УДК 517.925.71

В. Р. СМИЛЯНСКИЙ

СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РАНГА К СИСТЕМЕ ПЕРВОГО РАНГА. I.

В работе рассматривается система $(r+1)$-го ранга

$$\frac{dW}{dz} = z^r B(z)\, w,\ w = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}, \tag{1}$$

где r — неотрицательное целое число, матрица $B(z)$ голоморфна в окрестности $z=\infty$, $B(\infty)\neq 0$ и все ее характеристические корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ различны. Система (1) имеет формальную матрицу — решение вида

$$\hat{\Phi}(z) = P(z)\, z^R \exp[Q];$$

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu z^{-\nu};\ \det P_0 \neq 0;\ R = \mathrm{diaq}\{r_1, \ldots, r_n\}, \tag{2}$$

$$Q(z) = \mathrm{diaq}\{q_1(z), \ldots, q_n(z)\};$$

$$q_j(z) = \sum_{\nu=1}^{r+1} \lambda_j^{(\nu)} z^\nu/\nu;\ \lambda_j^{(r+1)} \equiv \lambda_j,$$

где $P(z)$ — формальный ряд; R — постоянная матрица; $\lambda_j^{(\nu)}$ — константы. В теории асимптотических решений системы (1) существенную роль играют линии в комплексной z-плоскости, определяемые условием

$$\mathrm{Re}\, q_{j_1} = \mathrm{Re}\, q_{j_2} = \cdots = \mathrm{Re}\, q_{j_k};\ (2 \leqslant k \leqslant n), \tag{3}$$

которое при больших $|z|$ практически сводится к

$$\mathrm{Re}\, \lambda_{j_1} z^{r+1} = \mathrm{Re}\, \lambda_{j_2} z^{r+1} = \cdots = \mathrm{Re}\, \lambda_{j_k} z^{r+1};\ (2 \leqslant k \leqslant n). \tag{4}$$

Возьмем какую-либо линию (4) в качестве исходной — l_1 и последовательно обозначим остальные через l_2, l_3, ... Обозначим через L число линий l_ν в секторе $l_1 \leqslant \arg z < l_1 + \pi/r + 1$ (очевидно, что $1 \leqslant L \leqslant n(n-1)/2$). В этом секторе любая пара выражений $\operatorname{Re} \lambda_\alpha z^{r+1}$, $\operatorname{Re} \lambda_\beta z^{r+1}$ $(\alpha \neq \beta)$ становится равной только на одной линии l_ν. В дальнейшем любой сектор z-плоскости (полуоткрытый или открытый), который обладает указанным свойством, будем называть стандартным сектором (С. С.) [1, с. 98]. Если матрица P_0 и нумерация характеристических корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ зафиксированы, то в любом С. С. существует единственная фундаментальная матрица (ф. м.), для которой формальное решение (2) является асимптотическим представлением при больших $|z|$. Другими словами: в любом С. С. асимптотическое представление $\Phi(z)$ однозначно определяет ф. м., имеющую это представление ([1], теорема единственности — теорема 1.1). Ф. м., имеющую асимптотическое представление (2) в каком-либо секторе, будем называть асимптотически базисной в этом секторе. Далее будем считать, что нумерация $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (а значит, и столбцов $\hat{\Phi}(z)$ — см. (2)) выбрана так, что $\operatorname{Re} \lambda_\alpha z^{r+1} < \operatorname{Re} \lambda_{\alpha+1} z^{r+1}$ в секторе $l_1 < \arg z < l_2$. Обозначим $\alpha_0 = 2\pi/r + 1$, $i = \sqrt{-1}$, $\varepsilon = \exp[i\alpha_0]$. Пусть $W_k(z\varepsilon^\nu)$ — ф. м. (ее независимая переменная взята в виде $z\varepsilon^\nu$, где ν может принимать значения $0, 1, 2, \ldots$), причем ф. м. такая, что $W_k z\varepsilon^{k-1}$ (т. е. $W_k(z\varepsilon^\nu$ при $\nu = k-1)$ асимптотически базисна в С. С.

$$l_2 - \frac{\pi}{r+1} + (k-1)\frac{2\pi}{r+1} \leqslant \arg(z\varepsilon^{k-1}) < l_2 + (k-1)\frac{2\pi}{r+1}$$
$$(k = \overline{1, r+1}) \tag{5}$$

(в (5) предполагается, что $l_2 - \frac{\pi}{r+1} \leqslant \arg z < l_2$) и пусть $W_1 \times \times (z\exp[i2\pi]) = W_1(z)\,Y$, где Y — постоянная неособая («циклическая») матрица. Тогда согласно теоремам 1.7, 1.2 [1]

$$W_{k-1}(z) = W_k(z)\,F_{2(k-1)}F_{2(k-1)-1},\quad k = \overline{2, r+1}; \tag{6}$$

$$Y = \exp[i2\pi R]\,F_{2(r+1)}F_{2(r+1)-1}\ \ldots\ F_2F_1, \tag{7}$$

где постоянные матрицы $F_{(\chi+1)}$ $(\chi = 0, 1, 2, \ldots)$ — верхние треугольные с единичными элементами на главной диагонали для четных χ и нижние треугольные с единичными элементами на главной диагонали для нечетных χ. Нетривиальные элементы матриц $F_{\chi+1}$ выражаются через множители Стокса (детали см. в [1, 2]). Если в (1)

$$B(z) = \sum_{\nu=0}^{r+1} B_\nu z^{-\nu}, \tag{8}$$

то точка $z = 0$ является регулярной особой точкой и ф. м. может быть представлена в виде $S(z)\,z^\Delta$, где матрица $S(z)$ голоморфна при $z = 0$ и никакие два характеристических корня постоянной матрицы Δ не отличаются на положительное целое. Существует ф. м. $\Psi(z)=S_0(z)z^J$, где матрица $S_0(z)$ голоморфна при $z=0$, а J — есть жорданова форма матрицы Δ. Между ф. м. $\Psi(z\varepsilon^{k-1})$ и $W_k(z\varepsilon^{k-1})$ существует соотношение

$$\Psi(z\varepsilon^{k-1})=W_k(z\varepsilon^{k-1})T_k,\ k=\overline{1, r+1}, \tag{9}$$

где постоянную неособую матрицу T_k будем называть матрицей связи, а ее элементы $[T_k]_{\eta\nu}$ — коэффициентами связи.

Наряду с системой (1) можно рассматривать уравнение

$$\sum_{m=0}^{n} z^{(n-m)r}b_m(z)\frac{d^my}{dz^m}=0\ \ b_n(z)\equiv 1 \tag{10}$$

$(r+1)$-го ранга ($b_m(z)$ голоморфны в окрестности $z=\infty$), которое с помощью формул $w_m=z^{-(m-1)r}\,d^{(m-1)}y/dt^{(m-1)}$ $(m=\overline{1, n})$ может быть сведено к системе типа (1).

Пуанкаре [3] (см. также [4]) предложил для уравнения (10) метод построения вспомогательного уравнения первого ранга и порядка n^{r+1}. Решения уравнения (10) могут быть выражены через решения вспомогательного уравнения с помощью квадратур. В работе [5] метод Пуанкаре применен к исследованию уравнения второго порядка (с рациональными коэффициентами). Непосредственно к системе (1) метод Пуанкаре не применим.

В настоящей работе для системы (1) предложен метод построения вспомогательной системы первого ранга из n^{r+1} уравнений. При этом: а) показано, что решения системы (1) могут быть выражены через решения вспомогательной системы с помощью квадратур; б) нетривиальные элементы матриц $F_{\chi+1}$ могут быть найдены по элементам циклической матрицы $Y^{\chi+1}$ некоторой ф. м. вспомогательной системы; в) найдены и проанализированы соотношения между коэффициентами связи $[T_k]_{\eta\nu}$ и коэффициентами связи $[\bar{T}_k]_{\eta\nu}$ вспомогательной системы. Пункты б) и в) дают ответ на аналогичные вопросы при исследовании уравнения (10) методом Пуанкаре. (В работе Пуанкаре они не рассматривались. Там исследовалось асимптотическое разложение только вдоль положительной полуоси z). Таким образом, исследование системы ранга $(r+1)$ сведено к исследованию системы первого ранга.

Предлагаемый метод является обобщением метода Пуанкаре с помощью полилинейного преобразования и результатов работы [1].

1. Система первого ранга и система (1). Элемент ф. м. $LL(z)$ первой вспомогательной системы зададим через элементы $[W_k\times\times(z\varepsilon^{k-1})]_{i_{k-1}\nu_{k-1}}$ ф. м. $W_k(z\varepsilon^{k-1})$ в виде

$$\begin{gathered}[U(z)]_{[i_0+n(i_1-1)+\dots+n^r(i-1)],\ [\nu_0+n(\nu_1-1)+\dots+n^r(\nu_r-1)]}=\\ =[W_1(z)]_{i_0\nu_0}[W_2(z\varepsilon)]_{i_1\nu_1}\ \dots\ [W_{r+1}(z\varepsilon^r)]_{i_r\nu_r},\\ i_{k-1}=\overline{1, n};\ \nu_{k-1}=\overline{1, n};\ k=\overline{1, r+1}.\end{gathered} \tag{11}$$

Далее индексы вида $[i_0 + n(i_1 - 1) + \cdots + n^r(i_r - 1)]$ будем обозначать через $[i]$, а индексы, например, вида $i_r + n(i_0 - 1) + \cdots + n^{r-1}(i_{r-2} - 1) + n^r(i_{r-1} - 1)]$ — через $[i_r, i_0, i_1, \ldots, i_{r-1}]$ и т. д. Отсюда $[i_0, i_1, \ldots, i_r] \equiv [i]$. Ф. м. $W_k(z\varepsilon^{k-1})$ есть ф. м. системы

$$\frac{dw(z, \varepsilon^{k-1})}{dz} = z^r B(z\varepsilon^{k-1})\, w(z\varepsilon^{k-1}) \tag{12}$$

$$k = \overline{1, r+1};\ w(z\varepsilon^{k-1}) = \{w_1(z\varepsilon^{k-1}), \ldots, w_n(z\varepsilon^{k-1})\}.$$

Систему из n^{r+1} уравнений, чьей ф. м. является $U(z)$, запишем так:

$$\frac{du(z)}{dz} = A(z)\, u(z);\ u(z) = \{u_1(z), \ldots, u_{n^{r+1}}(z)\}. \tag{13}$$

Теорема 1.1. А. *Отличные от нуля элементы матрицы $A(z)$ имеют вид либо*

$$[A(z)]_{[\nu],[\nu]} = z^r(B(z)_{\nu_0\nu_0} + [B(z\varepsilon)]_{\nu_1\nu_1} + \cdots + [B(z\varepsilon^r)]_{\nu_r\nu_r}),$$
$$\nu_j = \overline{1, n},\ j = \overline{0, r}, \tag{14}$$

либо

$$[A(z)]_{[\nu],[\nu_0, \ldots, \nu_{j-1}, \omega_j, \nu_{j+1}, \ldots, \nu_r]} = z^r [B(z\varepsilon^j)]_{\nu_j\omega_j},$$
$$\nu_j = \overline{1, n};\ \omega_j = \overline{1, n};\ j = \overline{0, r};\ \nu_j \neq \omega_j. \tag{15}$$

Матрица $A(z) = z^r A_1(z)$, где матрица $A_1(z)$ — голоморфна в окрестности $z = \infty$. Матрица $A_1(\infty)$, вообще говоря, имеет кратные характеристические корни (например, в случае $n = 2$; $r = 1$; $B(z) = B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}$).

Б. 1. *Ф. м. $U(z)$ имеет в С. С. $l_2 - \frac{\pi}{r+1} \leqslant \arg z < l_2$ асимптотическое представление вида*

$$\hat{U}(z) = P(z)\, z^{\bar{R}} \exp[\bar{Q}(z)];\ \bar{P}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{P}_\nu z^{-\nu};$$
$$\bar{Q}(z) = \operatorname{diaq}\{\bar{q}_1(z), \ldots, \bar{q}_{n^{r+1}}(z)\}; \tag{15a}$$
$$\bar{q}_\nu(z) = \sum_{k=0}^{r} q_{\nu_k}(z\varepsilon^k);$$
$$\bar{R} = \operatorname{diaq}\{\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_{n^{r+1}}\};\ \bar{r}_{[\nu]} = \sum_{k=0}^{r} r_{\nu_k}.$$

Каждый элемент $[\hat{U}(z)]_{[i],[\nu]}$ матрицы $\hat{U}(z)$ получается подстановкой в (11) асимптотических представлений сомножителей $[W_k(z\varepsilon^{k-1})]_{i_{k-1}\nu_{k-1}}$ в соответствующих С. С. (5). Таким образом, ф. м. $U(z)$ асимптотически базисна в С. С. $l_2 - \frac{\pi}{r+1} \leqslant \arg z < l_2$.

2. *В любом С. С. существует ф. м. $\Omega(z)$ системы* (13), *асимптотически базисная в этом секторе. Ее асимптотическое представление $\hat{\Omega}(z)$ в этом С. С. имеет ту же структуру (но не обязательно такие же $\bar{P}_\nu$), что и* (15а).

3. *Пусть матрица $\bar{P}_0$ и нумерация столбцов $\hat{\Omega}(z)$ зафиксированы. Тогда в любом С. С. существует единственная ф. м. системы* (13), *асимптотически базисная в этом секторе. Другими словами: в любом С. С. асимптотическое представление $\hat{\Omega}(z)$ однозначно определяет ф. м. $\Omega(z)$, имеющую это представление.*

В. *Ф. м. $U(z)$ может быть представлена в виде*

$$U(z) = z^Q V(z); \; Q = \frac{1}{i\alpha_0} \operatorname{Ln} G, \; (i = \sqrt{-1}). \tag{16}$$

Здесь матрица G получена из единичной матрицы E порядка n^{r+1} следующим перемещением строк:

$$[i_0, i_1, \ldots, i_r]\text{-я строка переходит в } [i_r, i_0, \ldots, i_{r-1}]. \tag{17}$$

При этом

$$V(z\varepsilon) = V(z)\,\bar{Y}, \tag{18}$$

где $\bar{Y}$ — постоянная неособая матрица.

Г. *Замена (16) приводит ко второй вспомогательной системе*

$$\frac{dv(z)}{dz} = M(z)\, v(z); \; v(z) = \{v_1(z), \ldots, v_{n^{r+1}}(z)\}, \tag{19}$$

($M(z) = z^r M_1(z)$; *матрица $M_1(z)$ голоморфна в окрестности $z = \infty$, которая инвариантна относительно замены $z \to z(\varepsilon)$ и заменой $z^{r+1} = \tau$ сводится к системе первого ранга* $\frac{dv(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{(r+1)} M_1(\tau)\, v(\tau)$.

Для обеих систем матрица $M_1(\infty)$ имеет, вообще говоря, кратные характеристические корни (например, в случае n_2; $r = 1$; $B(z) = B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}$). Из пунктов Б *и* В *следует: 1) Пусть $\Omega(z)$ — формальное решение системы* (13). *Тогда формальное решение системы* (19) *$\hat{U}(z) = (z^Q)^{-1}\hat{\Omega}(z)$, а формальное решение системы первого ранга получается из $\hat{U}(z)$ заменой $z^{r+1} = \tau$. 2) Для обеих систем* (19) *и первого ранга справедлива теорема единственности, сформулированная для системы* (13) *в* Б, (*подпункт 3*).

Д.

$$[\bar{Y}]_{[\omega],[\nu]} = [\exp[i2\pi R]\, F_{2(r+1)} F_{2(r+1)-1}]_{\omega_0 \nu_r} \times$$
$$\times [F_2 F_1]_{\omega_1 \nu_0} [F_4 F_3]_{\omega_2 \nu_1} \ldots [F_{2r} F_{2r-1}]_{\omega_r \nu_{r-1}}. \tag{20}$$

Из уравнения (20) *по известной $\bar{Y}$ могут быть однозначно найдены элементы всех матриц F_2F_1, F_4F_3, $F_{2(r+1)}F_{2(r+1)-1}$, а значит* *(по теореме о разложении матрицы в произведение треугольных матриц) могут быть однозначно найдены и все матрицы* F_1, F_2, ..., $F_{2(r+1)}$.

Е. *Элементы ф. м.* $W_1(z)$ *находятся по формулам*

$$[W_1(z)]_{i_0\nu_0} = c_{i_0\nu_0} \exp\left\{\int z^r \left(\sum_{\xi=1}^{n} [B(z)]_{i_0\xi} \frac{[U(z)]_{[\xi, i_1, \dots, i_r], [\nu]}}{[U(z)]_{[i], [\nu]}}\right) dz\right\}, \quad (21)$$

где значения индексов $i_1, i_2, \dots, i_r$ *и* $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$ *могут быть любыми из* $\overline{1, n}$. *Если, в частности, положить* $i_1 = i_2 = \cdots = i_r = \nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_r = 1$, *то*

$$[W_1(z)_{i_0\nu_0} = c_{i_0\nu_0} \exp\left\{\int z^r \left(\sum_{\xi=1}^{n} [B(z)]_{i_0\xi} \frac{[U(z)[_{\xi\nu_0}}{[U(z)]_{i_0\nu_0}}\right) dz\right\}. \quad (22)$$

Из уравнения (21) *и особенно наглядно из* (22) *видно, что для нахождения ф. м.* $W_1(z)$ *нужно знать только* n^2 *элементов ф. м.* $U(z)$ *из общего их числа* $n^{2(r+1)}$. *Произвольные константы интегрирования* $c_{i_0\nu_0}$ *могут быть определены по заданной матрице* P_0 в (2).

Замечание. Из доказательства пункта Е (см. ниже) видно, что подобным образом могут быть найдены элементы любой ф. м. $W_k(z\varepsilon^{k-1})$.

Пусть в уравнении (1) матрица $B(z)$ типа (8). Тогда согласно (14), (15) точка $z = 0$ является, вообще говоря, регулярной особой точкой и для системы (13). Ф. м. $\overline{\Psi}(z)$ системы (13) в окрестности $z = 0$ может быть взята в виде

$$[\overline{\Psi}(z)]_{[i], [\nu]} = [\Psi(z)]_{i_0\nu_0} [\Psi(z\varepsilon)]_{i_0\nu_1} \dots [\Psi(z)\varepsilon^r)]_{i_r\nu_r}. \quad (23)$$

Кроме того, $\overline{\Psi}(z) = U(z)T$, где T — матрица связи.

Теорема 1.2. А. *Пусть матрица* $B(z)$ *типа* (8). *Тогда матрица* $M(z)$ *для* (19) *имеет вид* $M(z) = z^r(M_0 + M_{(r+1)}z^{-(r+1)})$ *и, следовательно, заменой* $z^{r+1} = \tau$ *система* (19) *приводится к системе*

$$\frac{dv(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{(r+1)}\left(M_0 + \frac{1}{\tau} M_{(r+1)}\right) v(\tau).$$

Б. *Между элементами матрицы* $\overline{T}$ *и элементами матриц* T_k *существуют соотношения*

$$[\overline{T}]_{[\omega], [\nu]} = [T_1]_{\omega_0\nu_0} [T_2]_{\omega_1\nu_1} \dots [T_{(r+1)}]_{\omega_r\nu_r}, \quad (24)$$

$$\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_r = \overline{1, n}; \ \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_r = \overline{1, n}.$$

Если матрица $\overline{T}$ *известна, то из уравнений (24) можно линейно выразить любые* $(n^{r+1} - r)$ *элементов матриц* $T_1, T_2, \dots, T_{(r+1)}$ *через произведение оставшихся* r *элементов.*

Доказательство теоремы 1.1. А. Если каждая компонента u_i вектора u представлена в виде полилинейной формы

$$u_i(z) = \sum_{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r} p_{i\omega_0\omega_1 \ldots \omega_r} w_{\omega_0}(z) w_{\omega_1}(z\varepsilon) \ldots w_{\omega_r}(z\varepsilon^r), \quad (25)$$

$$\omega_j = \overline{1, n}, \; i = \overline{1, n^{r+1}},$$

то в случае постоянных $p_{i\omega_0\omega_1\ldots\omega_r}$ элементы матрицы $A(z)$ могут быть найдены из системы (см. § 4)

$$\sum_{k_0, k_1, \ldots, k_r} [A(z)]_{[\nu], [k]} p_{[k], \omega_0\omega_1 \ldots \omega_r} =$$

$$= z^r \sum_{\xi} (p_{[\nu], \xi\omega_1 \ldots \omega_r} [B(z)]_{\xi\omega_0} + p_{[\nu], \omega_0\xi\omega_2 \ldots \omega_r} [B(z\varepsilon)]_{\xi\omega_1} +$$

$$+ \cdots + p_{[\nu], \omega_0 \ldots \omega_{r-1}\xi} [B(z\varepsilon^r)]_{\xi\omega_r}), \; \xi, \nu_j, k_j = \overline{1, n}; \; j = \overline{0, r}. \quad (26)$$

Из определения (11) следует, что в рассматриваемом случае отличны от нуля (и равны единице) только коэффициенты

$$p_{[i_0 + n(i_1 - 1) + \cdots + n^r(i_r - 1)], \, i_0 i_1 \ldots i_r} = 1. \quad (27)$$

Условие (27) однозначно определяет единственное ненулевое слагаемое в сумме по $[k]$ (слева) в (26) с индексом $[k] = [\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r] \equiv [\omega]$. Очевидно, что в силу (27) в суммах по ξ справа в (26), если и останутся ненулевые слагаемые, то только среди тех, у которых $\xi = \nu_0$ (первая сумма), $\xi = \nu_1$ (вторая сумма), $\ldots$, $\xi = \nu_r$ ($(r+1)$-я сумма). Таким образом, (26) можно переписать в виде

$$[A(z)]_{[\nu], [\omega]} = z^r (P_{[\nu], \nu_0\omega_1 \ldots \omega_r} [B(z)]_{\nu_0\omega_0} + p_{[\nu], \omega_0\nu_1\omega_2 \ldots \omega_r} \times$$

$$\times [B(z\varepsilon)]_{\nu_1\omega_1} + \cdots + p_{[\nu], \omega_0 \ldots \omega_{r-1}\nu_r} [B(z\varepsilon^r)]_{\nu_r\omega_r}. \quad (28)$$

1) Пусть в (28) $\omega_0 = \nu_0$; $\omega_1 = \nu_1$; $\ldots$; $\omega_r = \nu_r$, т. е. $[\omega] = [\nu]$). Тогда из (28) в силу (27) следует (14).

2) Вторая возможность состоит в том, чтобы совокупность индексов при $p_{[\nu], \omega_0 \ldots \omega_{j-1}\nu_j\omega_{j+1} \ldots \omega_r}$ у одного из слагаемых в (28) удовлетворяла (27). Это получается, если r индексов из $(r+1)$ в совокупности ω_j $(j = \overline{0, r})$ приравнять к соответствующим индексам из совокупности ν_j $(j = \overline{0, r})$. Это дает (15).

Б. Достаточно доказать подпункты *2*, *3*. *2*. При получении явного вида матрицы $A(z)$ на основе (11) использовалось лишь то обстоятельство, что $W_k(z\varepsilon^{k-1})$ — ф. м. систем (12) $(k = \overline{1, r+1})$. Поэтому элементы любой ф. м. $\Omega(z)$ системы (13) выражаются через элементы каких-либо соответствующих ф. м. $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ систем (12):

$$[\Omega(z)]_{[i], [\nu]} = [\theta_1(z)]_{i_0\nu_0} [\theta_2(z\varepsilon)]_{i_1\nu_1} \ldots [\theta_{r+1}(z\varepsilon^r)]_{i_r\nu_r}. \quad (28a)$$

Пусть ф.м. $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ асимптотически базисна в С.С.

$$\chi-\frac{\pi}{r+1}+(k-1)\frac{2\pi}{r+1}\leqslant \arg(z\varepsilon^{k-1})<\chi+(k-1)\frac{2\pi}{r+1}\ (k=1,\ \overline{r+1}),\tag{28б}$$

где χ — произвольный луч. Вообще говоря, матрица P_0 в асимптотическом представлении ф.м. $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ различна для разных k. Поэтому обозначаем ее через P_{0k}. Пусть нумерация столбцов P_{0k} зафиксирована. Тогда ф.м. $\Omega(z)$ асимптотически базисна в произвольном С.С. $\chi-\frac{\pi}{r+1}\leqslant \arg z<\chi$ и ее асимптотическое представление имеет структуру (15*а*), так как в данном случае асимптотическое представление произведения равно произведению асимптотических представлений сомножителей (каждый сомножитель асимптотически базисен в своем С.С. (28*б*)).

3. Обратно. В силу определения (28*а*) ф.м. $\Omega(z)$ асимптотически базисна в С.С, $\chi-\frac{\pi}{r+1}\leqslant \arg z<\chi$ в том и только в том случае, когда каждая из ф.м. — «сомножителей» $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ асимптотически базисна в С.С. (28*б*). Умножим каждую ф.м. $\theta_k(z\times\times\varepsilon^{k-1})$ $(k=\overline{1,r+1})$ на константу c_k такую, что произведение $c_1c_2\ \ldots\ c_{r+1}=1$. Как видно из (28*а*), при этом ф.м. $\Omega(z)$ и ее асимптотическое представление в С.С. $\chi-\frac{\pi}{r+1}\leqslant \arg z<\chi$ не изменяются. Асимптотическое же представление ф.м. $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ в (28*б*) (а значит, и матрица P_{0k}) умножается на c_k.

Пусть теперь некоторая ф.м. $\Omega(z)$ системы (13) асимптотически базисна в С.С. $\chi-\frac{\pi}{r+1}\leqslant \arg z<\chi$ и известно ее асимптотическое представление. Для доказательства подпункта *3* нужно показать, что это асимптотическое представление определяет с точностью до скалярного множителя c_k ф.м. $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ $(k=1,r+ +1;\ c_1c_2\ \ldots\ c_{r+1}=1)$, асимптотически базисные в С.С. (28*б*), а затем воспользоваться теоремой единственности для систем (12). Будем считать, что нумерация λ_j (т. е. нумерация столбцов) выбрана одинаковой для всех $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ (что не нарушает общности). Параметры $\lambda_j^{(\nu)}$, r_j $(j=\overline{1,n};\ \nu=\overline{1,r+1})$ — см. (2) — однозначно находятся из простой системы линейных алгебраических уравнений. Так как нумерация λ_j зафиксирована, то в силу теоремы единственности для систем (12) для определения ф.м. $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ остается найти матрицы P_{0k} по известной матрице $\overline{P}_0$. Они связаны следующим образом:

$$[\overline{P}_0]_{[i,][\nu]}=\exp\left[i\sum_{k=0}^{r}k\frac{2\pi}{r+1}r_{\nu_k}\right][P_{01}]_{i_0\nu_0}[P_{02}]\ \ldots\ [P_{0,r+1}]_{i_r\nu_r}.\tag{28в}$$

Фиксируя в (28*в*), например индексы $(i_1,\nu_1),(i_2\nu_2),\ \ldots\ ,(i_r,\nu_r)$, можно для элементов матрицы P_{01} найти (n^2-1) отношений

$[P_{01}]_{i_0\nu_0}/[P_{01}]_{11}$, где $i_0, \nu_0 \neq (1,1)$, т. е. линейно выразить (n^2-1) элементов $[P_{01}]_{i_0\nu_0}$ через (например) $[P_{0,1}]_{11}$. Эти рассуждения можно повторить для элементов каждой матрицы P_{0k} $(k=\overline{1, r+1})$ и, следовательно, для каждой матрицы P_{0k} можно линейно выразить (n^2-1) ее элементов через (например) $[P_{0k}]_{11}$. Подставляя все это в уравнения (28*в*), получим одно независимое уравнение вида

$$[P_{01}]_{11}[P_{02}]_{11} \ldots [P_{0,r+1}]_{11} = c \tag{28г}$$

(c — известная константа). Зададимся какими-то конкретными значениями $[P_{0k}]_{11}$ $(k=\overline{1, r+1})$, удовлетворяющими (28*г*). Тогда (как следует из изложенного выше) матрицы P_{0k} могут быть однозначно найдены. Любые другие значения $[P_{0k}]_{11}^{*} = c_k[P_{0k}]_{11}$, где c_k — константа и $c_1c_2 \ldots c_{r+1}=1$, также удовлетворяют (28*г*). Следовательно, из уравнений (28*в*) матрицы P_{0k} (а значит, в принципе, и ф. м. $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ могут быть определены с точностью до скалярных множителей c_k $(c_1c_2 \ldots c_{r+1}=1)$. Но умножение ф. м. $\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ на c_k не изменяет ф. м. $\Omega(z)$. Пусть теперь существует какая-либо другая ф. м. $\Omega'(z)$ системы (13), имеющая в С. С. $\chi - \frac{\pi}{r+1} \leqslant \arg < \chi$ такое же асимптотическое представление, как и ф. м. $\Omega(z)$. Так как семейство ф.м. $c_k\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$ $(k=\overline{1, r+1};\ c_1c_2 \ldots \ldots c_{r+1}=1)$ однозначно определяет ф. м. $\Omega(z)$, то должна существовать хотя бы одна ф. м. $\theta_k'(z\varepsilon^{k-1})$ системы (12), не совпадающая с ф. м. $c_k\theta_k(z\varepsilon^{k-1})$, но имеющая в С. С. (28*б*) такое же асимптотическое представление. Это противоречит теореме единственности для систем (12). Подпункт 3 доказан.

Примечание. Если (например) все $[P_{0k}]_{11}$ одинаковы $(P_{0k}]_{11} = p;\ k=\overline{1, r+1})$, то из (28*г*) следует, что все c_k равны одному и тому же $\sqrt[r+1]{-1}$ (т. е. ε^ρ, $\rho=\overline{1, r}$). Это же будет, если все матрицы P_{0k} одинаковы, т. е. в случае ф. м. $U(z)$. В этом последнем случае элементы матрицы P_0 удобно находить непосредственно из (28*а*), положив $i_0=i_1=\ldots=i_r$; $\nu_0=\nu_1=\ldots=\nu_r$. О наличии одинаковых для всех P_{0k} элементов можно судить по симметрии $[\bar{P}_0]_{[i],[\nu]}$

В) Полагая в (II) $z \to z\varepsilon$, получаем

$$[U(z\varepsilon)]_{[i][\nu]} = [W_1(z\varepsilon)]_{i_0\nu_0}[W_2(z\varepsilon^2)]_{i_1\nu_1} \ldots [W_{r+1}(z\varepsilon^{r+1})]_{i_r\nu_r}. \tag{29}$$

С другой стороны, с помощью (6), (7) имеем

$$W_{r+1}(z\varepsilon^{r+1}) \equiv W_{r+1}(z\exp[i2\pi]) = W_1(z\exp[i2\pi])(F_{2r}F_{2r-1}\ldots F_1)^{-1} = \\ = W_1(z)Y(F_{2r}F_{2l-1}\ldots F_1)^{-1} = W_1(z)\exp[i2\pi R]F_{2(r+1)}F_{2(r+1)-1}. \tag{30}$$

Подставляя (6) (для $k=\overline{2,\ r)}$ и (30) в (29), получаем

$$[U(z\varepsilon)]_{[i],[\nu]}=\sum_{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_r}[W_1(z)]_{i_r\omega_0}[W_2(z\varepsilon)]_{i_0\omega_1}[W_3(z\varepsilon)^2]_{i_1\omega_2}\ \ldots$$

$$\ldots\ [W_{r+1}(z\varepsilon^r)]_{i_{r-1}\omega_r}[\exp[i2\pi R]\,F_{2(r+1)}F_{2(r+1)-1}]_{\omega_0\nu_r}[F_2F_1]_{\omega_1\nu_0}\times$$

$$\times[F_4F_3]_{\omega_2\nu_1}\ \ldots[F_{2r}F_{2r-1}]_{\omega_2\nu_{r-1}}.$$

Или окончательно

$$[U(z\varepsilon)]_{[i],[\nu]}=\sum_{\omega_0,\omega_1,\ldots\omega_r}[U(z)]_{[i_r,i_0,\ldots,i_{r-1}],[\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_r}\times$$

$$\times[\exp[i\pi R]]\,F_{2(r+1)}F_{2(r+1)+1}]_{\omega_0\nu_r}[F_2F_1]_{\omega_1\nu_0}[F_4F_3]_{\omega_2\nu_1}\ \ldots$$

$$\ldots\ [F_{2r}F_{2r-1}]_{\omega_r\nu_{r-1}}. \tag{31}$$

В (31), слева, первый индекс элемента ф. м. $U(z\varepsilon)$ есть $[i]$, а первый индекс элементов ф. м. $U(z)$ (справа) есть $[i_r,\ i_0,\ \ldots,\ i_{r-1}]$. Следовательно, систему равенств (31) можно представить в матричной форме $U(z\varepsilon)=GU(z)\overline{Y}$, где для элементов матрицы $\overline{Y}$ выполняется (20). Каждый столбец и каждая строка матрицы G имеют только один элемент, не равный нулю (он равен единице). Значит (как следует из самого определения определителя), $\det G\neq 0$ и, значит, $\operatorname{Ln}G$ существует. (Детальный анализ G см. в § 2). Но это означает, что ф. м. $U(z)$ можно записать в виде $z^Q\,V(z)$, где $(z\varepsilon)^Q=Gz^Q$, а $V(z\varepsilon)=V(z)\,\overline{Y}$.

Г. Инвариантность (19) относительно замены $z\to z\varepsilon$ следует из соотношения $V(z\varepsilon)=V(z)\,\overline{Y}$. Для $M(z)$ имеем

$$M(z)=(z^Q)^{-1}A(z)(z)^Q-(z^Q)^{-1}\frac{dz^Q}{dz}. \tag{32}$$

Матрица $A(z)$ (см. (14), (15) и матрица z^Q (см. § 2) соответственно имеет вид

$$\text{а) } A(z)=z^r\sum_{\nu=0}^{\infty}A_\nu z^{-\nu};\quad \text{б) } z^Q=HDH^{-1}, \tag{33}$$

где A_ν — постоянные матрицы; H—некоторая постоянная неособая матрица; D — диагональная матрица, диагональные элементы которой принимают только значения $1,\ z,\ z^2,\ \ldots,\ z^r$. Подстановка (33) в (32) дает

$$M(z)=z^rHD^{-1}H^{-1}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}A_\nu z^{-\nu}\right)HDH^{-1}-HD^{-1}\frac{dD}{dz}H^{-1}. \tag{34}$$

Так как диагональные элементы матрицы D принимают только значения $1,\ z,\ z^2,\ \ldots,\ z^r$, то второе слагаемое в правой части (34) может быть представлено в виде C/z, а первое слагаемое, вообще говоря, (при произвольной неособой постоянной H), в виде $z^{2r}\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu z^{-\nu}$, где C, C_ν — постоянные матрицы. Следовательно,

$$M(z) = z^{2r}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu z^{-\nu} + Cz^{-(2r+1)}\right). \qquad (35)$$

Но так как система (19) инвариантна относительно замены $z \to z\varepsilon$, то матрица $M(z)$ должна иметь определенную структуру (см. [2, § 2]). Если замена $z^{r+1} = \tau$ сводит (19) к системе первого ранга, то $M(z)$ должна иметь вид (36*а*) (см. ниже), если к системе второго ранга, то $M(z)$ должна иметь вид (36*б*):

$$\text{а)}\ M(z) = z^r \sum_{\nu=0}^{\infty} M_\nu z^{-\nu(r+1)};\quad \text{б)}\ M(z) = z^{2r+1}\sum_{\nu=0}^{\infty} M_\nu z^{-\nu(r+1)}, \qquad (36)$$

где M_ν — постоянные матрицы.

Сравнение (35) с (36) показывает, что (35) ни при каких значениях C, C_ν не может совпадать с (36*б*), но всегда существуют такие C_ν, при которых (35) совпадает с (36*а*). Следовательно, замена $z^{r+1} = \tau$ сводит (19) к системе первого ранга.

Д. Поскольку в выражении (20) все индексы в правой части могут принимать любое из значений $\overline{1, n}$, то положим, что в r (из $(r+1)$) сомножителя $[\ ]_{ik}$ (в (20)) выбрано $i = 1$, $k = 1$. Пусть, например, свободные индексы оставлены у $[F_4F_3]_{\omega_2\nu_1}$. Так как $[F_{2k}F_{2k-1}]_{11} = 1$ $(k = \overline{1, r+1})$, то это означает, что по известной матрице $\overline{Y}$ могут быть однозначно найдены все элементы $[F_4F_3]_{\omega_2\nu_1}$. Очевидно, что таким же способом может быть найдена любая матрица $F_{2k}F_{2k-1}$ $(k = \overline{1, r+1})$.

Е. Согласно (1)

$$\frac{dW_1(z)_{i_0\nu_0}}{dz} = z^r \sum_{\xi=1}^{n} [B(z)]_{i_0\xi}[W_1(z)]_{\xi\nu_0}\ (i_0,\ \nu_0 = \overline{1, n}). \qquad (37)$$

Поделим обе части (37) на $[W_1(z)]_{i_0\nu_0}$. Это дает

$$\frac{1}{[W_1(z)]_{i_0\nu_0}}\frac{d[W_1(z)]_{i_0\nu_0}}{dz} = z^r \sum_{\xi=1}^{n} [B(z)]_{i_0\xi}\frac{[W_1(z)]_{\xi\nu_0}}{[W_1(z)]_{i_0\nu_0}}. \qquad (38)$$

Но согласно (11)

$$\frac{[W_1(z)]_{i_0\nu_0}}{[W_1(z)]_{i_0\nu_0}} = \frac{[U(z)]_{[\xi, i_1, \ldots, i_r]\,[\nu]}}{[U(z)]_{[i],\,[\nu]}}. \qquad (39)$$

Подставляя (39) в правую часть (38) и интегрируя, получаем (11).

Доказательство теоремы 1.2. А. Матрица $A(z)$ в рассматриваемом случае имеет вид: $A(z) = z^r\sum_{\nu=0}^{r+1} A_\nu z^{-\nu}$ (см. 14), (15)).

Подставляя это выражение для $A(z)$, а также z^Q в виде (33б), в (32), находим, что вообще говоря (при произвольной неособой постоянной H), наименьшая степень z в $z^{-r}(z^Q)^{-1}A(z)z^Q$ не может быть меньше $z^{-(2r+1)}$. Кроме того, $[-(z^Q)^{-1}dz^Q/dz] = C/z$ (см. доказательство пункта Г теоремы (1.1). С другой стороны, по пункту Г теоремы 1.1 в общем случае матрица $M(z)$ имеет вид (36а). Следовательно, в рассматриваемом случае в (36а) могут быть не равны нулю только M_0 и M_{r+1}.

Б. Подставляя (9) в (23) и используя (11), последовательно получаем

$$[\bar{\Psi}(z)]_{[i],[\nu]} = \sum_{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r} ([W_1(z)]_{i_0\omega_0}[W_2(z\varepsilon)]_{i_1\omega_1}\cdots[W_{r+1}(z\varepsilon^r)]_{i_r\omega_r} \times$$
$$\times [T_1]_{\omega_0\nu_0}[T_2]_{\omega_1\nu_1}\cdots[T_{r+1}]_{\omega_r\nu_r}) = \sum_{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r} ([U(z)]_{[i],[\omega]} \times$$
$$\times [T_1]_{\omega_0\nu_0}[T_2]_{\omega_1\nu_1}\cdots[T_{r+1}]_{\omega_r\nu_r}) = \sum_{\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_r} [U(z)]_{[i],[\omega]}[T]_{[\omega],[\nu]}.$$

Отсюда следует (24). Пусть матрица T известна. Фиксируя, например, в (24) индексы $(\omega_1, \nu_1), (\omega_2, \nu_2), \ldots, \omega_r, \nu_r)$, можно для элементов матрицы T_1 найти (n^2-1) отношений $[T_1]_{\omega_0\nu_0}/[T_1]_{11}$, где $(\omega_0, \nu_0) \neq (1, 1)$, т. е. линейно выразить (n^2-1) элементов $[T_1]_{\omega_0\nu_0}$ через (например) $[T_1]_{11}$. Всего возможно n^{2r} фиксированных значений $(\omega_1, \nu_1), (\omega_2, \nu_2), \ldots, (\omega_r, \nu_r)$. Значит, соответственно этому случаю между элементами $\bar{\bar{T}}$ существует $(n^2-1)n^{2r}$ соотношений. Рассуждения можно повторить для элементов каждой матрицы T_k $(k = \overline{1, r+1})$ и, следовательно, для каждой матрицы T_k можно линейно выразить (n^2-1) ее элементов через (например) $[T_k]_{11}$. Подставляя все это в (24), получаем одно независимое уравнение вида

$$[T_1]_{11}[T_2]_{11}\ldots[T_{r+1}] = c$$

(c — известная константа, из которого еще один элемент можно выразить через остальные r).

Список литературы: 1. *Смилянский В. Р.* Некоторые свойства множителей Стокса. 1. — В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Сб. науч. тр. К., 1979, с. 97—107. 2. *Смилянский В. Р.* О множителях Стокса для различных систем линейных дифференциальных уравнений. 1.— Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 3, с. 483—496. 3. *Poincaré H.* Sur les intégrales irréqulierès des équations lineaires.— Acta math., 1886, **8**, p. 295—344. 4. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.—Х: Науч.-техн. изд-во Украины, 1939. —719 с. 5. *Harn I.* Über die irreqularen Integrale der Linegren Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten. — Acta math., 1900, 23, S. 171—201.

Поступила в редколлегию 01.12.84.