УДК 517.9

А. М. БЛОХ

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ОДНОМЕРНЫХ РАЗВЕТВЛЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ. 1

В нашей работе некоторые результаты, относящиеся к отображениям отрезка, обобщены на отображениях одномерных разветвленных многообразий, т. е. компактов, локально представляющих собой точку с конечным числом выходящих из нее интервалов (многообразиями будем называть именно такие компакты).

Введем определения. Узел $\underset{\text{def}}{\equiv}$ точка многообразия, не имеющая окрестности, гомеоморфной интервалу; из определения следует, что у многообразия конечное число узлов. Дуга $\underset{\text{def}}{\equiv}$ подмножество многообразия, гомеоморфное интервалу. Если x — точка многообразия K, то под стороной R точки x будем понимать семейство открытых невырожденных, не содержащих узлов дуг $\{V_R(x)\}$ с одним из концов в x и таких, что если $V'_R(x) \in R$, $V''_R(x) \in R$, то либо $V_R(x) \subset V''_R(x)$, либо $V''_R(x) \subset V_R(x)$. Если $f: K \to K$ непрерывно, $x \in K$, R — сторона x, S — сторона fx, то скажем, что S принадлежит образу R, если для любой полуокрестности $V_R(x) \in R$ найдется полуокрестность $V_S(fx) \in S$ такая, что $fV_R(x) \supset V_S(fx)$.

Множество всех сторон x обозначим $\mathrm{Si}(x)$. Важным для нас будет следующее определение. Пусть $T: X \to X$, $\tilde{T}: \tilde{X} \to \tilde{X}$ — непрерывные отображения топологических пространств, $\Phi: X \to \tilde{X}$ — монотонная (т. е. $\Phi^{-1}(\tilde{X})$ связно для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$) непрерывная сюръекция, полусопрягающая T и $\tilde{T}$ (т. е. $\Phi \circ T = T \circ \Phi$). Пусть $F \subset X$ — T — инвариантное замкнутое множество, причем существует $N < \infty$ такое, что для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ $1 \leqslant \mathrm{card}(\Phi^{-1}(x) \cap \cap F) \leqslant N$ и $\mathrm{int}(\Phi^{-1}(\tilde{x})) \cap F = \varnothing$ (т. е. $\Phi^{-1}(\tilde{x}) \cap F \subset \partial\Phi^{-1}(\tilde{x})$); тогда будем говорить, что Φ почти точно на F полусопрягает T и $\tilde{T}$. Если еще $\Phi^{-1}(\tilde{x}) \cap F = \partial\Phi^{-1}(\tilde{x})$, то назовем Φ полным. Ниже если не оговорено противное, рассматриваются непрерывные отображения многообразий.

Пусть K — многообразие, $f: K \to K$, M — инвариантное подмногообразие, $x \in M$. Обозначим $P_M(x, f)$ пролонгацию x относительно f/M, т. е. множество $\bigcap\limits_U \overline{\mathrm{orb}_f U}$, где U пробегает все окрестности x в M. Если ясно, о каком отображении идет речь, будем писать $P_M(x)$; если $M = K$, будем писать $P(x)$ или $P(x, f)$. Очевидно, что $P(x)$ — инвариантный компакт, и если $x \in \Omega(f)$, то $f/P(x)$ сюръективно.

Лемма 1. *Пусть $x \in \Omega(f)$. Тогда $x \in P(f^m x)(\forall m \geqslant 0)$, для $P(x)$ имеются такие возможности: 1) $P(x)$ — цикл; 2) $P(x) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$ — инвариантный невырожденный компакт со связными компонентами $\{P_i\}_{i=1}^{k}$, причем $fP_1 = P_2$, $fP_2 = P_3$, ..., $fP_k = P_1$; 3) $P(x) = \bigcap\limits_{n \geqslant 0} M_n$, где для любого n $M_n = \bigcup\limits_{i=1}^{k_n} M_n^{(i)}$ — инвариантный компакт со связными компонентами $\{M_n^{(i)}\}_{i=1}^{k_n}$, причем $fM_n^{(1)} \subset \subset M_n^{(2)}$, $fM_n^{(2)} \subset M_n^{(3)}$, ..., $fM_n^{(k_n)} \subset M_n^{(1)}$ и $k_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.*

Доказательство. Для любой окрестности $V \ni f_x^m$ в силу того, что $x \in \Omega(f)$, имеем: $\overline{\mathrm{orb}\, V} \ni x$, так что $x \in P(f^m x)$. Далее, $P(x) = \bigcap\limits_{n \geqslant 0} \overline{\mathrm{orb}\, U_n}$, где $U_0 \supset U_1 \supset \ldots$ — связные окрестности x, $\bigcap\limits_{n \geqslant 0} U_n = x$. При фиксированном n $\overline{\mathrm{orb}\, U_n} = M_n$ — инвариантный компакт, и если $M_n = \bigcup\limits_{i=1}^{k_n} M_n^{(i)}$ — разложение M_n на связные компоненты, то можно считать, что $fM_n^{(1)} \subset M_n^{(2)}$, $fM_n^{(2)} \subset M_n^{(3)}$, ... $fM_n^{(k_n)} \subset M_n^{(1)}$. Очевидно, k_n не убывает с ростом n. Если $k_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, то имеет место случай 3). Пусть $k_n \underset{n\to\infty}{\not\to} \infty$; можно считать, что все $k_n = k$. Тогда $P(x) = \bigcap\limits_{n \geqslant 0} M_n$ — инвариантный компакт,

$P(x)=\bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$, где $fP_1=P_2, \ldots fP_k=P_1$ (равенства следуют из сюръективности $f/P(x)$). Если $P(x)$ вырождено, то имеет место случай 1, если невырождено — случай 2.Ч.Т.Д.

Пусть $D=\{m_i\}_{i=0}^{\infty}$ — последовательность целых чисел такая, что $m_{i+1} \vdots m_i (\forall i)$. В $\mathbf{Z}_{m_0}\times\mathbf{Z}_{m_1}\times\ldots$, взятом с топологией произведения, рассмотрим подгруппу $H(D)$ (несколько неточно назовем ее «соленоидом»), состоящую из таких $(r_0, r_1 \ldots)$, что $r_{i+1}\equiv r_i (\mathrm{mod.}\ m_i)(\forall i)$. Пусть у отображения f многообразия K есть множество, описанное нами в третьем пункте леммы 1, т. е. семейство инвариантных компактов $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $M_n=\bigcup\limits_{i=0}^{m_n-1} M_n^{(i)} (\forall n)$, причем $fM_n^{(0)}\subset M_n^{(1)}$, $fM_n^{(1)}\subset M_n^{(2)}, \ldots, fM_n^{(m_n-1)}\subset M_n^{(0)}$, все $M_n^{(i)}$ связны и $\underset{n\to\infty}{m_n\to\infty}$. Тогда $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} M_n=Q$ — инвариантный компакт. Назовем любое инвариантное $\Omega\subset Q$ сильно соленоидальным.

Теорема 1. *Пусть $Q=\bigcap\limits_{n\geqslant 0} M_n$ — сильно соленоидальное множество. Найдутся минимальное множество $\Omega'\subset Q$, максимальное по включению среди ω-предельных множеств множество $\omega(z)=\Omega''\subset Q$ и множество $\Omega'''=Q\cap\Omega(f)$ такие, что: 1) для любого $y\in Q$ $\omega(y)=\Omega''=Q\cap\overline{\mathrm{Per} f}$, $\Omega'''\setminus\Omega'$ состоит из изолированных точек и Ω''/Ω' либо пусто, либо счетно; 2) для любого y' $\omega(y')\cap Q\neq\varnothing$ влечет $\Omega'\subset\omega(y')\subset\Omega''\subset\Omega'''$, причем тогда f/Q с помощью одного и того же отображения φ почти точно на Ω''' и $\omega(y')$ полусопряжено со сдвигом τ на элемент $(1, 1, \ldots)$ в «соленоиде» $H(D)$, и на $\omega(y')$ полусопряжение φ не более, чем двукратно.*

Доказательство. Выберем n и i так, что $M_n^{(i)}$ — дуга, не содержащая узлов. Из результатов работ [1, 2], относящихся к отображениям отрезка, вытекает утверждение теоремы для отображений отрезка и тем самым для $f^{m_n}/M_n^{(i)}$. Пусть соответствующие множества для $f^{m_n}/M_n^{(i)}$ — это $\tilde\Omega''=\omega_{f^{m_n}}(z)$, где $z\in M_n^{(i)}$, $\tilde\Omega'=\omega_{f^{m_n}}(y)=Q\cap M_n^{(i)}\cap\overline{\mathrm{Per} f}$ для любого $y\in M_n^{(i)}$. Из свойств ω-предельных множеств следует, что для любого $y\in Q$ $\omega_f(y)=$ $=\bigcup\limits_{j=0}^{m_n-1}\omega_{f^{m_n}}(f^j y)$, и так как для некоторого j' $f^{j'}y\in M_n^{(i)}$, то $\omega_f(y)=\bigcup\limits_{j=0}^{m_n-1} f^j\tilde\Omega'=\Omega'=Q\cap\overline{\mathrm{Per} f}$. Пусть $\Omega''=\omega_f(z)$; тогда $\Omega''=$ $=\bigcup\limits_{j=0}^{m_n-1} f^j\tilde\Omega''$. Из определений $\tilde\Omega''\setminus\tilde\Omega'\subset\Omega''\setminus\Omega'\subset\bigcup\limits_{j=0}^{m_n-1} f^j(\tilde\Omega''\setminus\tilde\Omega')$, так что $\Omega''\setminus\Omega'$ либо пусто (если $\tilde\Omega''\setminus\tilde\Omega'$ пусто), либо счетно (в противном случае). Далее, если $\omega_f(y')\cap Q=\varnothing$, то можно считать $y' \in M_n^{(i)}$, так что $\omega_{f^{m_n}}(y') \cap Q \cap M_n^{(i)} \neq \varnothing$, откуда по доказанному в [1] $\tilde{\Omega}' \subset \omega_{f^{m_n}}(y') \subset \tilde{\Omega}''$; значит, $\Omega' \subset \omega_f(y') \subset \Omega''$, что и требовалось.

Проверим, что если $\Omega' \subset \omega_f(y') \subset \Omega''$, то между f/Q и сдвигом τ на $(1, 1, \ldots)$ в $H(D)$ (где $D = \{m_n\}_{n=0}^{\infty}$), если полусопряжение φ, почти точное на $\omega_f(y')$. Выберем у каждого M_n связную компоненту $M_n^{(0)}$ так, чтобы они с ростом n убывали по включению. Каждому $x \in Q$ сопоставим последовательность $(r_0(x), r_1(x), \ldots) = \varphi(x)$, где $r_i(x)$ — такое, что $x \in M_i^{(r_i(x))}$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Так как связные компоненты каждого M_i находятся на положительном расстоянии друг от друга, то φ непрерывно, а так как для любого n $fM_n^{(0)} \subset M_n^{(1)}$, $fM_n^{(1)} \subset M_n^{(2)}, \ldots fM_n^{(m_n-1)} \subset M_n^{(0)}$, то $\varphi(f(x)) = \tau(\varphi(x))$, т. е. f и τ полусопряжены с помощью φ (τ — сдвиг на $(1, 1, \ldots)$ в $H(D)$). Если $g = (r_0, r_1, \ldots) \in H(D)$, то $r_{n+1} \equiv r_n(\mathrm{mod.}\, m_n)(\forall n)$, так что $\varphi^{-1}(g) = \bigcap\limits_{n\geq 0} f^{r_n} M_n^{(0)}$ — непустой связной компакт, что доказывает монотонность и сюръективность φ. Пусть $x \in \Omega(f) \cap Q$; тогда $x \in \varphi^{-1}(\varphi(x))$, причем если $x \in \mathrm{int}\{\varphi^{-1} \times (\varphi(x))\}$, то $\mathrm{int}\{\varphi^{-1}(\varphi(x))\}$ представляет собой даже сильно блуждающую окрестность x-противоречие с $x \in \Omega(f)$. Поэтому и так как существует $N < \infty$ такое, что для любого связного $D' \subset K$ $\mathrm{card}(\partial D') \leq N$, имеем: φ полусопрягает f/Q и τ почти точно на $\Omega(f) \cap Q = \Omega'''$, откуда, очевидно, следует, что то же самое φ полусопрягает f/Q и τ почти точно на $\omega_f(y')$ (так как $\Omega' \subset \omega_f(y') \subset \Omega''$). Наконец, $f/\omega_f(y')$ сюръективно и если $x \in \omega_f(y')$, то найдется натуральное t, не содержащая узлов замкнутая дуга Σ и $g \in H(D)$ такие, что $\varphi^{-1}(g) = \Sigma$, $f^t(\Sigma) \subset \varphi^{-1}(\tau^t(g)) = \varphi^{-1}(\varphi(x))$. Значит, $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \omega_f(y') = f^t(\Sigma \cap \omega_f(y')) \subset f^t(\partial\Sigma)$, откуда $\mathrm{card} \times \{\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \omega_f(y')\} \leq 2$. Наконец, пусть в $\Omega''' \setminus \Omega'$ есть неизолированная точка ζ. Тогда в любой ее окрестности U есть бесконечно много отличных от ζ точек Ω'''. Значит, найдутся $k = k(U)$ и $r = r(U)$ такие, что $M_k^{(r)} \subset U$, и так как $M_k^{(r)} \cap \Omega' \neq \varnothing$, то $\zeta \in \Omega'$ — противоречие. Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть U — компактная неблуждающая окрестность, $\overline{\mathrm{orb}\, U} = K$. Тогда все точки $\bigcap\limits_{n\geq 0} f^n K$, кроме, возможно, конечного числа, принадлежат $\bigcup\limits_{n\geq 0} \mathrm{int}(f^n U)$.*

Доказательство. Пусть m — наименьшее натуральное такое, что $f^m U \cap U \neq \varnothing$. Тогда $f^{m+r} U \cap f^r U \neq \varnothing$ $(\forall r)$, так что $A_0 = \bigcup\limits_{i\geq 0} f^{mi} U$, $A_1 = \bigcup\limits_{i\geq 0} f^{mi}(fU), \ldots, A_{m-1} = \bigcup\limits_{i\geq 0} f^{mi}(f^{m-1}U)$ — связные множества и $K = \bigcup\limits_{j=0}^{m-1} \bar{A}_j$. Значит, $\{K \setminus \bigcup\limits_{n\geq 0} f^n U\}$ конечно, а $F = \{K \setminus \bigcup\limits_{n\geq 0} \mathrm{int}(f^n U)\}$ — не более, чем счетно и замкнуто, и достаточно рассмотреть случай, когда F — счетно. Для дуг, соединяющих точки ζ, ζ', будем использовать, если не возникнет двусмысленностей, «интервальные» обозначения $[\zeta, \zeta']$, (ζ, ζ') и т. п.

Можно считать, что $m = 1$, $\bar{A}_0 = K$, $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность точек из F, $x_k \underset{k\to\infty}{\to} y$, все точки $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ лежат на дуге $[x_0, y]$, не содержащей узлов и соединяющей x_0 и y, $[x_0, y] \cap F = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $x_{k+1} \in [x_k, y)$ $(\forall k)$ (x_k стремятся к y «монотонно»). Тогда при $s \geqslant 0$ $f^sU \cap [x_1, y] \neq \varnothing$ влечет существование $i_s \geqslant 1 : f^sU \subset [x_{i_s}, x_{i_s+1}]$, и так как $f^{s+1}U \cap U \neq \varnothing$, то $f^{s+1}U \subset [x_{i_s-1}, x_{i_s+2}]$ (иначе x_{i_s+2} или x_{i_s-1} принадлежат $\operatorname{int}(f^{s+1}U)$). Поэтому для $j \geqslant 1$ $f[x_j, x_{j+1}] \subset [x_{j-1}, x_{j+2}]$. Если $i_s \geqslant 1$, то $i_{s-1} \in \{i_s - 1, i_s, i_s + 1\}$, так как если $f^{s-1}U \not\subset [x_{i_s-1}, x_{i_s+1}]$, то $\operatorname{int}(f^sU)$ содержит x_{i_s-1} или x_{i_s+1} — противоречие.

Выберем наименьшее $s : i_s \geqslant 2$. Тогда по доказанному $i_s = 2$, $i_{s-1} = 1$. Покажем, что $i_r \nearrow \infty$ (нестрого). Иначе есть j и точки $\alpha, \beta \in [x_j, x_{j+1}]$ такие, что $f\alpha \in [x_{j+1}, x_{j+2}]$, $f\beta \in [x_{j-1}, x_j]$, $j \geqslant 2$. Значит, поскольку $f[x_j, x_{j+1}] \subset [x_{j-1}, x_{j+2}]$, т. е. точка $\gamma \in [x_j, x_{j+1}] : f\gamma = \gamma$. Выберем n так, что $f^nU \ni \gamma$ и k' так, что $\bigcup_{i=0}^{n} f^iU \cap \cap \{x_k\}_{k \geqslant k'} = \varnothing$, а затем $m \geqslant n$ так, что $f^mU \ni x_{k_1}$, где $k_1 \geqslant k' + 1$. Тогда ввиду связности либо $\operatorname{int}(f^mU) \ni x_{k'}$, либо $\operatorname{int}(f^mU) \ni x_{k_1+1}$ — противоречие, т. е. $i_r \nearrow \infty$ (нестрого). По доказанному множество $B = K \setminus A_0$ конечно. Тогда $f^nK = f^nB \cup (\bigcup_{r=n}^{\infty} f^rU)$. Значит, для $n \geqslant s$, где s выбрано выше, имеем: $\bigcup_{r=n}^{\infty} f^rU \subset [x_{i_n}, y]$, откуда ввиду связности и замкнутости f^nK следует, что $f^nK = [\zeta_n, y]$ — дуга и $[\zeta_n, y] \subset [x_{i_n}, y]$. Так как $i_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} \infty$ (нестрого), то $\bigcap_{n \geqslant 0} f^nK = y$, что доказывает лемму.

Теорема 2. *Пусть $E = E(K, f)$ бесконечно. Тогда E совершенно, f/E транзитивно, и если $\omega(z) \supset E$, то $\omega(z) = E$. При этом существует многообразие $\tilde{K}$ и транзитивное отображение $g : \tilde{K} \to \tilde{K}$ такие, что f полно и почти точно на E полусопряжено с g.*

Доказательство. Докажем ряд утверждений.

Утверждение А. У любого $x \in E$ есть сторона $T : \overline{\operatorname{orb} V_T(x)} = K$ для любой $V_T(x)$.

Доказательство утверждения А. Пусть $T_1, \ldots, T_n$ — все стороны точки x, $V_{T_1}, \ldots, V_{T_n}$ — полуокрестности x с неплотными в K орбитами. Можно считать k таким, что для $1 \leqslant i \leqslant k$ любая $W_{T_i}(x)$ — неблуждающая, а $V_{T_{k+1}}, \ldots, V_{T_n}$ — блуждающие полуокрестности. Отсюда $\overline{\operatorname{orb} V_{T_i}} = M_i$ — инвариантное замкнутое многообразие $(1 \leqslant i \leqslant k)$; пусть $M = \bigcup_{i=1}^{k} M_i$. Если M содержит некоторую окрестность U точки x, то $M = K$. В противном случае можно считать, что $W_{T_{k+1}} \subset V_{T_{k+1}}, \ldots, W_{T_l} \subset V_{T_l}$ — полуокрестности x, взятые так, что $M \cap (\bigcup_{i=k+1}^{l} W_{T_i}) = \varnothing$, со всех возможных торон x. Можно считать также, что для $i, j \in \{k+1, \ldots, l\}$ $\operatorname{orb} W_{T_j} \cap W_{T_i} \neq \varnothing$ влечет, что для некоторого $n \geqslant 1$ $f^n W_{T_j} \supset W_{T_i}$ или для любого $y \in W_{T_i}$ найдутся сколь угодно большие $n : f^n W_{T_j} \ni y$. В первом случае $\operatorname{orb}(f W_{T_j}) \supset W_{T_i}$, во втором то, что W_{T_i} — блуждающая влечет, что $f^n W_{T_j} \not\subset W_{T_i}$ $(\forall n)$ и снова $\operatorname{orb}(f W_{T_j}) \supset W_{T_i}$.

Так как $V = x \cup (\bigcup_{i=1}^{n} V_{T_i})$ — окрестность x, то $\overline{\operatorname{orb} V} = K$, и инвариантность M влечет, что для любого $i \in \{k+1, \ldots, l\}$ есть $j = j(i) \in \{k+1, \ldots, l\}$: $\operatorname{orb} W_{T_j} \cap W_{T_i} \neq \varnothing$, а значит, $\operatorname{orb}(f W_{T_j}) \supset W_{T_i}$. Поэтому есть числа $\{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{k+1, \ldots \ldots, l\}$ такие, что $\operatorname{orb}(f W_{T_{i_1}}) \supset W_{T_{i_2}}, \ldots, \operatorname{orb}(f W_{T_{i_2}}) \supset W_{T_{i_1}}$, откуда $\operatorname{orb}(f W_{T_{i_1}}) \supset W_{T_{i_1}}$ — противоречие с тем, что $W_{T_{i_1}}$ блуждает. Итак, $\bigcup_{i=1}^{k} \overline{\operatorname{orb} V_{T_i}} = \bigcup M_i = K$. В соответствии с леммой 2, $\{K \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{n \geqslant 0} \operatorname{int}(f^n V_{T_i})\}$ конечно, и ввиду бесконечности E найдется $y \in E$, n и i такие, что $y \in \operatorname{int}(f^n V_{T_i})$, откуда $\overline{\operatorname{orb} V_{T_i}} = K$ — противоречие, доказывающее утверждение А.

Утверждение Б. Если C' связно и $y \in \operatorname{int}(f^n C') \cap E$ для некоторого n, то $y \in f^n$ $(\operatorname{int}(C') \cap E)$ и $\operatorname{int}(C') \cap E \neq \varnothing$.

Доказательство утверждения Б. Выберем компакт $C \subset \operatorname{int} C'$ так, что $y \in \operatorname{int}(f^n C) \cap E$. Пусть S — сторона y, $\overline{\operatorname{orb} W_S(y)} = K$ для любой полуокрестности $W_S(y)$. Если в C есть точка z, для любой окрестности U которой найдется S-полуокрестность y, принадлежащая $f^n U$, то $f^n z = y$ и $z \in \operatorname{int}(C') \cap E$, что и требуется. Пусть такого z нет; тогда есть покрытие C окрестностями, образы которых не пересекаются с соответствующими S-полуокрестностями y'. Выбирая конечное подпокрытие, найдем $W_S(y) : W_S(y) \cap \cap f^n C = \varnothing$ — противоречие $y \in \operatorname{int}(f^n C)$.

Утверждение В. E совершенно.

Доказательство утверждения В. Пусть $x \in E$, T — такая сторона, что $\overline{\operatorname{orb} W_T(x)} = K$ для любой T-полуокрестности x. Тогда по лемме 1, так как E бесконечно, для любой полуокрестности x $W_T(x)$ найдется $n : \operatorname{int}(f^n W_T(x)) \cap E \neq \varnothing$, откуда по утверждению Б $E \cap W_T(x) \neq \varnothing$.

Утверждение Г. f/E транзитивно.

Доказательство утверждения Г. Докажем, что если U открыто, $U \cap E \neq \varnothing$, то $\overline{\operatorname{orb}(U \cap E)} = E$. По лемме 1 для всех, кроме конечного числа, точек $y \in E$ найдется $n : \operatorname{int}(f^n U) \ni y$, откуда по утверждению Б найдется $z \in U \cap E : f^n z = y$. Значит, $\overline{\operatorname{orb}(U \cap E)} = E$, что и требовалось.

Для дальнейшего рассмотрим множество $K \setminus E$. Если $K = E$, то оставшиеся недоказанными утверждения теоремы очевидны. Если $K \neq E$, то E не имеет внутренности и $K \setminus E$ состоит из счетного числа компонент $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$. Все они, кроме, возможно, конечного набора $\{D_i\}_{i=1}^{m}$, являются дугами, замыкания которых не содержат узлов K. Так как E совершенно, то отсюда $\bar{D}_i \cap \bar{D}_j = \varnothing$, если только $j > m$. Пусть $D = \bigcup_{i=1}^{m} \bar{D}_i$, $\{D^{(i)}\}_{i=1}^{m'}$ — связные компоненты D. Можно считать, что $D^{(1)} = \bigcup_{i=1}^{s_1} D_i, \ldots, D^{(m')} = \bigcup_{i=s_{m'-1}}^{m} D_i$, где $D^{(1)}, \ldots, D^{(m')}$ попарно не пересекаются. Т. к. E совершенно, то $\operatorname{int}(D^{(i)}) \cap E = \varnothing$ $(1 \leqslant i \leqslant m')$ и $D^{(i)} \cap E = \partial D^{(i)}$ конечно. Множества $\{D^{(i)}\}_{i=1}^{m'}$ вместе с множествами $\{\bar{D}_i\}_{i=m+1}^{\infty}$ образуют семейство попарно не пересекающихся множеств $\{D^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$.

Утверждение Д. Имеем: $\operatorname{int}(fD^{(i)}) \cap E = \varnothing$ $(\forall i)$, так что однозначно определено j такое, что $fD^{(i)} \subset D^{(j)}$.

Доказательство утверждения Д. Если $\operatorname{int}(fD^{(i)}) \cap E \neq \varnothing$, то по утверждению Б $\operatorname{int}(D^{(i)}) \cap E \neq \varnothing$ — противоречие.

Утверждение Е. Если $\omega(z) \supset E$, то $\omega(z) = E$.

Доказательство утверждения Е. Пусть $\omega(z) \supset E \cup y$, где $y \notin E$, для определенности $y \in \operatorname{int} D^{(1)}$. Можно считать, что $z \in \operatorname{int} D^{(1)}$ и для некоторого $n \geqslant 1$ $f^n z \in \operatorname{int} D^{(1)}$. Утверждение Д влечет, что $\operatorname{orb} z \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} f^i D^{(1)}$, откуда $E = \omega(z) \cap E \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} \{f^i D^{(1)} \cap E\}$ а последнее множество конечно по выбору множеств $D^{(j)}$ — противоречие.

Докажем оставшуюся часть теоремы. Нам понадобится такой факт: если Γ — дуга, Π — дуга, $F \subset \Gamma$ — совершенно, то существует стандартная монотонная сюръекция $\tilde{\varphi} : \Gamma \to \Pi$, склеивающая дополнительные к F дуги и только их; $\tilde{\varphi}$ однозначно определяется своим значением в одном из концов Γ, совпадающим с одним из концов Π. Пусть $K = \bigcup_{i=1}^{t} \Gamma_i$, где Γ_i — замкнутые дуги, пересекающиеся не более, чем в своих концах, и не содержащие внутри себя узлов. Отображение φ_i определим на каждой дуге Γ_i как «склеивающее» дополнительные к $\Gamma_i \cap E$ дуги и только их и переводящее Γ_i в некоторую дугу Π_i (точку при $\Gamma_i \cap E$ конечном). Считая при этом, что концы дуг Γ_i переходят для соответствующих φ_i в одну и ту же точку и что дополнительных точек пересечения между Π_i нет, получим, очевидно, непрерывную монотонную сюръекцию $\tilde{\varphi} : K \to \tilde{K}$, где $\tilde{K}$ — многообразие, причем для любого $x \in \tilde{K}$ $\varphi^{-1}(x)$ — это точка или одно из множеств $\{D^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ и $\tilde{\varphi}^{-1}(x) \cap E = \partial\{\tilde{\varphi}^{-1}(x)\}$, так что $\tilde{\varphi}$ обладает всеми свойствами полного и почти точного на E полусопряжения. Проверим, что для некоторого транзитивного $g:\tilde{K}\to\tilde{K}$ $\tilde{\varphi}\circ f=g\circ\tilde{\varphi}$. Если $z\in\tilde{K}$, то из утверждения Д следует, что $\tilde{\varphi}(f(\tilde{\varphi}^{-1}(z)))\underset{\text{def}}{\equiv}g(z)$ — точка; определенное так отображение g обладает свойством $\varphi\circ f=g\circ\varphi$. Из построения φ следует, что если $z\in\tilde{K}$, то можно выбрать правое обратное $\tilde{\varphi}$ отображение $\psi:\tilde{K}\to K$ ($\tilde{\varphi}\circ\psi=\mathrm{id}/\tilde{K}$) непрерывным в точке z, т. е. так, что если $z_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}z$, то $g(z_n)=\tilde{\varphi}(f(\Psi(z_n)))\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ $\to g(z)=\tilde{\varphi}(f(\psi(z)))$, что доказывает непрерывность g. Далее, g транзитивно, так как f/E транзитивно. Теорема доказана.

Теорема S (см. [3]). *Транзитивное отображение связного многообразия без циклов есть иррациональный сдвиг в окружности.*

Если $f:K\to K$ — непрерывно, $K=\bigcup\limits_{j=1}^{d}K_j$ — многообразие со связными компонентами $\{K_j\}_{j=1}^{d}$, то ему соответствует отображение $\eta_f:\{1,\ldots,d\}\to\{1,\ldots,d\}$ такое, что $f(K_j)\subset K_{\eta_f}(j)$. Значит, существует множество $\{j_1,\ldots,j_r\}\subset\{1,\ldots,d\}$ и число $N=$ $=N(f)$ такие, что $\tilde{K}=\bigcup\limits_{i=1}^{r}K_{j_i}$ — f — инвариантный компакт, $f^NK\subset\tilde{K}$, для любого n $f^nK\cap K_{j_i}\neq\varnothing$ $(1\leqslant i\leqslant r)$, отображение $\eta_f/\{j_1,\ldots,j_r\}$ — подстановка, распадающаяся на несколько циклических подстановок, причем для сюръективных f $\{j_1,\ldots,j_r\}=\{1,\ldots,d\}$. Эти соображения позволяют сформулировать в большей общности следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* $f:K\to K$, $\mathrm{Per}\,f=\varnothing$. *Тогда для некоторого* $\tilde{n}$ $f^{\tilde{n}}K=\bigcap\limits_{i\geqslant 0}f^iK=\tilde{K}$, $f/\tilde{K}$ *циклически переставляет наборы компонент связности* $\tilde{K}$ $\{\tilde{K}_1,\ldots,\tilde{K}_{r_1}\}$, $\{\tilde{K}_{r_1+1},\ldots,\tilde{K}_{r_2}\}$, $\ldots$, $\{\tilde{K}_{r_{k-1}+1},\ldots,\tilde{K}_{r_k}\}$ (*где* $\tilde{K}=\bigcup\limits_{i=1}^{r_k}\tilde{K}_i$), *причем* $f/\bigcup\limits_{i=1}^{r_1}\tilde{K}_i$ *обладает такими свойствами* (*аналогичными свойствам* $f/\bigcup\limits_{i=r_1+1}^{r_2}\tilde{K}_i,\ldots,$ $\ldots, f/\bigcup\limits_{i=r_{k-1}+1}^{r_k}\tilde{K}_i$).

1. *Существует бесконечное минимальное множество* $E_1=$ $=E(\bigcup\limits_{i=1}^{r_1}\tilde{K}_i,f)$ *такое, что для любого* $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{r_1}\tilde{K}_i\omega(x)=E_1$.

2. *Отображение* $f/\bigcup\limits_{i=1}^{r_1}\tilde{K}_i$ *полно и почти точно (не более, чем двукратно) на* E_1 *полусопряжено с отображением* g/S, *где* $S=\bigcup\limits_{i=1}^{r_1}S_i$ — *объединение непересекающихся окружностей, причем* $g(S_1)=S_2,\ldots,g(S_{r_1})=S_1$, g^{r_1}/S_i *есть поворот на некоторый иррациональный угол* β_1.

Доказательство. Покажем, что есть $\tilde{n}: f^{\tilde{n}}K = \bigcap_{i\geq 0} f^i K$. Пусть $\bigcap_{i\geq 0} f^i K = \tilde{K}$; тогда $\tilde{K}$ — подмногообразие. Если $\tilde{K}$ открыто, то $(K\setminus\tilde{K}) \supset (K\setminus\tilde{K}) \cap fK \supset (K\setminus\tilde{K}) \cap f^2K \supset \ldots$ — убывающая последовательность компактов с пустым пересечением, так что найдется $\tilde{n}: (K\setminus\tilde{K}) \cap f^{\tilde{n}}K = \varnothing$, откуда $\tilde{K} = f^{\tilde{n}}K$. Пусть $\tilde{K}$ не открыто и $\partial\tilde{K} = \tilde{K}\setminus \operatorname{int}\tilde{K} \neq \varnothing$; ясно, что $\partial\tilde{K}$ конечно. Поскольку $\operatorname{Per} f = \varnothing$, т. е. $n': f^{n'}(\partial\tilde{K}) \subset \operatorname{int}\tilde{K}$. Значит, есть окрестность $\tilde{G} \supset \tilde{K}: f^{n'}\tilde{G} \subset \tilde{K}$. Если $f^iK\setminus\tilde{G} \neq \varnothing$ $(\forall i)$, то компактность влечет, что $\tilde{K}\setminus\tilde{G} \neq \varnothing$ — противоречие; значит, есть $i': f^{i'}K \subset \tilde{G}$, откуда $f^{i'+n'}K \subset \tilde{K}$ и $f^{i'+n'}K = \bigcap_{i\geq 0} f^iK$.

Проведенные выше рассуждения влекут, что K связно и f сюръективно, т. е. $r_1 = 1$, $\tilde{K} = K$. Пусть $x \in \omega(x)$. Свойства пролонгации влекут, что $P(x) = M$ — инвариантное подмногообразие, а из определения следует, что если $y \in \operatorname{orb} x \cap \operatorname{int} M$, то $P_M(y) = M$, т. е. $\operatorname{orb} x \cap \operatorname{int} M \subset E(M, f)$; отсюда, очевидно, $\omega(x) \subset E(M, f)$. Значит, так как $\operatorname{Per} f = \varnothing$, то $E(M, f)$ бесконечно. Покажем, что $M = K$. Иначе пусть $\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(\operatorname{int} M) = G$. Если $G = K$, то есть $N: K = \bigcup_{n=0}^{N} f^{-n}(\operatorname{int} M)$ — противоречие с сюръективностью f, так что $G \neq K$. Если $\alpha \in \partial M$, т. е. $i = i(\alpha): f^i\alpha \in \operatorname{int} M$ (так как $\operatorname{Per} f = \varnothing$), откуда $M \subset G$, а G и $\bar{G}$ f — инвариантны. Пусть M' — связная компонента M, m — такое, что $f^mM' \subset M'$, $G' \supset M'$ — связная компонента G. Тогда, так как $\partial G' \cap G' = \varnothing$, $f^i\{\partial G'\} \cap G = \varnothing$ $(\forall i \geq 0)$, откуда $f^m(\partial G') \subset \partial G'$ — противоречие с $\operatorname{Per} f = \varnothing$.

Итак, $K = M$, $E = E(K, f)$ бесконечно. По теореме 2 есть полное почти точное на E полусопряжение φ f/K с транзитивным отображением $g/\tilde{K}$, где $\tilde{K}$ — связное (ввиду связности K) многообразие. Если у g есть цикл $\operatorname{orb}_g p$, то $\varphi^{-1}(p) \cap E$ — конечное f-инвариантное множество — противоречие с $\operatorname{Per} f = \varnothing$. Значит, по теореме S g — иррациональный сдвиг в окружности S^1. Пусть $y \in K$; тогда $\varphi(\omega_f(y)) = S^1$. Если $z \in E$, $U \ni z$ — окрестность z, то $\varphi(K\setminus U) \neq S^1$; значит, $\omega_f(y) \supset E$, а из рассуждений предыдущего абзаца $\omega_f(y) \subset E$, откуда $\omega_f(y) = E$. Осталось заметить, что так как f/E сюръективно, а сдвиг g — гомеоморфизм, то для любого $\zeta \in S^1$ и любого $n \geq 0$ имеем: $f(\partial(\varphi^{-1} \circ g^{-n}(\zeta))) = \partial(\varphi^{-1}(\zeta))$, так что все множества $\partial(\varphi^{-1}(\zeta)) \cap E$ равномощны и, значит, состоят из не более, чем двух точек (так как для любого ζ найдется n такое, что $\operatorname{card}(\partial(\varphi^{-1} \circ g^{-n}(\zeta))) \leq 2$). Теорема доказана.

Для непрерывных $f: K \to K$ рассмотрим бесконечные множества $F(M) = E(M, f/M)$, построенные по инвариантным подмногообразиям M. При $\operatorname{Per} f/M \neq \varnothing$ будем называть $F(M)$ базисными и обозначать $B(M)$; при $\operatorname{Per} f/M = \varnothing$ будем называть $F(M)$ окружностными и обозначать $S(M)$. Максимальные по включению среди

ω-предельных множеств циклы назовем множествами рода 0, их объединение для непрерывного f обозначим X_f. Пусть $\omega(f) \underset{\mathrm{def}}{\equiv} \bigcup \omega_f(x)$; центр f обозначим $C(f)$.

Теорема 4. *Существуют не более, чем счетное семейство множеств* $\{B(M_i)\}_{i=1}^{b}$, *конечное семейство множеств* $\{S(\tilde{M}_i)\}_{i=1}^{s}$ *и семейство пар сильно соленоидальных множеств* $\{\Omega_\alpha \subset \Omega''_\alpha\}_{\alpha \in A}$, *где* $\Omega''_\alpha \neq \Omega_\alpha$ *для не более, чем счетного набора индексов, причем:* 1) $\overline{\mathrm{Per}\, f} = \bigcup_{i=1}^{b} B(M_i) \cup (\bigcup_{\alpha \in A} \Omega'_\alpha) \cup X_f \subset C(f) = \bigcup_{i=1}^{b} B(M_i) \cup (\bigcup_{\alpha \in A} \Omega'_\alpha) \cup (\bigcup_{i=1}^{s} S(\tilde{M}_i)) \cup \cup X_f \subset \omega(f) = \bigcup_{i=1}^{b} B(M_i) \cup (\bigcup_{\alpha \in A} \Omega''_\alpha) \cup (\bigcup_{i=1}^{s} S(\tilde{M}_i)) \cup X_f$; 2) s *не больше зависящего только от топологии K максимального числа попарно не пересекающихся замкнутых кривых в K.*

Доказательство. Пусть $\omega(x) \not\subset X_f$; по доказанному в [4] это влечет бесконечность $\omega(x)$. Если $\omega(x)$ сильно соленоидально, то есть максимальное ω — предельное сильно соленоидальное множество $\Omega''_\alpha \supset \omega(x)$. Пусть $\omega(x)$ не сильно соленоидально; рассмотрим семейство L f-инвариантных замкнутых подмногообразий $M \supset \omega(x)$: $: M = \bigcup_{i=1}^{l(M)} M_i$ — разложение M на компоненты связности, $fM_i \subset \subset M_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, l(M) - 1)$, $fM_{l(M)} \subset M_1$. Тогда, так как $\omega(x)$ не сильно соленоидально, $\max_{M \in L} l(M) = l < \infty$ и L удовлетворяет условиям леммы Цорна, так что в L есть минимальный элемент $\hat{M}$, $l(\hat{M}) = l$. Пусть $y \in \omega(x) \cap \mathrm{int}\, \hat{M}$, тогда $P(y) \subset \hat{M}$ — инвариантное подмногообразие и, очевидно, $P(y) \in L$. По выбору $\hat{M}$ $P(y) = \hat{M}$, откуда $\omega(x) \cap \mathrm{int}\, \hat{M} \subset F(\hat{M})$. Если $z \in (\omega(x) \cap \partial\hat{M}) \setminus \mathrm{Per}\, f$, то, очевидно, найдутся $n \geqslant 1$ и $z' \in \omega(x) \cap \mathrm{int}\, \hat{M}$: $f^n z' = z$, откуда $z \in F(\hat{M})$. В работе [4] доказано, что если Ω — ω — предельное множество, то любая точка цикла из Ω не изолирована в Ω ($\mathrm{Card}\, \Omega = \infty$).

Таким образом, $\omega(x) \cap \partial\hat{M} \cap \mathrm{Per}\, f \subset F(\hat{M})$, откуда $\omega(x) \subset F(\hat{M})$. Легко видеть, что третье из равенств, доказываемых в теореме, проверено.

В [4] для отображения отрезка f доказано, что $\omega(f) = \{x :$ у x есть сторона T такая, что для любой $V_T(x)$ есть $n : f^n V_T(x) \cap V_T(x)$ невырождено$\}$. Теми же методами легко доказать, что то же верно для отображений многообразий. Значит, у нас $\omega(f)$ замкнуто, так что $\overline{\mathrm{Per}\, f} \subset C(f) \subset \omega(f)$. Если есть множество $B(M_i)$, то f/M_i монотонно полусопряжено с транзитивным отображением $g : \hat{K} \to \hat{K}$ многообразия, $\mathrm{Per}\, g \neq \varnothing$, а для таких g в [3] доказано, что меры с носителями на циклах плотны во всех инвариантных мерах и что есть меры с носителем $\hat{K}$, откуда, очевидно, $\overline{\mathrm{Per}\, g} = \hat{K}$ и, значит, $B(M_i) \subset \overline{\mathrm{Per}}\, f$; $\Omega_\alpha \subset \overline{\mathrm{Per}\, f}$ $(\forall \alpha)$, $X_f \subset \overline{\mathrm{Per}\, f}$ по доказанному. Далее, если $z \in \overline{\mathrm{Per}}\, f$, т. е. $x : z \in \omega(x)$; но из доказанного $z \notin \Omega''_\alpha \setminus \Omega_\alpha$,

$z \notin S(\tilde{M}_j)$, что доказывает первое равенство. Наконец, если μ — инвариантная мера, $\operatorname{supp}\mu \subset \Omega''_\alpha$, то для $\zeta \in \Omega''_\alpha\ \omega(\zeta) = \Omega'_\alpha$, очевидно, $\operatorname{supp}\mu = \Omega'_\alpha$; ясно также, что у $f/S(\tilde{M}_j)$ — одна инвариантная мера (прообраз лебеговой при полусопряжении с иррациональным поворотом из теоремы 3), ее носитель — $S(\tilde{M}_j)$. Поэтому для проверки второго равенства достаточно проверить, что множеств $S(\tilde{M}_j)$ конечное число, откуда $\overline{\operatorname{Per} f} \cup (\bigcup_{j=1}^{s} S(\tilde{M}_j))$ замкнуто и, значит, совпадает с $C(f)$. Из теоремы 3 следует, очевидно, что если есть множество $S(\tilde{M})$, то в $\tilde{M}$ есть замкнутая кривая и что разным $S(\tilde{M})$ и $S(\tilde{M}')$ соответствуют непересекающиеся $\tilde{M}$ и $\tilde{M}'$, что и требовалось.

Осталось проверить счетность семейства $\{B(M_i)\}$. Ясно, что семейство $B(M_i)$ таких, что $B(M_i) = M_i$, не более, чем счетно. Для других $B(M_i)$ выберем из дуг, дополнительных в M_i к $B(M_i)$ какую-нибудь блуждающую и сопоставим $B(M_i)$ ее конец, принадлежащий $B(M_i)$ и являющийся концом одной из компонент $K \setminus \overline{\operatorname{Per} f}$. Так как по утверждению А из доказательства теоремы 2 у любой точки $x \in B(M_i)$ есть сторона $T : \overline{\operatorname{orb} V_T(x)} = M_i$ для всех малых $V_T(x)$, то в одной точке пересекается не более $b(K)$ множеств $B(M_i)$, где $b(K)$ — максимальное число сторон у точки из K. Поскольку концов компонент множества $K \setminus \overline{\operatorname{Per} f}$ не более, чем счетное число, то теорема доказана.

Список литературы: 1. *Шарковский А. Н.* Притягивающие множества, не содержащие циклов.— Укр. мат. журн., 1968, **20**, № 1, с. 136—142. 2. *Блох А. М.* О разложении динамических систем на отрезке.— Успехи мат. наук, 1983, 38, № 5, с. 179—180. 3. *Блох А. М.* О транзитивных отображениях одномерных разветвленных многообразий.— В кн.: Дифференциально-разностные уравнения и задачи математической физики. К., 1984, с. 3—11. 4. *Шарковский А. Н.* Об ω-предельных множествах дискретных динамических систем: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.—К., 1967.—9 с.

Поступила в редколлегию 14.06.84