УДК 517.521.8

Л. С. ТЕСЛЕНКО, Г. А. МИХАЛИН

(C)-СВОЙСТВО (A, α)- и $(A\times(C, \alpha))$-МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ И ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА

1. Пусть $\{S_n\}$ — последовательность комплексных чисел

$$E_n^{(\alpha)} = \binom{n+\alpha}{n} (\alpha > -1;\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\ a_n^{(\alpha)}(S) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} E_k^{(\alpha)} S_k}{E_n^{(\alpha+1)}},$$

$$C_n^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\alpha-1)} S_k / E_n^{(\alpha)}\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ \alpha > -1); \qquad (1)$$

$$A^{(\alpha)}(x)=(1-x)^{\alpha+1}\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(\alpha)}S_nx^n \quad (x\in(0;\ 1);\ \alpha>-1); \tag{2}$$

$$F^{(\alpha)}(x)=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(\alpha)}x^n \quad (x\in(0;\ 1);\ \alpha=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3}$$

Средние (2) и (3) рассматриваются для $\{S_n\}$, удовлетворяющих условию $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|S_n|}\leqslant 1$, и определяют соответственно так называемые $(A,\ \alpha)$- и $(A\times(C,\ \alpha))$-методы суммирования [I, с. 318].

Основными результатами настоящей работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(S_m-S_n)\geqslant -r>-\infty,\ \text{когда}\ 1<\frac{m}{n}\to 1\ (n\to\infty), \tag{4}$$

$F^{(\alpha)}$ (x) *определена равенствами (3). Если* $F^{(\alpha)}(x)=O(1)$ $(x\to 1-0)$ *для какого-нибудь* $\alpha=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ *то* $S_n=O(1)$ $(n\to\infty)$. *Если же* $F^{(\alpha)}(x)\to S$ $(x\to 1-0)$ *для какого-нибудь* $\alpha=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ *то* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|S_n-S|\leqslant r$.

Теорема 2. *Пусть для какого-нибудь* $\alpha=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ *функция* $F^{(\alpha)}$, (x) *определяемая равенствами (3), ограничена в круге* K_{x_0} $(z:|z-x_0|<1-x_0)$ *для какого-нибудь* $x\in[0;\ 1)$, $F^{(\alpha)}(x)\to S$ $(x\to 1-0)$ *и замкнутое выпуклое множество G является (c)-множеством [3] последовательности* $\{S_n\}$. *Тогда* $S\in G$. *Если же бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является (c)-точкой [2] последовательности* $\{S_n\}$, *то для любого* $\alpha=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ *функция* $F^{(\alpha)}(x)$ *неограничена в круге* K_{x_0} $(z:|z-x_0|<1-x_0)$ *при любом* $x_0\in[0;\ 1)$.

Теоремы 1 и 2 для $\alpha=0$ доказаны Н. А. Давыдовым [2].

Теорема 3. *Если* $A^{(\alpha)}(x)$, $F^{(\alpha)}$ (x) *определены равенством* (2) *и* (3) *и* $A^{(\alpha)}(x)\to S$ $(x\to 1-0)$ *для какого-нибудь* $\alpha>-1$, *то* $F^{(1)}(x)\to S$ $(x\to 1-0)$. *Если функция* $A^{(\alpha)}$ (z) *для какого-нибудь* $\alpha>-1$ *будет аналитической в круге* $|z|<1$ *и ограниченной в круге* K_{x_0} $(z:|z-x_0|<1-x_0)$ *при какой-нибудь* $x\in[0;\ 1)$, *то и функция* $F^{(1)}(z)$ *также будет аналитической в круге* $|z|<1$ *и ограниченной в круге* K_{x_0} $(z:|z-x_0|<1-x_0)$.

2. Для доказательства теорем 1—3 нам понадобится ряд лемм.

Лемма 1. *При условии* (4) *для любого* $\alpha=1,\ 2,\ \ldots$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\left(C_m^{(\alpha)}-C_n^{(\alpha)}\right)\geqslant 0,\ \text{когда}\ 1<\frac{m}{n}\to 1\ (n\to\infty).$$

Лемма 2. *Если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является (c)-точкой последовательности* $\{S_n\}$, *то она является и (c)-точкой последовательности* (1) *для каждого* $\alpha=1,\ 2,\ \ldots$ *Если же множество G является (c)-множеством последовательности* $\{S_n\}$, *то для любого* $\alpha=1,\ 2,\ \ldots$ *или бесконечно* *удаленная точка является (с)-точкой последовательности* (1), *или последовательность* (1) *имеет два непересекающихся (с)-множества, или G является (с)-множеством последовательности* (1).

Лемма 3. *Утверждения теоремы 3 останутся верными, если в ее формулировке всюду символ $F^{(1)}$ заменить символом $\Phi^{(\alpha)}$ ($\alpha > -1$), учитывая, что* $\Phi^{(\alpha)}(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} E_k^{(\alpha)} S_k / E_n^{(\alpha+1)}$.

3. Доказательство леммы 1. Из условия (4) вытекает [2, 192] существование чисел $a_0 > 0$ и $b_0 > 0$, таких, что $S_m - S_n > -a_0 \ln \frac{m}{n} - b_0$ для любых $m \geqslant n \geqslant 1$. Учитывая это и известное неравенство $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$, получаем

$$C_m^{(1)} - C_n^{(1)} > -a_0 \frac{m-n}{m+1} \ln \frac{m}{n} - \frac{m-n}{m+1} \left(a_0 + b_0 + \frac{S_0 - S_1}{n+1} - \frac{a_0 (\ln n - 1)}{n+1} \right),$$

откуда вытекает справедливость леммы 1 для $\alpha = 1$. Далее, методом математической индукции доказываем неравенство

$$1^{E_1^{(\alpha)}} \cdot 2^{E_2^{(\alpha)}} \ldots n^{E_n^{(\alpha)}} \geqslant \left(\frac{n}{e}\right)^{E_n^{(\alpha)}} \quad (n = 1, 2, \ldots; \alpha = 0, 1, 2, \ldots)$$

и убеждаемся в справедливости леммы 1 для любого $\alpha = 1, 2, \ldots$

4. Лемма 2 является простым следствием теоремы 1 работы [3].

5. Доказательство леммы 3. Известно [4, с. 324], что $1/E_n^{(\alpha+1)} = (\alpha+1)\int_0^1 u^n (1-u)\, du$ $(n = 0, 1, \ldots; \alpha > -1)$. Учитывая эту формулу, используя возможность почленного интегрирования [5, с. 669] и возможность изменения порядка суммирования, вводя обозначение $z = \rho e^{i\theta}$, имеем

$$\Phi^{(\alpha)}(z) = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{E_n^{(\alpha+1)}} \sum_{k=0}^{n} E_k^{(\alpha)} S_k =$$

$$= \frac{(\alpha+1)(1-z)}{\rho} \int_0^{\rho} \frac{A^{(\alpha)}(tl^{i\theta})}{(1-tl^{i\theta})^{\alpha+2}} \left(1 - \frac{t}{\rho}\right)^{\alpha} dt.$$

Из последнего равенства вытекает, что если $A^{(\alpha)}(x) \to S$ $(x \to 1-0)$, то и $\Phi^{(\alpha)}(x) \to S$ $(x \to 1-0)$.

Очевидно, что функция $\Phi^{(\alpha)}(z)$ будет аналитической в круге $|z| < 1$, если таковой является функция $A^{(\alpha)}(z)$.

Проводя несложные рассуждения, можно убедиться, что функция

$$J(z) = \frac{|1-z|}{\rho} (\alpha+1) \int_0^{\rho} \frac{1}{|1 - te^{i\theta}|^{\alpha+2}} \left(1 - \frac{t}{\rho}\right)^{\alpha} dt$$

является ограниченной в кольце $L\left(z: \frac{1}{2} \leqslant |z| < 1\right)$. В силу этого из условия $|A^{(\alpha)}(z)| \leqslant M(z \in K_{x_0}(z: |z - x_0| < 1 - x_0)$ и формулы (5) получаем

$$|\Phi^{(\alpha)}(z)| \leqslant M_1 < +\infty \text{ для } z \in L \cap K_{x_0}.$$

Если же $|z| < 1/2$, то ограниченность функции $\Phi^{(\alpha)}(z)$ вытекает из ее аналитичности в круге $|z| < 1$.

Лемма 3 доказана.

6. Справедливость теоремы 1 вытекает из леммы 1 и известных утверждений [4, с. 384] и [2, теорема 4].

7. Теорема 2 вытекает из леммы 2 и теоремы *Б* работы [2].

8. Справедливость теоремы 3 вытекает из леммы 3 и тождества

$$F^{(1)}(x) \equiv (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} x^n = \frac{\alpha (1 - x)}{\alpha + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n + 1} \sum_{k=0}^{n} a_k^{(\alpha)} + \frac{1 - x}{\alpha + 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\alpha)} x^n,$$

где

$$a_n^{(\alpha)} = \frac{1}{E_n^{(\alpha+1)}} \sum_{k=0}^{n} E_k^{(\alpha)} S_k.$$

9. В силу теоремы 3 теорема 1 справедлива и для (A, α)-метода. В этом случае она является обобщением известной теоремы [6].

Из теорем 2 и 3 вытекает целый ряд теорем тауберова типа для (A, α)- и $(A \times (C, \alpha))$-методов суммирования, аналогичных тауберовым теоремам для метода Пуассона—Абеля, доказанных в работе [2]. Заметим, что метод Пуассона—Абеля является $(A, 0)$-методом и $(A \times (C, 0))$-методом.

В заключение авторы благодарят Н. А. Давыдова за полезные советы и внимание к работе.

Список литературы: 1. *Borwein D.* On a scale of Abel — Type Summability methods. Proc. Conebridge Philos. Sos. — «Math. and Phus. Sci.», 1957, vol. 53, p. 318—322. 2. *Давыдов Н. А.* (*C*) — свойство методов Чезаро и Абеля—Пуассона теоремы тауберова типа. — «Мат. сб.» 1963, т. 60 (102), вып. 2, с. 185—206. 3. *Михалин Г. А., Тесленко Л. С.* Об одном свойстве одного класса $(\overline{R}, P_n, \alpha)$-методов суммирования рядов и теоремы тауберова типа. — «Укр. мат. журн.», 1977, т. 29, с. 194—203. 4. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М., ИЛ, 1951. 504 с. 5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М., «Наука», 1969. 800 с. 6. Jeyarajan P. A. Tauberian theorem for the generalisied Aber method of summability. I. — «J. Indiam Math. Soc.» 36, № 3—4, p. 279—289.

Поступила 3 марта 1975 г.