ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

О КОНЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ОДНОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. А. Марченко

(Харьков)

Обозначим через L дифференциальный оператор вида

$$L[u] = \frac{d^2}{dx^2} u(x) - q(x) u(x), \tag{1}$$

заданный на конечном или бесконечном полуинтервале $[o, a)$, $a \leq \infty$. Функция $q(x)$ предполагается вещественной и суммируемой на каждом частичном полуинтервале $[0, b)$ при любом $b < a$.

Оператор $\widehat{L}$, связанный с оператором L формулой:

$$\widehat{L}[u] = L[u] - \widehat{q}(x) u(x), \tag{2}$$

называется возмущенным, а функция $\widehat{q}(x)$ — возмущением оператора L. Возмущение мы будем называть конечным, если функция $\widehat{q}(x)$ равна нулю в некоторой окрестности точки a.

Как известно, краевая задача для оператора L с разделенными граничными условиями определяется заданием граничного условия в нуле: $u'(0) - hu(0) = 0$ и, возможно, в точке a. Решение вопроса о необходимости задания граничного условия в точке a зависит от поведения функции $q(x)$ только в окрестности этой точки. Поэтому его решение одинаково для операторов L и $\widehat{L}$, если возмущение $\widehat{q}(x)$ конечно, что мы и будем в дальнейшем предполагать.

Рассмотрим краевые задачи для операторов L и $\widehat{L}$ с граничными условиями в нуле:

$$u'(0) - hu(0) = 0 \quad (\text{для } L); \; u'(0) - \widehat{hu}(0) = 0 \quad (\text{для } \widehat{L})$$

и одним и тем же условием в точке a, если его вообще нужно задавать.

Обозначим множество собственных значений первой краевой задачи через $\Lambda(L, h)$, а второй — через $\Lambda(\widehat{L}, \widehat{h})$. Таким образом, $\lambda \in \Lambda(L, h)$ и $(\lambda \in \Lambda(\widehat{L}, \widehat{h}))$ тогда и только тогда, когда решение $\omega(\lambda, x)$ и $(\widehat{\omega}(\lambda, x))$ уравнения:

$$L[\omega] + \lambda\omega = 0 \text{ и } (\widehat{L}[\widehat{\omega}] + \lambda\widehat{\omega} = 0)$$

при начальных данных:

$$\omega(\lambda, 0) = 1, \; \omega'(\lambda 0) = h: \; (\widehat{\omega}(\lambda, 0) = 1, \; \widehat{\omega}'(\lambda, 0) = \widehat{h}) \tag{3}$$

принадлежит $L^2[0, a)$ (и удовлетворяет граничному условию в точке a, если его вообще нужно задавать).

Заметим, что спектр краевой задачи, вообще говоря, шире множества собственных значений, так как он может содержать еще и непрерывную часть, которой соответствуют так называемые дифференциальные собственные функции.

Известно, что непрерывные части спектров краевых задач для оператора L и возмущенного оператора $\widehat{L}$ совпадают, если возмущение конечно [1]. Иначе ведет себя по отношению к конечным возмущениям множество собственных значений. Мы докажем, что конечное возмущение не может оставить на месте слишком много собственных значений.

Точная формулировка соответствующей теоремы такова:

Теорема. Пусть $n(x)$ — число точек множества $\Lambda(L, h) \cap \Lambda(\widehat{L}, \widehat{h})$, лежащих в интервале $(-x, x)$. Тогда, если возмущение $\widehat{q}(x)$ не равно тождественно нулю и конечно, то есть $\widehat{q}(x) = 0$ при $x > b$, где $b < a$, то

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{n(x)}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{2b}{\pi}.$$

Приводимое ниже доказательство этой теоремы по идее близко к доказательству Борга [2] однозначной определенности операторов Штурма-Лиувилля по спектрам двух краевых задач.

Пусть $\lambda \in \Lambda(L, h) \cap \Lambda(\widehat{L}, \widehat{h})$. Рассмотрим соответствующие собственные функции краевых задач $\omega(\lambda, x)$ и $\widehat{\omega}(\lambda, x)$. Они удовлетворяют уравнениям:

$$\omega''(\lambda, x) - q(x)\omega(\lambda, x) + \lambda\omega(\lambda, x) = 0$$

$$\widehat{\omega}''(\lambda, x) - q(x)\widehat{\omega}(\lambda, x) - \widehat{q}(x)\widehat{\omega}(\lambda, x) + \lambda\widehat{\omega}(\lambda, x) = 0,$$

начальным условиям (3) и принадлежит $L^2[0, a)$. (Если функция $q(x)$ такова, что в точке a тоже задается граничное условие, то рассматриваемые собственные функции удовлетворяют и ему).

Умножая первое уравнение на $\widehat{\omega}(\lambda, x)$, а второе — на $\omega(\lambda, x)$ и вычитая затем из первого уравнения второе, получим

$$\widehat{\omega}(\lambda, x)\omega''(\lambda, x) - \widehat{\omega}''(\lambda, x)\omega(\lambda, x) + \widehat{q}(x)\widehat{\omega}(\lambda, x)\omega(\lambda, x) = 0,$$

откуда после интегрирования по сегменту $[0, A]$, $A < a$, следует:

$$\widehat{\omega}(\lambda, x)\omega'(\lambda, x) - \widehat{\omega}'(\lambda, x)\omega(\lambda, x)\Big|_0^A + \int_0^A \widehat{q}(x)\widehat{\omega}(\lambda, x)\omega(\lambda, x)\,dx = 0.$$

Пусть теперь $A \to a$. Тогда, учитывая начальные и граничные данные, которым удовлетворяют функции $\omega(\lambda, x)$ и $\widehat{\omega}(\lambda, x)$, получим:

$$\widehat{h} - h + \int^a \widehat{q}(x)\widehat{\omega}(\lambda, x)\omega(\lambda, x)\,dx = 0.$$

Функция $\widehat{\omega}(x)$ по условию равна нулю при $x > b$. Поэтому из предыдущего равенства следует:

$$h - \widehat{h} = \int_0^b \widehat{q}(x)\,\widehat{\omega}(\lambda, x)\,\omega(\lambda, x)\,dx, \tag{4}$$

каково бы ни было $\lambda \in \Lambda(L, h) \cap \Lambda(\widehat{L}, \widehat{h})$.

Используя операторы преобразования [3], мы можем функции $\omega(\lambda, x)$ и $\widehat{\omega}(\lambda, x)$ представить в виде:

$$\omega(\lambda, x) = \cos\mu x + \int_0^x k(x, t)\cos\mu t\,dt,$$

$$\widehat{\omega}(\lambda, x) = \cos\mu x + \int_0^x \widehat{k}(x, t)\cos\mu t\,dt,$$

где $\lambda = \mu^2$, а ядра $k(x, t)$ и $\widehat{k}(x, t)$ — непрерывны при $0 \leqslant t \leqslant x < a$. Перемножая эти равенства, получим:

$$\widehat{\omega}(\lambda, x)\,\omega(\lambda, x) = \cos^2\mu x + \left[\cos\mu x\int_0^x \left(k(x, t) + \widehat{k}(x, t)\right)\cos\mu t\,dt + \int_0^x k(x, t)\cos\mu t\,dt \cdot \int_0^x \widehat{k}(x, t)\cos\mu t\,dt\right].$$

Хорошо известная в теории преобразований Фурье теорема о свертках позволяет представить выражение, стоящее в квадратных скобках, в виде:

$$\int_0^{2x} A(x, t)\cos\mu t\,dt,$$

где функция $A(x, t)$, получающаяся определенным образом из $k(x, t)$, $\widehat{k}(x, t)$, тоже непрерывна при $0 \leqslant t \leqslant 2x < 2a$.

Поэтому:

$$\widehat{\omega}(\lambda, x)\,\omega(\lambda, x) = \cos^2\mu x + \int_0^{2x} A(x, t)\cos\mu t\,dt,$$

или:

$$\widehat{\omega}(\lambda, x)\,\omega(\lambda, x) = \frac{1 + \cos 2\mu x}{2} + 2\int_0^x A(x, 2u)\cos 2\mu u\,du.$$

Полагая для краткости $4A(x, 2u) = B(x, u)$, окончательно получим:

$$\widehat{\omega}(\lambda, x)\,\omega(\lambda, x) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos 2\mu x + \int_0^x B(x, u)\cos 2\mu u\,du\right], \tag{5}$$

где: $\lambda = \mu^2$ и ядро $B(x, u)$ непрерывно при $0 \leqslant u \leqslant x < a$.

Из формул (4), (5) следует:

$$h - \widehat{h} = \frac{1}{2}\int_0^b \widehat{q}(x)\left[1 + \cos 2\mu x + \int_0^x B(x, u)\cos 2\mu u\,du\right]dx,$$

откуда после несложных преобразований будем иметь:

$$2(h-\widehat{h})-\int_0^b \widehat{q}(x)\,dx=\int_0^b\left[\widehat{q}(u)+\int_u^b B(x,u)\,\widehat{q}(x)\,dx\right]\cos 2\mu u\,du,$$

или:

$$F(\mu)=2(h-\widehat{h})-\int_0^b \widehat{q}(x)\,dx-\int_0^b f(u)\cos 2\mu u\,du=0, \tag{6}$$

где:

$$f(u)=\widehat{q}(u)+\int_u^b B(x,u)\,\widehat{q}(x)\,dx \tag{7}$$

и

$$\lambda=\mu^2\in\Lambda(L,h)\cap\Lambda(\widehat{L},\widehat{h}).$$

Функция $f(u)$ не равна тождественно нулю. Действительно, если бы $f(u)\equiv 0$, то из формулы (7) следовало бы, что

$$\widehat{q}(u)=-\int_u^b B(x,u)\,\widehat{q}(x)\,dx,$$

то есть функция $\widehat{q}(u)$ удовлетворяла бы однородному уравнению типа Вольтерра. Но, как известно, однородное уравнение Вольтерра имеет только тривиальное решение $\widehat{q}(u)\equiv 0$. Однако по условию $\widehat{q}(u)\not\equiv 0$, откуда вытекает, что и $f(u)\not\equiv 0$.

Рассмотрим функцию $F(\mu)$ из формулы (6) при произвольных комплексных μ. Ясно, что функция $F(\mu)$ является целой функцией экспоненциального типа, причем

$$|F(re^{i\theta})|<A+Be^{2br|\sin\Theta|}.$$

Из этого неравенства следует, что функция $F(\mu)$ ограничена на вещественной оси и

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\lg|F(re^{i\vartheta})|}{r}\leqslant 2b.$$

Пусть $N(x)$ — число нулей функции $F(\mu)$, лежащих в круге радиуса x. Тогда, как известно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N(x)}{x}\leqslant\frac{4b}{\pi}. \tag{8}$$

(Доказательство этого важного неравенства есть, например, в [4]).

Но формула (6) показывает, что функция $F(\mu)$ заведомо обращается в нуль, если $\mu^2\in\Lambda(L,h)\cap\Lambda(\widehat{L},\widehat{h})$. Поэтому $N(x)\geqslant 2n(x^2)$ и согласно (8):

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{2n(x^2)}{x}\leqslant\frac{4b}{\pi},$$

то есть

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{n(x)}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{2b}{\pi},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. В каждом конечном интервале конечное возмущение $\hat{q}(x) \not\equiv 0$ не может оставить на месте бесконечно много собственных значений.

Действительно, в противном случае функция $n(t)$ обратилась бы в бесконечность при некотором конечном t, что противоречит доказанной теореме.

Замечание. Вместо операторов (1) можно рассматривать операторы

$$L[v] = \frac{d^2}{dx^2} v(x) - \left[q(x) + \frac{n(n-1)}{x^2} \right] v(x)$$

и конечные возмущения их. Доказательство соответствующей теоремы ничем не отличается от приведенного выше. Нужно только использовать обобщение операторов преобразования, полученное для таких операторов. В. В. Сташевской [5].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Глазман. О характере спектра одномерных сингулярных краевых задач. ДАН СССР, 86, № 1, 1952 г.

2. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm — Liovilleschen Eigenwertaufgabe, Acta Mathem., 78 : 1 — 2, 1946 г.

3. В. А. Марченко. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, часть 1. Труды Моск. матем. общ., т. 1, стр. 338, 1952 г.

4. Levinson N. Gap and density theorems, стр. 13, теорема VIII, 1940 г.

5. В. В. Сташевская. Об обратных задачах спектрального анализа для одного класса дифференциальных уравнений (Диссертация, Харьков, 1953 г.).