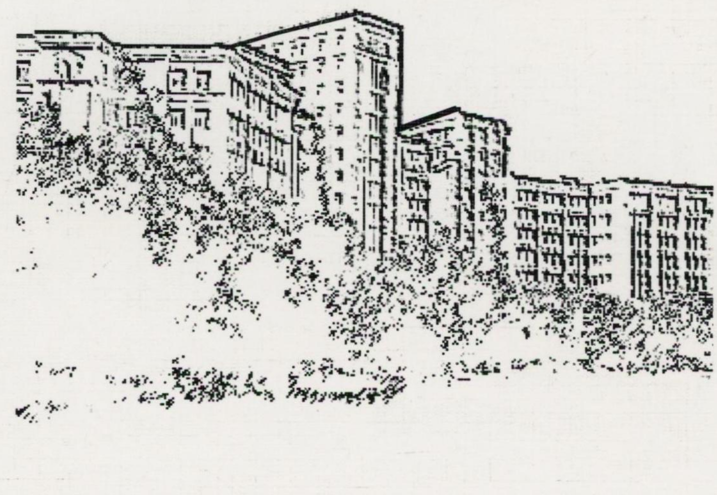
ISSN 0453–8048

ВІСНИК

Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна



№ 850

Харків
2009

Міністерство освіти та науки України
ISSN 0453–8048

Заснований у 1965 р.

ВІСНИК

Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна

№ 850

Серія «Математика, прикладна математика і механіка»

Випуск 59

Харків
2009

УДК 517.9

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Адреса редакційної колегії: 61077, Харків, пл. Свободи, 4,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, механіко-математичний факультет, к.7-29.
Тел. 7075518, 7075135, Email: vestnik@univer.kharkov.ua
Интернет:
http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/

Друкується за рішенням Вченої ради Харківського національного університету (протокол № 6 від 29 травня 2009 р.).

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 11825-696 ПР від 04.10.2006 р.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 514 № 850, 2009, с.3–10

О комплексных подмногообразиях с минимальной голоморфной кривизной грассманова образа

О.В. Лыкова

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина

В работе исследованы комплексные подмногообразия $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ с минимальной голоморфной кривизной грассманова образа.

2000 Mathematics Subject Classification 53B25.

Введение

Секционная кривизна $\bar{k}$ многообразия Грассмана $G(l, l+p)$ при $l, p \neq 1$ изменяется в пределах $[0, 2]$. В работе А.А. Борисенко, Ю.А. Николаевского [3] доказано следующее утверждение: секционная кривизна многообразия Грассмана $G(l, l+p)$ по всем площадкам, касательным к невырожденному грассманову образу поверхности $F^l \subset E^{l+p}$, принимает максимальное значение ($\bar{k} = 2$) тогда и только тогда, когда поверхность двумерна ($l = 2$), минимальна и ее эллипс нормальной кривизны в каждой точке есть окружность с центром на поверхности; в частности, при $p = 2$ поверхность – комплексная кривая в $\mathbf{C}^2 = E^4$. В статье Е. Муто [5] получено, что если невырожденный грассманов образ поверхности $F^l \subset E^{l+p}$, касается только тех площадок, вдоль которых секционная кривизна многообразия Грассмана $G(l, l+p)$ принимает минимальное значение ($\bar{k} = 0$), то это возможно тогда и только тогда, когда поверхность имеет плоскую нормальную связность и индуцированная метрика плоская.

А.А. Борисенко поставил задачу об исследовании комплексных подмногообразий $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ с максимальной и минимальной голоморфной кривизной комплексного многообразия Грассмана вдоль грассманова образа комплексного подмногообразия.

Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ – комплексная поверхность. Построим в каждой ее точке касательное пространство и перенесем все эти пространства параллельно в начало координат. Полученное подмножество в комплексном многообразии Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ называется грассмановым образом $\Gamma(F^l)$ комплексной поверхности F^l.

Комплексным внешним нуль-индексом $\mu_{\mathbf{C}}(q)$ в точке $q \in F^l$ называется максимальная размерность подпространства $L(q)$ касательного пространства T_qF^l такого, что $A_\nu y = 0$ для любого вектора $y \in L(q)$, где A_ν – комплексная вторая квадратичная форма комплексной поверхности F^l в точке q относительно произвольной нормали ν в нормальном пространстве N_qF^l.

Если в каждой точке комплексной поверхности комплексный внешний нуль-индекс равен нулю, то грассманов образ $\Gamma(F^l)$ будет l-мерным комплексным подмногообразием в $\mathbf{C}G(l, l+p)$ [2].

Голоморфная кривизна K_{hol} комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ изменяется в пределах $[2/r, 2]$, где $r = \min(l, p)$ [6].

В работе [4] нами получено описание комплексных подмногообразий с максимальной голоморфной кривизной грассманова образа. Доказано, что *если голоморфная кривизна K_{hol} комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ по площадкам, касательным к невырожденному грассманову образу $\Gamma(F^l)$ комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$, принимает максимальное значение $K_{hol} = 2$ по всем направлениям, то F^l является комплексной гиперповерхностью в $\mathbf{C}^{l+1} \subset \mathbf{C}^{l+p}$.*

В данной работе исследован вопрос о комплексных подмногообразиях с минимальной голоморфной кривизной грассманова образа.

Теорема. *Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ – комплексная поверхность с невырожденным грассмановым образом $\Gamma(F^l) \subset \mathbf{C}G(l, l+p)$, $l \geq 2$, $p \geq 2$. Тогда для каждой точки $q \in F^l$ существует направление $X \in T_{\Gamma(q)}\Gamma(F^l)$, касательное к грассманову образу комплексной поверхности, вдоль которого $K_{hol}(X) > 2/r$, где $r = min(l, p)$.*

Таким образом, при $l \geq 2$, $p \geq 2$ не существует комплексных поверхностей $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$, для которых голоморфная кривизна K_{hol} комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ по площадкам, касательным к невырожденному грассманову образу $\Gamma(F^l)$, принимает минимальное значение $K_{hol} = 2/r$, где $r = min(l, p)$, по всем направлениям.

Касательное пространство к грассманову образу комплексного подмногообразия

Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ – комплексная поверхность с невырожденным грассмановым образом $\Gamma(F^l) \subset \mathbf{C}G(l, l+p)$, точка $q \in F^l$.

В пространстве $\mathbf{C}^{l+p}$ выберем систему координат так, чтобы точка q совпала с началом координат, а касательное пространство T_qF^l – с подпространством $z^1, ..., z^l$. Комплексную поверхность F^l в окрестности точки q можно задать явно, в виде $z^{l+\alpha} = f^\alpha(z^1, ..., z^l)$, $\alpha = 1, ..., p$, где f^α голоморфные функции многих комплексных переменных $z^j = x^j + iy^j$ и $f^\alpha(0) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial z^i}|_0 = 0$, $i = 1, ..., l$. Элементы матриц комплексных вторых квадратичных форм A^α комплексной поверхности F^l в точке q будут иметь вид $a^\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial z^i \partial z^j}|_0$,

$\alpha = 1, ..., p$. Касательным пространством к грассманову образу $\Gamma(F^l)$ в точке $\Gamma(q) = 0$ является l-мерное комплексное линейное пространство, натянутое на векторы [1]

$$X_j = \begin{pmatrix} a^1_{1j} & a^1_{2j} & \dots & a^1_{lj} \\ a^2_{1j} & a^2_{2j} & \dots & a^2_{lj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^p_{1j} & a^p_{2j} & \dots & a^p_{lj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, ..., l. \tag{1}$$

Голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана

Согласно [6] голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ в точке 0 в направлении вектора X имеет вид

$$K_{hol}(X) = \frac{2\mathrm{Tr}(XX^*XX^*)}{(\mathrm{Tr}XX^*)^2}, \tag{2}$$

где X – комплексная $p \times l$-матрица, $X^* = \bar{X}^T$.

В работе [1] было показано, что голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ в точке 0 в направлении вектора $X = (b_{ik})^p_{i=1}{}^l_{k=1}$ имеет вид

$$K_{hol}(X) = 2 - \frac{4\sum\limits_{i<j}\sum\limits_{k<m}|b_{ik}b_{jm} - b_{im}b_{jk}|^2}{(\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{l}|b_{ik}|^2)^2}.$$

Из этой формулы следует, что $K_{hol}(X) = 2$ тогда и только тогда, когда все миноры второго порядка матрицы X равны нулю: $b_{ik}b_{jm} - b_{im}b_{jk} = 0$.

Таким образом, *голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ в точке 0 в направлении вектора $X = (b_{ik})^p_{i=1}{}_{k=1}$ максимальна ($K_{hol}(X) = 2$) тогда и только тогда, когда ранг матрицы X равен единице.*

Найдем условия, при которых голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана в направлении вектора X минимальна: $K_{hol}(X) = 2/r$, где $r = \min(l, p)$.

Лемма. *Голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ в точке 0 в направлении вектора X имеет вид*

$$K_{hol}(X) = \frac{2}{r}\left(1 + \frac{\sum\limits_{i<j}(\rho_i - \rho_j)^2}{(\sum\limits_{i=1}^{r}\rho_i{}^2)^2}\right),$$

где $r = \min(l, p)$, ρ_i – сингулярные числа $p \times l$-матрицы X, $i = 1, ..., r$, $\rho_1 \geq \rho_2 \geq ... \geq \rho_r \geq 0$.

Доказательство. Запишем для матрицы X сингулярное разложение:

$$X = U\Lambda V,$$

где $U \in U(p)$, $V \in U(l)$ – унитарные матрицы, Λ – $p \times l$-матрица с элементами $\Omega_{ii} = \rho_i$, $i = 1, ..., r$, где $r = \min(l, p)$, $\rho_1 \geq \rho_2 \geq ... \geq \rho_r \geq 0, \Omega_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Преобразуем формулу (2):

$$K_{hol}(X) = \frac{2}{r}\frac{r\mathrm{Tr}(XX^*XX^*)}{(\mathrm{Tr}XX^*)^2} = \frac{2}{r}\left(1 + \frac{r\mathrm{Tr}(XX^*XX^*) - (\mathrm{Tr}XX^*)^2}{(\mathrm{Tr}XX^*)^2}\right).$$

Произведем необходимые вычисления:

$$\mathrm{Tr}XX^* = \sum_{i=1}^{r} \rho_i^2,$$

$$\mathrm{Tr}(XX^*XX^*) = \sum_{i=1}^{r} \rho_i^4.$$

Значит,

$$r\mathrm{Tr}(XX^*XX^*) - (\mathrm{Tr}XX^*)^2 = r\sum_{i=1}^{r}\rho_i^4 - (\sum_{i=1}^{r}\rho_i^2)^2 =$$

$$= (r-1)\sum_{i=1}^{r}\rho_i^4 - 2\sum_{i<j}\rho_i^2\rho_j^2 = \sum_{i<j}(\rho_i - \rho_j)^2,$$

откуда и следует требуемое утверждение.

Следствие. *Голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана* $\mathbf{C}G(l, l+p)$ *в точке 0 в направлении вектора X минимальна:* $K_{hol}(X) = 2/r$, *где* $r = \min(l, p)$, *тогда и только тогда, когда все сингулярные числа матрицы X равны между собой:* $\rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_r$.

Доказательство теоремы

Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ – комплексная поверхность, $l \geq 2$, $p \geq 2$. Точка $q \in F^l$ и комплексный внешний нуль-индекс $\mu_{\mathbf{C}}(q) = 0$.

Предположим, что для любого вектора $X \in T_{\Gamma(q)}\Gamma(F^l)$, касательного к грассманову образу $\Gamma(F^l) \subset \mathbf{C}G(l, l+p)$ комплексной поверхности, голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ минимальна: $K_{hol}(X) = 2/r$, где $r = min(l, p)$.

Пусть A^τ – матрицы комплексных вторых квадратичных форм комплексной поверхности F^l относительно комплексных нормалей ν_τ, $\tau = 1, ..., p$, в точке q.

Произвольный вектор X, касательный к грассманову образу $\Gamma(F^l)$ в точке $0 = \Gamma(q)$ будет следующим:

$$X = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j X_j, \quad \alpha_j \in \mathbf{C}, \tag{3}$$

где матрицы X_j имеют вид (1), $j = 1, ..., l$.

Запишем для матрицы X сингулярное разложение:

$$X = U \Lambda V,$$

где $U \in U(p)$, $V \in U(l)$ – унитарные матрицы, Λ – $p \times l$-матрица с элементами $\Omega_{ii} = \rho_i$, $i = 1, ..., r$, где $r = \min(l, p)$, $\rho_1 \geq \rho_2 \geq ... \geq \rho_r \geq 0$, $\Omega_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Поскольку $K_{hol}(X) = 2/r$, то согласно следствию из леммы получаем, что все сингулярные числа матрицы X равны между собой: $\rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_r := \rho$.

1. Пусть $l \leq p$. Тогда $r = l$ и

$$\Lambda = \rho \begin{pmatrix} E \\ O \end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица порядка r, O – нулевая $(p - r) \times r$-матрица.

Следовательно, сингулярное разложение матрицы X имеет вид

$$X = U \Lambda V = \rho U \begin{pmatrix} E \\ O \end{pmatrix} V,$$

где $U \in U(p)$, $V \in U(r)$ – унитарные матрицы.

Пусть b^k – k-й столбец матрицы X. Получаем, что

$$\langle b^k, b^m \rangle_{\mathbf{C}^p} = 0, \; k \neq m, \tag{4}$$

$$\langle b^k, b^k \rangle_{\mathbf{C}^p} = \langle b^m, b^m \rangle_{\mathbf{C}^p}, \tag{5}$$

где $\langle \, . \, , \, . \, \rangle_{\mathbf{C}^p}$ – эрмитово скалярное произведение в $\mathbf{C}^p$.

Согласно (3) столбец b^k матрицы X имеет вид

$$b^k = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \begin{pmatrix} a^1_{kj} \\ a^2_{kj} \\ \vdots \\ a^p_{kj} \end{pmatrix},$$

где a^τ_{kj} – элементы матриц комплексных вторых кавадратичных форм A^τ в точке q, , $\tau = 1, ..., p$; $\alpha_1, ..., \alpha_l \in \mathbf{C}$.

Значит, условия (4),(5) примут вид

$$\sum_{j,s=1}^{l}\sum_{\tau=1}^{p}\alpha_j\bar{\alpha}_s a_{kj}^{\tau}\bar{a}_{ms}^{\tau}=0,\ k\neq m,$$

$$\sum_{j,s=1}^{l}\sum_{\tau=1}^{p}\alpha_j\bar{\alpha}_s a_{kj}^{\tau}\bar{a}_{ks}^{\tau}=\sum_{j,s=1}^{l}\sum_{\tau=1}^{p}\alpha_j\bar{\alpha}_s a_{mj}^{\tau}\bar{a}_{ms}^{\tau}$$

для любых $\alpha_1,...,\alpha_l\in\mathbf{C}$.

Следовательно, получаем, что

$$\sum_{\tau=1}^{p}a_{kj}^{\tau}\bar{a}_{ms}^{\tau}=0,\ k\neq m, \tag{6}$$

$$\sum_{\tau=1}^{p}a_{kj}^{\tau}\bar{a}_{ks}^{\tau}=\sum_{\tau=1}^{p}a_{mj}^{\tau}\bar{a}_{ms}^{\tau}, \tag{7}$$

где $j,s,k,m=1,...,l$.

В частности, при $j=m, s=k$ условие (6) примет вид

$$\sum_{\tau=1}^{p}a_{km}^{\tau}\bar{a}_{mk}^{\tau}=\sum_{\tau=1}^{p}|a_{km}^{\tau}|^2=0,\ k\neq m.$$

Значит, элементы $a_{km}^{\tau}=0$ при $k\neq m,\ \ \tau=1,...,p;\ \ k,m=1,...,l$.

Тогда условие (7) будет следующим:

$$\sum_{\tau=1}^{p}a_{kk}^{\tau}\bar{a}_{kk}^{\tau}=0.$$

Следовательно, элементы $a_{kk}^{\tau}=0,\ \ \tau=1,...,p;\ k=1,...,l$.

Таким образом, получаем, что матрицы комплексных вторых квадратичных форм в точке $q\in F^l$ нулевые: $A^{\tau}\equiv 0,\ \tau=1,...,p$

2. Пусть $l\geq p$. Тогда $r=p$ и

$$\Lambda=\rho\begin{pmatrix}E & O\end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица порядка r, O – нулевая $r\times(l-r)$-матрица.

Следовательно, сингулярное разложение матрицы X имеет вид

$$X=U\Lambda V=\rho U\begin{pmatrix}E & O\end{pmatrix}V,$$

где $U\in U(r), V\in U(l)$ – унитарные матрицы.

Пусть b_k – k-я строка матрицы X. Получаем, что

$$\langle b_k,b_m\rangle_{\mathbf{C}^l}=0,\ k\neq m, \tag{8}$$

$$\langle b_k, b_k\rangle_{\mathbf{C}^l} = \langle b_m, b_m\rangle_{\mathbf{C}^l}, \tag{9}$$

где $\langle\, .\,,\, .\,\rangle_{\mathbf{C}^l}$ – эрмитово скалярное произведение в $\mathbf{C}^l$

Согласно (3) строка b_k матрицы X имеет вид

$$b_k = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j d_j^k, \quad \text{где} \quad d_j^k = (a_{1j}^k a_{2j}^k \ldots a_{lj}^k).$$

Заметим, что элементы строк d_j^k являются элементами j-х столбцов матриц комплексных вторых квадратичных форм A^k, $k = 1, \ldots, p$; $j = 1, \ldots, l$.

Значит, условия (8),(9) примут вид

$$\sum_{j,s=1}^{l} \alpha_j \bar{\alpha}_s \langle d_j^k, d_s^m\rangle_{\mathbf{C}^l} = 0, \; k \neq m,$$

$$\sum_{j,s=1}^{l} \alpha_j \bar{\alpha}_s \langle d_j^k, d_s^k\rangle_{\mathbf{C}^l} = \sum_{j,s=1}^{l} \alpha_j \bar{\alpha}_s \langle d_j^m, d_s^m\rangle_{\mathbf{C}^l}$$

для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbf{C}$.

Следовательно, получаем, что

$$\langle d_j^k, d_s^m\rangle_{\mathbf{C}^l} = 0, \; k \neq m, \tag{10}$$

$$\langle d_j^k, d_s^k\rangle_{\mathbf{C}^l} = \langle d_j^m, d_s^m\rangle_{\mathbf{C}^l}, \tag{11}$$

где $j, s = 1, \ldots, l$; $\quad k, m = 1, \ldots, p$.

Условия (10), (11) означают, что матрицы комплексных вторых квадратичных форм в точке $q \in F^l$ обладают следующими свойствами

$$A^k \bar{A}^m = 0, \qquad k \neq m, \tag{12}$$

$$A^k \bar{A}^k = A^m \bar{A}^m, \tag{13}$$

где $k, m = 1, \ldots, p$.

Так как A^k – комплексные симметричные матрицы, то из (12) следует, что $\bar{A}^m A^k = 0$. Домножая это равенство слева на A^m, а справа на A^k, и используя (13), получаем, что $(A^k \bar{A}^k)^2 = 0$. Следовательно, $A^k \equiv 0$, $k = 1, \ldots, p$.

Таким образом, предположив, что для любого вектора $X \in T_{\Gamma(q)}\Gamma(F^l)$, касательного к невырожденному грассманову образу $\Gamma(F^l) \subset \mathbf{C}G(l, l+p)$ комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$, голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ минимальна: $K_{hol}(X) = 2/r$, где $r = min(l, p)$, получаем, что матрицы комплексных вторых квадратичных форм в точке $q \in F^l$ нулевые: $A^\tau \equiv 0$, $\tau = 1, ..., p$. Но это невозможно, поскольку комплексный внешний нуль-индекс $\mu_{\mathbb{C}}(q) = 0$.

Значит, для каждой точки $q \in F^l$ существует направление $X \in T_{\Gamma(q)}\Gamma(F^l)$, касательное к невырожденному грассманову образу комплексной поверхности, вдоль которого $K_{hol}(X) > 2/r$, где $r = min(l, p)$.

Выражаю искреннюю благодарность А.А. Борисенко за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисенко А.А., Лейбина О.В. Классификация точек двумерных и трехмерных комплексных поверхностей по грассманову образу // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2002. – Т.9, **4**. – С. 572-594.

2. Борисенко А.А., Николаевский Ю.А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // Успехи математических наук. – 1991.– Т. 46, **2(278)**. – С. 41-83.

3. Борисенко А.А., Николаевский Ю.А. О поверхностях с максимальной кривизной грассманова образа // Математические заметки. – 1990. – Т.48, **3**. – С.12-13.

4. Лейбина О.В. О комплексных подмногообразиях с максимальной голоморфной кривизной грассманова образа // Математические заметки. – 2007. Т.81, **4**. – С.561-568.

5. Muto Y. The Gauss map of a submanifold in a Euclidean space // J.Math.Soc.Japan. – 1978. – V.30. – № 1. – P.85-100.

6. Wong Y.C. Sectional curvatures of Grassmann manifolds // Proc.Nat.Acad.Sci.USA. – 1968. – V.60. – №1. P. 75-79.

Статья получена: 26.11.2008; окончательный вариант: 03.02.2009; принята: 26.03.2009.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 519.3: 517.98 № 850, 2009, с.11–21

Сравнительный анализ понятия компактного субдифференциала

Ф.С. Стонякин

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Украина

В данной работе осуществляется сравнение недавно предложенного понятия компактного субдифференциала с медианным множеством К.М.Гарга, субдифференциалами Ф.Кларка, Ф.Мишеля – Ж.-П.Пено, субдифференциалом и супердифференциалом Б.Н.Пшеничного, а также с контингентной производной Ж.-П.Обена.

2000 Mathematics Subject Classification 46J52.

1. Введение. Понятие субдифференциала как обобщение понятия производной возникло первоначально для вещественных выпуклых функций и со временем нашло многочисленные приложения и обобщения, большей частью — в оптимизационных задачах [1] — [6]. Недавно И.В. Орловым в [7] было введено понятие *компактного субдифференциала* для отображений в локально выпуклые пространства (ЛВП). В работах [8] — [11] детально исследованы свойства компактно субдифференцируемых отображений, в том числе выведен ряд новых формул конечных приращений и теорем о среднем, а также рассмотрены приложения нового понятия к ряду задач теории векторного интегрирования. Важнейшие из полученных результатов были освещены в докладе автора на школе-конференции «Тараповские чтения» в апреле 2008 года. В настоящей работе мы остановимся на естественно возникающей задаче сравнения нового понятия с наиболее известными современными аналогами производной и завершим соответствующие исследования, начатые в нашей предыдущей работе [9].

2. Понятие компактного субдифференциала. Обозначим через $U(0)$ замкнутую выпуклую окрестность нуля в отделимом вещественном ЛВП E, I — отрезок в $\mathbb{R}$, $\overline{co}A$ — замкнутую выпуклую оболочку множества $A \subset E$.

Определение 1. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложениям при $\delta \to +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств ЛВП E. Компактное множество $B = \bigcap\limits_{\delta>0} B_\delta \subset E$ называется *K-пределом* системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ при $\delta \to +0$:

$B = K - \lim\limits_{\delta\to+0} B_\delta$, если:

$$\forall U = U(0) \subset E \;\; \exists \delta = \delta_U > 0 : (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset B + U(0))$$

Определение 2. Пусть $x_0 \in I$, $\delta > 0$. *Частным K-субдифференциалом* отображения F в точке x_0, отвечающим данному $\delta > 0$, называется следующее замкнутое выпуклое множество

$$\partial_K F(x_0, \delta) = \overline{co}\left\{ \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \;\middle|\; 0 < |h| < \delta \right\}.$$

Определение 3. Отображение $F : I \to E$ называется *компактно субдифференцируемым* или *K-субдифференцируемым* в точке $x_0 \in I$, если существует K-предел частных K-субдифференциалов

$$\partial_K F(x_0) = K - \lim_{\delta\to+0} \partial_K F(x_0, \delta)$$

Полученное множество $\partial_K F(x_0)$ называется *компактным субдифференциалом* или *K-субдифференциалом* отображения F в точке x_0.

Аналогично вводятся и односторонние K-субдифференциалы. Заметим, что K-субдифференциалы всегда выпуклы как пересечения выпуклых множеств.

Если отображение F дифференцируемо в точке x_0 в обычном смысле, то оно является K-субдифференцируемым, причём $\partial_K F(x_0) = F'(x_0)$. При этом, как отмечено в [8], существуют компактно субдифференцируемые отображения, не имеющие обычной производной.

В работе [8] установлена точная связь K-субдифференциала с производными числами.

Теорема 1 *Вещественная функция f является компактно субдифференцируемой в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда существуют конечные верхняя и нижняя производные f в этой точке:*

$$\underline{D}f(x_0) = \liminf_{h\to0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{и} \quad \overline{D}f(x_0) = \limsup_{h\to0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

При этом $\partial_K f(x_0) = [\underline{D}f(x_0);\; \overline{D}f(x_0)]$.

Подобные представления имеют место и для односторонних компактных субдифференциалов. Как показывает теорема 1, компактный субдифференциал представляет собой существенное обобщение понятия субдифференциала на невыпуклые и недифференцируемые по направлениям функции, и в данной работе мы будем использовать её для сравнения K-субдифференциала с другими обобщёнными субдифференциалами вещественных функций.

3. Обобщённая теорема о среднем для К-субдифференцируемых отображений в ЛВП. В данном пункте получены результаты, которые будут использованы нами далее для сравнительного анализа нового понятия компактного субдифференциала с другими современными аналогами производной.

В [10] для отображений $F : [a;\ b] \to E$ была доказана обобщённая формула Лагранжа

$$F(b) - F(a) \in \left(\int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(x)dx \right) \cdot B \ , \tag{1}$$

в предположении непрерывности F на $[a;b]$, К-субдифференцируемости F на $[a;b]\backslash e$, нулевой скалярной меры $F(e)$ (то есть $m\ell(F(e)) = 0$ для любого функционала $\ell \in E^*$) и локальной оценки

$$\partial_K F(x) \in \varphi(x) \cdot B \ , \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ неотрицательна и суммируема на $[a;b]\backslash e$, а множество B замкнуто и выпукло в E.

Здесь мы докажем более сильный результат, заменив в (2) компактный субдифференциал произвольным его селектором. Напомним, что *селектором* многозначного отображения $\Phi : A \to 2^E$ $(A \subset \mathbb{R})$ называется произвольное отображение $\widehat{\Phi} : A \to E$ такое, что $\widehat{\Phi}(x) \in \Phi(x)$ для всех $x \in A$. Рассмотрим сначала скалярный случай, следуя схеме вывода (1) в [10].

Теорема 2 *Если функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a;b]$ и компактно субдифференцируема на $[a;b]\backslash e$, $mf(e) = 0$, причём для некоторого селектора $\widehat{\partial_K f}(x) \leqslant \varphi(x)$ при $x \in [a;b]\backslash e$, где функция φ неотрицательна и суммируема на $[a;b]\backslash e$. Тогда*

$$f(b) - f(a) \leqslant \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(x)dx \ . \tag{3}$$

Доказательство. Как показано в [10], существует измеримое по Лебегу множество $e_1 \supset e$ такое, что $m(e_1\backslash e) = 0$ (здесь и далее m — классическая мера Лебега на прямой) и f дифференцируема на $[a;b]\backslash e_1$. Ввиду компактной субдифференцируемости f обладает на $[a;b]\backslash e$ N-свойством Лузина [8] (то есть $\forall \widetilde{e} \subset [a;b]\backslash e \ m\widetilde{e} = 0 \Rightarrow mf(\widetilde{e}) = 0$). Поэтому $mf(e_1\backslash e) = 0$, откуда

$$mf(e_1) = mf\left((e_1\backslash e) \bigcup e \right) \leqslant mf(e_1\backslash e) + mf(e) = 0 \ .$$

Итак, функция f непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $[a;b]\backslash e_1$, где множество $e_1 \subset [a;b]$ измеримо и $mf(e_1) = 0$. Теперь, из оценки (1) для дифференцируемых в обычном смысле отображений, установленной в [12], вытекает:

$$f(b) - f(a) \leqslant \int\limits_{[a;b]\backslash e_1} \varphi(x)dx = \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(x)dx \ ,$$

что и требовалось. $\square$

С помощью известного следствия из теоремы Хана-Банаха о строгой функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества, из (3) стандартно выводится оценка (1) для компактно субдифференцируемых ЛВП-значных отображений.

Теорема 3 *Пусть $F : [a;b] \to E$ непрерывно на $[a;b]$ и является компактно субдифференцируемым на $[a;b]\backslash e$, множество $F(e)$ имеет скалярную меру нуль и для некоторого селектора $\widehat{\partial}_K F(x) \subset \varphi(x)$ B при $x \in [a;b]\backslash e$, где функция $\varphi(x)$ неотрицательна и суммируема на $[a;b]\backslash e$, а множество B замкнуто и выпукло в E. Тогда справедлива оценка* (1).

Следующий результат вытекает из теоремы 3 и N-свойства Лузина для К-субдифференцируемых отображений [8, 10].

Теорема 4 *(Обобщённая теорема о среднем). В условиях теоремы 3 для отображения F и множества e:*

$$F(b) - F(a) \in m([a;b]\backslash e) \cdot \overline{co}\ \widehat{\partial}_K F([a;b]\backslash e)\ . \tag{4}$$

Более того, если $me = 0$, то

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \in \overline{co}\ \widehat{\partial}_K F([a;b])\ . \tag{5}$$

Доказательство. Достаточно применить теорему 3 с оценкой (1) к функции $\varphi(x) \equiv 1$ на $[a;b]\backslash e$ и множеству $B = \overline{co}\ \widehat{\partial}_K F([a;b]\backslash e)$. $\square$

Заметим, что в [10] построен пример всюду К-субдифференцируемого, но нигде не дифференцируемого ЛВП-значного отображения. Это означает, что, вообще говоря, в формулировках теорем 2 — 4 селектор $\widehat{\partial}_K F$ нельзя заменить на F'. Теоремы 2 — 4 интересны ещё и тем, что в них не требуется ни конечности, ни счётности «исключительного» множества e.

4. Сравнение компактного субдифференциала с медианным множеством К.М. Гарга. В работе [13] для вещественных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ изучалось понятие *медианного множества* в точке x_0, которое вводилось как $Mf(x_0) = [\underline{D}f(x_0);\ \overline{D}f(x_0)]$ $(x_0 \in \mathbb{R})$. При этом не требовалось конечности чисел $\underline{D}f(x_0)$ и $\overline{D}f(x_0)$. Ввиду теоремы 1 это означает, что медианное множество является обобщением компактного субдифференциала.

Заметим, что для медианного множества не выполняется ряд свойств компактного субдифференциала. Для примера мы покажем, что для медианных множеств неверна теорема 4 (а поэтому и более общие теоремы 2 и 3).

Замечание 1 *В работе [14] доказано, что существуют непрерывные функции $\widetilde{f}$, для которых почти в каждой точке $x_0 \in [a;b]$ (в смысле классической меры Лебега на прямой)*

$$\liminf_{h\downarrow 0} \frac{\widetilde{f}(x_0+h) - \widetilde{f}(x_0)}{h} = -\infty \quad u \quad \limsup_{h\downarrow 0} \frac{\widetilde{f}(x_0+h) - \widetilde{f}(x_0)}{h} = +\infty\ , \tag{6}$$

то есть $M\widetilde{f}(x_0) = [-\infty;\ +\infty]$ *для почти всех* $x_0 \in [a;b]$. *Для произвольной такой функции* $\widetilde{f}$ *можно таким образом подобрать селектор многозначного отображения* $\widehat{M\widetilde{f}} : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$, *чтобы* $\widehat{M\widetilde{f}}(x) > C$ *для сколь угодно большого* $C > 0$. *При этом величина* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *является ограниченной на* $[a;b]$ *для функции* $\widetilde{f}$ *в силу её непрерывности. Это противоречит* (5).

Таким образом, понятие медианного множества обощает понятие компактного субдифференциала для вещественных функций, но при этом теряет ряд его существенных свойств.

5. Сравнение компактного субдифференциала с субдифференциалами Кларка и Мишеля-Пено. В 1973 г. Ф. Кларк (см. [1]), а в 1984 г. Ф. Мишель и Ж.-П. Пено (см. [2]) предложили обобщения понятия производной по направлению, которые в случае вещественного аргумента принимают следующий вид ($x_0, g \in \mathbb{R}$):

$$f^{\uparrow}_{Cl}(x_0; g) = \limsup_{x' \to x_0,\ \alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha}\left[f(x' + \alpha g) - f(x')\right] \ ;$$

$$f^{\uparrow}_{mp}(x_0; g) = \sup_{q \in \mathbb{R}} \left\{ \limsup_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha}\left[f(x_0 + \alpha(g+q)) - f(x_0 + \alpha q)\right] \right\}$$

Величины $f^{\uparrow}_{Cl}(x_0; g)$ и $f^{\uparrow}_{mp}(x_0; g)$ называются соответственно *верхнми производными числами Кларка и Мишеля-Пено* в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ по направ-лению $g \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\partial_{Cl} f(x_0)$ и $\partial_{mp} f(x_0)$ такие множества, что

$$f^{\uparrow}_{Cl}(x_0; g) = \max_{\ell \in \partial_{Cl} f(x_0)} (\ell\ g) \ ; \quad f^{\uparrow}_{mp}(x_0; g) = \max_{\ell \in \partial_{mp} f(x_0)} (\ell \cdot g) \quad (\forall g \in \mathbb{R}) \ . \tag{7}$$

Если множество $\partial_{Cl} f(x_0) (\partial_{mp} f(x_0))$ непусто и компактно, то оно называется *субдифференциалом Кларка (Мишеля-Пено)* функции f в точке x_0, а функция f называется *субдифференцируемой* в соответствующем смысле в точке x_0. Как хорошо известно [5], субдифференцируемость в смысле Мишеля-Пено является более общим понятием, чем субдифференцируемость по Кларку, причём

$$\partial_{mp} f(x_0) \subset \partial_{Cl} f(x_0) \ , \tag{8}$$

а в некоторых случаях $\partial_{mp} f(x_0) = \partial_{Cl} f(x_0)$. В работе [6] отмечено, что если функция f дифференцируема в точке x_0, то $\partial_{mp} f(x_0) = f'(x_0)$.

В работе [9] показано, что компактная субдифференцируемость является более общим понятием, чем субдифференцируемость по Кларку. Сравним компактную субдифференцируемость с субдифференцируемостью по Мишелю-Пено.

Теорема 5 *Если функция* f *субдифференцируема по Мишелю-Пено в точке* x_0, *то она* K*-субдифференцируема в этой точке. При этом*

$$\partial_K f(x_0) \subset \partial_{mp} f(x_0) \ . \tag{9}$$

Доказательство. Из (7) вытекает, что $\partial_{mp}f(x_0) = \left[-f^{\uparrow}_{mp}(x_0,-1); f^{\uparrow}_{mp}(x_0,1)\right]$.

Далее, $-f^{\uparrow}_{mp}(x_0,-1) = -\sup\limits_{q\in\mathbb{R}}\left\{\limsup\limits_{\alpha\downarrow 0}\frac{1}{\alpha}\left[f(x_0+\alpha(q-1)) - f(x_0+\alpha q)\right]\right\} \leqslant$

$\leqslant -\limsup\limits_{x'\to x_0,\ \alpha\downarrow 0}\frac{f(x'-\alpha)-f(x')}{\alpha} = \liminf\limits_{z'\to x_0,\ \alpha\uparrow 0}\frac{f(z'+\alpha)-f(z')}{\alpha} \leqslant \liminf\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Аналогично можно установить необходимое неравенство для верхней производной Мишеля-Пено и верхнего производного числа функции f в точке x_0. Включение (9) вытекает из теоремы 1.

Следствие 1 *Если f субдифференцируема по Кларку в точке x_0, то справедливы включения $\partial_K f(x_0) \subset \partial_{mp}f(x_0) \subset \partial_{Cl}f(x_0)$.*

Замечание 2 *Возможны следующие ситуации*

$$\partial_K f(x_0) \subset \partial_{mp}f(x_0) \subsetneqq \partial_{Cl}f(x_0)\ , \qquad \partial_K f(x_0) \subsetneqq \partial_{mp}f(x_0) \subset \partial_{Cl}f(x_0)\ .$$

Пример 1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cdot\sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0\ ; \\ 0, & \text{если } x = 0\ . \end{cases}$$

Как отмечено в [1], $\partial_{Cl}f(0) = [-1;1]$, $\partial_{mp}f(0) = f'(0) = 0$. Очевидно, $\partial_K f(x_0) = \partial_{mp}f(x_0) = f'(0) \subsetneqq \partial_{Cl}f(0)$.

Пример 2. Положим $f(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)dt$, $x_0 = 0$, где $(k = 0, 1, 2, ...)$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 5, & \text{если } t \in \left(2^{-(2k+1)}; 2^{-2k}\right) \bigcup \left(-2^{-2k}; -2^{-(2k+1)}\right)\ ; \\ -1, & \text{если } t \in \left(2^{-(2k+2)}; 2^{-(2k+1)}\right) \bigcup \left(-2^{-(2k+1)}; -2^{-(2k+2)}\right)\ ; \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

В этих условиях $f^{\uparrow}_{mp}(x_0;1) \geqslant \limsup\limits_{\alpha\downarrow 0}\left\{\frac{f(2\alpha)-f(\alpha)}{\alpha}\right\} = 5$;

$$-f^{\uparrow}_{mp}(x_0;-1) \leqslant -\limsup_{\alpha\downarrow 0}\left\{\frac{f(\alpha)-f(2\alpha)}{\alpha}\right\} = \liminf_{\alpha\downarrow 0}\left\{\frac{f(2\alpha)-f(\alpha)}{\alpha}\right\} = -1\ .$$

Поскольку функция φ ограничена, то f удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, существует $\partial_{mp}f(0)$ и $\partial_{mp}f(0) \supset [-1;5]$ в силу (7). Далее, воспользовавшись выводом примера 2.2.5 ([1], с. 40) о субдифференциале Кларка от неопределённого интеграла с переменным верхним пределом, получим $\partial_{Cl}f(0) = [-1;5]$. Теперь, в силу (8) имеем $\partial_{mp}f(0) \subset [-1;5]$. Итак, $\partial_{mp}f(0) = [-1;5]$

А теперь вычислим $\partial_K f(0)$. Для этого зафиксируем $p \in \mathbb{N}$ и рассмотрим функцию $\psi(x) := \frac{f(x)}{x}$. Имеем:

$$\int\limits_0^{2^{-2p}} \varphi(t)dt = 5\sum_{k=p}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k+1}} - \sum_{k=p}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k+2}} = 5\cdot\frac{\frac{1}{2^{2p+1}}}{1-\frac{1}{4}} - \frac{\frac{1}{2^{2p+2}}}{1-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^{2p+2}} = \frac{3}{2^{2p}},$$

откуда $\psi(2^{-2p}) = \frac{1}{2^{-2p}} \cdot \int\limits_0^{2^{-2p}} \varphi(t)dt = 3$. Аналогично устанавливается, что $\psi(2^{-2p-1}) = \psi(-2^{-2p}) = 1$, $\psi(-2^{-2p-1}) = 3$.

Стандартным способом можно проверить, что функция $\psi(x)$ возрастает при $x \in \left(2^{-(2k+1)}; 2^{-2k}\right) \bigcup \left(-2^{-2k}; -2^{-(2k+1)}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и убывает при $x \in \left(2^{-(2k+2)}; 2^{-(2k+1)}\right) \bigcup \left(-2^{-(2k+1)}; -2^{-(2k+2)}\right)$. Из теоремы 1 вытекает, что $\exists\, \partial_K f(0) = [1; 3]$, откуда $\partial_K f(0) \subsetneqq \partial_{mp} f(0)$.

Таким образом, K-субдифференцируемость является более общим понятием, чем субдифференцируемость по Кларку и Мишелю-Пено. Более того, как видно из следствия 1, часто используемое необходимое условие экстремума [1, 5] в терминах субдифференциалов Кларка $(0 \in \partial_{Cl} f(x))$ и Мишеля-Пено $(0 \in \partial_{mp} f(x))$ слабее, чем соответствующее условие в терминах компактных субдифференциалов [8] $(0 \in \partial_K f(x))$.

Это хорошо иллюстрирует построенный выше пример 2. Для функции f, рассмотренной в этом примере, $0 \in \partial_{Cl} f(0) = \partial_{mp} f(0)$, то есть f в точке $x = 0$ удовлетворяет аналогам леммы Ферма для субдифференциалов Кларка и Мишеля-Пено и является ввиду этого «подозрительной на экстремум». Однако $0 \notin \partial_K f(0)$, что указывает на отсутствие экстремума f в точке $x = 0$.

6. Сравнение K-субдифференциала с субдифференциалом и супердифференциалом Б. Н. Пшеничного. С целью сведения задачи минимизации произвольной функции к последовательности выпуклых задач Б.Н. Пшеничный [3] ввёл понятия *верхней выпуклой* и *нижней вогнутой аппроксимаций*, а также связанные с ними понятия субдифференциала и супердифференциала. Положим $\forall h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$

$$F_1(x_0, h) := \sup_{r(\cdot)} \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda h + r(\lambda)) - f(x_0)}{\lambda}, \tag{10}$$

где внешняя верхняя грань берётся по всем функциям $r(\lambda) \in \mathbb{R}$ таким, что $\lambda^{-1} r(\lambda) \to 0$ при $\lambda \downarrow 0$.

Очевидно, предел в (10) — конечный или бесконечный — существует всегда. Легко также проверить, что функция $F(x_0, h)$ является положи-тельно однородной по h.

Определение 4. Выпуклая замкнутая положительно однородная по h функция $g(x_0, h)$ называется *верхней выпуклой аппроксимацией* (в.в.а.) для f в точке x_0, если $g(x_0, h) \geqslant F_1(x_0, h)$ для всех $h \neq 0$.

Заметим, что в.в.а. для функции $f(x)$ в точке x_0 определена неоднозначно и может существовать много различных в.в.а.

Определение 5. Если $g(x_0, h)$ есть в.в.а. для f в точке x_0, то множество

$$\partial g(x_0, 0) := \{v \in \mathbb{R} \quad | \quad g(x_0, h) \geqslant vh \quad \forall h \in \mathbb{R}\}$$

называется *субдифференциалом функции f в точке x_0 в смысле Пшеничного.*

Будем обозначать введённый субдифференциал через $\overline{\partial}_P f(x_0)$. Заметим, что в.в.а. для f в точке x_0 определена неоднозначно и может существовать много различных в.в.а., а также соответствующих им субдифференциалов. Известно (см. [3]), что в.в.а. и субдифференциалы могут иметь и некоторые разрывные функции, в то время как произвольная K-субдифференцируемая функция непрерывна [8]. Покажем, что компактно субдифференцируемые вещественные функции всегда имеют в.в.а.

Теорема 6 *Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ компактно субдифференцируема в точке x_0, то она допускает в.в.а, которой соответствует субдифференциал Пшеничного $\overline{\partial}_P f(x_0) = \partial_K f(x_0)$*

Доказательство. Пусть f компактно субдифференцируема в точке x_0, причём $\partial_K f(x_0) = [\alpha; \beta]$. Положим $g(x_0, h) = \beta \cdot h$ при $h \geqslant 0$ и $g(x_0, h) = \alpha \cdot h$ при $h < 0$.

a) Если $h > 0$, то $F_1(x_0, h) = \sup\limits_{r(\cdot)} \limsup\limits_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda h + r(\lambda)) - f(x_0)}{\lambda} =$
$= h \cdot \sup\limits_{r(\cdot)} \limsup\limits_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda h + r(\lambda)) - f(x_0)}{\lambda h} = h \cdot \limsup\limits_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant \beta \cdot h$, поскольку $\lambda^{-1} r(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$.

b) Если же $h < 0$, то $F_1(x_0, h) = \sup\limits_{r(\cdot)} \limsup\limits_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda h + r(\lambda)) - f(x_0)}{\lambda} =$
$= h \cdot \inf\limits_{r(\cdot)} \liminf\limits_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda h + r(\lambda)) - f(x_0)}{\lambda h} = h \cdot \liminf\limits_{h \uparrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant \alpha \cdot h$.

Итак, $\forall h \neq 0 \;\; F_1(x_0, h) \leqslant g(x_0, h)$. Поскольку $\alpha \leqslant \beta$, то функция $g(x_0, h)$ выпукла. Это означает, что $g(x_0, h)$ является в.в.а. f в точке x_0, причём ей соответствует субдифференциал Пшеничного $\overline{\partial}_P f(x_0) = [\alpha; \beta] = \partial_K f(x_0)$.

Аналогично понятию верхней выпуклой аппроксимации можно ввести понятия *нижней вогнутой аппроксимации* (н.в.а) и *супердифференциала*, рассмотрев функцию

$$F_2(x_0, h) = \inf_{r(\cdot)} \liminf_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda h + r(\lambda)) - f(x_0)}{\lambda},$$

где $\lambda^{-1} r(\lambda) \to 0$ при $\lambda \downarrow 0$ ($r(\lambda) \in \mathbb{R}$), а также множество

$$\underline{\partial}_P f(x_0) := \partial g(x_0, h) = \{v \in \mathbb{R} \mid g(x_0, h) \leqslant vh \quad \forall h \in \mathbb{R}\} \quad (g - \text{н.в.а.}),$$

которое называется *супердифференциалом функции f в точке x_0 в смысле Пшеничного.* Подобно теореме 6 устанавливается

Теорема 7 *Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ компактно субдифференцируема в точке x_0, то она допускает н.в.а, которой соответствует супердифферен-циал Пшеничного $\underline{\partial}_P f(x_0) = \partial_K f(x_0)$.*

Как видим, субдифференциал и супердифференциал Пшеничного превосходят своей общностью компактный субдифференциал в вещественном случае. Но в отличие от K-субдифференциала, эти понятия не допускают непосредственного обобщения на отображения в произвольные ЛВП.

Кроме того, по схеме доказательства теоремы 6 можно проверить то, что в.в.а, н.в.а (а следовательно и соответствущие субдифференциал и супердифференциал Пшеничного) имеют все функции $\widetilde{f}$, которые рассмотрены в замечании 1 (пункт 3). Однако в этом случае множества $\underline{\partial}_P f$ и $\overline{\partial}_P \widetilde{f}(x)$ почти всюду равны $[-\infty; +\infty]$. Таким образом, как и в замечании 1, можно установить, что теоремы 2 – 4, вообще говоря, неверны для субдифференциалов и супердифференциалов Б.Н. Пшеничного.

7. Сравнение компактного субдифференциала с контингентной производной Ж.-П.Обена. Понятие контингентной производной было предложено Ж.-П.Обеном в 1981 г. (см. [4]) с целью расширения понятия производной на многозначные отображения. Пусть $F : X \to 2^Y, x_0 \in X$, $y_0 \in F(x)$; $X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, d – метрика в $\mathbb{R}^n$. Мы рассмотрим случай $n = 1$.
Определение 6. Множество $DF(x_0, y_0)(u_0)$ называется *контингентной производной* отображения F в точке (x_0, y_0) по направлению u_0, если $v_0 \in DF(x_0, y_0)(u_0)$ тогда и только тогда, когда

$$\liminf_{h\to 0^+,\ u\to u_0} d\left(v_0, \frac{F(x_0 + hu) - y_0}{h}\right) = 0 .$$

Если отображение F однозначно, то $v_0 \in DF(x_0, y_0)(u_0)$ в том и только в том случае, когда

$$\liminf_{h\to 0^+,\ u\to u_0} \frac{|F(x_0 + hu) - F(x_0) - hv_0|}{h} = 0 .$$

Если все производные числа F в точке x_0 конечны, то по теореме 1 $\partial_K F(x_0) = coDF(x_0, F(x_0))(1) \bigcup (-coDF(x_0, F(x_0))(-1))$. Заметим, однако, что в отличие от K-субдифференциалов, контингентные производные могут и не быть выпуклыми и компактными.

Более того, существует непрерывная функция $\widetilde{f}$ (см. [14] и замечание 1 пункта 3), для которой контингентные производные (по направлению $u_0 = 1$) в силу (6) почти всюду на $[a; b]$ равны $[-\infty; +\infty]$. Воспользовавшись этим фактом, также, как и в упомянутом замечании 1, можно установить, что справедливые для K-субдифференциалов теоремы 2 – 4, вообще говоря, неверны для контингентных производных по направлениям.

8. Заключение. В данной статье и в работе [9] проведено сравне-ние недавно предложенного понятия компактного субдифференциала со всеми из наиболее известных современных аналогов понятия производной, которое показало отличие нового понятия от ранее изучавшихся даже для вещественных функций. При этом следует отметить, что важнейшим достоинством компактного субдифференциала (в отличие от всех других из рассмотренных понятий), является возможность его использования для отображений в бесконечномерные локально выпуклые пространства. Автор выражает признательность И.В. Орлову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988. — 288 с.
2. Michel P., Penot J.P. Calculs sous-differential pour les fonctions lipshitzieness et non-lipschitzieness. // C.R. Acad. Sc. Paris. Ser. I., — 1984. — V. 298 — P. 269 – 272.
3. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1971 — 320 с.
4. Обен Ж.–П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
5. Демьянов В.Ф., Рощина В.А. Обобщённые субдифференциалы и экзостеры.// Владикавказский мат. журн., — 2006. — **8**, № 4. — С. 19 – 31.
6. Borwein J.M., Zhu Q.J. A survey of subdifferential calculus with applications.// Nonlinear Anal. Ser.A: Theory and Meth., — 1999. — V. 38, **6**. — P. 62 – 76.
7. Орлов И.В., Стонякин Ф.С. K-субдифференциалы и K-теорема о среднем для отображений в ЛВП. // Международная конференция, посвящённоая памяти И.Г. Петровского «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы». Тезисы докладов. — М.: МГУ, 2007. — С. 220 – 221.
8. Стонякин Ф.С. Компактный субдифференциал вещественных функций.// Динамические системы, — 2007 — **23**. — С. 99 – 112.
9. Стонякин Ф.С. Сравнение компактного субдифференциала с субдифференциалами Кларка, Фреше и обобщёнными дифференциалами Сассмана.// Компьютерная математика, — 2008. — **2**. — С. 50 – 56.
10. Орлов И.В., Стонякин Ф.С. Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты.// Современная математика. Фундаментальные направления, — Объём 18 с.— В печати.
11. Orlov I.V., Stonyakin F.S. Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral.// Methods of Functional Analysis and Topology, — 2009. — Vol. 15. — № 1. — P. 74 – 90.
12. Орлов И. В. Формула конечных приращений для отображений в индуктивные шкалы пространств. //Математическая физика, анализ, геометрия (МАГ), — 2001. — **8**, № 4. — С. 419 – 439.

13. Garg K.M. A unified theory of bilateral derivatives.// Real Analysis Exchange, — 2002. — **27**, № 1. — P. 81 – 122.

14. Jarnik V. Sur les nombres drive's approximatifs.// Fundam. Math., — 1934. — **22** — P. 4 – 16.

Статья получена: 26.11.2008; окончательный вариант: 16.04.2009; принята: 27.04.2009.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.956.227, 517.984 № 850, 2009, с.22–36

О спектральной задаче, порождённой модифицированной и классической задачами Стефана

В. И. Войтицкий
Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Украина

В работе рассматривается спектральная задача, возникающая после линеаризации модифицированной и классической задачи Стефана. С помощью обобщенных формул Грина задача сводится к спектральной задаче для линейных самосопряжённых операторных матриц, действующих в гильбертовом пространстве. Доказано, что спектр задачи состоит из ветви положительных нормальных собственных значений и, возможно, из конечного либо бесконечного числа отрицательных собственных значений. Система собственных элементов является полной и ортогональной.

2000 Mathematics Subject Classification 35P05, 25P10.

1. Введение

Задача Стефана является математической моделью описания фазового перехода вещества из одного агрегатного состояния в другое (плавление, кристаллизация). Эта задача относится к классу нелинейных граничных задач, в которой кроме определения температуры вещества необходимо найти также форму подвижной границы раздела фаз. При этом в классической задаче уравнение границы определяется условием Стефана, а также равенством температуры среды температуре плавления (см. [1]).

В начале 90-ых годов прошлого столетия в большой серии работ (см., например, [2]–[8]) исследовалась математическая модель кристаллизации, в которой, в отличие от классической задачи Стефана, на границе раздела фаз задаётся более общее кинетическое условие. Это условие называется *законом Гиббса-Томсона.*

Основным методом доказательства существования и единственности решения задачи Стефана в ряде работ (см., например, [5]–[8]) являлся метод "замораживания" коэффициентов нелинейного оператора, т.е. метод сведения исходной задачи к исследованию модельной начально-краевой задачи.

При этом на малом интервале времени свойства нелинейной граничной задачи существенно определяются свойствами решений модельных линейных задач.

Этот факт побуждает провести исследование спектральных свойств линейных задач, порождённых задачей Стефана, которые, по-видимому, помимо автора этой работы ранее не исследовались.

В данной работе проведено исследование спектральной задачи, порождённой модифицированной задачей Стефана с условием Гиббса-Томсона из [5], а также ее предельного случая — классической задачей Стефана. Доказано, что система собственных элементов является полной в некотором гильбертвом пространстве и ортогональной по форме операторов финальной операторно-матричной задачи. Спектр задачи вещественный, состоит из ветви положительных собственных значений с предельной точкой $+\infty$ и, возможно, из конечного (для модифицированной задачи) либо бесконечного (для классической задачи) числа отрицательных собственных значений с единственной возможной предельной точкой $-\infty$. Рассматриваемая в данной работе спектральная задача является обобщением спектральной задачи, изученной в [9] и [10].

2. Постановка модифицированной задачи Стефана и ее линеаризация

Рассмотрим следующую постановку модифицированной задачи Стефана (см. [5], а также [6] и [8]). Необходимо найти поля температур $u_j(x,t)$ $(j=1,2)$, заданные соответственно в меняющихся со временем областях $\overline{\Omega}_j(t)\subset\mathbb{R}^m$, а также неизвестную границу раздела фаз $\Gamma(t)$, для которых выполняются уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}-\Delta u_j=f_j \quad (\text{в } \Omega_j(t)),\quad j=1,2; \tag{1}$$

краевые условия

$$l_0V_n=\nabla u_2\cdot\vec{n}_t-\nabla u_1\cdot\vec{n}_t \qquad (\text{на } \Gamma(t)), \tag{2}$$

$$u_j=\sigma(x,t)\mathcal{K}(x,t)-\varrho(x,t)\sigma(x,t)V_n \qquad (\text{на } \Gamma(t)), \tag{3}$$

$$u_j=g_j \qquad (\text{на } S_j); \tag{4}$$

а также начальное условие

$$u_j\big|_{t=0}=u_j^0 \quad (\text{в } \Omega_j(0)),\quad j=1,2. \tag{5}$$

Здесь считаем, что $\Omega_1(t)$ целиком содержится внутри $\Omega_2(t)$, $\partial\Omega_j(t)=\Gamma(t)\cup S_j$, причём $\Gamma(t)$ — общая (подвижная) часть границы, которая заключена, непересекаясь, между неподвижными частями границ S_j. Через $\vec{n}_t$ обозначен единичный вектор нормали к $\Gamma(t)$, внутренней для $\Omega_1(t)$; $l_0>0$ — скрытая теплота кристаллизации; V_n — скорость перемещения поверхности $\Gamma(t)$ в направлении $\vec{n}_t$; $\sigma(x,t)>0$ — поверхностное натяжение; $\mathcal{K}(x,t)$ — сумма главных кривизн поверхности $\Gamma(t)$ в точке (x,t); $\varrho(x,t) > 0$ либо $\varrho \equiv 0$ — релаксационный параметр.

Задачу (1)–(5) назовём *модифицированной задачей Стефана.* В данной постановке краевое условие (2) является условием Стефана, а условие (3) определяется законом Гиббса-Томсона. Следует отметить, что если в (3) считать $\sigma(x,t) \equiv 0$, то мы получим так называемую классическую задачу Стефана. В этом случае условие Гиббса-Томсона вырождается в более грубое условие поддержания постоянной (нулевой) температуры на границе раздела фаз. Далее будем рассматривать оба случая одновременно.

В [5] и [6] проводилось изучение модифицированной задачи на основе исследования условий однозначной разрешимости модельных начально-краевых задач в полупространстве. Было доказано существование на достаточно малом интервале времени $[0,T]$, $T < T_0$, классического решения задачи при условии

$$\beta(x,\sigma) := \varphi_j^0(x) - \sum_{k=1}^{m-1} \sigma(x)\mathcal{K}_{0k}^2(x) > 0, \quad \forall x \in \Gamma(0). \tag{6}$$

Здесь $\varphi_j^0(x) := \partial u_j^0/\partial n_0(x)$, $\mathcal{K}_{0k}(x)$, $k = 1,\ldots,m-1$, — главные кривизны поверхности $\Gamma(0)$ в точке x. Свойства линеаризованной спектральной задачи подтверждают этот результат, поскольку будет показано, что при условии (6) линеаризованная задача имеет положительный дискретный спектр.

Следует отметить, что частный случай задачи в полупространстве рассматривался также проф. Волевичем Л. Р. Результаты его исследований были представлены на Крымских осенних математических школах в 2004 и 2005 годах и послужили отправной точкой для автора при изучении спектральных задач, порождённых задачей Стефана [9], [10].

Проведём сейчас линеаризацию задачи (1)–(5). Считая, что граница $\Gamma(t)$ меняется незначительно и является достаточно гладкой (класса C^2), перейдем от задачи в подвижных областях к задаче в фиксированных областях $\Omega_1 := \Omega_1(0)$, $\Omega_2 := \Omega_2(0)$. Для определения подвижной границы $\Gamma(t)$ введём (как и в задаче о коллебаниях капиллярной жидкости в открытом сосуде [11, гл.4]) в окрестности поверхности $\Gamma := \Gamma(0)$ криволинейную систему координат $\widetilde{O}\xi^1\xi^2\xi^3$ таким образом, чтобы поверхность Γ имела уравнение $\xi^3 = 0$, а координатные ξ^3-линии были направлены по нормали $\vec{n}_1 := \vec{n}_0$ к Γ и имели единичные коэффициенты Ламе. Тогда движущаяся свободная поверхность $\Gamma(t)$ может быть описана функцией

$$\xi^3 = \zeta(t,\xi^1,\xi^2), \tag{7}$$

совпадающей с точностью до малых более высокого порядка с отклонением Γ вдоль нормали $\vec{n}_1$. Очевидно, что тогда можно считать $V_n = \partial\zeta/\partial t$ на Γ. Положим для удобства $l_0 = 1$, $\vec{n}_2 := -\vec{n}_1$, тогда линеаризация условия (2) даёт

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \quad (\text{на } \Gamma). \tag{8}$$

Из геометрии известно (см., например, [11], с. 160, а также [12], с. 528), что с точностью до бесконечно малых ζ более высокого порядка справедлива формула для выриации суммы главных кривизн:

$$\mathcal{K}(x,t)\big|_{\Gamma(t)} = \Delta_\Gamma \zeta + \sum_{k=1}^{m-1} \mathcal{K}_{0k}^2(x)\zeta + \mathcal{K}(x,0), \quad x \in \Gamma, \tag{9}$$

где Δ_Γ — оператор Лапласа-Бельтрами, заданный на Γ. Также с точностью до малых ζ более высокого порядка из формулы Тейлора имеем

$$u_j\big|_{\Gamma(t)} = u_j(x) + \frac{\partial}{\partial n} u_j^0(x)\zeta = u_j(x) + \varphi_j^0(x)\zeta, \quad x \in \Gamma. \tag{10}$$

Будем далее для удобства считать $\sigma(x,t) \equiv \sigma \geq 0$ заданным параметром и положим $\varrho(x,t) \equiv 1$. Тогда линеаризация краевого условия (3) даёт

$$u_j\big|_{\Gamma(t)} = u_j(x) + \varphi_j^0(x)\zeta = \sigma\Delta_\Gamma\zeta + \sigma \sum_{k=1}^{m-1} \mathcal{K}_{0k}^2(x)\zeta + \sigma\mathcal{K}(x,0) - \sigma\frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad x \in \Gamma. \tag{11}$$

Отсюда получаем ещё одно условие на Γ:

$$u_j - \sigma\Delta_\Gamma\zeta + \varphi_j^0(x)\zeta - \sigma\sum_{k=1}^{m-1} \mathcal{K}_{0k}^2(x)\zeta + \sigma\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\sigma\mathcal{K}(x,0). \tag{12}$$

С учётом вышесказанного от задачи (1)–(5) приходим к следующей линейной начально-краевой задаче в фиксированных областях:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x,t) - \Delta u_j(x,t) = f_j(x,t) \quad (x \in \Omega_j), \quad j = 1,2, \tag{13}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n_1}(x,t) + \frac{\partial u_2}{\partial n_2}(x,t) = \frac{\partial \zeta}{\partial t}(x,t) \quad (x \in \Gamma), \tag{14}$$

$$u_j(x,t) - \sigma\Delta_\Gamma\zeta(x,t) + \beta(x,\sigma)\zeta(x,t) + \sigma\frac{\partial\zeta}{\partial t}(x,t) = h(x) \quad (x \in \Gamma), \tag{15}$$

$$u_j(x,t) = g_j(x,t) \quad (x \in S_j), \tag{16}$$

$$u_j(x,0) = u_j^0(x) \quad (x \in \Omega_j), \qquad \zeta(x,0) = 0 \quad (x \in \Gamma). \tag{17}$$

Здесь $\beta(x,\sigma)$ опердляется по формуле (6), а $h(x) = \sigma\mathcal{K}(x,0)$. Будем считать их далее непрерывными функциями аргумента $x \in \Gamma$. Неизвестными в задаче являются функции $u_j(x,t)$, $j = 1,2$, заданные в фиксированных областях Ω_j, а также функция $\zeta(x,t)$, заданная на Γ.

Таким образом, получена линеаризованная начально-краевая задача, видоизменения которой на случай подпространств рассматривались как модельные задачи в [5] и [8] (см. также [6]).

Будем искать далее нетривиальные решения соответствующей однородной задачи в виде нормальных движений

$$u_j(x,t) = u_j(x)e^{-\lambda t}, \quad x \in \Omega_j, \tag{18}$$

$$\zeta(x,t) = \zeta(x)e^{-\lambda t}, \quad x \in \Gamma, \tag{19}$$

где амплитудные элементы $u_j(x) \in L_2(\Omega_j)$, $\zeta(x) \in L_2(\Gamma)$. Далее будет доказано, что спектральная задача является самосопряжённой, поэтому гильбертовы пространства будем считать далее вещественными.

Подставляя (18) – (19) в уравнения (13) – (16), приходим к следующей спектральной задаче сопряжения:

$$-\Delta u_j = \lambda u_j \quad (\text{в } \Omega_j), \qquad j = 1, 2, \tag{20}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = -\lambda\zeta \quad (\text{на } \Gamma), \tag{21}$$

$$u_j + B(\sigma)\zeta = \lambda\sigma\zeta \quad (\text{на } \Gamma), \tag{22}$$

$$u_j = 0 \quad (\text{на } S_j). \tag{23}$$

Здесь через $B(\sigma)$ обозначен линейный в $L_2(\Gamma)$ оператор

$$B(\sigma)\zeta := \varphi_j^0(x)\zeta - \sigma\Delta_\Gamma\zeta - \sigma\sum_{k=1}^{m-1}\mathcal{K}_{0k}^2(x)\zeta. \tag{24}$$

Отметим, что различные модификации задачи (20) – (23) рассматривались в [9], [10], а также в [13], [14].

3. Обобщённые формулы Грина

Будем изучать далее задачу (20)–(23) на основе обобщенных формул Грина, являющихся реализациями абстрактной формулы Грина (см. [15], [16] и [11]).

Итак, пусть имеется тройка произвольных сепарабельных гильбертовых пространств E, F и G, таких, что F ограниченно (плотно) вложено в E, и на F определён ограниченный оператор следа $\gamma : F \to G$ такой, что $\mathcal{R}(\gamma) =: (G_+)$ ограниченно вложено в G. В [15] доказано, что тогда однозначно по E, F, G и γ можно построить дифференцальные выражения

$$L : \mathcal{D}(L) = F \to F^* \supset E, \tag{25}$$

$$\partial : \mathcal{D}(\partial) = F \to (G_+)^* \supset G, \tag{26}$$

такие, что справедлива абстрактная формула Грина:

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{27}$$

Здесь выражения в косых скобках являются функционалами, действующими на $\eta \in F$ и $\gamma\eta \in G_+$, и определяемыми элементами $Lu \in F^*$ и $\partial u \in (G_+)^*$.

Получим теперь обобщенные формулы Грина, приспособленные для изучения задачи (20)–(23). Для этого введём гильбертовы пространства

$$E_j = L_2(\Omega_j), \qquad \|u_j\|^2_{L_2(\Omega_j)} := \int_{\Omega_j} |u_j|^2 \, d\Omega_j, \tag{28}$$

$$F_j = \mathcal{H}^1_{0,S_j}(\Omega_j), \quad \mathcal{H}^1_{0,S_j}(\Omega_j) := \{u_j \in \mathcal{H}^1(\Omega_j) : \ u_j = 0 \text{ на } S_j\}, \tag{29}$$

$$G = L_2(\Gamma), \qquad \|u\|^2_{L_2(\Gamma)} := \int_\Gamma |u|^2 \, d\Gamma, \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

и операторы следа:

$$\gamma_j u_j := u_j\big|_\Gamma, \quad \gamma_j : \ F_j = \mathcal{H}^1_{0,S_j} \to \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma) = G_+ \subset G = L_2(\Gamma). \tag{32}$$

Известно, что в пространствах $\mathcal{H}^1(\Omega_j)$ нормы

$$\|u_j\|^2_{1,\Omega_j} := \int_{\Omega_1} |\nabla u_j|^2 \, d\Omega_j + \left(\int_{\Omega_j} u_j \, d\Omega_j \right)^2, \tag{33}$$

эквивалентны стандартным нормам

$$\|u_j\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega_j)} := \int_{\Omega_j} (|\nabla u_j|^2 + |u_j|^2) \, d\Omega_j. \tag{34}$$

Отсюда, согласно теореме вложения С.Л. Соболева, операторы вложения $\mathcal{H}^1(\Omega_j)$ в $L_2(\Omega_j)$ являются компактными. Тогда из плотности бесконечно дифференцируемых финитных функций в $L_2(\Omega_j)$ следует плотность и компактность вложения $\mathcal{H}^1_{0,S_j}(\Omega_j)$ в $L_2(\Omega_j)$. При этом из (33) следует, что

$$\|u_j\|^2_{1,\Omega_j} := \int_{\Omega_1} |\nabla u_j|^2 \, d\Omega_j, \quad \forall u_j \in \mathcal{H}^1_{0,S_j}(\Omega_j). \tag{35}$$

Оператор вложения $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$ также является компактным, поэтому выполняются все условия для существования абстрактных формул Грина в случае выбранных пространств и операторов следа (28)–(32). Аналогично построениям из [15] можно доказать, что в этом случае формула (27) переписывается в виде

$$\langle \eta_j, -\Delta u_j \rangle_{L_2(\Omega_j)} = (\eta_j, u_j)_{1,\Omega_j} - \langle \gamma_j \eta_j, \frac{\partial u_j}{\partial n_j} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta_j, u_j \in \mathcal{H}^1_{0,S_j}(\Omega), \quad j = 1, 2. \tag{36}$$

Эти формулы является обобщением на случай областей с липшицевыми границами и менее гладких функций первой формулы Грина для оператора Лапласа:

$$\int_\Omega \eta \, (-\Delta u) \, d\Omega = \int_\Omega \nabla \eta \cdot u \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \eta \, \frac{\partial u}{\partial n} \, dS, \quad \forall \eta, u \in C^2(\overline{\Omega}). \tag{37}$$

4. Постановка спектральной задачи в операторно-матричной форме

На основании обобщённых формул Грина (36) получим сейчас операторную формулировку задачи (20)–(23). Введём пространства

$$E := E_1 \oplus E_2 = L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2), \tag{38}$$

$$F := F_1 \oplus F_2 = H^1_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus H^1_{0,S_1}(\Omega_1), \tag{39}$$

$$F_0 := \{u = (u_1; u_2)^t \in F : \ \gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2\}, \tag{40}$$

с соответствующими скалярными произведениями. Согласно условию, решение задачи $u = (u_1; u_2)^t \in F_0$. Пусть также $\eta = (\eta_1; \eta_2) \in F_0$, тогда после суммирования формул (36) получаем

$$\sum_{j=1}^{2} \langle \eta_j, -\Delta u_j \rangle_{L_2(\Omega_j)} = \sum_{j=1}^{2} (\eta_j, u_j)_{1,\Omega_j} - \Big\langle \gamma_1 \eta_1, \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \Big\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta \in F_0. \tag{41}$$

По условию задачи имеем $-\Delta u_j = \lambda u_j \in L_2(\Omega_j)$, $\dfrac{\partial u_1}{\partial n_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial n_2} = -\lambda \zeta \in L_2(\Gamma)$, следовательно от функционалов в (41) можно перейти к скалярным произведениям. Получаем, что для решений задачи справедливо тождество

$$\lambda \sum_{j=1}^{2} (\eta_j, u_j)_{L_2(\Omega_j)} = \sum_{j=1}^{2} (\eta_j, u_j)_{1,\Omega_j} + \lambda (\gamma_1 \eta_1, \zeta)_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta = (\eta_1; \eta_2) \in F_0. \tag{42}$$

Введём оператор

$$\gamma \eta := \gamma_1 \eta_1, \quad \gamma : \ F_0 \to G = L_2(\Gamma), \tag{43}$$

тогда (42) можно переписать в форме

$$\lambda (\eta, u)_E = (\eta, u)_F + \lambda (\gamma \eta, \zeta)_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta = (\eta_1; \eta_2) \in F_0. \tag{44}$$

Так как бесконечно дифференцируемые финитные функции плотны в $L_2(\Omega)$, то $N_1 := \operatorname{Ker} \gamma_1 = H^1_0(\Omega_1)$ плотно в $L_2(\Omega_1)$. Аналогично $N_2 := \operatorname{Ker} \gamma_2 = H^1_0(\Omega_2)$ плотно в $L_2(\Omega_2)$. Поэтому $N := N_1 \oplus N_2 = \operatorname{Ker} \gamma$ плотно в $E = L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2)$. Значит $F_0 \supset N$ плотно в E. Так как операторы вложения $\mathcal{H}^1_{0,S_j}(\Omega_j)$ в $L_2(\Omega_j)$ являются компактными, то отсюда F и F_0 являются компактно вложенными в E. Обозначим через $A : \ \mathcal{D}(A) \to E$ самосопряжённый положительно определённый оператор гильбертовой пары $(F_0; E)$. Тогда обратный к нему оператор A^{-1} будет удовлетворять тождеству

$$(\eta, u)_E = (\eta, A^{-1} u)_F, \quad \forall \eta \in F_0, \ \forall u \in E. \tag{45}$$

При этом оператор A^{-1} является компактным как в пространстве E, так и в пространстве F_0. Пусть $T : \ G = L_2(\Gamma) \to F_0$ — оператор, определяющиеся из тождества

$$(\gamma \eta, \zeta)_G = (\eta, T\zeta)_F, \quad \forall \eta \in F_0, \ \forall \zeta \in G, \tag{46}$$

т.е. ограниченный оператор, сопряжённый к оператору γ. Тогда, подствляя (45), (46) в (44), получаем

$$\lambda(\eta, A^{-1}u)_F = (\eta, u)_F + \lambda(\eta, T\zeta)_F, \quad \eta \in F_0. \tag{47}$$

Отсюда и из (22) получаем задачу

$$u = \lambda A^{-1}u - \lambda T\zeta, \tag{48}$$

$$\gamma u + B(\sigma)\zeta = \lambda\sigma\zeta. \tag{49}$$

Проделывая обратные выкладки, можно доказать, что любое решение этой задачи $u \in F_0$ является также решением спектральной задачи (20)–(23), т.е. эти задачи эквивалентны.

Введём операторы

$$Q := \gamma A^{-1/2} : E \to G, \quad Q^* := A^{1/2}T : G \to E. \tag{50}$$

В силу тождества

$$(\gamma A^{-1/2}w, \varphi)_G = (A^{-1/2}w, T\varphi)_F = (A^{1/2}A^{-1/2}w, A^{1/2}T\varphi)_E =$$
$$= (w, A^{1/2}T\varphi)_E, \quad \forall w \in E, \forall \varphi \in G, \tag{51}$$

они являются взаимно сопряженными и компактными. Подставляя u из (48) в (49) получаем

$$u = \lambda A^{-1}u \quad \lambda A^{-1/2}Q^*\zeta, \tag{52}$$

$$\lambda Q A^{-1/2}u - \lambda QQ^*\zeta + B(\sigma)\zeta = \lambda\sigma\zeta. \tag{53}$$

Будем рассматривать далее задачу (52)–(53) в пространстве $\mathcal{H} = E \oplus G$ элементов вида $\bar{u} := (u; \zeta)^t$ с нормой $\|\bar{u}\|^2_{\mathcal{H}} := \|u\|^2_E + \|\zeta\|^2_G$. Записывая её в операторно-матричной форме, имеем

$$\mathcal{B}\bar{u} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B(\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1/2}Q^* \\ -QA^{-1/2} & QQ^* + \sigma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} =: \lambda\mathcal{A}\bar{u}. \tag{54}$$

5. Исследование свойств операторов

Исследуем сейчас свойства операторов, фигурирующих в (54).

Лемма 1 *Оператор $\mathcal{A}$ является самосопряжённым положительным ограниченным оператором, действующим в пространстве $\mathcal{H}$. При $\sigma = 0$ он является компактным.*

Доказательство. Самосопряжённость и ограниченность оператора $\mathcal{A}$ следует из его структуры. Так как при $\sigma = 0$ все его блоки являются компактными операторами, то оператор $\mathcal{A}$ также является компактным. Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ неотрицателен и имеет нулевое ядро. Действительно,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1/2}Q^* \\ -QA^{-1/2} & QQ^* + \sigma I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^{-1/2} \\ Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & Q^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma I \end{pmatrix} \geq 0.$$

Из того, что $\mathcal{A}\bar{u} = \bar{0}$ следует, что $A^{-1}u - A^{-1/2}Q^*\zeta = 0$ или $A^{-1}u = T\zeta$. Из (45) и (46) следует тождество

$$(\eta, u)_E = (\eta, A^{-1}u)_F = (\eta, T\zeta)_F = (\gamma\eta, \zeta)_G, \forall \eta \in F_0.$$

Если теперь $\eta \in N$, то в силу плотности N в E, осюда получаем $u = 0$ в E. Тогда из свойства $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ следует, что $\zeta = 0$. Значит $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\bar{0}\}$. $\square$

Очевидно, свойства оператора $\mathcal{B}$ полностью определяются свойствами оператора $B(\sigma)$. Согласно (24) имеем

$$B(\sigma)\zeta := \varphi_j^0(x)\zeta - \sigma\Delta_\Gamma\zeta - \sigma\sum_{k=1}^{m-1}\mathcal{K}_{0k}^2(x)\zeta = -\sigma\Delta_\Gamma\zeta + \beta(x,\sigma)\zeta, \tag{55}$$

где

$$\beta(x,\sigma) = \varphi_j^0(x) - \sigma\sum_{k=1}^{m-1}\mathcal{K}_{0k}^2(x). \tag{56}$$

На гладком многообразии Γ оператор Лапласа-Бельтрами $-\Delta_\Gamma$, заданный на $H^2(\Gamma)$, является самосопряжённым положительно определённым оператором в $L_2(\Gamma)$. Так как Γ — компакт (не имеет границы), то оператор умножения на непрерывную вещественную функцию $\beta(x,\sigma)$ в $L_2(\Gamma)$ является ограниченным и самосопряжённым (на компактном множестве ограниченная функция достигает своего максимума и минимума). Следовательно, свойства оператора $B(\sigma)$ при $\sigma > 0$ определяются главным оператором $-\sigma\Delta_\Gamma$. Оператор $B(\sigma)$ при $\sigma > 0$ является самосопряжённым ограниченным снизу оператором с дискретным спектром (состоит из конечнократных изолированных собственных значений). Он имеет бесконечную ветвь положительных собственных значений, а также, возможно, конченое число нулевых и отрицательных собственных значений. Имеем оценку для квадратичной формы оператора $B(\sigma)$:

$$(B(\sigma)\zeta,\zeta)_G = (-\sigma\Delta_\Gamma\zeta + \beta(x,\sigma)\zeta,\zeta)_G \geq (\sigma\lambda_1(-\Delta_\Gamma) + m)\|\zeta\|_G^2. \tag{57}$$

Здесь $\lambda_1(-\Delta_\Gamma)$ — наименьшее собственное значение оператора $-\Delta_\Gamma$, а $m := \min_{x\in\Gamma}\beta(x,\sigma)$. Из (57) следует, что отрицательные собственные значения у оператора $B(\sigma)$ могут быть лишь в случае

$$m < -\sigma\lambda_1(-\Delta_\Gamma) < 0. \tag{58}$$

Будем предполагать далее, что $\operatorname{Ker} B(\sigma) = \{0\}$. Тогда если $m \geq -\sigma\lambda_1(-\Delta_\Gamma)$, то оператор $B(\sigma) > 0$.

Если ядро оператора $B(\sigma)$ отлично от нуля, то задачи (54) в пространстве $\mathcal{H} = E \oplus G$ можно перейти (см. [11, параграф 1.5]) к задаче такого же вида в подпространстве $\widetilde{\mathcal{H}} = E \oplus \widetilde{G}$, $\widetilde{G} := G \ominus \operatorname{Ker} B(\sigma)$, где $\operatorname{Ker} \widetilde{B}(\sigma) = \{0\}$.

При $\sigma = 0$ оператор $B(0)$ превращается в оператор умножения на непрерывную функцию $\varphi_j^0(x)$. Он может иметь лишь конечное число бесконечнократных собственных значений в случае, если промежутки знакопостоянства функции $\varphi_j^0(x)$ имеют ненулевую меру. Иначе оператор $B(0)$ собственных значений не имеет. Будем предполагать далее, что

$$\operatorname{mes}\{x:\ \varphi_j^0(x) = 0\} = 0, \tag{59}$$

тогда $\operatorname{Ker} B(0) = \{0\}$.

Лемма 2 *Если выполнено условие* $\operatorname{Ker} B(\sigma) = \{0\}$, *то оператор* $B(\sigma)$ *для любого* $\sigma \geq 0$ *можно представить в форме*

$$B(\sigma) = |B(\sigma)|^{1/2} J(\sigma) |B(\sigma)|^{1/2}, \tag{60}$$

где операторы $|B(\sigma)|^{1/2}$ *положительны, а спектр оператора* $J(\sigma) = J(\sigma)^* = J(\sigma)^{-1}$ *может состоять лишь из двух собственных значений* ± 1. *Причём в случае* $\sigma > 0$, *собственное значение* 1 *является бесконечнократным, а* -1 *может быть только конечнократным (его кратность равна количеству отрицательных собственных значений оператора* $B(\sigma)$*), а в случае* $\sigma = 0$ *число* ± 1 *входит в точечный спектр и является бесконечнократным собственным значениям, если существует* $x \in \Gamma :\ \pm\varphi_j^0(x) > 0$.

Доказательство. При $\sigma > 0$ оператор $B(\sigma)$ является ограниченным снизу. Поэтому в полярном представлении $B(\sigma) = J(\sigma)|B(\sigma)|$ имеем $J(\sigma)$ — унитарный и самосопряжённый, т.е. $J(\sigma) = J(\sigma)^* = J(\sigma)^{-1}$. Оператор $J(\sigma)$ может иметь лишь конечнократное собственное значение -1; он коммутирует с оператором $|B(\sigma)| := \sqrt{B(\sigma)^2}$ и с его дробными степенями. Так как $\operatorname{Ker} B(\sigma) = \{0\}$, то операторы $|B(\sigma)|$ и $|B(\sigma)|^{1/2}$ являются положительно определёнными.

Рассмотрим случай $\sigma = 0$. Введём функцию

$$\chi(x) := \begin{cases} 1, & \varphi_j^0(x) \geq 0; \\ -1, & \varphi_j^0(x) < 0, \end{cases}$$

и оператор

$$J(0)\zeta := \chi(x)\zeta(x).$$

Очевидно, оператор $J(0)$ является линейным ограниченным оператором в G. Поскольку оператор умножения на константу имеет единственное бесконечнократное собственное значение, равное этой константе, то спектр кусочно-постоянного оператора состоит из тех значений, которые он принимает на множестве ненулевой меры. Поэтому в силу (59) спектр оператора $J(0)$ может состоять только из двух собственных значений ± 1. При этом, число ± 1 тогда и только тогда является собственным значением, когда $\mathrm{mes}\,\{x: \pm\varphi_j^0(x) > 0\} > 0$. В силу непрерывности функции $\varphi_j^0(x)$ это имеет место, когда существует $x \in \Gamma: \pm\varphi_j^0(x) > 0$. Очевидно, что $\varphi_j^0(x) = |\varphi_j^0(x)|^{1/2}\chi(x)|\varphi_j^0(x)|^{1/2}$, т.е. справедливо разложение (60) при $\sigma \geq 0$. Так как почти всюду $|\varphi_j^0(x)|^{1/2} > 0$ и $\mathrm{Ker}\, B(\sigma) = \{0\}$, то оператор $|B(\sigma)|^{1/2}$ является положительным ограниченным и ограниченно обратимым оператором.

□

Таким образом, согласно доказанным свойствам, спектральная задача (54) попадает в класс изученных ранее задач (см., например, [11, параграф 1.5]).

6. Теорема о спектре и базисности

Применим сейчас результаты из [11, параграф 1.5] к исследованию задачи (54). Согласно лемме 2 имеем

$$\mathcal{B}\bar{u} = |\mathcal{B}|^{1/2}\mathcal{J}|\mathcal{B}|^{1/2}\bar{u} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & |B(\sigma)|^{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & J(\sigma) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & |B(\sigma)|^{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1/2}Q^* \\ -QA^{-1/2} & QQ^* + \sigma I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} =: \lambda\mathcal{A}\bar{u}. \quad (61)$$

Как и оператор $|B(\sigma)|^{1/2}$, оператор $|\mathcal{B}|^{1/2}$ является положительным, причём при $\sigma > 0$ оператор $|\mathcal{B}|^{-1/2}$ является компактным, а при $\sigma = 0$ – ограниченным. Оператор $\mathcal{J} := \mathrm{diag}(I; J(\sigma))$, очевидно, обладает свойством $\mathcal{J} = \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1}$. Его спектр состоит из бесконечнократного собственного значения 1 и, возможно, из собственного значения -1 той же кратности, что и у оператора $J(\sigma)$.

Осуществим в (61) замены

$$\eta := |B(\sigma)|^{1/2}\zeta \in G, \quad (62)$$

$$\hat{u} := (u; \eta)^t = |\mathcal{B}|^{1/2}\bar{u} \in \mathcal{H}. \quad (63)$$

Тогда от задачи (61) приходим к задаче

$$\mathcal{J}\hat{u} = \lambda \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1/2}Q^*|B(\sigma)|^{-1/2} \\ -|B(\sigma)|^{-1/2}QA^{-1/2} & |B(\sigma)|^{-1/2}(QQ^* + \sigma I)|B(\sigma)|^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix} = \lambda\mathcal{C}\hat{u}, \quad (64)$$

где оператор

$$\mathcal{C} := |\mathcal{B}|^{-1/2}\mathcal{A}|\mathcal{B}|^{-1/2}. \quad (65)$$

Очевидно, оператор $\mathcal{C}$ является самосопряжённым и положительным оператором в $\mathcal{H}$. Поскольку Q и Q^* являются компактными, и при $\sigma > 0$ оператор

$|B(\sigma)|^{-1/2}$ является компактным, то для всех $\sigma \geq 0$ все коэффициенты матрицы $\mathcal{C}$ являются компактными операторами, следовательно оператор $\mathcal{C}$ также компактный.

Так как $\operatorname{Ker} \mathcal{J} = \{0\}$, то $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (64) (а значит и задачи (54)). В силу свойства $\mathcal{J}^2 = \mathcal{I}$ от задачи (64) можно перейти к задаче

$$\mathcal{J}\mathcal{C}\hat{u} = \mu\hat{u}, \quad \mu := 1/\lambda. \tag{66}$$

Задача (66) является задачей на собственные значения для положительного компактного, либо $\mathcal{J}$-положительного компактного оператора $\mathcal{J}\mathcal{C}$, действующего (в зависимости от сигнатуры оператора $\mathcal{J}$) в гильбертовом пространстве, либо в пространстве Понтрягина или Крейна $\mathcal{H}_{\mathcal{J}} := E \oplus G$ с метрикой

$$[\hat{u}, \hat{v}] := (\mathcal{J}\hat{u}, \hat{v})_{\mathcal{H}}. \tag{67}$$

Именно, $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ будет являться гильбертовым пространством при $\mathcal{J} = \mathcal{I}$, т.е. при $B(\sigma) > 0$. Если же оператор $B(\sigma)$ не является положительным, тогда при $\sigma > 0$ получаем пространство Понтрягина, а при $\sigma = 0$ — пространство М.Крейна (в этом случае число -1 является бесконечнократным собственным значением оператора $\mathcal{J}$).

В случае, когда $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ является гильбертовым пространством для оператора $\mathcal{J}\mathcal{C} = \mathcal{C}$ справедлива теорема Гильберта-Шмидта, согласно которой оператор $\mathcal{C}$ имеет собственный ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, а его спектр состоит из положительных конечнократных собственных значений с предельной точкой в нуле. Если же $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ является индефинитным пространством, тогда, применяя теоремы о свойствах $\mathcal{J}$-самосопряжённых компактных операторов, действующих в $\mathcal{J}$-пространстве (см, например, [17]), можно установить полноту и базисность системы собственных элементов, а также вещественность и дискретность спектра.

Применим, однако, сейчас к задаче (66) другой приём. Осуществим замену

$$\vartheta := \mathcal{C}^{1/2}\hat{u} \in \mathcal{H}. \tag{68}$$

Применяя к обеим частям (66) положительный компактный оператор $\mathcal{C}^{1/2}$, получаем

$$\mathcal{G}\hat{\vartheta} := \mathcal{C}^{1/2}\mathcal{J}\mathcal{C}^{1/2}\hat{\vartheta} = \mu\hat{\vartheta}, \quad \mu := 1/\lambda. \tag{69}$$

Очевидно, оператор $\mathcal{G}$ является компактным самосопряжённым оператором, действующим в пространстве $\mathcal{H}$, причём его ядро нулевое. Согласно (69) квадратичная форма $(\mathcal{G}\hat{\vartheta}, \hat{\vartheta})_{\mathcal{H}}$ принимает положительные значения на подпространстве бесконечной размерности и, возможно, отрицательные значения на подпространстве конечной либо бесконечной размерности.

Таким образом, согласно теореме Гильберта-Шмидта оператор $\mathcal{G}$ имеет собственный ортонормированный базис $\{\hat{\vartheta}_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathcal{H}$, его спектр состоит из ветви положительных конечнократных собственных значений $\{\mu_k^+\}_{k=1}^{\infty}$ и из конечного или бесконечного множества отрицательных собственных значений $\{\mu_k^-\}$ с единственной предельной точкой в нуле.

Осуществляя обратные замены к (68) и (63), т.е.

$$\hat{u} = \mathcal{C}^{-1/2}\vartheta \in \mathcal{H}, \tag{70}$$

$$\bar{u} = (u;\zeta)^t = |\mathcal{B}|^{-1/2}\hat{u} \in \mathcal{H}, \tag{71}$$

получаем следующее утверждение о свойствах решений задачи (54), а следовательно и задачи (20) – (23).

Теорема 1 (О базисности и спектре) *Задача* (54) *имеет полную в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H} = E \oplus G = L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2) \oplus L_2(\Gamma)$ *систему собственных элементов, состоящую из наборов* $\bar{u}_n := (u_n;\zeta_n)^t = (u_{1n};u_{2n};\zeta_n)^t = |\mathcal{B}|^{-1/2}\mathcal{C}^{-1/2}\hat{\vartheta}_n$, *где* $\{\hat{\vartheta}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— собственный ортонормированный базис в* $\mathcal{H}$ *оператора* $\mathcal{G}$. *Система* $\{\bar{u}_n\}$ *является также ортонормированной по форме оператора* $\mathcal{A}$:

$$(\mathcal{A}\bar{u}_n, \bar{u}_m)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{C}\hat{u}_n, \hat{u}_m)_{\mathcal{H}} = (\hat{\vartheta}_n, \hat{\vartheta}_m)_{\mathcal{H}} = \delta_{nm}. \tag{72}$$

Спектр задачи (54) *(задачи* (20) – (23)*) вещественный состоит из изолированных конечнократных собственных значений. Если*

$$\beta(x,\sigma) = \varphi_j^0(x) - \sigma\sum_{k=1}^{m-1}\mathcal{K}_{0k}^2(x) \geq m = \min_{x\in\Gamma}\beta(x,\sigma) \geq -\sigma\lambda_1(-\Delta_\Gamma) \tag{73}$$

и $\operatorname{Ker} B(\sigma) = \{0\}$ *(т.е.* $B(\sigma) > 0$*), то спектр состоит из ветви положительных собственных значений* $\{\lambda_k^+ = 1/\mu_k^+\}_{k=1}^{\infty}$ *с предельной точкой* $+\infty$. *Иначе, при* $\operatorname{Ker} B(\sigma) = \{0\}$, *задача может иметь также конечное* $(\sigma > 0)$ *или бесконечное* $(\sigma = 0)$ *число отрицательных собственных значений. Причём в случае* $\sigma = 0$ *условием существования бесконечной отрицательной ветви является существование* $x \in \Gamma:\ \varphi_j^0(x) < 0$.

Замечание 1 *В случае* $\operatorname{Ker} B(\sigma) \neq \{0\}$ *нуль также является собственным значением задачи* (54), *причём его кратность при* $\sigma > 0$ *конечна, а при* $\sigma = 0$ *бесконечна. Она совпадает с размерностью* $\operatorname{Ker} B(\sigma)$. *В этом случае можно получить свойство полноты системы собственных элементов в подпространстве* $\widetilde{\mathcal{H}} = E \oplus \widetilde{G}$, $\widetilde{G} := G \ominus \operatorname{Ker} B(\sigma)$.

Отрицательные собственные значения отвечают неустойчивым режимам в процессах фазового перехода. Если они имеются, то соответствующая начально-краевая задача не будет являться корректно-поставленной задачей Коши. Таким образом, свойства спектральной задачи Стефана позволяют уточнить результаты из [6], где установлена однозначная разрешимость модифицированной задачи Стефана в случае $\beta(x,\sigma) > 0$, $\forall x \in \Gamma$.

Благодарность. Автор выражает благодарность Копачевскому Н.Д. за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мейрманов А.М. Задача Стефана. – Новосибирск: Наука, 1986. – 238 с.

2. Caroli B., Caroli C., Misbah C., Roulet B. The Gibbs-Thomson law. // J. Phys. – 1987. – V. 48. – 547 p.

3. Xie W. Stefan problem with a kinetic condition at the free boundary. // Ann. mat. pura ed appl. – 1990. – V. 21, 2. – P. 362–373.

4. Luckhaus S. The Stefan problem with Hibbs-Thomson law. – Sezione di Analisi Matematica e Probabilitita, Universita di Pisa, 2.75 (591), 1991.

5. Радкевич Е.В. Об условиях существования классического решения модифицированной задачи Стефана (закон Гиббса–Томсона). // Матем. сб. – 1992. – Т. 183, № 2. – С. 77–101.

6. Радкевич Е.В. Поправка Гиббса-Томсона и существование классического решения модифицированной задачи Стефана. // Доклады АН СССР. – 1990. – Т. 315, № 6. – С. 1311—1315.

7. Радкевич Е.В., Меликулов А.С. Задачи со свободной границей. – Ташкент: ФАН, 1991.

8. Базалий Б.В., Дегтярёв С.П. О задаче Стефана с кинетическим и классическим условием на свободной границе. // УМЖ. – 1992. – Т. 44, № 2. – С. 155–166.

9. Войтицкий В.И. Абстрактная спектральная задача Стефана. // Учёные записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия “Математика. Механика. Информатика и Кибернетика”. – Т. 19(58).2 (2006). – С. 20–28.

10. Войтицкий В.И. О спектральных задачах, порождённых линеаризованной задачей Стефана с условиями Гиббса-Томсона. – Нелинейные граничные задачи. – Т. 17 (2007). – С. 31–49.

11. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

12. Мышкис А. Д., Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Копачевский Н. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. – Киев: Наук. думка, 1992. – 592 с.

13. Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д., Старков П. А. Вспомогательные абстрактные краевые задачи и задачи сопряжения. // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2008. (в печати)

14. Kopachevsky N.D., Voytitsky V.I. On the modified spectral Stefan problem and its abstract generalizations // Operator Theory. Volume dedicated to the centenary of M.Krein – 2008. (to appear)

15. Копачевский Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса. // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). – 2004. – №2. – С. 52–80.

16. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи. // Украинский матем. вестник. – 2004. – Т. 1, № 1. – С. 69–97.

17. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. – М.: Наука, 1986. – 352 с.

Статья получена: 19.11.2008; окончательный вариант: 07.05.2009; принята: 13.05.2009.

Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iменi В.Н. Каразiна
Серiя "Математика, прикладна математика i механiка"
УДК 533.72 № 850, 2009, с.37–44

Винтовые потоки с плотностями, частично зависящими от температур

В. Д. Гордевский

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина

Построены приближенные бимодальные решения уравнения Больцмана с модами специального вида. Соответствующие потоки в газе из твердых сфер являются ускоряющимися и уплотняющимися винтами, причем их плотности частитчно зависят от температур. Получены некоторые достаточные условия произвольной малости смешанной невязки между частями уравнения.

2000 Mathematics Subject Classification 76P05, 45K05, 82C40, 35Q55.

I. Введение.

Как известно [1, 2], кинетическое уравнение Больцмана для модели твердых сфер имеет вид:

$$D(f) = Q(f, f), \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{2}$$

$$Q(f, f) = \frac{d^2}{2}\int_{R^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha \, |(v_1 - v, \alpha)| \cdot \left[f(t, x, v') f(t, x, v_1') - f(t, x, v) f(t, x, v_1) \right], \tag{3}$$

$$v_1' = v_1 + \alpha(v - v_1, \alpha); \quad v' = v - \alpha(v - v_1, \alpha), \tag{4}$$

где $f(t, v, x)$ — функция распределения частиц; $t \in R^1$ — время; $v = (v^1, v^2, v^3) \in R^3$ и $x = (x^1, x^2, v^3)$ — скорость молекулы и ее пространственная координата; $\frac{\partial f}{\partial x}$ (или просто f') — градиент функции f по переменной x; $d > 0$ — диаметр частиц; v, v_1, v', v_1' — скорости молекул до и после столкновения соответственно; $\alpha \in \Sigma \subset R^3$; Σ — единичная сфера.

Для рассматриваемой модели к настоящему времени в явном виде найден только один класс точных решений уравнения (1) – (4). Эти решения называются максвеллианами, и их общий вид таков [1,2]:

$$M = \rho\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta(v-\bar{v})^2}, \tag{5}$$

где гидродинамические параметры ρ — плотность, $\beta = \frac{1}{2T}$ — обратная температура, $\bar{v}$ — массовая скорость потока либо постоянны (в этом случае максвеллиан называется глобальным), либо зависят от t и x вполне определенным образом (локальный максвеллиан). Возможный вид этой зависимости исследован в [2 - 5]; в последней работе проведена также детальная классификация локальных максвеллианов и выделено несколько частных случаев, описывающих различные типы движения газа во всем пространстве. Среди них важное место занимают ускоряющиеся и уплотняющиеся винты, для которых

$$\rho = \bar{\rho}(t,x)e^{\beta\bar{\omega}^2 r^2}, \tag{6}$$

$$\bar{\rho}(t,x) = \bar{\rho}\exp\left\{\beta\left[\left(\frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2}(\bar{\omega},\bar{v}) - \bar{u}t\right)^2 + 2\bar{u}x\right]\right\}, \tag{7}$$

$$r^2 = \frac{1}{\bar{\omega}^2}[\bar{\omega}\times(x-x_0)]^2, \tag{8}$$

$$x_0 = \frac{1}{\bar{\omega}^2}[\bar{\omega}\times\bar{v}], \tag{9}$$

$$\tilde{v} = \bar{v} + [\bar{\omega}\times x] - \bar{u}t, \tag{10}$$

где $\bar{\rho} > 0, \bar{v}, \bar{\omega}, \bar{u} \in R^3$ — некие скалярные и векторные константы, причем

$$[\bar{u}\times\bar{\omega}] = 0. \tag{11}$$

В работах [6,7] получено описание переходного режима между двумя винтовыми потоками (частный случай (7), (8) при $\bar{u} = 0$), когда плотности полностью зависят от температур, либо вовсе не зависят от них, а в [8] аналогичная задача решена в случае потоков типа ускорение-уплотнение, для которых $\bar{u} \neq 0$, однако $\bar{\omega} = 0$. Такое описание достигается с помощью построения бимодальных распределений [1, 5 - 8], т.е. линейных комбинаций двух решений вида (5) с различными гидродинамическими параметрами. При этом коэффициентные функции при максвелловских модах (5) подбираются так, чтобы разность между D и Q в уравнении (1) ("невязка") была сколь угодно малой в том или ином строгом смысле.

Целью данной работы является исследование поведения "смешанной" невязки между левой и правой частями уравнения Больцмана для бимодальных распределений с винтовыми модами вида (5) – (11), плотности которых (6), (7) частично зависят от их температур.

В разделе 2 приведена точная постановка задачи.

В раздел 3 помещены основные результаты.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бимодальное распределение

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \tag{12}$$

где $\varphi_i = \varphi_i(t,x) \in C^1(R^4)$ — неотрицательные коэффициентные функции, ограниченные на R^4 вместе со своими производными, а моды M_i имеют вид (5) – (11) с различными величинами $\rho_i, \bar{\rho}_i(t,x), \bar{\rho}_i, \beta_i, \bar{\omega}_i, \bar{v}_i, \bar{u}_i, r_i^2, x_{0i}$ для разных значений индекса $i = 1,2$.

"Смешанной"(или равномерно-интегральной) невязкой назовем величину [5, 6, 8]

$$\Delta = \sup_{(t,x)\in R^4} \int_{R^3} dv \left| D(f) - Q(f,f) \right|. \tag{13}$$

Требуется найти такие функции $\varphi_i, i = 1,2,$ чтобы плотность газа, соответствующая распределению (12), зависела от температур потоков (т.е. от $\beta_i, i = 1,2$) лишь частично, и при подходящем поведении всех параметров величина (13) могла быть сделана сколь угодно малой.

Ниже получены некоторые достаточные условия, дающие решение этой задачи.

3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть функции $\varphi_i, i = 1,2$ в (12) имеют вид:*

$$\varphi_i(t,x) = C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) E_i(\bar{u}_{0i} t) \exp\left\{ -\beta_i \left[\left(\frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i^2}(\bar{\omega}_i, \bar{v}_i) - \bar{u}_i t \right)^2 + 2\bar{u}_i x \right] \right\}, \quad i = 1,2. \tag{14}$$

Здесь векторы $\bar{\omega}_{0i}, \bar{u}_{0i}$ постоянны и связаны с $\bar{\omega}_i, \bar{u}_i, i = 1,2$ соотношениями:

$$\bar{\omega}_i = \frac{\bar{\omega}_{0i}}{\beta_i^{m_i}}, \tag{15}$$

$$\bar{u}_i = \frac{\bar{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}}, \tag{16}$$

где

$$m_i \geq \frac{1}{2}, \tag{17}$$

$$n_i > \frac{1}{2}, \tag{18}$$

причем

$$[\bar{\omega}_{0i} \times \bar{v}_i] = 0, \quad i = 1,2, \tag{19}$$

а $C_i, E_i \geq 0$ — произвольные гладкие финитные либо быстроубывающие функции, причем для последних функций и их градиентов справедлива оценка:

$$\forall z \in R^3, \quad E_i(z), |E_i'(z)| \leq \frac{D_i}{1+|z|}, \quad i = 1,2 \tag{20}$$

с некими константами $D_i > 0$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall D_1, D_2 \ 0 < D_1, D_2 < \delta, \exists \beta_0 > 0, \forall \beta_1, \beta_2 > \beta_0,$$
$$\Delta < \varepsilon. \tag{21}$$

Доказательство. Очевидно, (19) вместе с (15) позволяет упростить один из членов в показателе экспоненты (14):

$$\frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i^2}(\bar{\omega}_i, \bar{v}_i) = \bar{v}_i, \quad i = 1, 2. \tag{22}$$

С учетом этого, формул (5) – (11) и известных свойств максвеллианов [1, 2], а также с использованием техники, развитой в [6 – 8], подстановка (12) в (2), (3), и затем – в (13), позволяет написать следующую оценку сверху для невязки Δ:

$$\Delta \leq \Delta' = \sup_{(t,x)\in R^4} \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \left[\int_{R^3} \left| \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(u\beta_i^{-\frac{1}{2}} + \tilde{v}_i \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right\} \exp\{\beta_i \bar{\omega_i}^2 r_i^2\} \right.\right.$$

$$+ \varphi_1\varphi_2 \exp\{\beta_1 \bar{\omega_1}^2 r_1^2 + \beta_2 \bar{\omega_2}^2 r_2^2\} \frac{\hat{\rho}_j(t,x) d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} F_{ij} e^{-w^2} dw \left| \hat{\rho}_i(t,x) \pi^{-3/2} e^{-u^2} du \right.$$

$$\left. + \varphi_1\varphi_2 \exp\{\beta_1 \bar{\omega_1}^2 r_1^2 + \beta_2 \bar{\omega_2}^2 r_2^2\} \frac{\hat{\rho}_1(t,x)\hat{\rho}_2(t,x) d^2}{\pi^2} \int_{R^6} F_{ij} e^{-u^2-w^2} du dw \right], \tag{23}$$

где

$$F_{ij} = F_{ij}(u,t,x,w) = \left| u\beta_i^{-\frac{1}{2}} + \tilde{v}_i - \tilde{v}_j - w\beta_j^{-\frac{1}{2}} \right|, \quad i \neq j, \tag{24}$$

$$\hat{\rho}_i(t,x) = \bar{\rho}_i \exp\{\beta_i[(\bar{v}_i - \bar{u}_i t)^2 + 2\bar{u}_i x]\} \quad i = 1, 2. \tag{25}$$

Преобразуем теперь величину (23), подставляя вместо $\varphi_i, i = 1,2$ выражения (14). Прежде всего, легко видеть, что

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = C_i e^{-\beta_i[(\bar{v}_i - \bar{u}_i t)^2 + 2\bar{u}_i x]} \left\{ (E_i', \bar{u}_{0i}) + 2E_i\beta_i(\bar{v}_i - \bar{u}_i t, \bar{u}_i) \right\}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = E_i e^{-\beta_i[(\bar{v}_i - \bar{u}_i t)^2 + 2\bar{u}_i x]} \left\{ [C_i' \times \bar{\omega}_{0i}] - 2C_i\beta_i\bar{u}_i \right\}. \tag{27}$$

Поэтому, с использованием (10), (11), получим:

$$\Delta' = \sup_{(t,x)\in R^4} \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \left[\int_{R^3} \left| \left\{ C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x])(E_i'(\bar{u}_{0i} t), \bar{u}_{0i}) \right.\right.\right.$$

$$+E_i(\bar{u}_{0i}t)\Big(\big[C_i'([\bar{\omega}_{0i}\times x])\times\bar{\omega}_{0i}\big]\big(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}}+\tilde{v}_i\big)-2C_i([\bar{\omega}_{0i}\times x])\sqrt{\beta_i(\bar{u}_i,u)}\Big)\Big\}$$

$$\cdot\exp\{\beta_i\bar{\omega_i}^2r_i^2\}+C_i([\bar{\omega}_{0i}\times x])C_j([\bar{\omega}_{0j}\times x])E_i(\bar{u}_{0i}t)E_j(\bar{u}_{0j}t)$$

$$\cdot\exp\{\beta_1\bar{\omega_1}^2r_1^2+\beta_2\bar{\omega_2}^2r_2^2\}\frac{\bar{\rho}_jd^2}{\sqrt{\pi}}\int_{R^3}F_{ij}e^{-w^2}dw\Big|\bar{\rho}_i\pi^{-3/2}e^{-u^2}du$$

$$+C_i([\bar{\omega}_{0i}\times x])C_j([\bar{\omega}_{0j}\times x])E_i(\bar{u}_{0i}t)E_j(\bar{u}_{0j}t)$$

$$\cdot\exp\{\beta_1\bar{\omega_1}^2r_1^2+\beta_2\bar{\omega_2}^2r_2^2\}\frac{\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2d^2}{\pi^2}\int_{R^6}F_{ij}e^{-u^2-w^2}dudw\Big] \tag{28}$$

(условия, наложенные нами на функции C_i и $E_i, i=1,2$, очевидно, гарантируют существование всех супремумов, входящих в (28); сходимость всех интегралов тем более очевидна благодаря наличию экспоненциально убывающих множителей).

Подставляя теперь в (28) выражения (8) – (10), (15) – (19) и переходя затем к низкотемпературному пределу (возможность такого перехода под знаком супремумов и интегралов обосновывается так же, как в [6 - 8] с использованием Леммы 1 работы [6], после чего интегралы по w и u тривиально вычисляются) с учетом (9), (19), благодаря которым $x_{0i}=0, i=1,2$, и того, что

$$\lim_{\beta_i\to+\infty, i=1,2}F_{ij}=|\bar{v}_i-\bar{v}_j|,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2, \tag{29}$$

$$\lim_{\beta_i\to+\infty, i=1,2}e^{\beta_i\bar{\omega}_i^2r_i^2}=\nu_i(x)=\left[\begin{array}{ll}1, & m_i>\frac{1}{2},\\ e^{[\bar{\omega}_{0i}\times x]^2}, & m_i=\frac{1}{2},\end{array}\right. \tag{30}$$

$$\lim_{\beta_i\to+\infty, i=1.2}\left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}}+\tilde{v}_i\right)\big[C_i'([\bar{\omega}_{0i}\times x])\times\bar{\omega}_{0i}\big]=0, \tag{31}$$

будем иметь:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty, i=1,2}\Delta'=\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\bar{\rho}_i\sup_{(t,x)\in R^4}\{\nu_i(x)|C_i([\bar{\omega}_{0i}\times x])(E_i'(\bar{u}_{0i}t),\bar{u}_{0i})$$

$$+C_i([\bar{\omega}_{0i}\times x])C_j([\bar{\omega}_{0j}\times x])E_i(\bar{u}_{0i}t)E_j(\bar{u}_{0j}t)\bar{\rho}_j\pi d^2\nu_j(x)|\bar{v}_i-\bar{v}_j||\}$$

$$+2\pi d^2|\bar{v}_1-\bar{v}_2|\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2\sup_{t\in R^1}[E_1(\bar{u}_{01}t)E_2(\bar{u}_{02}t)]\sup_{x\in R^3}[\nu_1(x)\nu_2(x)C_1([\bar{\omega}_{0i}\times x])C_2([\bar{\omega}_{02}\times x])]. \tag{32}$$

Конечность всех входящих в (32) супремумов по x следует из (30) и свойств функций $C_i, i=1,2$, а по t — из (20), поскольку, очевидно,

$$\big|(E_i'(\bar{u}_{0i}t),\bar{u}_{0i})\big|\leq|\bar{u}_{0i}|\frac{D_i}{1+|t||\bar{u}_{0i}|},\quad i=1,2 \tag{33}$$

Кроме того, (20) и (33) позволяют оценить сверху супремум первого слагаемого (с индексом $i=1,2$) из (32) некой константой, умноженной на D_i, а все остальные — константами с множителями D_1, D_2, что и приводит, в силу неравенства (23), к (21). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть*

$$\varphi_i(t,x) = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} C_i(x) e^{-\beta_i(\bar{v}_i - \bar{u}_i t)^2} \qquad i = 1,2, \tag{34}$$

где константы $l_i \geq \frac{1}{2}, D_i > 0$, а функции C_i имеют те же свойства, что в условии теоремы 1, и верно (15), (16) при выполнении (17), (19) и

$$n_i \geq 1. \tag{35}$$

Тогда имеет место (21).

Доказательство. Прежде всего заметим, что показатель экспоненты в (34) и первое слагаемое показателя в (14) совпадают при условии (19) — см. (22). Поэтому справедлива формула (25), но при подстановке (34) в выражение (23) после соответствующих упрощений в показателе экспоненты остается лишь второе слагаемое. Найдем производные выражений (34) и также подставим в (23) с учетом последнего лбстоятельства и (19).

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{2D_i}{(1+t^2)^{l_i}} C_i(x) e^{-\beta_i(\bar{v}_i - \bar{u}_i t)^2} \left\{ \frac{-tl_i}{1+t^2} + \beta_i\left((\bar{u}_i, \bar{v}_i) - t\bar{u}_i^2\right) \right\}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} C_i'(x) e^{-\beta_i(\bar{v}_i - \bar{u}_i t)^2}, \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
\Delta' = \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \Bigg[\int_{R^3} \Bigg| \Bigg\{ & 2C_i(x)\left[\frac{-tl_i}{1+t^2} + \beta_i\left((\bar{u}_i, \bar{v}_i) - t\bar{u}_i^2\right)\right] \\
& + \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \tilde{v}_i\right) C_i'(x) \Bigg\} \cdot \exp\{\beta_i \bar{\omega}_i{}^2 r_i^2\} + \frac{D_j}{(1+t^2)^{l_j}} C_i(x) C_j(x) \\
\cdot \exp\{\beta_1 \bar{\omega}_1{}^2 r_1^2 + \beta_2 \bar{\omega}_2{}^2 r_2^2\} & \frac{\bar{\rho}_j d^2}{\sqrt{\pi}} e^{2\beta_j \bar{u}_j x} \int_{R^3} F_{ij} e^{-w^2} dw \Bigg| e^{2\beta_i \bar{u}_i x} \bar{\rho}_i \pi^{-3/2} e^{-u^2} du \\
& + \frac{D_j}{(1+t^2)^{l_j}} C_i(x) C_j(x) \\
\cdot \exp\{\beta_1 \bar{\omega}_1{}^2 r_1^2 + \beta_2 \bar{\omega}_2{}^2 r_2^2 & + 2x(\beta_i \bar{u}_1 + \beta_2 \bar{u}_2)\} \frac{\bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 d^2}{\pi^2} \int_{R^6} F_{ij} e^{-u^2 - w^2} du dw \Bigg].
\end{aligned} \tag{38}$$

Переходя здесь к пределу, вспоминая (30) и вводя новые обозначения:

$$\mu_i(x) = \lim_{\beta_i \to +\infty, i=1,2} e^{2\beta_i \bar{u}_i x} = \begin{bmatrix} 1, & n_i > 1, \\ e^{2\bar{u}_{0i} x}, & n_i = 1, \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$H_i = \lim_{\beta_i \to +\infty, i=1,2} \beta_i(\bar{u}_{0i}, \bar{v}_i) = \begin{bmatrix} 0, & n_i > 1, \\ (\bar{u}_{0i}, \bar{v}_i), & n_i = 1, \end{bmatrix} \qquad i = 1,2, \tag{40}$$

получим:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty, i=1,2} \Delta' = \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} \bar{\rho}_i \sup_{(t,x)\in R^4} \left[\mu_i(x)\nu_i(x)\frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} \left| \bar{v}_i C_i'(x) - \frac{2l_i t}{1+t^2} C_i(x) \right.\right.$$

$$\left.\left. +2C_i(x)H_i + \frac{D_j}{(1+t^2)^{l_j}} C_i(x)C_j(x)\bar{\rho}_j\mu_j(x)\nu_j(x)\pi d^2|\bar{v}_i - \bar{v}_j| \right|\right]$$

$$+2\pi d^2|\bar{v}_1 - \bar{v}_2|\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 D_1 D_2 \sup_{x\in R^3}[\mu_1(x)\mu_2(x)\nu_1(x)\nu_2(x)C_1(x)C_2(x)] \qquad (41)$$

(последний супремум по t "исчезает"потому, что он, очевидно, равен 1). Поскольку H_i постоянны, а свойства функций $C_i(x)$ обеспечивают ограниченность всех входящих в (41) выражений, то мы опять получаем (21). Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть векторы $\bar{v}_i, i=1,2$ произвольны, и*

$$\varphi_i(t,x) = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} C_i(x) \exp\left\{ -\beta_i \left([\bar{\omega}_i \times (x - x_{0i})]^2 + \left(\frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i^2}(\bar{\omega}_i, \bar{v}_i) - \bar{u}_i t\right)^2 \right) \right\}, \qquad (42)$$

где $D_i, l_i, C_i(x)$ — такие же, как в теореме 2, и верно (15), (16), но при

$$m_i > \frac{1}{2}, \qquad (43)$$

$$n_i > 1, \quad i=1,2. \qquad (44)$$

Тогда справедливо (21).

Доказательство. В предположении (42), очевидно,

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = 2\varphi_i \left\{ \frac{-tl_i}{1+t^2} + \beta_i \left[\frac{(\bar{\omega}_i, \bar{u}_i)(\bar{\omega}_i, \bar{v}_i)}{\bar{\omega}_i^2} - t\bar{u}_i^2 \right] \right\} \qquad (45)$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} \exp\left\{ -\beta_i \left([\bar{\omega}_i \times (x - x_{0i})]^2 + \left(\frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i^2}(\bar{\omega}_i, \bar{v}_i) - \bar{u}_i t\right)^2 \right) \right\}$$

$$\cdot\left\{ C_i'(x) + 2\beta_i C_i(x)(\bar{\omega}_i(\bar{\omega}_i, x) - \bar{\omega}_i^2 x + [\bar{\omega}_i \times \bar{v}_i]) \right\} \qquad (46)$$

(здесь использовано (9)). Отсюда, с учетом (8), (23) и того, что аналог формулы (25) в качестве множителя при β_i будет содержать теперь выражение

$$\left(\frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i^2}(\bar{\omega}_i, \bar{v}_i) - \bar{u}_i t\right)^2 + 2\bar{u}_i x \qquad (47)$$

(см. (7)), причем первое слагаемое сократится после подстановки вместо $\varphi_i, i=1,2$ выражений (42), получим:

$$\Delta' = \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} \left[\int_{R^3} \left| 2C_i(x) \left[\frac{-tl_i}{1+t^2} + \beta_i \left(\frac{(\bar{\omega}_i, \bar{u}_i)(\bar{\omega}_i, \bar{v}_i)}{\bar{\omega}_i^2} - t\bar{u}_i^2 \right) \right] \right.\right.$$

$$+\left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}}+\bar{v}_i\right)\left\{C_i'(x)+2\beta_i C_i(x)\left(\bar{\omega}_i(\bar{\omega}_i,x)-\bar{\omega}_i^2 x+[\bar{\omega}_i\times\bar{v}_i]\right)\right\}$$

$$+\frac{D_j}{(1+t^2)^{l_j}}C_i(x)C_j(x)\frac{\bar{\rho}_j d^2}{\sqrt{\pi}}e^{2\beta_j\bar{u}_j x}\int_{R^3}F_{ij}e^{-w^2}dw\left|e^{2\beta_i\bar{u}_i x}\bar{\rho}_i\pi^{-3/2}e^{-u^2}du\right.$$

$$\left.+\frac{D_j}{(1+t^2)^{l_j}}C_i(x)C_j(x)\exp\{2x(\beta_1\bar{u}_1+\beta_2\bar{u}_2)\}\frac{\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 d^2}{\pi^2}\int_{R^6}F_{ij}e^{-u^2-w^2}dudw\right]. \quad (48)$$

(все супремумы здесь, очевидно, конечны, благодаря свойствам $C_i, i=1,2$). Тогда, вспоминая (43) и (44), будем иметь (41) при $\mu_i(x)=\nu_i(x)=1, H_i=0, i=1,2$, что, очевидно, снова приводит к (21). Теорема доказана.

Замечание. Условие последней теоремы, в отличие от предыдущих, не содержит ограничения (19) на векторы $\bar{v}_i, i=1,2$. В то же время, предположения (43), (44) жестче, чем (17) и (35). Кроме того, зависимость от t в (34), (42), с одной стороны, и в (14) — с другой, совершенно различны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.-495 с.

2. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. М.: ИИЛ, 1960.- 118 с.

3. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases// Comm. Pure and Appl. Math.–1949.– V. 2, No.**4**.–P.331–407.

4. Фридлендер О.Г. Локально-максвелловские решения уравнения Больцмана// Прикл. мат. и мех.–1965.– Т. 29, вып. **5**.–С.973–977.

5. Gordevskyy V.D. On the non-stationary Maxwellians// Math. Meth. Appl. Sci. (MMA 455).–2004.– V.27, No. **2**.– P.231-347.

6. Гордевский В.Д. Двухпотоковое распределение с винтовыми модами// Теор. и мат. физика.– 2001.– Т. 126, №**2**.– С. 283–300.

7. Gordevsky V.D. Transitional Regime Between Spiral Equilibrium States of a Gas.// Visn. Khark. Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mech.–2001.–**514**.–P.17–33.

8. Gordevskyy V.D., Andriyasheva N.V. Interaction between "accelerating-packing" flows in a low-temperature gas// Math. Phys., Anal., Geom.–2009.– V.5, No. **1**.– P.38–53.

Статья получена: 15.04.2009; принята: 22.04.2009.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9 № 850, 2009, с.45–51

Solution of a Synthesis Problem of a Nonlinear Control System

A.E. Choque Rivero

IFM, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,
Edificio C-3, C.U., 58040, Morelia, Mich., México
Email: abdon@ifm.umich.mx

In this work, using the Controllability Function method created by V.I. Korobov, we give a solution to the synthesis problem for the nonlinear system $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1^3$, $|u| \leq 1$, i.e. we find a set of positional bounded controls $u = u(x_1, x_2)$ with $|u| \leq 1$ such that the trajectory of the system $\dot{x}_1 = u(x_1, x_2)$, $\dot{x}_2 = x_1^3$, starting at the initial position x_0 terminates at the origin in finite time $T(x_0)$.

2000 Mathematics Subject Classification 47A45.

1. Introduction

In the present work we develop the Controllability Function (CF) method introduced by Korobov in [7] for the following synthesis problem.

For $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, consider the control system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \quad |u| \leq 1, \\ \dot{x}_2 = x_1^3. \end{cases} \tag{1}$$

The synthesis problem consists in finding a set of bounded positional controls $u = u(x)$ such that the closed system

$$\dot{x}_1 = u(x), \, \dot{x}_2 = x_1^3 \tag{2}$$

starting at $x(0) = x_0$ terminates at the origin in finite time $T(x_0)$, i.e. $\lim_{t \to T(x_0)} x(t) = 0$, where $x(t)$ is the trajectory of the closed system (2).

Let us remark that this system is not linearizable at the origin. This differs from nonlinear systems considered by Korobov and collaborators [7],[11]. In fact, for the system (1), the Jakubczyk–Respondek–Hunt–Su–Meyer–Krischenko condition does not hold at the origin. Such *singular systems* were studied by

Respondek [15], Celikovsky and Nijmeijer [3], Celikovsky and Arranda–Bricaire [4], Tsinias [16] and Korobov and Pavlickhov in [12]. In [10], a non–smooth mapping of the system (1) to a linear control system was constructed. Note that the system $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1^2$, is not controllable (see [6]).

2. Solution of the synthesis problem

In this Section we give a solution of the non–linearizable system (1).

We will follow Korobov's Controllability Function method (see [7],[8] [9],[11],[1] and [2]), that is, we will construct a couple $(u(x), \Theta(x))$ such that the Fundamental Theorem [7] is satisfied.

Let $\mathbb{R}_-$ denote the set of negative real numbers. We propose the following set of positional controls

$$U := \left\{ u(x) \; u(x) = \frac{a_1 x_1}{\Theta(x)} + \frac{a_2 x_2}{\Theta^4(x)} + \frac{a_3 x_1^3}{\Theta^3(x)}, \text{with } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_- \right\} \tag{3}$$

as a possible solution of the SP. The controllability function $\Theta(x)$ is determined as the unique positive solution of the equation

$$2a_0 \Theta^8 = f_{11} \Theta^6 x_1^2 + 2 f_{12} \Theta^3 x_1 x_2 + f_{22} x_2^2 \tag{4}$$

for some real numbers $(f_{jk})_{j,k=1}^2$ and $a_0 > 0$.

Remark 1 *Using the notation*

$$F := \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}, \quad D_\Theta := \begin{pmatrix} \Theta^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \Theta^{-\frac{7}{2}} \end{pmatrix},$$

Equation (4) can be written in the form

$$2a_0 \Theta = (D_\Theta F D_\Theta x, x) \tag{5}$$

and the positional control $u \in U$ becomes

$$u(x) = \Theta^{-\frac{1}{2}}(x)\, a^T D_{\Theta(x)} x + \frac{a_3 x_1^3}{\Theta^3(x)}, \tag{6}$$

with $a^T := (a_1, a_2)$.

Proof. This follows by direct calculations. ■

Now we formulate conditions on a_k, a_0 and f_{jk} given in (3) and (4), which guarantee that a set of positional controls is a solution of the stated SP.

The following result establishes the conditions under which the solution $\Theta(x)$ of Equation (4) is positive and unique.

Lemma 1 *Let*

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} f_{11} & \frac{5}{2}f_{12} \\ \frac{5}{2}f_{12} & 4f_{22} \end{pmatrix}.$$

Suppose that the matrices F and $\mathcal{B}$ are positive definite. Then Equation (4) admits a unique positive solution $\Theta(x)$ for all x.

Proof. One simply repeats the proof of a similar assertion in [7] after formula (13). ∎

Let S denote the subset of positional controls of U such that

$$25a_2 + 16a_1a_3 > 0, \tag{7}$$

and let $\mathcal{F}_S$ denote the set of symmetric matrices of the form

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_2}f_{12} & f_{12} \\ f_{12} & -f_{12}a_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

such that $f_{12} > 0$ and the condition (7) is satisfied.

Lemma 2 *Let $u \in S$ and $F \in \mathcal{F}_S$. Then there exist $\gamma > 0$ such that*

$$\dot{\Theta}(x) \leq -\gamma, \tag{9}$$

where $\Theta(x)$ is a solution of Equation (5).

Proof. Taking the derivative $\dot{\Theta}$ of Equation (4) with respect to time we obtain

$$\dot{\Theta} = \frac{\frac{a_1^2}{a_2}\Theta^6x_1^2 + 2a_1\Theta^3x_1x_2 + a_2x_2^2 + (a_3\frac{a_1}{a_2}+1)\Theta^4x_1^4}{\frac{a_1}{a_2}\Theta^6x_1^2 + 5\Theta^3x_1x_2 + 4(-a_3)x_2^2} \tag{10}$$

(due to the closed system of the form (2) with $u = u(x_1, x_2)$ belonging to S and $F \in \mathcal{F}_S$).

Making the substitution

$$y_1 := x_1\Theta^3, \;\; y_2 := x_2, \tag{11}$$

gives

$$\dot{\Theta} = \frac{(\mathcal{A}y, y) - (1 + \frac{a_1a_3}{a_2})\frac{y_1^4}{\Theta^8}}{(\mathcal{B}y, y)}$$

with $y^T := (y_1, y_2)$, $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \frac{-a_1^2}{a_2} & -a_1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$, and $\mathcal{B} := \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -4a_3 \end{pmatrix}$. Since $(\mathcal{A}y, y) \geq 0$, $(\mathcal{B}y, y) > 0$ and $1 + \frac{a_1a_3}{a_2} < 0$, we get $\dot{\Theta} < 0$.

Let $x_2 = C\Theta^3 x_1$ with $C \in \mathbb{R}$ in Equation (4). The $x_1^2 = \frac{2a_0\Theta^2}{f_{11}+2f_{12}C+f_{22}C^2}$. Further, using (11) and (8), we have

$$\frac{x_1^2}{\Theta^2} = \frac{y_1^2}{\Theta^8} = \frac{2a_0}{(\frac{a_1}{a_2} + 2C - a_3C^2)f_{12}}. \tag{12}$$

Hence

$$\dot{\Theta} = \frac{(Ca_2 + a_1)^2 + (a_2 + a_1a_3)\frac{2a_0}{(\frac{a_1}{a_2}+2C-a_3C^2)f_{12}}}{-a_1 - 5a_2C + 4a_2a_3C^2}. \tag{13}$$

Since the right hand side of (13) is continuous and negative for all $C \in \mathbb{R}$ and its limit at $C \to \pm\infty$ is equal to $\dfrac{-a_2}{4a_3}$, it is possible to find $\gamma > 0$, such that (9) holds for all x. This concludes the proof. ■

Remark 2 *The following time estimation holds*

$$T \leq \frac{\Theta(x_0)}{\gamma}. \tag{14}$$

Proof. It follows directly from the Fundamental Theorem [8, Theorem 1]. ■

Lemma 3 *Let* $\eta := \frac{a_2a_3}{(a_2+a_1a_3)f_{12}}$ *and*

$$\Phi(a_0) := \frac{2a_0}{f_{12}}\left(a_1a_2 + 4a_0a_2a_3\eta + 4a_0^2a_3^2f_{12}\eta^3\right) - 1.$$

Suppose that Inequality (7) is satisfied. Then
a) the equation

$$\Phi(a_0) = 0 \tag{15}$$

has a unique positive solution;
b) the positional control $u \in S$ *fulfills*

$$|u(x)| \leq 1. \tag{16}$$

Proof. a) By inequality (7), $\eta > 0$. Due to continuity of Φ and the values $\Phi(0) = -1$, $\lim_{a_0 \to +\infty} \Phi(a_0) = +\infty$, there exists a positive solution of (15). Further, calculating the derivative of Φ at the positive roots of the polynomial Φ, we get

$$\frac{1}{a_0} + \frac{8a_0a_2a_3\eta}{f_{12}} + 16a_0^2a_3^2\eta^3$$

which is positive. Consequently, the positive solution of (15) is unique.
b) By (5) and (6), we obtain

$$u^2(x) = 2a_0\left(\frac{(aa^TD_\Theta x, D_\Theta x)}{(FD_\Theta x, D_\Theta x)} + \frac{(pa^TD_\Theta x, D_\Theta x)}{(FD_\Theta x, D_\Theta x)}\frac{x_1^2}{\theta^2} + \frac{(qq^TD_\Theta x, D_\Theta x)}{(FD_\Theta x, D_\Theta x)}\frac{x_1^4}{\theta^4}\right)$$

with $p^T := (2a_3, 0)$ and $q^T := (a_3, 0)$.

Due to extremal properties of the characteristic values of pencil quadratic forms (see [6, page 310]), we have $\frac{(aa^T D_\Theta x, D_\Theta x)}{(FD_\Theta x, D_\Theta x)} \leq \frac{a_1 a_2}{f_{12}}$, $\frac{(pa^T D_\Theta x, D_\Theta x)}{(FD_\Theta x, D_\Theta x)} \leq \frac{2a_2 a_3}{f_{12}}$ and $\frac{(qq^T D_\Theta x, D_\Theta x)}{(FD_\Theta x, D_\Theta x)} \leq \frac{a_2 a_3^2}{(a_2 + a_1 a_3) f_{12}}$.

Using the last inequalities and the maximum of the right hand side of (12), i.e. $\frac{x_1^2}{\Theta^2} \leq 2a_0\eta$, we get

$$\begin{aligned} u^2(x) \leq & \frac{2a_0}{f_{12}} \left(a_1 a_2 + 4a_0 a_2 a_3 \eta + \frac{4a_0^2 a_2 a_3^3}{a_2 + a_1 a_3} \eta^2 \right) \\ = & \frac{2a_0}{f_{12}} \left(a_1 a_2 + 4a_0 a_2 a_3 \eta + 4a_0^2 a_3^2 f_{12} \eta^3 \right) \\ = & \Phi(a_0) + 1. \end{aligned}$$

For the unique positive solution a_0 of the equation (15) inserted in last expression, we obtain that Inequality (16) holds and the Lemma is proved. ■

Lemma 4 *Let $F \in \mathcal{F}_S$. The CF defined as the positive solution of (5) is a continuous function for all x with $\Theta(0) = 0$. Moreover, the function Θ is differentiable for all $x \neq 0$.*

Proof. One repeats the proof of a similar assertion in [7] after formula (19). ■

Now we are able to state our main result:

Theorem 3 *Let $u(x) \in S$. Let $\Theta(x)$ be the positive solution of (4), where a_0 is a positive solution of (15) and the matrix F belongs to $\mathcal{F}_S$. Then the couple $(u(x), \Theta(x))$ solves the synthesis problem for the system (1).*

Proof. Due to Lemmas 1–4 all the conditions of Korobov's theorem [7, Theorem 1] hold. ■

Example 1 Let $x_0 = (1, 1)$ be the initial position. Let $a_1 = -1/10$, $a_2 = -1/1000$, $a_3 = -1/48$ and $f_{12} = 1$. The relation (7) is valid: $\frac{a_1}{a_2} a_3 + \frac{25}{16} = -\frac{25}{48} < 0$. The positional control takes the form

$$u(x) = \frac{1}{10} \frac{x_1}{\Theta(x)} - \frac{1}{1000} \frac{x_2}{\Theta^4(x)} - \frac{1}{48} \frac{x_1^3}{\Theta^3(x)} \tag{17}$$

The constant $a_0 = 268.261$ and the CF $\Theta(x)$ are the positive solution of Equation (15) given by $2a_0 \left(\frac{1}{1000} + \frac{a_0}{624000} + \frac{a_0^2}{80990208} \right) - 1 = 0$ and Equation (4) given by

$$596.522\Theta^8 - 100\Theta^6 x_1^2 - 2\Theta^3 x_1 x_2 - \frac{x_2^2}{48} = 0,$$

respectively. The value of $\Theta(x_0)$ is 0.4551194. The right hand side of (13), $\frac{\left(\frac{C}{1000} + \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{0.646232}{100 + 2C + \frac{1}{48} C^2}}{\frac{1}{10} + \frac{C}{200} + \frac{C^2}{12000}}$ achieves its maximum value $\gamma = 0.003948$ at $C =$

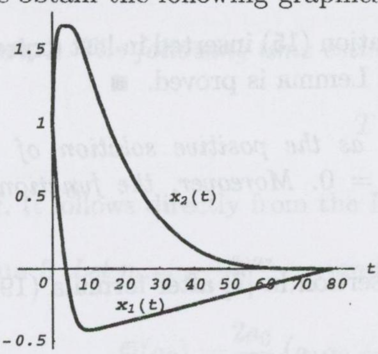
-158.128. The inequality (14) gives the following estimation for time: $T(x_0) \leq 115.276$.

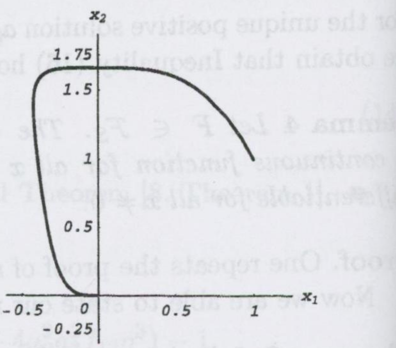
The trajectory $x(t)$ starting at $x_0 = (1,\, 1)$ with respect to the selected positional control (17) is obtained from the following system of equations:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{10}\frac{x_1}{\Theta(x)} - \frac{1}{1000}\frac{x_2}{\Theta^4(x)} - \frac{1}{48}\frac{x_1^3}{\Theta^3(x)},$$
$$\dot{x}_2 = x_1^3,$$
$$\dot{\Theta} = -\frac{10\Theta^6 x_1^2 + \frac{1}{5}\Theta^3 x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{1000} + \frac{13}{12}\Theta^4 x_1^4}{100\Theta^6 x_1^2 + 5\Theta^3 x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{12}},$$

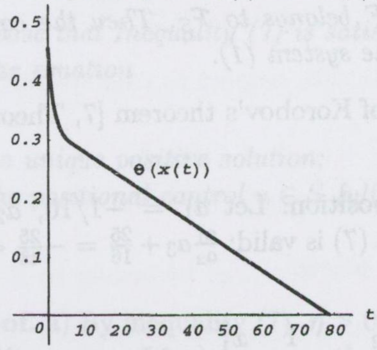
with initial position $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$ and $\Theta(x_0) = 0.4551194$.

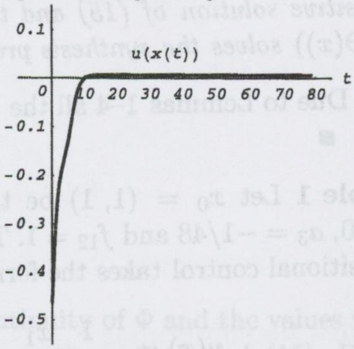
We obtain the following graphics:





Trajectory of $x_1(t)$ and $x_2(t)$. The phase trajectory.





The controllability function $\Theta(x(t))$. Positional control $u(x(t))$.

Acknowledgment

The author wish to express his gratitude to the Referee for his useful suggestions.

REFERENCES

1. Choque Rivero A.E., Korobov V.I., Skoryk V.O., Controllability function as time of motion I. (in Russian) // Mat. Fiz. Anal. Geom. - 2004. 11(2), 208-225.

2. Choque Rivero A.E., Korobov V.I., Skoryk V.O., Controllability function as time of motion II. (in Russian) // Mat. Fiz. Anal. Geom. - 2004. 11(3), 341–354.

3. Celikovsky S., Nijmeijer H., Equivalence of nonlinear systes // Kybernetika 6. - 1970, 173–188.

4. Celikovsky S., Arranda-Bricaire E. , Constructive nonsmooth stabilization of triangular systems // Systems Control Lett. - 1999. 36, 21–37.

5. Coron J.M., Control and Nonlinearity, Mathematical Surveys and Monographs, Vol 136, 2007.

6. Gantmacher F.R., The Theory Of Matrices, Vol I, AMS Chelsea Publishing - 1977.

7. Korobov V.I., A general approach to the solution of the problem of synthesizing bounded controls in a control problem // Mat. Sb. - 1979. 109(151), 582–606.

8. Korobov V.I., The Controllability Function Method (in Russian). R&C Dynamics, Moscow–Ighevsk, 2007.

9. Korobov V.I., Sklyar G.M., Time optimality and the power moment problem // Mat. Sb. - 1987. 134 (176) , 186–207.

10. Korobov V.I., Sklyar G.M., Methods for constructing positional controls, and a feasible maximum principle // Differential Equations. - 1990. 26(11), 1422–1431.

11. Korobov V.I., Ivanova T.I., Nonsmooth mapping of linear control systems // J. Optim. Theory Appl. - 2001. 108(2), 389–405.

12. Korobov V.I., Skorik V.A., Synthesis of inertial controls for time-dependent systems. (Russian) // Prikl. Mat. Mekh. - 2003. 67(5), 739–751.

13. Korobov V.I., Pavlichkov S.S., Global properties of the triangular systems in the singular case // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2008. 342 (2), 1426-1439.

14. Respondek W., Global aspects of linearization, equivalence to polynomial forms and decomposition of nonlinear control systems, in: M. Fliess, M. Hazewinkel (Eds.), Algebraic and Geometrical Methodos in Nonlinear Control Theory, Reidel, Dordderscht, 257–284, 1986.

15. Tsinias J., Partial-state global stabilization for general triangular systems // Systems Control Lett. - 1995. 24, 139–145.

Article history: Received: 30 November 2008; Final form: 23 March 2009; Accepted: 09 April 2009.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 531.36 № 850, 2009, с.52–56

Влияние диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерного вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с идеальной жидкостью

Ю.Н. Кононов, Н. В. Киселёва
Донецкий национальный университет, Украина

Оценено влияние диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерного вращения волчка Лагранжа с произвольной осесимметричной полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью. На примере эллипсоидальной полости проведены численные исследования областей устойчивости.

2000 Mathematics Subject Classification 70E06.

Волчок Лагранжа с полостью, содержащей жидкость, и находящийся в различных силовых полях и различных закреплениях, является хорошей физической и математической моделью для исследования поведения многих реальных объектов (летательных аппаратов, гироскопических устройств и др.).

Рассмотрим задачу о вращении в сопротивляющейся среде симметричного твёрдого тела с произвольной осесимметричной полостью, целиком заполненной идеальной однородной несжимаемой жидкостью. Сопротивляющаяся среда будет моделироваться диссипативным $\vec{M}_d = -fD\vec{\omega}$ $\quad (D = diag\,(D_1,\, D_1,\, D_3))$ моментом, а так же будем считать, что к внешней рамке безынерционного карданова подвеса приложен постоянный момент $\vec{M}_p = fP\vec{\gamma}$ [1]. Здесь $\vec{\omega}$ - угловая скорость волчка, $\vec{\gamma} = (\gamma_1,\, \gamma_2,\, \gamma_3)$ - единичный вектор вертикали, f - положительный параметр, D_1, D_3, P - постоянные. В невозмущенном движении твердое тело и жидкость вращаются как одно целое с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$.

Угловую скорость твёрдого тела представим в виде

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\Omega}.$$

Здесь Ω - угловая скорость твердого тела в возмущенном движении, являющаяся величиной первого порядка малости по сравнению с ω_0.

Уравнения движения волчка Лагранжа с идеальной жидкостью допускают решения [1]

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 1,\ \Omega_1 = \Omega_2 = 0,\ \omega_0 = P/D_3,\ S_{in} = 0, (i = 1, 2), \tag{1}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = -1,\ \Omega_1 = \Omega_2 = 0,\ \omega_0 = -P/D_3,\ S_{in} = 0, (i = 1, 2), \tag{2}$$

отвечающие равномерным вращениям волчка с угловой скоростью ω_0 вокруг вертикально расположенной оси динамической симметрии. При этом решению (1) соответствует случай спящего волчка (центр масс системы находится выше неподвижной точки $(\Gamma > 0)$), а решению (2) – случай статически устойчивого волчка (центр масс системы находится ниже неподвижной точки $(\Gamma < 0)$).

Линеаризованные уравнения движения волчка Лагранжа с полостью, содержащей идеальную жидкость, относительно невозмущенного движения имеют вид, аналогичный [1-3]

$$\begin{aligned} &A\dot{\Omega}_1 + (C-A)\omega_0\Omega_2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\dot{S}_{1n} - \omega_0 S_{2n}) = f\ P\gamma_1 - f\ D_1\Omega_1 + \Gamma\gamma_2, \\ &A\dot{\Omega}_2 - (C-A)\omega_0\Omega_1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\dot{S}_{2n} + \omega_0 S_{1n}) = f\ P\gamma_2 - f\ D_1\Omega_2 - \Gamma\gamma_1, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} N_n^2(\dot{S}_{1n} - \lambda_n S_{2n}) + a_n\dot{\Omega}_1 = 0, \\ N_n^2(\dot{S}_{2n} + \lambda_n S_{1n}) + a_n\dot{\Omega}_2 = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 = \omega_0\gamma_2 - \Omega_2, \\ \dot{\gamma}_2 = -\omega_0\gamma_1 + \Omega_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $J = diag\,(A,\,A,\,C)$ – тензор инерции твёрдого тела с жидкостью относительно неподвижной точки; $\Gamma = mgc$ – опрокидывающий $(\Gamma > 0)$ или восстанавливающий $(\Gamma < 0)$ момент; m – масса волчка; c – расстояние от неподвижной точки до центра масс системы; g – ускорение свободного падения; $S_{in}(t)$ – коэффициенты разложения относительной скорости жидкости в ряд по собственным векторыным функциям, κ_n – соответствующие им собственные числа $(\lambda_n = 2\omega_0/\kappa_n)$. Величины a_n и N_n^2 определяются только геометрией полости [3].

Исследуем устойчивость решений (1)-(2). Характеристическое уравнение для системы (3)-(5) имеет вид

$$\begin{aligned} A + (\ iC\omega_0 + fD_1)/(\lambda - i\omega_0) - (\Gamma - ifD_3\omega_0)/(\lambda - \ i\omega_0)^2 - \\ -\lambda\sum_{n=1}^{\infty}(E_n/(\lambda - \ i\lambda_n)) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $E_n = 2a_n^2/\ N_n^2$.

В большинстве практически важных случаев основной эффект влияния жидкости на движение твердого тела можно учесть, исследуя только основной тон колебания жидкости $(n = 1)$ [3]. В дальнейшем будем рассматривать именно этот случай.

Преобразуя уравнение (6), получим:

$$[A-E_1]\,\lambda^3+\left[fD_1+i(C\omega_0-A\omega_0\widetilde{\lambda}_1-2\omega_0(A-E_1))\right]\lambda^2+$$
$$+\left[((E_1-A\widetilde{\lambda}_1)+(C-A)(1+\widetilde{\lambda}_1))\omega_0^2-\Gamma+if\omega_0(D_3-D_1(1+\widetilde{\lambda}_1))\right]\lambda+ \qquad (7)$$
$$+f(D_3-D_1)\omega_0^2\widetilde{\lambda}_1+i(\omega_0^3\widetilde{\lambda}_1(A-C)+\Gamma\omega_0\widetilde{\lambda}_1)=0.$$

Для существования асимптотически устойчивых решений необходимо и достаточно, чтобы матрица пятого порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_2'' & -a_1' & a_0'' & 0 \\ 0 & 1 & -a_2'' & -a_1' & a_0'' \\ 0 & 0 & a_2' & -a_1'' & -a_0' \\ 0 & a_2' & -a_1'' & -a_0' & 0 \\ a_2' & -a_1'' & a_0' & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

составленная из коэффициентов уравнения (7), была иннорно-положительной [4].

Здесь

$$a_2'=\frac{fD_1}{A^*},\quad a_2''=\frac{C\omega_0-A\omega_0\widetilde{\lambda}_1-2\omega_0A^*}{A^*},$$

$$a_1'=\frac{(E_1-A\widetilde{\lambda}_1)\omega_0^2+(C-A)(1+\widetilde{\lambda}_1)\omega_0^2-\Gamma}{A^*},\quad a_1''=\frac{fD_3\omega_0-fD_1\omega_0(1+\widetilde{\lambda}_1)}{A^*},$$

$$a_0'=\frac{f(D_3-D_1)\omega_0^2\widetilde{\lambda}_1}{A^*},\quad a_0''=\frac{\omega_0^3\widetilde{\lambda}_1(A-C)+\Gamma\omega_0\widetilde{\lambda}_1}{A^*},$$

$$\widetilde{\lambda}_1=\lambda_1/\omega_0,\quad A^*=A-E_1.$$

Условия асимптотической устойчивости решения (1) представляются в виде системы двух неравенств:

$$\omega_0^2\left(D_1^2E_1\widetilde{\lambda}_1(\lambda_1-1)+D_1D_3(C-E_1\widetilde{\lambda}_1)-D_3^2A^*-D_1^2\Gamma>0,\right. \qquad (9)$$

$$\widetilde{\lambda}_1(\widetilde{\lambda}_1-1)^2\left[\left(A^*D_3^3+(A\widetilde{\lambda}_1-A^*-C)D_1D_3^2-C(\widetilde{\lambda}_1-1)D_1^2D_3\right)\omega_0^2+\right. \qquad (10)$$
$$\left.+(D_1\widetilde{\lambda}_1-D_1+D_3)\Gamma D_1^2\right]<0.$$

Устойчивость решения (2) получается из приведенных выше неравенств при замене Γ на $-\Gamma$.

При отсутствии в твёрдом теле жидкости в неравенствах (9)-(10) полагаем $E_1=0$ и $\lambda_1=0$. В этом случае второе неравенство вырождается, а первое совпадает с [2].

Если отсутствует постоянный момент $\vec{M}_p=fP\vec{\gamma}$, то, положив в формулах (9)-(10) $D_3=0$, получаем неравенства, совпадающие с [5].

На примере эллипсоидальной полости с полуосями a и c были исследованы неравенства (9) и (10). Следует отметить, что для эллипсоидальной полости из бесконечного спектра собственных частот λ_n возбуждается единственная гармоника λ_1 ($E_n = 0$ для $n \neq 1$). Значения коэффициентов A, C, E_1 и λ_1 для волчка Лагранжа с эллипсоидальной полостью имеют вид [2]

$$\lambda_1 = \frac{2\omega_0}{1+\beta^2}, \quad E_1 = 2\frac{J\beta^3}{1+\beta^2}, \quad A = A_0 + \frac{1}{2}J\beta\left(1+\beta^2\right),$$

$$C = C_0 + J\beta, \quad J = \frac{8}{15}\pi\rho a^5,$$

где A_0 и C_0 – главный экваториальный и осевой моменты инерции твёрдого тела; m_0 – масса твёрдого тела; $\beta = c/a$ (полуось c направлена по оси симметрии тела).

Были проведены численные расчёты для следующих значений параметров: $\beta \in [0;1]$, $\omega_0^2/\Gamma \in [-50;100]$, $D_{13} = D_1/D_3 \in [0,4;4\cdot 10^3]$, $A_0 = C_0 = 0$, $J = 1$.

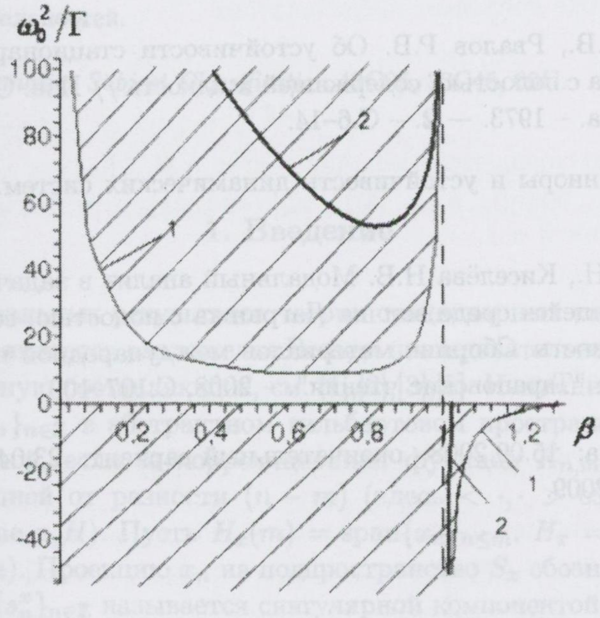


Рис. 1: Области устойчивости

На рис. 1 представлены границы областей устойчивости (зависимость ω_0^2/Γ от β), вычисленные для двух значений параметра D_{13}. Кривые 1 соответствует случаю $D_{13} = 4$, кривые 2 – $D_{13} = 40$. Области устойчивости заштрихованы.

На основании проведенных исследований и численных расчётов можно сделать следующие выводы:

1. При $\beta > 1$ асимптотическая устойчивость возможна только при действии восстанавливающего момента ($\Gamma < 0$).

2. Равномерное вращение волчка Лагранжа асимптотически устойчиво при отсутствии опрокидывающего момента ($\Gamma = 0$), "поджатой"полости ($0 < \beta < 1$) и $D_{13} \geq 1$.

3. При $\beta = 1$ ($\tilde{\lambda}_1 = 1$) левая часть неравенства (10) обращается в нуль, что соответствует отсутствию асимптотической устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карапетян А.В., Лагутина И.С. О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа // Изв. СССР. Механика твёрдого тела. – 1998. – **5**. – С.29–33.

2. Кононов Ю.Н., Киселёва Н.В. Об устойчивости вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с полостью, содержащей идеальную жидкостью. Вісник Донецького ун-ту. Сер.А. Природничі науки. – 2007. – **1**. – С.48–51.

3. Докучаев Л.В., Рвалов Р.В. Об устойчивости стационарного вращения твёрдого тела с полостью, содержащей жидкость // Изв. СССР. Механика твёрдого тела. – 1973. — **2**. – С.6–14.

4. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем. - М.: Наука, – 1979. – 304с.

5. Кононов Ю.Н., Киселёва Н.В. Модальный анализ в задаче о вращении в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с полостью, содержащей идеальную жидкость. Сборник материалов международной научной школы-конференции "Тараповские чтения". – 2008, С.107–109.

Статья получена: 15.09.2008; окончательный вариант: 23.04.2009; принята: 27.04.2009.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.948 № 850, 2009, с.57–70

Разложение Вольда для полиномиальных последовательностей

С.М. Загороднюк

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

В работе получено разложение Вольда для полиномиальных последовательностей в гильбертовом пространстве H, т.е. последовательностей вида $x_n = p_n(A)x_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где A - самосопряженный оператор в H, а p_n - ортогональные многочлены на вещественной оси. Также вводится и изучается понятие индекса сингулярности для полиномиальных последовательностей.

2000 Mathematics Subject Classification 42C05, 33C45, 60G.

1. Введение

Одним из центральных результатов теории стационарных случайных последовательностей является разложение Вольда последовательности на регулярную и сингулярную составляющие, см. [1],[2],[3],[8]. Напомним, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в абстрактном гильбертовом пространстве H называется стационарной, если ее корреляционная функция $K_{n,m} :=< x_n, x_m >$ является функцией от разности $(n-m)$ (здесь $< \cdot, \cdot >$ означает скалярное произведение в H). Пусть $H_x(m) = \mathrm{span}\{x_n\}_{n\le m}$, $H_x = \mathrm{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $S_x = \cap_{m\in\mathbb{Z}} H_x(m)$. Проекцию x_n на подпространство S_x обозначим s_n^x. Последовательность $\{s_n^x\}_{n\in\mathbb{Z}}$ называется сингулярной компонентой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ называется сингулярной, если $H_x = S_x$. Две стационарные последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ называются стационарно связанными, если их взаимная корреляционная функция $R_{n,m} :=< x_n, u_m >$ зависит лишь от разности $(n-m)$. Стационарная последовательность $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ называется подчиненной стационарной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, если последовательности $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ стационарно связаны и элементы последовательности $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ лежат в H_x. Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ называют фундаментальной, если $K_{n,m} = \delta_{n,m}$.

Произвольная несингулярная стационарная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$

допускает представление следующего вида:

$$x_n = s_n + \sum_{m=0}^{\infty} c_m u_{n-m}, \tag{1}$$

где s_n, u_n, c_n обладают свойствами:
1) Последовательность $\{s_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ сингулярна и подчинена $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$;
2) Последоватсльность $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является фундаментальной и подчиненной $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$;
3) u_n лежит в пространстве $H_x(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$;
4) $c_0 > 0$ и $c_n \in \mathbb{C}$, $n \neq 0$.

Разложение вида (1) называют разложением Вольда. При этом $s_n = s_n^x$.

Стационарная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ называется регулярной, если она ненулевая и $s_n^x = 0$. Для таких последовательностей в разложении (1) остается только второе слагаемое.

Рассмотрим теперь последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H и, как и раньше, определим корреляционную функцию формулой $K_{n,m} :=< x_n, x_m >$. Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ называется полиномиальной, если она допускает представление

$$x_n = p_n(A)x_0 = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) dE_\lambda x_0, \tag{2}$$

где A - линейный самосопряженный оператор в H, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ - его ортогональное разложение единицы, а $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - система ортогональных многочленов на вещественной оси.

Напомним, что набор вещественных многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $\deg p_n = n$ и p_n имеет положительный старший коэффициент, называется системой ортогональных многочленов на вещественной оси относительно $\sigma(x)$, если выполняются соотношения:

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) p_m(\lambda) d\sigma(\lambda) = 0, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+ : \ n \neq m, \tag{3}$$

где $\sigma(\lambda)$ - неубывающая функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}$.

Предистория возникновения последовательностей вида (2) описана в статье [4], см. также ссылки в ней.

Нашей задачей в данной работе будет получить аналог разложения (1) для полиномиальных последовательностей.

Обозначения. Как обычно, мы обозначаем $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ множества комплексных, вещественных, целых и натуральных чисел, соответственно, а также $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Посредством $< \cdot, \cdot >_H$, $\| \ \|_H$ мы обозначаем скалярное произведение и норму в гильбертовом пространстве H. Если это не приводит к недоразумению, индекс H мы не пишем. Посредством $\mathrm{Lin}\, M$ и $\mathrm{span}\, M$ обозначены линейная оболочка и замкнутая линейная оболочка элементов множества M в некотором гильбертовом пространстве H, соответственно. $\overline{M}$

означает замыкание множества $M \subseteq H$ в метрике H. Если L - подпространство гильбертового пространства H, то P_L обозначает оператор ортогонального проектирования в H на подпространство L. Встречающиеся в работе гильбертовы пространства предполагаются сепарабельными.

2. Разложение Вольда

Рассмотрим полиномиальную последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Введем следующие обозначения:

$$H_x(n) = \operatorname{span}\{x_k\}_{k\geq n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+; \quad H_x = H_x(0); \quad S_x = \cap_{n\in\mathbb{Z}_+} H_x(n). \tag{4}$$

Легко проверяется, что множество S_x является подпространством. Очевидно, что

$$H_x(n) \supseteq H_x(m), \qquad n \leq m. \tag{5}$$

Напомним, что ортогональные многочлены $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ удовлетворяют следующему разностному соотношению (см. [5]):

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}p_{n-1}(\lambda) - b_n p_n(\lambda) + c_n p_{n+1}(\lambda)\right) = \lambda p_n(\lambda), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

где $c_n > 0,\ a_n > 0,\ b_n \in \mathbb{R}\ (n \in \mathbb{Z}_+),\ c_{-1} = 0,\ p_{-1} = 0.$

Записывая это соотношение с операторным аргументом, применяя к вектору x_0 и учитывая соотношение (2) мы придем к следующему равенству:

$$Ax_n = \frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}x_{n-1} - b_n x_n + c_n x_{n+1}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{7}$$

где A - самосопряженный оператор из определения полиномиальной последовательности.

Определение 1 *Полиномиальную последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H мы назовем* **сингулярной**, *если $H_x = S_x$.*

Определение 2 *Полиномиальную последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H будем называть* **регулярной**, *если она ненулевая и $S_x = \{0\}$.*

Обозначим

$$x_n^s = P_{S_x} x_n, \quad x_n^r = P_{H_x \ominus S_x} x_n \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{8}$$

Первую из двух последовательностей в (8) мы будем называть **сингулярной компонентой** последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Из соотношений (5),(7) следует, что

$$Ax_k \in H_x(k-1) \subseteq H_x(n-1), \qquad k \geq n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Отсюда получаем, что

$$A\,\mathrm{Lin}\{x_k\}_{k\geq n} \subseteq H_x(n-1), \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

Если оператор A непрерывен, то из (10) следует включение

$$AH_x(n) \subseteq H_x(n-1), \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{11}$$

Число $n_s = \sup\{n\in\mathbb{Z}_+ : H_x = H_x(n)\}$ мы назовем **индексом сингулярности** полиномиальной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ $(0\leq n_s\leq\infty)$.

Последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H будем называть **фундаментальной**, если ее корреляционная функция $K^y_{n,m} :=< y_n, y_m >$, $n,m\in\mathbb{Z}_+$, имеет вид $K^y_{n,m}=\delta_{n,m}$.

Используя теорему 1 из [4] мы можем утверждать, что фундаментальная последовательность будет полиномиальной с произвольным выбором системы ортогональных многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ (см. представление (2)), если только для этой системы многочленов параметры a_n в рекуррентном соотношении (6) постоянны: $a_n=a>0$, $n\in\mathbb{N}$. Действительно, соотношение (19) из теоремы 1 в работе [4] имеет следующий вид:

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}K_{n-1,m}-b_nK_{n,m}+c_nK_{n+1,m}\right)=$$

$$=\frac{1}{a_m}\left(c_{m-1}K_{n,m-1}-b_mK_{n,m}+c_mK_{n,m+1}\right), \qquad n,m\in\mathbb{Z}_+, \tag{12}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+},\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - некоторые последовательности положительных чисел, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - некоторая последовательность вещественных чисел, $c_{-1}=0$, и $K_{-1,m}=K_{n,-1}=0$ $(n,m\in\mathbb{Z}_+)$. В нашем случае оно проверяется непосредственно.

Заметим, что для ортонормированных систем многочленов $a_n=1$, $n\in\mathbb{N}$. Отметим также, что для фундаментальной последовательности $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ выполняется соотношение

$$0\neq y_0\perp H_y(n), \qquad n\geq 1.$$

Следовательно, для фундаментальной последовательности ее индекс сингулярности n_s равен нулю.

Утверждение 1 *Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной последовательностью в гильбертовом пространстве H. Пусть её индекс сингулярности равен n_s, $0\leq n_s\leq\infty$. Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является сингулярной в том и только том случае, когда $n_s=\infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является сингулярной, то $H_x=\cap_{n\in\mathbb{Z}_+}H_x(n)$ и значит $H_x\subseteq H_x(n)$ для всех $n\in\mathbb{Z}_+$. Следовательно, $H_x=H_x(n)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, и $n_s=\infty$.

Наоборот, если $n_s = \infty$, то существует последовательность целых индексов $n_k,\ k \in \mathbb{N}$, таких, что

$$H_x(n_k) = H_x, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В силу соотношения (5) отсюда следует, что $H_x(n) = H_x, \quad n \in \mathbb{Z}_+$. Значит $S_x = \cap_{n\in\mathbb{Z}_+} H_x(n) = H_x$, и последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является сингулярной. □

Пример 1. Примером сингулярной полиномиальной последовательности является последовательность в гильбертовом пространстве H вида $\{x_0, x_0, x_0, ...\}$ $(x_0 \in H)$. В силу уже упоминавшейся выше теоремы 1 в [4] такая последовательность будет полиномиальной с произвольной системой многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ (см. (2)) таких, что для коэффициентов рекуррентного соотношения (6) выполнено

$$\frac{c_{n-1} - b_n + c_n}{a_n} = \frac{c_{m-1} - b_m + c_m}{a_m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

В самом деле, последнее соотношение эквивалентно в данном случае соотношению (12), поскольку корреляционная функция $K_{n,m} = \|x_0\|^2 = \text{const}$. В частности, такая последовательность будет сингулярной полиномиальной последовательностью с многочленами Чебышева 2-го рода в представлении (2).

Утверждение 2 *Пусть* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *является полиномиальной последовательностью в гильбертовом пространстве* H. *Предположим, что для некоторого натурального числа* r *справедливо включение*

$$x_r \in \text{Lin}\{x_0, ..., x_{r-1}\} (= \text{span}\{x_0, ..., x_{r-1}\}). \tag{13}$$

Тогда последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *является сингулярной и расположена в конечномерном подпространстве* $H_r = \text{span}\{x_0, ..., x_{r-1}\}$. *При этом оператор* A *в представлении (2) может быть выбран ограниченным.*

Доказательство. Если выполнено соотношение (13), то в силу соотношения (7) мы можем утверждать, что

$$Ax_k \in \text{Lin}\{x_0, ..., x_{r-1}\}, \qquad 0 \le k \le r - 1. \tag{14}$$

Значит подпространство H_r из условия утверждения (очевидно, конечномерное) приводит оператор A. В силу представления (2) это означает, что вся последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ лежит в H_r. При этом оператор A можно рассматривать на H_r как ограниченный оператор, а затем на $H \ominus H_r$ продолжить его нулем.

Предположим, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ не является сингулярной. Согласно утверждения 1 это означает, что $n_s < \infty$. Для произвольного числа $m > n_s$ выполнено $H_x(m) \ne H_x = H_r$. Найдется такое число $m_0 > n_s$, что будет выполнено $H_x(m_0 - 1) = H_x(m_0)$ в силу конечности размерности

H_x. Из соотношения (11) тогда следует, что $AH_x(m_0) \subseteq H_x(m_0)$. Но в силу соотношения (7) тогда выполнено

$$x_{m_0-1}, x_{m_0-2}, ..., x_0 \in H_x(m_0),$$

что противоречит тому, что $H_x(m_0) \neq H_x$. □

Оказывается, что в отличие от случая стационарной последовательности, справедливость для некоторого натурального r включения

$$x_r \in \operatorname{span}\{x_{r+1}, x_{r+2}, ...\}, \tag{15}$$

не обеспечивает сингулярности последовательности. Мы сейчас покажем, что индекс сингулярности полиномиальной последовательности может принимать ненулевое конечное значение.

Пример 2. Рассмотрим гильбертово пространство H и некоторый ортонормированный базис $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в нем. Положим

$$x_0 = -e_0, \quad x_k = \frac{e_{k-1}}{\sqrt{(k-1)!}} - \frac{e_k}{\sqrt{k!}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = e_0 - \frac{e_n}{\sqrt{n!}} \to e_0, \tag{17}$$

при $n \to \infty$. Следовательно,

$$x_0 \in H_x(1). \tag{18}$$

При этом

$$x_0 \perp H_x(k), \quad k \geq 2. \tag{19}$$

Если мы покажем, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной, то соотношения (18),(19) будут означать, что ее индекс сингулярности равен единице.

Вычислим корреляционную функцию $K_{n,m}$ последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Заметим прежде всего, что

$$K_{n,m} = 0, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+ : \ |n-m| > 1. \tag{20}$$

Непосредственно вычисляем

$$K_{0,0} = 1, \quad K_{n,n} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{21}$$

$$K_{n,n+1} = K_{n+1,n} = -\frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{22}$$

Проверим выполнение соотношения (12). Положим для простоты $a_n = 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Достаточно проверить выполнение (12) для $n, m \in \mathbb{Z}_+ : \ n \geq m$. Затем можно взять сопряжение от обеих частей (12) и воспользоваться тем, что $K_{n,m} = K_{m,n}$ в нашем случае.

Согласно соотношения (20) и того, что $K_{-1,m} = K_{n,-1} = 0$ $(n, m \in \mathbb{Z}_+)$, для множества индексов

$$\Omega = \{n, m \in \mathbb{Z}_+ : \ |n-m| > 1, \ |n-m-1| > 1, \ |n-m+1| > 1\}$$

равенство (12) превращается в нулевое тождество.

Возьмем теперь $n, m \in \mathbb{Z}_+ : \ n \geq m$, не принадлежащие множеству Ω. Возможны следующие варианты:

а) $|n-m| = n-m \leq 1$. Это значит $n = m$ или $n = m+1$;

б) $|n-m-1| \leq 1$. Это означает, что $n = m$ или $n = m+1$, или $n = m+2$;

в) $|n-m+1| = n-m+1 \leq 1$, т.е. $n = m$.

Для случая $n = m \in \mathbb{Z}_+$, соотношение (12) превращается в тождество.

Для случая $n = m+1$, $m \in \mathbb{Z}_+$, соотношение (12) с учетом (18) можно преобразовать к виду

$$c_m(K_{m+1,m+1} - K_{m,m}) = (b_{m+1} - b_m)K_{m+1,m}, \qquad m \in \mathbb{Z}_+ \tag{23}$$

А в случае $n = m+2$, $m \in \mathbb{Z}_+$, соотношение (12) можно записать в виде

$$c_{m+1}K_{m+1,m} = c_m K_{m+2,m+1}, \qquad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{24}$$

С учетом (21),(22) мы перепишем соотношения (23),(24) в следующем виде:

$$c_{m+1} = \frac{1}{m+1}c_m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

$$b_1 = b_0 - c_0, \qquad b_{m+1} = b_m + c_m\left(m - \frac{1}{m+1}\right), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{26}$$

Положив $c_0 = 1$, из (25) мы получаем, что

$$c_m = \frac{1}{m!}, \qquad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{27}$$

Полагая $b_0 = 1$, получаем, что $b_1 = 0$ и

$$b_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!}\left(j - \frac{1}{j+1}\right), \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

Применяя теорему 1 из [4] мы заключаем, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной. При этом ее индекс сингулярности равен единице.

Продолжим изучение полиномиальной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, рассмотренной в начале данного параграфа. Будем полагать оператор A непрерывным и (если требуется, продолжая оператор A по непрерывности) $D(A) = H$. Выберем произвольный элемент $x \in S_x$. Поскольку в этом случае $x \in$

$H_x(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то используя включение (11) получаем $Ax \in S_x$. Итак, справедливо включение

$$AS_x \subseteq S_x. \tag{29}$$

Поскольку оператор A самосопряженный, то имеет место также включение

$$A(H \ominus S_x) \subseteq H \ominus S_x. \tag{30}$$

Из соотношения (29) следует, что

$$A^n P_{S_x} = P_{S_x} A^n P_{S_x} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+),$$

и значит

$$p_n(A) P_{S_x} = P_{S_x} p_n(A) P_{S_x} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{31}$$

Аналогичным образом получаем

$$p_n(A) P_{H\ominus S_x} = P_{H\ominus S_x} p_n(A) P_{H\ominus S_x} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{32}$$

Используя равенства (31),(32), для сингулярной компоненты последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ мы можем записать

$$\begin{aligned} x_n^s &= P_{S_x} x_n = P_{S_x} p_n(A) x_0 = P_{S_x} p_n(A)(P_{S_x} x_0 + P_{H\ominus S_x} x_0) = \\ &= P_{S_x} p_n(A) P_{S_x} x_0 + P_{S_x} p_n(A) P_{H\ominus S_x} x_0 = p_n(A) P_{S_x} x_0 + \\ &\quad + P_{S_x} P_{H\ominus S_x} p_n(A) P_{H\ominus S_x} x_0 = p_n(A) x_0^s. \end{aligned} \tag{33}$$

Аналогично проверяется, что

$$x_n^r = p_n(A) x_0^r. \tag{34}$$

Соотношения (33),(34) показывают, что последовательности $\{x_n^s\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ являются полиномиальными. При этом они отвечают той же системе многочленов и оператору A, что и последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

Определение 3 *Две полиномиальные последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H, отвечающие одной и той же системе многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^\infty$ в представлении (2), называются* **полиномиально связанными**, *если их взаимная корреляционная функция $R_{n,m} := < x_n, u_m >$ удовлетворяет соотношению*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a_n}(c_{n-1} R_{n-1,m} - b_n R_{n,m} + c_n R_{n+1,m}) = \\ &= \frac{1}{a_m}(c_{m-1} R_{n,m-1} \; b_m R_{n,m} + c_m R_{n,m+1}), \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \tag{35}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ из рекуррентного соотношения (6), $c_{-1} = 0$, $R_{-1,m} = R_{n,-1} = 0$ $(n,m \in \mathbb{Z}_+)$.

Определение 4 *Полиномиальная последовательность* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *называется* **подчиненной** *полиномиальной последовательности* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, *если последовательности* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *и* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *полиномиально связаны и элементы последовательности* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *лежат в* H_x.

Лемма 1 *Рассмотрим полиномиальную последовательность* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *в гильбертовом пространстве* H. *Имеют место следующие соотношения:*

$$S_x = P_{S_x}H_x(n) = H_{x^s}(n) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \tag{36}$$

$$H_x(n) \ominus S_x = P_{H_x\ominus S_x}H_x(n) = H_{x^r}(n) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{37}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $x^s_k = P_{S_x}x_k \in P_{S_x}H_x(n)$, $k \geq n$, то

$$\mathrm{Lin}\{x^s_k\}_{k\geq n} \subseteq P_{S_x}H_x(n);$$

$$H_{x^s}(n) \subseteq P_{S_x}H_x(n) = S_x.$$

Выберем теперь произвольный элемент $x \in P_{S_x}H_x(n)$. Найдется элемент $\widehat{x} \in H_x(n)$: $x = P_{S_x}\widehat{x}$. Найдется последовательность $x^j \in \mathrm{Lin}\{x_k\}_{k\geq n}$, $j \in \mathbb{N}$: $x^j \to \widehat{x}$, при $j \to \infty$. Тогда $P_{S_x}x^j \to P_{S_x}\widehat{x} = x$, при $j \to \infty$. Поскольку $P_{S_x}x^j \in \mathrm{Lin}\{x^s_k\}_{k\geq n}$, то мы заключаем, что $x \in H_{x^s}(n)$. Таким образом, справедливо включение

$$P_{S_x}H_x(n) \subseteq H_{x^s}(n).$$

Равенство (36) доказано. Равенство (37) проверяется аналогичным образом. □

Из соотношения (36) следует, что

$$H_{x^s} = S_x = S_{x^s}. \tag{38}$$

Это означает, что сингулярная компонента $\{x^s_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является сингулярной последовательностью.

Используя равенство (37), для последовательности $\{x^r_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ мы можем записать

$$S_{x^r} = \cap_{n\in\mathbb{Z}_+}H_{x^r}(n) = \cap_{n\in\mathbb{Z}_+}P_{H_x\ominus S_x}H_x(n) \subseteq \cap_{n\in\mathbb{Z}_+}H_x(n) = S_x;$$

$$S_{x^r} = \cap_{n\in\mathbb{Z}_+}P_{H_x\ominus S_x}H_x(n) \subseteq H_x \ominus S_x.$$

Следовательно, выполнено равенство

$$S_{x^r} = \{0\}. \tag{39}$$

В том случае, когда последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ не является сингулярной, последовательность $\{x^r_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ будет ненулевой, а значит регулярной.

Для последовательностей $\{x^s_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ их взаимная корреляционная функция равна

$$R_{n,m} = < x^s_n, x_m > = < p_n(A)x^s_0, p_m(A)x_0 > = < p_n(A)p_m(A)x^s_0, x_0 > .$$

Подставляя в левую или правую часть соотношения (35) данное выражение для $R_{n,m}$ и используя рекуррентное соотношение (6), мы в обоих случаях получим $< Ap_n(A)p_m(A)x_0^s, x_0 >$. Следовательно, последовательность $\{x_n^s\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ подчинена последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

Аналогичным образом проверяется, что последовательность $\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ подчинена последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

В дальнейших рассмотрениях нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2 *Рассмотрим полиномиальную последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H и предположим, что самосопряженный оператор A в ее представлении (2) является ограниченным. Следующие условия являются равносильными:*
(i) $Ax_{n_0} \in H_x(n_0)$ *для некоторого* $n_0 \in \mathbb{N}$;
(ii) $H_x = H_x(n_0)$, $n_0 \in \mathbb{N}$;
(iii) $x_{n_0-1} \in H_x(n_0)$, $n_0 \in \mathbb{N}$.

Доказательство.
(i) $\Rightarrow$ (ii). Из соотношения (7) последовательно получаем, что x_{n_0-1}, x_{n_0-2}, ..., x_0, принадлежат $H_x(n_0)$. Значит $H_x = H_x(n_0)$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Это следствие очевидно.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Следует из соотношения (7). □

Продолжим изучение полиномиальной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, рассмотренной выше, предполагая, что она не является сингулярной. Как было отмечено выше, в этом случае полиномиальная последовательность $\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ будет регулярной. Согласно утверждения 1 это значит, что ее индекс сингулярности $n_{r,s}$ конечен.

Утверждение 3 *Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - несингулярная полиномиальная последовательность в гильбертовом пространстве H, с непрерывным оператором A в ее разложении (2). Пусть $\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - полиномиальная последовательность, определенная в (8). Тогда выполнено следующее неравенство:*

$$n_{r,s} \geq n_s, \tag{40}$$

где $n_s, n_{r,s}$ - индексы сингулярности последовательностей $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, соответственно.

Доказательство. Из определения последовательностей $\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{x_n^s\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в (8) непосредственно следует, что

$$\mathrm{Lin}\{x_k\}_{k\geq n} \subseteq \mathrm{Lin}\{x_k^r\}_{k\geq n} + \mathrm{Lin}\{x_k^s\}_{k\geq n} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{41}$$

Значит

$$H_x(n) \subseteq \overline{\mathrm{Lin}\{x_k^r\}_{k\geq n} + \mathrm{Lin}\{x_k^s\}_{k\geq n}} = \overline{\mathrm{span}\{x_k^r\}_{k\geq n} + \mathrm{span}\{x_k^s\}_{k\geq n}} =$$

$$= \overline{H_{x^r}(n) + H_{x^s}(n)}, \tag{42}$$

где предпоследнее равенство следует из того, что последовательности $\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{x_n^s\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ расположены во взаимно ортогональных подпространствах.

Если для некоторого $n \in \mathbb{Z}_+$ выполнено равенство $H_x(n) = H_x$, то

$$H_x \subseteq H_{x^r}(n) + H_{x^s}(n).$$

Поскольку

$$H_{x^r}(n) \subseteq H_x \ominus S_x, \quad H_{x^s}(n) \subseteq S_x,$$

то

$$H_{x^r}(n) = H_x \ominus S_x \supseteq H_{x^r}.$$

Поскольку $H_{x^r}(n) \subseteq H_{x^r}$, то мы приходим к равенству

$$H_{x^r}(n) = H_{x^r},$$

из которого и следует неравенство (40). □

Из леммы 2 и определения индекса сингулярности следует, что

$$Ax_k^r \notin H_{x^r}(k), \quad k > n_{r,s}; \qquad Ax_{n_{r,s}}^r \in H_{x^r}(n_{r,s}) = H_{x^r}. \tag{43}$$

Обозначим

$$u_{k-1-n_{r,s}} := \frac{Ax_k^r - P_{H_{x^r}(k)}(Ax_k^r)}{\|Ax_k^r - P_{H_{x^r}(k)}(Ax_k^r)\|} \perp H_{x^r}(k), \quad k > n_{r,s}. \tag{44}$$

Последовательность $\{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ является фундаментальной. Действительно, в силу соотношения (9), записанного для последовательности $\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, выполняется включение

$$u_{l-1-n_{r,s}} \in H_{x^r}(l-1) \subseteq H_{x^r}(k), \quad l > k > n_{r,s}. \tag{45}$$

Из соотношений (44),(45) следует, что

$$u_{k-1-n_{r,s}} \perp u_{l-1-n_{r,s}}, \quad l > k > n_{r,s}, \tag{46}$$

и значит последовательность $\{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ фундаментальна.

Подпространство $H_{x^r}(n_{r,s}) \ominus H_{x^r}(k)$, $k > n_{r,s}$, как нетрудно видеть из определения пространств $H_{x^r}(n)$, имеет размерность не выше $k - n_{r,s}$. При этом вектора $\{u_0, u_1, ..., u_{k-n_{r,s}-1}\}$, принадлежат $H_{x^r}(n_{r,s}) \ominus H_{x^r}(k)$, и значит образуют в нем ортонормированный базис. Следовательно, размерность $H_{x^r}(n_{r,s}) \ominus H_{x^r}(k)$ равна $k - n_{r,s}$. Обозначим

$$H_u = \operatorname{span}\{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}.$$

Мы можем записать

$$H_{x^r} \ominus H_{x^r}(k) = H_{x^r}(n_{r,s}) \ominus H_{x^r}(k) \subseteq H_u \subseteq H_{x^r}. \tag{47}$$

Значит
$$H_{x^r} \ominus H_u \subseteq H_{x^r}(k), \quad k > n_{r,s}. \tag{48}$$
Выберем произвольный элемент $x \in H_{x^r} \ominus H_u$. Из (48) следует, что $x \in H_{x^r}(k)$, $k > n_{r,s}$, и значит $x \in \cap_{k \in \mathbb{Z}_+} H_{x^r}(k) = S_{x^r} = \{0\}$. Следовательно, $H_{x^r} \ominus H_u = \{0\}$,
$$H_u = H_{x^r}. \tag{49}$$
В силу последнего соотношения мы можем записать следующее равенство:
$$x_n^r = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{n,j} u_j, \tag{50}$$
где $\beta_{n,j} \in \mathbb{C}$. В силу того, что $u_{k-1-n_{r,s}} \perp H_{x^r}(k)$, при $k > n_{r,s}$ (см. (44)), при $n \geq n_{r,s} + 1$, выполнено
$$\beta_{n,j} = 0, \quad 0 \leq j \leq n - 1 - n_{r,s}. \tag{51}$$
Полагая $\beta_{n,j}$ с отрицательными индексами j нулевыми, мы можем переписать соотношение (50) в следующем виде:
$$x_n^r = \sum_{j=n-n_{r,s}}^{\infty} \beta_{n,j} u_j. \tag{52}$$
В силу соотношения (9), записанного для последовательности $\{x_n^r\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, и определения векторов u_j выполняется
$$\beta_{n,n-n_{r,s}} \neq 0, \qquad n \geq n_{r,s}. \tag{53}$$
Как было показано выше, последовательность $\{x_n^r\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной. Ее корреляционная функция $K_{n,m}^r$ в силу представления (2) имеет вид
$$K_{n,m}^r = (x_n^r, x_m^r) = \int_{-\infty}^{\infty} p_n(\lambda) p_m(\lambda) d(E_\lambda x_0^r, x_0^r), \tag{54}$$
а значит является вещественнозначной функцией и
$$K_{n,m}^r = K_{m,n}^r. \tag{55}$$
Корреляционная функция вычисляется с помощью (52) непосредственно:
$$K_{n,m}^r = \sum_{j=n-n_{r,s}}^{\infty} \beta_{n,j} \overline{\beta_{m,j}}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+ : \ n \geq m. \tag{56}$$
Подставим теперь это выражение в соотношение (12) для $n, m \in \mathbb{Z}_+ : \ n \geq m + 1$ (для $n = m$ оно обращается в тождество, а при $n < m$ мы получим то же самое выражение с точностью до переобозначения индексов):
$$c_{n-1} \sum_{j=n-1-n_{r,s}}^{\infty} \beta_{n-1,j} \overline{\beta_{m,j}} - b_n \sum_{j=n-n_{r,s}}^{\infty} \beta_{n,j} \overline{\beta_{m,j}} + c_n \sum_{j=n+1-n_{r,s}}^{\infty} \beta_{n+1,j} \overline{\beta_{m,j}} =$$

$$= \frac{a_n}{a_m}\left(c_{m-1} \sum_{j=n-n_{r,s}}^{\infty} \beta_{n,j}\overline{\beta_{m-1,j}} - b_m \sum_{j=n-n_{r,s}}^{\infty} \beta_{n,j}\overline{\beta_{m,j}} + c_m \sum_{j=n-n_{r,s}}^{\infty} \beta_{n,j}\overline{\beta_{m+1,j}} \right), \tag{57}$$

где $\beta_{n,j}$ с отрицательными индексами считаются нулевыми. Предполагая дополнительно, что $a_n \equiv \mathrm{const}$, и учитывая (51) запишем последнее соотношение в виде

$$\sum_{j=n-1-n_{r,s}}^{\infty} (c_{n-1}\beta_{n-1,j} - b_n\beta_{n,j} + c_n\beta_{n+1,j})\overline{\beta_{m,j}} =$$

$$= \sum_{j=n-n_{r,s}}^{\infty} \beta_{n,j}(\overline{c_{m-1}\beta_{m-1,j} - b_m\beta_{m,j} + c_m\beta_{m+1,j}}), \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+ : \ n > m. \tag{58}$$

Теперь мы можем сформулировать теорему, предоставляющую аналог разложения Вольда.

Теорема 1 *Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - несингулярная полиномиальная последовательность в гильбертовом пространстве H, с непрерывным оператором A и ортонормированными многочленами $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в ее представлении (2). Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ допускает следующее разложение:*

$$x_n = x_n^s + \sum_{j=n-n_{r,s}}^{\infty} \beta_{n,j} u_j, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{59}$$

где

1) $\{x_n^s\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является сингулярной полиномиальной последовательностью, подчиненной $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$;

2) Последовательность $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является фундаментальной полиномиальной последовательностью, подчиненной $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$;

3) u_n лежит в пространстве $H_x(n_{r,s}+n)$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$;

4) $0 \le n_{r,s} < \infty$;

5) $\beta_{n,n-n_{r,s}} \ne 0$; $\beta_{n,j} \in \mathbb{C}$, $n, j \in \mathbb{Z}_+$;

6) $\beta_{n,j}$ удовлетворяют соотношениям (58), где коэффициенты b_n, c_n - из рекуррентного соотношения (6) для многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

Здесь u_j и $\beta_{n,j}$ с отрицательными индексами считаются равными нулю.

При этом последовательность $\{x_n^s\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является сингулярной компонентой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

Доказательство. Все утверждения теоремы, кроме второго и третьего, были доказаны выше. Фундаментальная последовательность $\{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ при условии ортонормированности многочленов $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ будет полиномиальной (см. рассуждения после определения фундаментальной последовательности). Из соотношений (49),(37) следует, что последовательность $\{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ подчинена последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Для доказательства утверждения 3) достаточно заметить, что $u_n \in H_{x^r}(n_{r,s}+n) \subseteq H_x(n_{r,s}+n)$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Это следует из определения u_n, включения (11) и (37). □

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.Н. Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве. // Бюлл. МГУ, - 1941. - **6**. - С. 1-40.

2. Розанов Ю.А. Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем. // УМН, - 1958. - 2(80). - С. 93-142.

3. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. - М.: Наука, - 1990. - 272 с.

4. Загороднюк С.М., Клёц Л. Применение подхода А.Н. Колмогорова при изучении случайных последовательностей, связанных с ортогональными многочленами. // Вісник Харківськ. університету, Сер. "Математика, прикладна математика і механіка - 2008. - **826**. - С. 3-37.

5. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. - М.: Мир, - 1968. - 750 с.

6. Niemi H. On the construction of the Wold decomposition for non-stationary stochastic processes. // Probability and Math. Statistics, - 1980. - 1. - Fasc. 1. - P. 73-82.

7. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. - М.: Наука, - 2001, 320с.

8. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. - М.: Физматлит, - 2005, 408с.

Статья получена: 11.12.2008; окончательный вариант: 07.05.2009; принята: 12.05.2009.