежащей площади $A$, опредѣляютъ направленіе силы, имѣющей потенціалъ $U$.

*В. И.*