УДК 517.53

А. Э. ЕРЕМЕНКО

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ДРЕЙСИНА О МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА С МАКСИМАЛЬНОЙ СУММОЙ ДЕФЕКТОВ. I

1. Введение. Для функции f, мероморфной в плоскости $\mathbb{C}$, используем стандартные обозначения теории Р. Неванлинны: $T(r, f)$, $N(r, a)$, $m(r, a)$, $\overline{N}(r, f)$, $N_1(r)$, $\delta(a)$. Кроме того, положим $D(z_0, R)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<R\}$. В этой работе изучаются мероморфные функции конечного нижнего порядка с максимальной суммой дефектов:

$$\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}}\delta(a)=2. \tag{1.1}$$

Для функции f конечного порядка II-я основная теорема Р. Неванлинны может быть сформулирована в таком виде: для любого конечного набора $a_1, \ldots, a_q$ справедливо

$$\sum_{j=1}^{q} m(r, a_j)+N_1(r)\leqslant 2T(r, f)+o(T(r, f)),\ r\to\infty.$$

Отсюда и из (1.1) следует, что

$$N_1(r)=o(T(r, f)),\ r\to\infty. \tag{1.2}$$

Чтобы выяснить, какие следствия может влечь (1.1), предположим сначала, что выполняется более сильное условие, чем (1.2), а именно, $N_1(r)\equiv 0$, т. е. функция f не имеет кратных точек. Рассмотрим шварцову производную:

$$F=f'''/f'-(3/2)(f''/f')^2. \tag{1.3}$$

Простой подсчет показывает, что шварцова производная имеет полюсы только в кратных точках функции f, поэтому F — целая функция. Учитывая, что f — конечного порядка, с помощью леммы о логарифмической производной получаем $m(r, F)=O(\log r)$, $r\to\infty$, следовательно, F — многочлен. Теперь (1.3) можно рассматривать как алгебраическое дифференциальное уравнение относительно f. Общее решение этого уравнения представляет собой отношение двух линейно независимых решений линейного уравнения $y''+\frac{1}{2}Fy=0$.

Используя это обстоятельство, Р. Неванлинна в 1932 г. детально исследовал мероморфные функции конечного порядка без кратных точек. Эти функции обладают следующими свойствами:

а) $T(r, f)\sim cr^{n/2}$, где $c>0$, $n\geqslant 2$ — натуральное число;

б) плоскость разбивается на n равных угловых областей:

$D_j=\{z:\varphi_{j-1}<\arg z<\varphi_j\}$, $1\leqslant j\leqslant n$, $\varphi_n=\varphi_0$ так, что для некоторых чисел $b_j\in\overline{\mathbb{C}}$ выполняется

$$\log\frac{1}{|f(re^{i\varphi})-b_j|}=\pi c r^{n/2}\sin\frac{n}{2}(\varphi-\varphi_{j-1})+o(r^{n/2}),$$

когда $r\to\infty$, равномерно относительно φ в любом угле, лежащем строго внутри D_j. Если $b_j=\infty$, левую часть следует заменить на $\log|f(re^{i\varphi})|$.

Таким образом, если число $a\in\overline{\mathbb{C}}$ встречается среди чисел b_j $p(a)$ раз, то $\delta(a)=2p(a)/n$. Все дефектные значения являются асимптотическими.

Другой способ получения приведенного результата, принадлежащий Л. Альфорсу, состоит в исследовании римановой поверхности, на которую функция f отображает плоскость. Можно показать, что эта риманова поверхность имеет конечное число логарифмических точек ветвления и не имеет алгебраических точек ветвления. Такие римановы поверхности допускают полное описание, и утверждения а) и б) получаются с помощью явного построения отображения римановой поверхности на плоскость, близкого к конформному.

Изложенные рассуждения естественно приводят к гипотезе, которую впервые высказал Ф. Неванлинна в 1929 г. Пусть f — мероморфная функция конечного порядка ρ, обладающая свойством (1.1). Тогда справедливы следующие утверждения:

1) 2ρ — натуральное число $\geqslant 2$.

2) Если $\delta(a)>0$, то $\delta(a)=p(a)/\rho$, где $p(a)$ — натуральное число.

3) Все дефектные значения являются асимптотическими.

Из 2) следует, что количество дефектных значений не превышает 2ρ.

Для целых функций эту гипотезу доказал А. Пфлюгер в 1946 г. В этом случае 1) можно усилить: ρ — натуральное число. Первым существенным продвижением в гипотезе Ф. Неванлинны для мероморфных функций был результат А. Вейцмана 1969 г.: при условиях гипотезы количество дефектных значений не превосходит $2\rho_1$, где ρ_1 — нижний порядок, $\rho_1\leqslant\rho$. После ряда промежуточных результатов полное доказательство утверждений 1), 2), 3) было недавно получено Д. Дрейсином*. Оно является одним из самых длинных и сложных доказательств в теории функций. Доказательство Д. Дрейсина использует ряд разнородных вспомогательных средств, таких как Альфорсова теория накрывающих поверхностей и квазиконформные отображения.

В настоящей работе приводится новое доказательство, основанное на двух основных теоремах теории Р. Неванлинны и классической теории потенциала. Автор надеется, что это доказательство сделает замечательный результат Д. Дрейсина более доступным и что предлагаемый метод найдет дальнейшие применения. Попутно будет доказана сформулированная выше теорема А. Вейцмана.

---

* *Drasin D.* Proof of a conjecture of F. Nevanlinna concerning function which have deficiency sum two // Acta math. 1987. 158, № 1—2. P. 1—94.

Теорема 1. *Пусть f — мероморфная функция конечного нижнего порядка со свойством* (1.1). *Тогда справедливо 1), 2), 3). Если, кроме того,* $\delta(\infty)=0$, *то выполняется*

$$\log\frac{1}{|f'(re^{i\theta})|}=\pi r^{\rho}l_1(r)|\cos\rho(\theta-l_2(r))|+o(r^{\rho}l_1(r)), \qquad (1.4)$$

равномерно относительно θ *при* $r\to\infty$, $re^{i\theta}\notin C_0$. *Здесь* C_0 — *объединение кружков* $D(z_k, r_k)$ *таких, что*

$$\sum_{\{k:|z_k|<R\}} r_k=o(R),\ R\to\infty,$$

а l_j — *непрерывные функции со свойствами* $l_1(ct)\sim l_1(t)$, $l_2(ct)=l_2(t)+o(1)$, $t\to\infty$ *равномерно относительно* $c\in[1, 2]$.
Кроме того,

$$T(r, f)\sim r^{\rho}l_1(r),\ r\to\infty. \qquad (1.5)$$

Обратно, всякая мероморфная функция со свойствами (1.4), (1.5) (2ρ — натуральное число) удовлетворяет соотношению (1.1).

Приведенное выше рассуждение о мероморфных функциях конечного порядка со свойством $N_1(r)\equiv 0$ позволяет предположить, что теорема 1 остается справедливой, если в ее условии заменить (1.1) на (1.2). Такое усиление теоремы 1 остается недоказанным.

2. Определение функций u, u_j. Обозначим через $L^1_{\rm loc}$ пространство функций, суммируемых на каждом круге в $\mathbb{C}$. Субгармонические функции содержатся в $L^1_{\rm loc}$. Пусть v_1, v_2 — субгармонические функции. Элемент $v=v_1-v_2\in L^1_{\rm loc}$ называется δ-субгармонической функцией. «Функция» v может не быть определена в тех точках, где $v_1=v_2=-\infty$. Скажем, что δ-субгармоническая функция v определена в точке z, если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r v(z+te^{i\theta})\,t\,dt,$$

и будем обозначать этот предел через $v(z)$. Определение корректно, так как для субгармонической функции v указанный предел совпадает с $v(z)$. Очевидно, что если δ-субгармоническая функция $v\geqslant 0$ п. в., то $v(z)\geqslant 0$ во всех точках z, где v определена. В этом случае пишем просто $v\geqslant 0$.

Перейдем к доказательству теоремы 1. План доказательства следующий. В пп. 2—6 теорема будет сведена к некоторому утверждению из теории потенциала, которое мы называем Основной леммой (см. п. 6). Приняв основную лемму, докажем теорему 1 в п. 7. Доказательство Основной леммы, независимое от всего остального, содержится во II-й части статьи (пп. 8—11).

Не уменьшая общности, можно считать, что все полюсы функции f простые и выполняется $\bar N(r, f)=N(r,f)\sim T(r,f)$, $r\to\infty$ **(2.1)**. Отсюда $m(r,f)=o(T(r,f))$, $r\to\infty$ **(2.2)**. Всего этого можно добиться, сделав над функцией f дробно-линейное преобразование. Конечность нижнего порядка и условие (1.1) при этом сохраняется.

Напомним, что последовательность $r_m \to \infty$ называется последовательностью пиков Пойа порядка λ возрастающей функции $T(r)$, если для некоторой последовательности $\varepsilon_m \to 0$ справедливо

$$T(r) \leqslant (1+\varepsilon_m)\left(\frac{r}{r_m}\right)^{\lambda} T(r_m), \quad \varepsilon_m r_m \leqslant r \leqslant \frac{r_m}{\varepsilon_m}. \tag{2.3}$$

Положим

$$\rho^* = \sup\left\{p : \limsup_{x,\ A \to \infty} \frac{T(Ax)}{A^p T(x)} = \infty\right\};$$

$$\rho_1^* = \inf\left\{p : \liminf_{x,\ A \to \infty} \frac{T(Ax)}{A^p T(x)} = 0\right\}.$$

Известно*, что пики Пойа порядка λ существуют тогда и только тогда, когда $\rho_1^* \leqslant \lambda \leqslant \rho^*$. Кроме того, $[\rho_1, \rho] \subset [\rho_1^*, \rho^*]$, где ρ_1, ρ — соответственно порядок и нижний порядок функции $T(r)$. Зафиксируем число $\lambda \in [\rho_1^*, \rho^*]$, $\lambda < \infty$, и последовательность пиков Пойа r_m для функции $T(r) = T(r, f)$. В процессе доказательства мы будем несколько раз выбирать подпоследовательность из последовательности r_m, сохраняя за ней прежнее обозначение. Согласно II-й основной теореме Р. Неванлинны для любого конечного набора $\{a_1, \ldots, a_q\} \subset \overline{C}$ выполняется

$$\sum_{j=1}^{q} m(r, a_j) + N_1(r) \leqslant 2T(r) + o(T(2r)), \quad m \to \infty \tag{2.4}$$

(пишем остаточный член в такой форме, так как конечность порядка функции f a priori не предполагается, а нам нужно соотношение без исключительного множества). Из (1.1), (2.4), (2.3) следует, что для любого $t > 0$ выполняется

$$N_1(tr_m) = o(T(r_m)), \quad n_1(tr_m) = o(T(r_m)), \quad m \to \infty. \tag{2.5}$$

Пусть a_j, $j = 1, 2, \ldots$ — все дефектные значения функции f (мы не предполагаем, что их множество конечно). Рассмотрим δ-субгармонические функции:

$$U_m(z) = (\log|f'(zr_m)|^{-1})/T(r_m),$$
$$U_{m,j}(z) = (\log|f(zr_m) - a_j|^{-1})/T(r_m). \tag{2.6}$$

Воспользуемся следующим результатом Дж. Андерсона—А. Бернстейна** и В. С. Азарина***: из условия (2.3) вытекает, что семейства $\{U_m\}$ и $\{U_{mj}\}$ относительно компактны в таком смысле. Можно выбрать подпоследовательность пиков Пойа так, чтобы выполнялось $U_m \to u$, $U_{mj} \to u_j$, $m \to \infty$ **(2.7)**. Здесь u и u_j — некоторые δ-субгармонические функции. Сходимость в (2.7) имеет место в L^1_{loc}, а также в L^1 на каждой окружности. Риссовские заряды функций U_m и U_{mj} слабо сходятся к риссовским зарядам функций

---

* *Drasin D., Shea D.* Polya peaks and oscillation of positive functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. **34.** P. 403—411.

** *Anderson L., Baernstein A.* Phe size of the set on which a meromorphic function is large // Proc. London Math. Soc. 1978. **36.** P. 518—539.

*** *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Мат. сб. 1979. **108,** № 2. С. 147—167.

u и u_j соответственно. Назовем 1-мерой некоторого множества $E \subset \subset \mathbf{C}$ точную нижнюю грань сумм радиусов кружков, покрывающих E. Для любого круга и любого $\varepsilon > 0$ подпоследовательность пиков Пойа может быть выбрана так, чтобы сходимость в (2.7) была равномерной в этом круге вне некоторого множества, 1-мера которого меньше ε. По поводу этих результатов см. также [1, 2].

Из $\delta(a_j, f) > 0$ следует, что $u_j \not\equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots$.

Функции u и u_j играют в доказательстве основную роль. В пп. 3—6 условия теоремы будут переформулированы в терминах u и u_j, и мы придем к основной лемме из п. 6, которая является «субгармоническим аналогом» теоремы 1. Из Основной леммы будет следовать, что

$$\sum_j u_j = u = \pi r^\lambda |\cos\lambda(\theta - \theta_0)|,$$

где $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$, причем 2λ — натуральное число. Переформулировав это утверждение в терминах функции f, мы получим (1.4), а затем и все остальные утверждения теоремы 1 (п. 7).

Из (2.1), (2.5) следует, что

$$m\left(tr_m, \frac{1}{f'}\right) \sim T\left(tr_m, \frac{1}{f'}\right) \sim 2T(tr_m, f), \; m \to \infty$$

для любого $t > 0$. Учитывая (2.3) и переходя к пределу при $m \to \to \infty$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})\,d\theta \leqslant 2r^\lambda, \; 0 < r < \infty, \tag{2.8}$$

причем при $r = 1$ в (2.8) имеет место равенство.

3. Простейшие свойства функций u и u_j. Воспользуемся леммой о логарифмической производной в такой форме:

$$m(r, f'/f) = o(T(2r)), \; r \to \infty. \tag{3.1}$$

Из (2.2), (3.1) следует, что $m(r, f') = o(T(2r))$, $r \to \infty$. Принимая во внимание (2.3) и переходя к пределу в L^1 на окружностях, получаем $u \geqslant 0$, $u_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots$ (3.2). Далее, из (2.5) следует, что u — субгармоническая функция, в частности, u определена всюду в $\mathbb{C}$. Из леммы о логарифмической производной, примененной к функциям $f - a_j$, следует, что $u \geqslant u_j$, $j = 1, 2, \ldots$ (3.3) в области определения функции u_j.

Зафиксируем j и рассмотрим всевозможные замкнутые жордановы ломаные Γ, на которых функция u_j определена и $\inf\{u_j(z) : : z \in \Gamma\} > 0$. Обозначим через D_j объединение внутренних областей всех таких ломаных. Очевидно, что множество D_j открыто и все его связные компоненты односвязны.

Покажем, что если $u_j(z_0) > 0$, то $z_0 \in D_j$. Пусть $u_j = v_1 - v_2$, v_i — субгармонические функции, $u_j(z_0) = d > 0$. В силу полунепрерывности сверху $v_2(z) < v_2(z_0) + d/3$ в некоторой окрестности V точки z_0. Из хорошо известного свойства потенциалов [3, гл. VII,

§ 5, следствие] вытекает, что найдется квадратный контур $\Gamma \subset V$, окружающий точку z_0 такой, что $v_1(z) > v_1(z_0) - d/3$, $z \in \Gamma$. Поэтому $u_j(z) \geqslant u_j(z_0) - 2d/3 > d/3 > 0$, $z \in \Gamma$, и $z_0 \in D_j$.

4. Доказательство того, что множества D_j попарно не пересекаются. Пусть, например, $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$. Тогда найдутся простые замкнутые ломаные Γ_1, Γ_2, внутренние области которых пересекаются, причем $u_1(z) > d$, $z \in \Gamma_1$; $u_2(z) > d$, $z \in \Gamma_2$; $d > 0$. Поскольку $a_1 \neq a_2$, и сходимость в (2.7) — равномерная на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ вне множества малой линейной меры, имеем $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$. Тогда одна из ломаных (скажем, Γ_1) содержит точку z_0, лежащую в области, ограниченной ломаной Γ_2. Из (3.3) следует, что $u(z_0) > d$. Из принципа максимума, примененного к субгармонической функции u, и полунепрерывности этой функции сверху следует, что существует континуум E такой, что $u(z) \geqslant d$, $z \in E$; $z_0 \in E$, $E \cap \Gamma_2 \neq \varnothing$. Воспользуемся теперь следующей леммой.

Лемма 1. *Пусть v — субгармоническая функция, $v(0) = d > 0$. Тогда найдется такое натуральное число N, что для любого $n \geqslant N$ множество значений r из интервала $(2^{-n-1}, 2^{-n})$ таких, что $v(re^{i\theta}) > \frac{d}{2}$, $|\theta| \leqslant \pi$, имеет длину $\geqslant 2^{-n-2}$.*

Доказательство. Пусть $K = \{z : v(z) < d/2\}$. Множество K разрежено в нуле по определению разреженности [3, 4]. Следовательно, круговая проекция множества K на положительный луч разрежена в нуле [4, предложение IX.2] и лемма вытекает из критерия разреженности Н. Винера [4, теорема IX.10].

Пусть $R > 0$ настолько велико, что $E \subset D(0, R/2)$. Для любого $z \in E$ выберем число $N(z)$ так, чтобы выполнялось утверждение леммы 1 с точкой z вместо точки 0 и функцией u в качестве v. Кроме того, считаем, что

$$2^{-N(z)} < \min\{\operatorname{diam} \Gamma_1, \operatorname{diam} \Gamma_2\}. \tag{4.1}$$

Найдется множество $X(z)$ с 1-мерой не более, чем $2^{-N(z)-2}$ такое, что сходимость в (2.7) с $j = 1, 2$ равномерна на множестве $D(0, R) \setminus X(z)$. Если нужно, выбираем подпоследовательность в (2.7). Пользуясь леммой 1, найдем такую окружность $C(z)$ с центром в точке z, что $u(\zeta) > d/2$, $\zeta \in C(z)$, и сходимость в (2.7) с $j = 1, 2$ равномерна на $C(z)$. Радиус этой окружности $C(z)$ выберем не превосходящим $2^{-N(z)}$. Пусть $D(z)$, $z \in E$ — круги, ограниченные окружностями $C(z)$. Можно выбрать конечное покрытие множества E этими кругами так, чтобы никакой круг покрытия не содержался полностью в другом круге покрытия. Из дуг окружностей выбранных кругов можно составить спрямляемую кривую Γ, обладающую такими свойствами: $u(z) > d/2$, $z \in \Gamma$ **(4.2)**, концы кривой Γ, z_1 и z_2 принадлежат Γ_1 и Γ_2, соответственно (этого можно добиться в силу (4. 1)); пределы в (2.7) при $j = 1, 2$ равномерные на Γ.

Пусть $r_m \Gamma = \{z : z/r_m \in \Gamma\}$. Из (4.2) и равномерной сходимости в (2.7) следует, что $|f'(z)| \leqslant \exp(-c\,T(r_m))$, $z \in r_m\Gamma$ с некоторой постоянной $c > 0$. Учитывая, что длина кривой $r_m\Gamma$ есть $O(r\ \ )$, $m \to$

$\to\infty$, интегрируем по кривой $r_m\Gamma$ и получаем, что $|f(r_m z_1) - f(r_m z_2)| = O(r_m \exp(-cT(r_m))) = o(1)$, $m\to\infty$. Это противоречит тому, что $f(r_m z_j)\to a_j$, $m\to\infty$, $j=1, 2$. Мы доказали, что $D_i \cap D_j = \varnothing$ $i\neq j$.

5. Доказательство теоремы А. Вейцмана. Покажем, что $u(z) = 0$ при $z\in\partial D_j$, $j\in\mathbb{N}$. Пусть, например, $u(z_0)=d>0$, $z_0\in\partial D_1$. Пользуясь леммой 1, найдем достаточно малую окружность $C(z_0)$ такую, что $u(z)>d/2$, $z\in C(z_0)$, и сходимость в (2. 7) равномерна на $C(z_0)$. Из определения D_1 следует, что найдется точка $z_1\in C(z_0)$ такая, что $u_1(z_1)>0$. Рассуждая, как выше в п. 4, получим, что $u_1(z)>0$ при $z\in C(z_0)$ — противоречие.

Заметим теперь, что u — субгармоническая функция конечного порядка ($\leqslant\lambda$). Это вытекает из (2. 8). Каждая связная компонента D_{jk} множества D_j содержит хотя бы одну связную компоненту множества $\{z: u(z)\geqslant\varepsilon_{jk}>0\}$. Отсюда следует, что множество таких компонент D_{jk} конечно ($\leqslant\max\{1, 2\lambda\}$) [5, теорема 4. 16].

Заметим, что до сих пор мы использовали только (1. 2), но не более сильное условие (1. 1). Таким образом, доказано некоторое обобщение теоремы А. Вейцмана: функции конечного нижнего порядка со свойством (1. 2) имеют конечное множество дефектных значений. Обозначим количество дефектных значений через q.

6. Субгармонический аналог теоремы 1. Назовем носителем δ-субгармонической функции множество, где она определена и отлична от 0. Из результатов пп. 3, 4 следует, что носители функций u_j попарно не пересекаются. Поэтому

$\sum_{j=1}^{q} u_j = \max_{1\leqslant j\leqslant q} u_j$ п. в. и из (3. 3) получается

$$u(z)\geqslant\sum_{j=1}^{q} u_j(z) \tag{6. 1}$$

там, где определена правая часть. Воспользуемся теперь условием (1. 1). Учитывая (2. 1) и (3. 1), имеем для каждого $r>0$

$$\sum_{j=1}^{q} m(rr_m, a_j)\sim 2T(rr_m, f)\sim T(rr_m, f')\sim m\left(rr_m, \frac{1}{f'}\right), \ m\to\infty.$$

Отсюда и из (2. 7) следует, что

$$\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{j=1}^{q} u_j(re^{i\theta})\right\}d\theta = \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta, \ r>0.$$

Вместе с (6. 1) это дает

$$\sum_{j=1}^{q} u_j(z) = u(z), \ z\in\mathbf{C}. \tag{6. 2}$$

Покажем, что функции u_j — субгармонические. В самом деле, u_j субгармонична в D_j, так как из (6. 2) и того, что $u_k=0$ в D_j при $k\neq j$ следует, что $u_j=u$ в D_j. Далее, $u_j=0$ на ∂D_j, потому что $0\leqslant u_j\leqslant u$ всюду и $u=0$ на ∂D_j. Кроме того, $u_j=0$ вне D_j. Поэтому u_j — субгармонические функции.

Обозначим через μ (через μ_j) меру, ассоциированную по Риссу с функцией u (функцией u_j). Из (6. 2) следует соотношение

$$\mu = \sum_{j=1}^{q} \mu_j. \tag{6. 3}$$

Обозначим через ν меру, считающую полюсы функции f. (Это означает, что $\nu(E)$ — количество полюсов на борелевском множестве E). Через ν_j обозначим меру, считающую a_j- точки. Для любой меры τ обозначаем через $(\tau)_t$ меру, определенную так: $(\tau)_t(E) = \tau(tE)$, $t > 0$, E — любое борелевское множество. Из (2. 7) вытекает слабая сходимость соответствующих риссовских зарядов:

$$(\nu)_{r_m}/T(r_m) \to \frac{1}{2}\mu,$$

$$((\nu)_{r_m} - (\nu_j)_{r_m})/T(r_m) \to \mu_j,$$

откуда следует, что $\frac{1}{2}\mu \geqslant \mu_j$, $1 \leqslant j \leqslant q$ **(6.4)**. Из (6.3), (6.4) получается

$$\sum_{j=1}^{q} \mu_j \geqslant 2\mu_k, \ 1 \leqslant k \leqslant q. \tag{6.5}$$

Основная лемма. *Пусть D_j — попарно непересекающиеся открытые множества, состоящие из конечного числа односвязных областей, $u_j \not\equiv 0$ — неотрицательные субгармонические функции, носители которых содержатся в D_j соответственно.*
Пусть риссовские меры μ_j этих функций удовлетворяют условию (6.5) и, кроме того, выполняется

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{q} \int_0^{2\pi} u_j(re^{i\theta})\,d\theta \begin{cases} \leqslant 2r^{\lambda+\varepsilon}, \ r_0 \leqslant r < \infty, \\ = 2, \ r = 1, \\ \leqslant 2r^{\lambda-\varepsilon}, \ 0 \leqslant r \leqslant r_0^{-1}, \end{cases} \tag{6.7}$$

где $0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{4}$, $r_0 > 1$ — некоторые числа. Тогда существует целое число $n \geqslant 2$, $|n/2 - \lambda| < 1/2$ такое, что

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{j=1}^{q} u_j(re^{i\theta}) = \pi r^{n/2} \left| \cos \frac{n}{2}(\theta - \theta_0) \right| \tag{6.8}$$

для некоторого θ_0, $0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$.

Доказательство Основной леммы содержится во второй части работы.

7. Окончание доказательства теоремы 1. Проверим выполнение условий Основной леммы. То, что множества D_j попарно не пересекаются, доказано в п. 4; то, что они состоят из конечного числа областей, доказано в п. 5; соотношение (6.5) доказано в п. 6. Наконец, из (2.8), (6.2) следует (6.7) с $\varepsilon = 0$.

Применяя Основную лемму, получим (6.8). Мы доказали следующее

Утверждение 1. Пусть мероморфная функция удовлетворяет условию (1.1) и для некоторой последовательности $r_m \to \infty$ выполняется (2.3). Определим U_m, U_{mj} формулами (2.6). Тогда для некоторой подпоследовательности номеров m справедливо $U_m \to u$, $U_{mj} \to u_j$, где u и u_j имеют вид (6.8).

Из сопоставления (6.8) и (2.8) следует, что $\lambda = n/2$. Таким образом, все возможные порядки λ пиков Пойа полуцелые. С другой стороны, как указано в п. 2, возможные порядки пиков Пойа заполняют отрезок $[\rho_1^*, \rho^*]$, содержащий отрезок $[\rho_1, \rho]$. Следовательно, $\rho_1^* = \rho^* = \rho_1 = \rho = \frac{n}{2}$, в частности, мы доказали, что функция f имеет конечный порядок и установили справедливость утверждения 1) из п. 1. Поскольку $\rho_1^* = \rho^*$, из формул для ρ_1^* и ρ^*, приведенных в п. 2, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $r_0 > 1$, $x_0 > 1$ такие, что

$$T(tx) \leqslant t^{\rho+\varepsilon} T(x), \quad t > r_0,\ x > x_0; \tag{7.1}$$

$$T(tx) \leqslant t^{\rho-\varepsilon} T(x), \quad t < r_0^{-1},\ tx > x_0. \tag{7.2}$$

Этих соотношений достаточно, чтобы заменить (2.3) в Утверждении 1, т. е. справедливо

Утверждение 2. Пусть мероморфная функция f удовлетворяет условиям (1.1), (7.1), (7.2) с $\rho = \frac{n}{2}$, n — натуральное число, $n \geqslant 2$. Для произвольной последовательности $r_m \to \infty$ определим U_m, U_{mj} формулами (2.6). Тогда для некоторой подпоследовательности номеров m справедливо $U_m \to u$, $U_{mj} \to u_j$, где u и u_j — функции вида (6.8).

В самом деле, условия (7.1), (7.2) с $x = r_m$ обеспечивают применимость теоремы Дж. Андерсона — А. Бернстейна и В. С. Азарина о компактности последовательностей U_m, U_{mj}. Выбирая подпоследовательность, получаем (2.7). Вместо (2.8) предельным переходом из (7.1), (7.2) с $x = r_m$ получим соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})\,d\theta \leqslant \begin{cases} 2r^{\rho+\varepsilon}, & r \geqslant r_0, \\ 2r^{\rho-\varepsilon}, & r \leqslant r_0^{-1} \end{cases} \tag{7.3}$$

с равенством при $r = 1$. Дальше Утверждение 2 доказывается так же, как Утверждение 1, но со следующими изменениями. При оценке достаточных членов в (2.4), (3.1) вместо (2.3) используем (7.1). При доказательстве того, что множества D_j состоят из конечного числа областей в п. 5, вместо (2.8) пользуемся (7.3). Наконец, при проверке условия (6.7) вместо (2.8) пользуемся (7.3).

Из Утверждения 2 и из (2.5) вытекает, что $T(cr)/T(r) \to c^\rho$, $r \to \infty$ равномерно относительно $c \in [1, 2]$. Полагая $T(r) = r^\rho l_1(r)$, получим $l_1(cr) \sim l_1(r)$, $r \to \infty$ равномерно относительно $c \in [1, 2]$, т. е. справедливо (1.5).

Докажем (1.4). Обозначим через X множество, состоящее из субгармонических функций вида

$$u(re^{i\theta};\ \theta_0)=\pi r^{\rho}|\cos\rho(\theta-\theta_0)|,\ \theta_0\in[-\pi,\ \pi).$$

Очевидно, что множество X компактно в L^1_{loc}. Заметим, что L^1_{loc} — метрическое пространство. Рассмотрим семейство функций

$$v_t(z)=\left(\log\frac{1}{|f'(zt)|}\right)\Big/(t^{\rho}l_1(t)).$$

Покажем, что $\operatorname{dist}(v_t,\ X)\to 0,\ t\to\infty$ **(7.4).** Пусть (7.4) не выполняется. Тогда существует последовательность $t_m\to\infty$ такая, что $\operatorname{dist}(v_{t_m},\ X)\geqslant\varepsilon>0,\ m\to\infty$. Взяв эту последовательность в качестве r_m, применим Утверждение 2. Получим, что для некоторой подпоследовательности $v_{t_m}\to u$, где $u\in X$ — противоречие. Соотношение (7.4) доказано.

Пусть $u^t\in X$ — ближайший элемент к v_t. Покажем, что $\operatorname{dist}(u^t,\ u^{ct})\to 0,\ t\to\infty$ **(7.5)** равномерно относительно $c\in[1,\ 2]$. Пусть это не так. Тогда $\operatorname{dist}(u^{t_m},\ u^{c_m t_m})\geqslant\varepsilon>0$ **(7.6)** для некоторых последовательностей $c_m\in[1,\ 2],\ t_m\to\infty$. Имеем

$$u^{c_m t_m}(z)=v_{c_m t_m}(z)+o(1)=c_m^{-\rho}v_{t_m}(c_m z)+o(1)=$$
$$=c_m^{-\rho}u^{t_m}(c_m z)+o(1)=u^{t_m}(z)+o(1),$$

так как $c^{-\rho}u(cz)=u(z)$ для любых $u\in X$ и $c>0$. Получено противоречие с (7.6), которое доказывает (7.5).

Если $u_t=u(.;\ \theta_0(t))$, то из (7.5) следует, что $\theta_0(t)-\theta_0(ct)\to 0$, $t\to\infty$ равномерно относительно $c\in[1,\ 2]$. Из (7.4) получаем, что $v_t(z)=u(z;\ \theta_0(t))+o(1)$ в L^1_{loc} при $t\to\infty$. Наконец, с помощью теоремы В. С. Азарина о сходимости по 1-мере получаем (1.4).

Остальные утверждения теоремы 1 легко выводятся из (1.4), (1.5). В самом деле, из асимптотической формулы (1.4), интегрируя по кривым, мало отличающимся от лучей и обходящим исключительное множество C_0, получаем, что для некоторых $b_j\in\mathbf{C}$ выполняется

$$\log\frac{1}{|f(re^{i\theta})-b_j|}=\pi r^{\rho}l_1(r)|\cos\rho(\theta-l_2(r))|+o(r^{\rho}l_1(r)),$$

$$\frac{\pi}{2\rho}(2j-3)\leqslant\theta-l_2(r)\leqslant\frac{\pi}{2\rho}(2j-1),$$

когда $re^{i\theta}\notin C_0$, $r\to\infty$ равномерно относительно θ. Отсюда и из (1.5) немедленно вытекают свойства 2), 3) из формулировки теоремы 1.

Список литературы: 1. *Азарин В. С.* Теория роста субгармонических функций. Х., 1978. 72 с. 2. *О минимуме* модуля целой функции на последовательности пиков Пойа / А. Э. Еременко, М. Л. Содин, Д. Ф. Шиа // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1986. Вып. 45. С. 26—40. 3. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. 1964. 212 с. 4. *Брело М.* О топологиях и границах в теории потенциала. М., 1974. 224 с. 5. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М., 1980. 304 с.

Поступила в редколлегию 11.09.87