КЪ ИНТЕГРИРОВАНІЮ

ЛИНЕЙНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

П. С. Флорова.

§ 1. Уравненіе, интегрированіемъ котораго мы намѣрены заниматься въ предлагаемой статьѣ, таково:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^{k-i} u^{n-i} = x^{m+k} \cdot u. \qquad (1)$$

Здѣсь u^{n-i} означаетъ $(n-i)$-ю производную u по x; α_i и m — постоянныя величины; k и n цѣлыя положительныя числа, удовлетворяющія условію $k < n$. Способъ, помощью котораго могутъ быть обнаружены случаи интегрируемости предыдущаго уравненія, есть слегка видоизмѣненный способъ интегрированія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій академика Импенецкаго[1]. Онъ состоитъ, слѣдовательно, въ преобразованіи даннаго уравненія въ уравненія того же вида, но съ иными коэффиціентами подъ знакомъ сигмы.

§ 2. Если назовемъ каждую часть уравненія (1) черезъ u_1^{n-k}, то оно распадется на два такихъ:

[1] «Распространеніе на линейныя уравненія вообще способа Эйлера для изслѣдованія всѣхъ случаевъ интегрируемости одного частнаго вида линейныхъ уравненій втораго порядка». Спб. 1882.

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^{n-i} u^{n-i} = u_1^{\,n-k}$$

$$x^{m+k} . u = u_1^{\,n-k}. \qquad (2)$$

Разовьемъ слѣдствія, вытекающія изъ этихъ равенствъ.

Проинтегрировавъ первое изъ нихъ $n-k$ разъ[1] и опустивъ постоянныя произвольныя, вводимыя этимъ интегрированіемъ, получимъ

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i (x^{k-i} u^{n-i})^{k-n} = u_1 . \qquad (3)$$

Но легко видѣть, что

$$(x^{k-i} u^{n-i})^{k-n} = \sum_{r=0}^{k} A_r^{\,i} x^r u^r$$

гдѣ для краткости положено

$$A_r^{\,i} = \frac{(k-i)!\,[k-n]^{k-i-r}}{r!\,(k-i-r)!}.$$

Значеніе символа, употребленнаго нами въ послѣдней формулѣ, опредѣляется, какъ извѣстно, слѣдующимъ равенствомъ:

$$[c]^r = c(c-1)\ldots.(c-r+1).$$

На основаніи сказаннаго уравненіе для u_1 принимаетъ такой видъ:

---

[1] Слѣдуя дословно способу В. Г. Имшенецкаго, нужно было бы каждую часть уравненія (1) назвать черезъ u_1' и произвести однократное интегрированіе перваго изъ тѣхъ уравненій, на которыя распадается исходное.

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \sum_{r=0}^{k-i} A_r{}^i x^r u^r = u_1.$$

Измѣнимъ здѣсь порядокъ суммованій. Съ этою цѣлью допустимъ, что r получило частное значеніе; тогда коэффиціентомъ при $x^r u^r$, который мы назовемъ черезъ B_r, будетъ:

$$B_r = \sum_{i=0}^{k-r} A_r{}^i \alpha_i.$$

Верхнимъ предѣломъ этой суммы мы сдѣлали $k-r$ вмѣсто k потому, что $A_r{}^i$ при $i > k-r$ обращается въ нуль.

Замѣтивъ наконецъ, что крайнія значенія r суть 0 и k, находимъ:

$$\sum_{r=0}^{k} B_r x^r u^r = u_1.$$

Обратимся теперь къ равенству (2). Если разрѣшимъ его относительно u и, продифференцировавъ r разъ, умножимъ на x^r, то получимъ:

$$x^r u^r = x^{-m-k} \sum_{\rho=0}^{r} \frac{r!\,[-m-k]^{r-\rho}}{\rho!\,(r-\rho)!} x^\rho u_1{}^{n+\rho-k}.$$

Измѣнивъ здѣсь параметръ ρ въ $k-\rho$, найдемъ:

$$x^r u^r = x^{-m-k} \sum_{\rho=k}^{k-r} C_\rho{}^r x^{k-\rho} u_1{}^{n-\rho}$$

гдѣ для краткости положено:

$$C_\rho{}^r = \frac{r!\,[-m-k]^{r+\rho-k}}{(k-\rho)!\,(r+\rho-k)!}.$$

Если отсюда и изъ раньше найденнаго для u_1 равенства исключимъ $x^r u^r$, то будемъ имѣть

$$\sum_{r=0}^{k} B_r \sum_{\rho=k}^{k-r} C_\rho{}^r x^{k-\rho} u_1{}^{n-\rho} = x^{m+k} u_1.$$

Измѣнивъ здѣсь порядокъ суммованій, какъ это показано выше, и положивъ

$$\alpha_\rho' = \sum_{r=k}^{k-\rho} B_r C_\rho{}^r$$

получимъ:

$$\sum_{\rho=0}^{k} \alpha_\rho' x^{k-\rho} u_1{}^{n-\rho} = x^{m+k} u_1.$$

Такимъ образомъ цѣль, намѣченная принятымъ способомъ интегрированія уравненія (1), достигнута. Остается выразить α' черезъ α. Съ этою цѣлью въ равенство для $\alpha_\rho{}'$ поставимъ на мѣсто B_r его значеніе. Тогда оно приметъ такой видъ:

$$\alpha_\rho' = \sum_{r=k}^{k-\rho} C_\rho{}^r \sum_{i=0}^{k-r} A_r{}^i \alpha_i$$

а по измѣненіи порядка суммованій — такой:

$$\alpha_\rho' = \sum_{i=0}^{\rho} D_i \alpha_i$$

гдѣ положено:

$$D_i = \sum_{r=k-\rho}^{k-i} A_r{}^i C_\rho{}^r = \sum_{r=o}^{\rho-i} A^i{}_{k-\rho+r}\, C_\rho{}^{k-\rho+r}.$$

Замѣнивъ здѣсь A и C ихъ значеніями, получимъ:

$$D_i = \frac{(k-i)!}{(k-\rho)!} \sum_{r=o}^{\rho-i} \frac{[-m-k]^r [k-n]^{\rho-i-r}}{r!(\rho-i-r)!}.$$

Отсюда вслѣдствіе того, что биномъ Ньютона имѣетъ мѣсто и для факторіальныхъ степеней, имѣемъ:

$$D_i = \frac{(k-i)![-m-n]^{\rho-i}}{(k-\rho)!(\rho-i]!}.$$

Изъ сказаннаго видимъ, что между коэффиціентами исходнаго и преобразованнаго уравненій существуетъслѣдующая зависимость:

$$\alpha'_\rho = \sum_{i=o}^{\rho} \frac{(k-i)![-m-n]^{\rho-i}}{(k-\rho)!(\rho-i)!} \alpha_i.$$

§ 3. Если надъ уравненіемъ (1) совершимъ δ преобразованій подобныхъ указаннымъ въ предыдущемъ параграфѣ, то получимъ уравненіе

$$\sum_{\rho=o}^{k} \alpha_\rho^\delta x^{k-\rho} u_\delta^{n-\rho} = x^{m+k} \cdot u_\delta \qquad (4)$$

коэффиціентъ котораго опредѣлится слѣдующимъ равенствомъ:

$$\alpha_\rho^\delta = \sum_{i=o}^{\rho} \frac{(k-i)![-\delta(m+n)]^{\rho-\iota}}{(k-\rho)!(\rho-i)!} \alpha_i \qquad (5)$$

Для доказательства этой мысли подвергнемъ упомянутому преобразованію уравненіе (4); пусть это преобразованіе дало намъ уравненіе съ коэффиціентомъ $\alpha_r^{\delta+1}$. Уже извѣстно, что

$$\alpha_r^{\delta+1} = \sum_{\rho=0}^{r} \frac{(k-\rho)!\,[-m-n]^{r-\rho}}{(k-r)!\,(r-\rho)!}\,\alpha_\rho^{\delta}.$$

Если поставимъ сюда на мѣсто α_ρ^{δ} предполагаемое для него значеніе и сдѣлаемъ положенія

$$A_i^{\rho} = \frac{(k-i)!\,[-\delta(m+n)]^{\rho-i}}{(k-\rho)!\,(\rho-i)!}$$

$$B_\rho = \frac{(k-\rho)!\,[-m-n]^{r-\rho}}{(k-r)!\,(r-\rho)!},$$

то при условіи

$$C_i = \sum_{\rho=i}^{r} A_i^{\rho} B_\rho = \sum_{\rho=0}^{r-i} A_i^{\rho+i} B_{\rho+i}$$

получимъ:

$$\alpha_r^{\delta+1} = \sum_{\rho=0}^{r} B_\rho \sum_{i=0}^{\rho} A_i^{\rho}\alpha_i = \sum_{i=0}^{r} C_i\alpha_i.$$

Разовьемъ теперь условіе опредѣляющее C_i. Замѣнивъ въ немъ A и B ихъ выраженіями, будемъ имѣть:

$$C_i = \frac{(k-i)!}{(k-r)!} \sum_{\rho=0}^{r-i} \frac{[-\delta(m+n)]^{\rho}\,[-m-n]^{r-i-\rho}}{\rho!\,(r-i-\rho)!}.$$

Отсюда по свойству факторіальныхъ степеней найдемъ:

$$C_i = \frac{(k-i)!\,[-(\delta+1)(m+n)]^{r-i}}{(k-r)!\,(r-i)!}\,.$$

На основанiи сказаннаго, уравненiе для $\alpha_r^{\delta+1}$ по замѣнѣ r черезъ ϱ приметъ такой видъ:

$$\alpha_\varrho^{\delta+1} = \sum_{i=0}^{\varrho} \frac{(k-i)!\,[-(\delta+1)(m+n)]^{\varrho-i}}{(k-\varrho)!\,(\varrho-i)!}\,\alpha_i\,.$$

Сравнивъ это равенство съ равенствомъ (5), приходимъ къ заключенiю, что послѣднее имѣетъ мѣсто для всякаго цѣлаго и положительнаго δ, такъ какъ оно имѣетъ его для $\delta=1$.

§ 4. Вторая часть равенства (5) по замѣнѣ въ ней δ черезъ $-\delta$ опредѣляетъ коэффицiентъ того уравненiя, которое выводится изъ (1) помощью δ преобразованiй, обратныхъ указаннымъ во второмъ параграфѣ. Эту мысль можно подтвердить двояко: или непосредственно, или разрѣшивъ равенство (5) относительно α_i. Мы пойдемъ по второму пути: будучи болѣе простымъ онъ столь-же строгъ, какъ и первый, ибо исходное уравненiе къ уравненiю (4) стоитъ въ томъ отношенiи, какое требуется высказаннымъ предложенiемъ, т. е. получается изъ него помощью δ обратныхъ преобразованiй.

Равенство (5) при условiи

$$A_i^{\varrho} = \frac{(k-i)!\,[-\delta(m+n)]^{\varrho-i}}{(k-\varrho)!\,(\varrho-i)!}$$

можно разсматривать подъ видомъ:

$$\alpha_\varrho^{\delta} = \sum_{i=0}^{\varrho} A_i^{\varrho}\,\alpha_i$$

а его рѣшеніе относительно α_i — подъ видомъ:

$$\alpha_i = \sum_{r=0}^{i} B_r^{\,i}\, \alpha_r^{\,\delta}.$$

Такимъ образомъ задача сводится къ опредѣленію B. Но если исключимъ изъ предыдущихъ равенствъ α_i и въ результатѣ измѣнимъ порядокъ суммованій, то найдемъ:

$$\alpha_\rho^\delta = \sum_{r=0}^{\rho}\Big(\sum_{i=r}^{\rho} A_i^\rho\, B_r^{\,i}\Big)\, \alpha_r^{\,\delta}.$$

Полученный результатъ имѣетъ мѣсто тождественно; слѣдовательно, существуютъ такія отношенія:

$$A_\rho^\rho\, B_\rho^\rho = 1$$

$$\sum_{i=r}^{\rho} A_i^\rho\, B_r^{\,i} = \sum_{i=0}^{\rho-r} A^\rho_{r+i}\, B_r^{\,r+i} = 0.$$

Поставивъ сюда на мѣсто A его значеніе, получимъ:

$$B_\rho^\rho = 1$$

$$\sum_{i=0}^{\rho-r} \frac{(k-r+i)!\,[-\delta(m+n)]^{\rho-r-i}}{(\rho-r-i)!}\, B_r^{\,r+i} = 0\,.$$

Требованіе, выражаемое послѣднимъ изъ этихъ равенствъ, удовлетворяется лишь въ томъ случаѣ, когда

$$B_r^{\,r+i} = \frac{[\delta(m+n)]^i}{i!\,(k-r-i)!}\,.\,C\,,$$

гдѣ C нѣкоторая постоянная, отъ i независящая. Положивъ для опредѣленія этой постоянной $i=0$, найдемъ:

$$C=(k-r)!B_r^r=(k-r)!.$$

Имѣя это легко уже получить:

$$B_r^i=\frac{(k-r)![\delta(m+n)]^{i-r}}{(k-i)!(i-r)!}.$$

На основанiи сказаннаго равенство для α_i принимаетъ такой видъ:

$$\alpha_i=\sum_{r=0}^{i}\frac{(k-r)![\delta(m+n)]^{i-r}}{(k-i)!(i-r)!}\alpha_r^\delta. \qquad (6)$$

И такъ, предложенiе, поставленное въ началѣ этого параграфа, вполнѣ доказано. Изъ него вытекаетъ, что равенство (5), а съ нимъ и равенство (6), имѣетъ мѣсто и для отрицательнаго δ. По этому впослѣдствiи въ этихъ равенствахъ мы будемъ разумѣть подъ δ какъ положительныя, такъ и отрицательныя цѣлыя числа.

§ 5. Сказаннаго вполнѣ достаточно для выдѣленія тѣхъ случаевъ, въ которыхъ интегрированiе уравненiя (1) можно свести на интегрированiе простѣйшаго уравненiя, разсматриваемаго нами типа. Въ самомъ дѣлѣ, если допустимъ, что $\alpha_o^\delta=1$ и что $\alpha_r^\delta=0$ при $r>0$, то въ силу отношенiя

$$\alpha_i=\frac{k![\delta(m+n)]^i}{(k-i)!i!},$$

вытекающаго изъ равенства (6), уравненiя (1) и (4) примутъ такой видъ:

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{k![\delta(m+n)]^i}{i!(k-i)!} x^{k-i} u^{n-i} = x^{m+k} u \qquad (7)$$

$$u_\delta{}^n = x^m u_\delta . \qquad (8)$$

Уравненіе (7) представляетъ одинъ изъ случаевъ, въ которыхъ уравненіе (1) приводится къ (8). На разсмотрѣніи другихъ подобныхъ случаевъ[1], хотя опредѣленіе нѣкоторыхъ изъ нихъ не представляетъ никакихъ затрудненій, мы не будемъ останавливаться. По нашему мнѣнію, даже въ теоретическомъ отношеніи случаи эти представляютъ сравнительно слабый интересъ и далеко не такъ характерны, какъ упомянутый выше.

Изъ предыдущаго видно, что рѣшеніе вопроса объ интегрированіи уравненія (7) зависитъ отъ рѣшенія того-же вопроса по отношенію къ уравненію (8). Поэтому мы должны заняться теперь послѣднимъ изъ упомянутыхъ уравненій. Хотя интегрированіе этого уравненія никѣмъ еще не было показано[2], однако мы удержимъ за нимъ то названіе, подъ которымъ оно извѣстно для случая $n=2$, т. е. будемъ называть его уравненіемъ Рикатти. И такъ, приступимъ къ разысканію случаевъ интегрируемости уравненія Рикатти.

§ 6. Извѣстно, что если v означаетъ какую-нибудь функцію ξ и если

$$\xi = ax^c,$$

гдѣ a и c нѣкоторыя постоянныя, то непремѣнно:

[1] Число этихъ случаевъ возрастаетъ вмѣстѣ съ возрастаніемъ n.

[2] Отсюда нужно исключить случаи $n=2$, $n=3$. Первый общеизвѣстенъ; второй разсмотрѣнъ В. П. Алексѣевскимъ и мною. «Сообщенія», 1883 г. Выпускъ II. Стр. 115, 129.

$$(c\xi)^k \frac{d^k v}{d\xi^k} = \sum_{i=1}^{k} \omega_i{}^k x^i \frac{d^i v}{dx^i}. \qquad (9)$$

Чтобы не отсылать читателя за справками о свойствахъ постояннаго коэффиціента ω, которыя намъ сейчасъ понадобятся, продифференцируемъ предыдущее равенство по ξ. Результату этого дифференцированія, на основаніи того, что $\omega_i{}^k$ при $i > k$ и при $i < 1$ есть тождественный нуль, можно сообщить такую форму:

$$(c\xi)^{k+1} \frac{d^{k+1} v}{d\xi^{k+1}} = \sum_{i=1}^{k+1} \{\omega^k{}_{i-1} + (i - ck)\omega_i{}^k\} x^i \frac{d^i v}{dx^i}.$$

Съ другой стороны, имѣемъ:

$$(c\xi)^{k+1} \frac{d^{k+1} v}{d\xi^{k+1}} = \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i{}^{k+1} x^i \frac{d^i v}{dx^i}.$$

Сопоставленіе послѣднихъ равенствъ и открываетъ намъ искомое свойство коэффиціента ω:

$$\omega_i{}^{k+1} = \omega^k{}_{i-1} + (i - ck)\omega_i{}^k. \qquad (10)$$

Для нашихъ дальнѣйшихъ цѣлей необходимо замѣтить еще, что $\omega_k{}^k = 1$. Этотъ результатъ легко получить изъ уравненія (10) положивъ въ немъ $i = k+1$ и замѣтивъ, что $\omega_1{}' = 1$.

§ 7. Обратимся теперь къ продолженію нашего изслѣдованія. Анализъ предыдущихъ параграфовъ имѣетъ мѣсто для всякаго α. Отнесемъ его къ тому частному случаю, когда $\alpha_i = \omega^k{}_{k-i}$; именно, займемся вычисленіемъ коэффиціента α_ρ^δ при сдѣланномъ допущенiи. Такъ-какъ въ предстоящемъ анализѣ мы натолкнемся на необходимость принять во вниманiе зависимость коэффицiента α_ρ^δ отъ числа k, то вмѣсто α_ρ^δ будемъ писать θ_ρ^k. Наконецъ допустимъ, что уравненiе (1), прежде чѣмъ мы перешли отъ него къ уравненiю съ коэффицiентомъ α_ρ^δ, было умножено на x^p, гдѣ p означаетъ цѣлое число большее — 2, значенiе котораго опредѣлимъ впослѣдствiи.

При высказанныхъ условiяхъ уравненiе, отъ котораго мы выходимъ, и уравненiе, къ которому приходимъ, принимаютъ такой видъ:

$$\sum_{i=0}^{k} \omega^k_{k-i} x^{k-i} v^{n-i} = x^{m+k} v \tag{11}$$

$$\sum_{i=0}^{k+p} \theta_i^{k+p} x^{k+p-i} v_1^{n-i} = x^{m+k+p} v_1 \tag{12}$$

а равенство (5) такой:

$$\theta_\rho^{k+p} = \sum_{i=0} \frac{(k+p-i)!\,[-\delta(m+n)]^{\rho-i}}{(k+p-\rho)!\,(\rho-i)!} \omega^k_{k-i}.$$

Займемся изслѣдованiемъ свойствъ θ. Замѣтивъ, что

$$\frac{(k+p-i)!}{(k+p-\rho)!} = [k+p-i]^{\rho-i}$$

и измѣнивъ въ предыдущемъ равенствѣ ρ въ $\rho+1$ получимъ:

$$\theta_{\rho+1}^{k+p} = \sum_{i=0}^{\rho+1} \frac{[k+p-i]^{\rho-i+1}[-\delta(m+n)]^{\rho-i+1}}{(\rho-i+1)!} \cdot \omega^k_{k-i}.$$

Взявъ отсюда дифференцію по k и принявъ во вниманіе отношеніе:

$$\omega^{k+1}_{k-i+1}-\omega^{k}_{k-i}=(k-i-ck+1)\,\omega^{k}_{k-i+1}\,,$$

которое легко выводится изъ уравненія (10), находимъ:

$$\theta^{k+p+1}_{\rho+1}-\theta^{k+p}_{\rho+1}=\sum_{i=o}^{\rho}\frac{[k+p-i]^{\rho-i}[-\delta(m+n)]^{\rho-i+1}}{(\rho-i)!}\cdot\omega^{k}_{k-i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{\rho+1}\frac{[k+p-i+1]^{\rho-i+1}[-\delta(m+n)]^{\rho-i+1}}{(\rho-i+1)!}\cdot(k-i-ck+1)\,\omega^{k}_{k-i+1}\,.$$

Измѣнивъ во второй изъ предыдущихъ сигмъ параметръ i въ $i+1$ на основаніи тождества

$$[-\delta(m+n)]^{\rho-i+1}=\{-\delta(m+n)-\varsigma+i\}[-\delta(m+n)]^{\rho-i}\,,$$

будемъ имѣть:

$$\theta^{k+p+1}_{\rho+1}-\theta^{k+p}_{\rho+1}=$$

$$=\{k-\varsigma-ck-\delta(m+n)\}\sum_{i=o}^{\rho}\frac{[k+p-i]^{\rho-i}[-\delta(m+n)]^{\rho-i}}{(\rho-i)!}\cdot\omega^{k}_{k-i}\,.$$

Отсюда уже легко видѣть, что θ должна удовлетворять слѣдующему уравненію:

$$\theta^{k+p+1}_{\rho+1}=\theta^{k+p}_{\rho+1}+\{k-\varsigma-ck-\delta(m+n)\}\,\theta^{k+p}_{\rho}\,.$$

Разсмотримъ тотъ случай, когда

$$-\delta(m+n)=r(1-c),$$

гдѣ r означаетъ какое-нибудь цѣлое число. Для этого случая предыдущее уравненіе даетъ:

$$\theta^{k+p+1}_{\rho+1}=\theta^{k+p}_{\rho+1}+\{k+r-\varrho-c(k+r)\}\theta^{k+p}_{\rho}.$$

Сопоставляя это уравненіе съ уравненіемъ

$$\omega^{k+r+1}_{k+r-\rho}=\omega^{k+r}_{k+r-\rho-1}+\{k+r-\varrho-c(k+r)\}\omega^{k+r}_{k+r-\rho}, \quad (13)$$

получаемъ:

$$\theta^{k+p}_{\rho}=q\omega^{k+r}_{k+r-\rho}$$

$$q\omega^{k+r}_{k+r-\rho}=\sum_{i=o}^{\rho}\frac{[k+p-i]^{\rho-i}[r(1-c)]^{\rho-i}}{(\rho-i)!}\cdot\omega^{k}_{k-i}.$$

Послѣднее изъ этихъ отношеній (въ предположеніи, что r не варіируетъ и, слѣдовательно, имѣетъ одно или нѣсколько вполнѣ опредѣленныхъ, но пока неизвѣстныхъ намъ, значеній) выражаетъ полный интегралъ уравненія (13); количества же p и q, фигурирующія въ немъ, означаютъ періодическія постоянныя. Одну изъ этихъ постоянныхъ, именно q, можно опредѣлить по условію $\omega^{k+r}_{k+r}=1$, которое даетъ $q=1$. Чтобы опредѣлить другую постоянную и вмѣстѣ съ нею количество r, положимъ $k=1$ и $c=-1$; тогда предыдущее равенство, въ-силу отношенія

$$\omega^{r+1}_{r-\rho+1}=\frac{[r]^{\rho}[r+1]^{\rho}}{\rho!},$$

обратится въ такое:

$$[r]^{\rho}[r+1]^{\rho}=[p+1]^{\rho}[2r]^{\rho}.$$

Удовлетворить этому требованію независимо отъ ϱ можно лишь въ трехъ случаяхъ: во-первыхъ, когда

$$2r=r+1\ ,\ \ p+1=r\ ,$$

во-вторыхъ, когда

$$r=-1\ ,\ \ p=-1\ ,$$

и наконецъ, когда $r=0$. На послѣднемъ изъ этихъ случаевъ, по понятной причинѣ, намъ нѣтъ нужды останавливаться; первые же два случая даютъ:

$$\omega^{k+1}_{k-\rho+1}=\sum_{i=0}^{\rho}\frac{(k-i)!\,[1-c]^{\rho-i}}{(k-\rho)!\,(\rho-i)!}\cdot\omega^{k}_{k-i}\,, \tag{14}$$

$$\omega^{k-1}_{k-\rho-1}=\sum_{i=0}^{\rho}\frac{(k-i-1)!\,[c-1]^{\rho-i}}{(k-\rho-1)!\,(\rho-i)!}\cdot\omega^{k}_{k-i}\,. \tag{15}$$

Такимъ образомъ обнаружилось, что при условіяхъ

$$p=0\ ,\ \ c=1+\delta(m+n)\ , \tag{16}$$

имѣетъ мѣсто такое отношеніе:

$$\theta^{k}_{\rho}=\omega^{k+1}_{k-\rho+1}\ ,$$

при условіяхъ же

$$p=-1,\ c=1-\delta(m+n) \tag{17}$$

такое:

$$\theta_{\varrho}^{k-1} = \omega_{k-\varrho-1}^{k-1}.$$

§ 8. Изложенное доказательство отношеній (14) и (15) мы поставили главнымъ образомъ для того, чтобы сдѣлать впослѣдствіи очевидною единственность случаевъ интегрируемости уравненія Рикатти съ точки зрѣнія, изысканныхъ для интегрированія этого уравненія, средствъ[1]. Далѣе обнаружится, что единственность эта подлежала бы сомнѣнію, еслибы r могло имѣть иныя значенія помимо указанныхъ.

Въ нашемъ распоряженіи есть и другое болѣе простое доказательство тѣхъ же отношеній. Оно состоитъ въ слѣдующемъ. На основаніи тождества (9) можемъ написать:

$$(c\xi)^{k-1}\frac{d^k v}{d\xi^k} = \sum_{i=0}^{k-1} \omega_i^{k-1} x^i \frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Но легко видѣть, что

$$x^i \frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{dv}{d\xi}\right) = \frac{1}{c\xi}\sum_{r=0}^{i} A_r^{\,i} x^{r+1}\frac{d^{r+1}v}{dx^{r+1}},$$

гдѣ для краткости положено:

$$A_r^{\,i} = \frac{i!\,[1-c]^{i-r}}{r!\,(i-1)!}.$$

Послѣ этого дѣлается понятнымъ такое отношеніе

$$(c\xi)^k \frac{d^k v}{d\xi^k} = \sum_{i=0}^{k-1} \omega_i^{k-1} \sum_{r=0}^{i} A_r^{\,i} x^{r+1}\frac{d^{r+1}v}{dx^{r+1}}.$$

---

[1] *Ниже, съ расширеніемъ средствъ, мы получимъ возможность констатировать существованіе особыхъ случаевъ.*

Измѣнивъ здѣсь порядокъ суммованій и написавъ въ результатѣ r вмѣсто $r+1$, получимъ:

$$(c\xi)^k \frac{d^k v}{d\xi^k} = \sum_{r=1}^{k} \Big(\sum_{i=r-1}^{k-1} A^i_{r-1} \omega_i^{k-1} \Big) x^r \frac{d^r v}{dx^r}.$$

Отсюда уже легко видѣть, что

$$\omega_r^{\,k} = \sum_{i=r-1}^{k-1} A^i_{r-1} \omega_i^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-r} A^{k+i-1}_{r-1} \, \omega^{k-1}_{k-i-1}.$$

Поставивъ сюда на мѣсто A его значеніе, найдемъ:

$$\omega_r^{\,k} = \sum_{i=0}^{k-r} \frac{(k-i-1)! [1-c]^{k-r-i}}{(r-1)!(k-r-1)!} \cdot \omega^{k-1}_{k-i-1}.$$

Такимъ образомъ отношеніе (14) вновь доказано: оно получается изъ предыдущаго замѣной $k-r$ черезъ ϱ и $k-1$ черезъ k. Что же касается отношенія (15), то его можно вывести изъ (14), разрѣшивъ послѣднее относительно ω^k, какъ показано въ нумерѣ 4-мъ, и написавъ въ результатѣ k вмѣсто $k+1$.

§ 9. Займемся теперь уравненіями (11) и (12). Если измѣнимъ въ первомъ изъ нихъ параметръ i въ $k-i$, а во второмъ въ $k-i+1$, то при существованіи условій (16) найдемъ:

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i^{\,k} x^i \frac{d^i}{dx^i} (v^{n-k}) = x^{m+k} \cdot v$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \omega_i^{\,k+1} x^i \frac{d^i}{dx^i} (v_1^{\,n-k-1}) = x^{m+k+1} \cdot v_1.$$

Отсюда на основаніи тождества (9) получимъ:

$$(c\xi)^k \frac{d^k}{d\xi^k}(v^{n-k}) = x^{m+k} \cdot v \tag{18}$$

$$(c\xi)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{d\xi^{k+1}}(v_1{}^{n-k-1}) = x^{m+k+1} \cdot v_1 .$$

Теперь понятно, что отъ уравненія (18) всегда можно перейдти къ такому уравненію:

$$(c\xi)^{k+r} \frac{d^{k+r}}{d\xi^{k+r}}(v_r{}^{n-k-r}) = x^{m+k+r} \cdot v_r . \tag{19}$$

Хотя черезъ r обозначено здѣсь цѣлое положительное число, однако легко убѣдиться, что подъ r можно разумѣть и отрицательныя цѣлыя числа. Дѣйствительно, допустивъ существованіе условій (17) и повторивъ для этого случая анализъ настоящаго параграфа, мы придемъ къ уравненію, отличающемуся отъ (19) лишь знакомъ у r.

§ 10. На основаніи добытыхъ результатовъ легко уже опредѣлить случаи интегрируемости уравненія Рикатти.

Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ

$$k = 1,\ r = n - 1,\ c^{nc} a^{m+n} = 1 ,$$

то уравненія (18) и (19) дадутъ:

$$\frac{d^n v}{dx^n} = x^m v$$

$$\frac{d^n}{d\xi^n}(v_{n-1}) = \xi^{-n + \frac{m+n}{c}} \cdot v_{n-1} .$$

Измѣнивъ во второмъ изъ этихъ уравненій перемѣнное независимое по формулѣ $z\xi = 1$ въ силу извѣстнаго отношенія

$$\frac{d^n}{d\xi^n}(v_{n-1}) = (-1)^n z^{n+1} \frac{d^n}{dz^n}(z^{n-1} v_{n-1})$$

найдемъ:

$$\frac{d^n}{dz^n}(z^{n-1} v_{n-1}) = (-1)^n z^{-1-\frac{m+n}{c}} \cdot v_{n-1}.$$

Отсюда положивъ $z^{n-1} v_{n-1} = w$, получимъ

$$\frac{d^n w}{dz^n} = (-1)^n z^{-n-\frac{m+n}{c}} \cdot w.$$

Такимъ образомъ отъ уравненія Рикатти съ модулемъ m можно перейдти къ тому же уравненію съ модулемъ μ опредѣляемымъ слѣдующимъ равенствомъ:

$$\mu = -n \pm \frac{m+n}{1+\delta(m+n)}.$$

Здѣсь, какъ уже замѣчено выше, δ означаетъ положительное или отрицательное цѣлое число. Если въ предыдущемъ равенствѣ положимъ $m = 0$, то найдемъ:

$$\mu = -n \pm \frac{n}{1+\delta n}.$$

Этою формулой и выражаются искомые случаи интегрируемости уравненія Рикатти, включая сюда и ассимптотическій случай $\mu = -n$, въ которомъ упомянутое уравненіе интегрируется степенью независимаго перемѣннаго.

Ту же формулу мы получили бы, сдѣлавъ относительно чиселъ k и r такія допущенія: $k = n$, $-r = n - 1$.

Если, удержавъ предположеніе $k = 1$, допустимъ $r = n - 2$, то изъ уравненія (19) получимъ:

$$\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}\left(\xi^{\frac{c-1}{c}} \frac{dv_{n-2}}{d\xi}\right) = \xi^{-(n-1) \pm \frac{m+n-1}{c}} . v_{n-2}.$$

Отсюда, положивъ

$$\frac{dv_{n-2}}{d\xi} = \xi^{\frac{1-c}{c}} . w \ , \quad m = -n - \frac{n}{n\delta - 1} \ ,$$

легко перейдемъ къ такому уравненію:

$$\frac{d^n w}{d\xi^n} - \frac{n\delta}{\xi} \frac{d^{n-1} w}{d\xi^{n-1}} = w.$$

Это уравненіе составляетъ частный случай ($k = 1$, $m = 0$) уравненія (7). Изъ предыдущаго видно, что съ уравненіемъ Рикатти оно имѣетъ такую же тѣсную связь, какая наблюдается для случая $n = 2$.

Подробное изслѣдованіе предыдущаго уравненія дано В. П. Алексѣевскимъ[1].

§ 11. Опредѣливъ случаи интегрируемости уравненія Рикатти, мы тѣмъ самымъ разрѣшили вопросъ объ интегрированіи уравненія (7). Поэтому, возвращаясь снова къ этому уравненію, мы укажемъ лишь на ту простѣйшую форму, какую оно можетъ принять. Теорема Лейбница мгновенно разрѣшаетъ этотъ вопросъ. Именно при условіяхъ

$$\delta(m + n) = p \ , \quad m + p = q \ ,$$

она доставляетъ упомянутому уравненію слѣдующій видъ:

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(x^p \frac{d^{n-k} u}{dx^{n-k}}\right) = x^q u \ . \tag{20}$$

---

[1] «Сообщенія» 1884 г. Выпускъ I. Стр. 41.

Понятно, что, обозначая черезъ i какое-нибудь цѣлое число, мы найдемъ для условій интегрируемости этого уравненія такія формулы:

$$p = \pm \frac{n\delta}{ni-1}, \quad q = -n \pm \frac{n(\delta-1)}{ni-1}.$$

Если сдѣлаемъ въ предыдущемъ уравненіи подстановку

$$x^p u^{n-k} = y,$$

то безъ труда получимъ:

$$\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(x^{-q}\frac{d^k y}{dx^k}\right) = x^{-p} y.$$

Отсюда видно, что отъ уравненія (7), лѣвая часть котораго содержитъ k членовъ, всегда можно перейдти къ уравненію того же вида, но съ $n-k$ членами въ лѣвой части. Этимъ замѣчаніемъ можно пользоваться при интегрированіи уравненія (7) въ томъ случаѣ, когда $k > n-k$.

Чтобы покончить съ интегрируемыми формами линейныхъ уравненій разсматриваемаго нами типа, остановимся еще на такомъ уравненіи

$$\frac{d^k}{d\xi^k}\left(\frac{d^{n-k}v}{dx^{n-k}}\right) = \xi^m v = x^{mc}.v. \tag{21}$$

Изъ сказаннаго въ § 9 сразу видно, что при существованіи отношенія

$$c = \frac{1+\delta(n-k)}{1-\delta(m+k)},$$

въ которомъ δ означаетъ какое-нибудь цѣлое число, предыдущее уравненіе всегда можно свести на уравненіе Рикатти съ модулемъ:

$$\frac{m+n\delta(m+k)}{1-\delta(m+k)}.$$

Слѣдовательно условія интегрируемости уравненія (21) таковы:

$$c=1\pm\frac{n\delta}{ni-1}, \quad m=-n\pm\frac{n+n\delta(n-k)}{n(i\pm\delta)-1},$$

гдѣ i какое угодно цѣлое число.

§ 12. Переходя теперь къ вычисленію интеграловъ тѣхъ уравненій, интегрируемость которыхъ констатирована нами въ предыдущихъ параграфахъ, замѣтимъ, что интегралы эти легко найдутся, если предварительно будутъ подготовлены формулы удобныя для вычисленія u по данному u_δ и на-оборотъ. Пусть сначала требуется выразить u черезъ u_δ. На основаніи равенства (2) можемъ написать:

$$u_\rho=x^{-m-k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(u_{\rho+1}).$$

Сообщивъ здѣсь параметру ρ всѣ значенія отъ 0 до $\delta-1$, получимъ рядъ равенствъ, приводящихъ къ такому отношенію:

$$u=\left(x^{-m-k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\right)^{\delta}u_\delta. \qquad (22)$$

Указателемъ δ обозначено здѣсь, что операція

$$x^{-m-k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}},$$

повторяется δ разъ надъ субъектомъ u_δ. Предыдущимъ отношеніемъ и разрѣшается вопросъ о вычисленіи u по данному u_δ.

Для рѣшенія обратнаго вопроса замѣтимъ, что равенство (3) можно разсматривать подъ видомъ

$$x^{k-n}u_1 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^{k-i} \frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}} (x^{k-n}u) ,$$

и слѣдовательно можно написать

$$x^{k-n}u_{\rho+1} = \sum_{i=0}^{k} \alpha^{\rho}_{k-i} x^i \frac{d^i}{dx^i} (x^{k-n}u_\rho) .$$

Поставивъ сюда на мѣсто α^ρ его выраженіе черезъ α^p, опредѣляемое формулой

$$\alpha^{\rho}_{k-i} = \sum_{r=0}^{k-i} \frac{(k-r)!\,[(p-\rho)(m+n)]^{k-i-r}}{(k-i-r)!\,i!} \cdot \alpha^{p}_{r} ,$$

въ которой p означаетъ какое-нибудь цѣлое число, и измѣнивъ въ результатѣ порядокъ суммованій на основаніи теоремы Лейбница, найдемъ:

$$x^{(p-\rho-1)(m+n)+k-n} \cdot u_{\rho+1} =$$

$$= x^{-m-n} \sum_{i=0}^{k} \alpha^{p}_{k-i} x^i \frac{d^i}{dx^i} (x^{(p-\rho)(m+n)+k-n} \cdot u_\rho) .$$

Сообщивъ здѣсь параметру ρ всѣ значенія отъ 0 до $\delta - 1$, получимъ рядъ равенствъ, приводящихъ къ такому отношенію:

$$x^{(p-\delta)(m+n)+k-n} \cdot u_\delta =$$

$$= \left(x^{-m-n} \sum_{i=0}^{k} \alpha^{p}_{k-i} x^i \frac{d^i}{dx^i} \right)^{\delta} x^{p(m+n)+k-n} \cdot u .$$

Хотя этимъ отношеніемъ и разрѣшается вопросъ о вычисленіи u_δ по данному u, однако для насъ интереснѣе имѣть формулу, дающую возможность вычислить u черезъ $u_{-\delta}$, разумѣя подъ $u_{-\delta}$ интегралъ того уравненія, которое получается изъ (1) помощью δ обратныхъ преобразованій. Но легко видѣть, что формулу эту можно вывести изъ предыдущей поставивъ въ нее u на мѣсто u_δ, $u_{-\delta}$ на мѣсто u и α на мѣсто α^δ. Дѣйствительно, замѣтивъ, что

$$\left|\alpha^p_{k-i}\right|_{\alpha^\delta=\alpha} =$$

$$= \sum_{r=o}^{k-i} \frac{(k-r)!\,[(\delta-p)(m+n)]^{k-i-r}}{(k-i-r)!\,i!}\,\alpha_i = \alpha^{p-\delta}_{k-i},$$

и выполнивъ упомянутыя замѣны, получимъ:

$$x^{(p-\delta)(m+n)+k-n}\,.\,u =$$

$$= \left(x^{-m-n} \sum_{i=o}^{k} \alpha^{p-\delta}_{k-i}\, x^i \frac{d^i}{dx^i}\right)^\delta x^{p(m+n)+k-n}\,.\,u_{-\delta}\,. \qquad (23)$$

Справедливость этого отношенія можно доказать иначе. Именно, замѣтивъ, что

$$\sum_{i=o}^{k} \alpha_{k-i}\, x^i \frac{d^i}{dx^i}\,(u^{n-k}) = u_1^{\,n-k},$$

$$u^{n-k} = x^{m+k}\,.\,u_{-1}\,, \quad u_1^{\,n-k} = x^{m+k} u\,,$$

находимъ вообще

$$x^{m+k} u_{-\rho} = \sum_{i=o}^{k} \left(\alpha^{-\rho}_{k-i}\, x^i \frac{d^i}{dx^i}\,(x^{m+k} u_{-\rho-1})\right).$$

Замѣнивъ здѣсь $\alpha^{-\rho}$ его выраженіемъ черезъ α^{p}, получимъ:

$$x^{(p+\rho)(m+n)+m+k} \cdot u_{-\rho} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \alpha^{p}{}_{k-i} x^{i} \frac{d^{i}}{dx^{i}} \left(x^{(p+\rho)(m+n)+m+k} \cdot u_{-\rho-1} \right).$$

Отсюда искомое равенство вытекаетъ само собою.

Формулы (22) и (23) выражаютъ зависимость между интегралами исходнаго и преобразованныхъ уравненій для всякаго α_i. Слѣдовательно, этими формулами можно воспользоваться для вычисленія интеграловъ уравненій (7) и (18).

§ 13. Займемся сначала уравненіемъ (18). Здѣсь представляются два случая. Для одного изъ нихъ, именно для положительнаго δ, формула (22) даетъ:

$$v = \left(x^{-m-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \right)^{\delta} v_1 .$$

Введя сюда знакоположеніе

$$\left(x^{-m-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \right)^{\delta} = D_k$$

получимъ вообще такое равенство:

$$v_{\rho} = D_{k+\rho}\, v_{\rho+1}$$

и какъ слѣдствіе его такое

$$v = D_k D_{k+1} \ldots D_{n-1} v_{n-k} .$$

Допустимъ теперь, что m удовлетворяетъ условію:

$$m = -n + \frac{n}{1 - \delta n} .$$

Такъ какъ при этомъ условіи существуетъ отношеніе

$$v_{n-k} = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{r_i \xi}, \quad \xi = a x^{\frac{1}{1-\delta n}},$$

въ которомъ C_i означаетъ постоянную произвольную, а r_i корень уравненія $r^n = 1$, то предыдущая формула даетъ

$$v = D_k D_{k+1} \dots D_{n-1} \sum_{i=1}^{n} C_i e^{r_i \xi}. \qquad (24)$$

Этимъ отношеніемъ, въ правую часть котораго нужно поставить на мѣсто m предположенное для него значеніе, и выражается полный интегралъ уравненія (18) для этого значеніе m. Если бы мы допустили

$$m = -n - \frac{n}{1+\delta n}$$

то, въ силу отношенія

$$v_{n-k} = \xi^{n-1} \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-\frac{r_i}{\xi}}, \quad \xi = a x^{\frac{1}{1+\delta n}},$$

для полнаго интеграла уравненія (18) при сказанномъ m получили-бы:

$$v = D_k D_{k+1} \dots D_{n-1} \sum_{i=1}^{n} C_i \xi^{n-1} e^{-\frac{r_i}{\xi}}. \qquad (25)$$

Переходя теперь къ тому случаю, когда въ уравненіи (18) δ означаетъ отрицательное цѣлое число, мы прежде всего замѣнимъ въ этомъ уравненіи δ черезъ $-\delta$ съ тѣмъ, чтобы подъ

δ снова разумѣть положительныя числа. Въ силу этой замѣны связь между x и ξ выразится такимъ отношеніемъ:

$$\xi = ax^{1-\delta(m+n)}.$$

Связь же между v и v_1 на основаніи формулы (23), въ которой нужно предварительно положить $p=\delta, \alpha_{k-i} = \omega_i^{\,k}$, будетъ:

$$x^{k-n} v = \left(x^{-m-n}(c\xi)^k \frac{d^k}{d\xi^k}\right)^\delta x^{\delta(m+n)+k-n} v_1 .$$

Введя сюда знакоположеніе

$$\left(x^{-m-n}(c\xi)^k \frac{d^k}{d\xi^k}\right)^\delta = \Delta_k ,$$

получимъ вообще такое равенство

$$x^{k-n+\rho} . v_\rho = a\Delta_{k+\rho} \frac{1}{\xi} x^{k-n+\rho+1} v_{\rho+1}$$

и какъ слѣдствіе его такое

$$v = (ax)^{n-k} \Delta_k \frac{1}{\xi} \Delta_{k+1} \frac{1}{\xi} \ldots \Delta_{n-1} \frac{1}{\xi} v_{n-k} .$$

Имѣя это, легко уже заключить, что полный интегралъ уравненія (18) для случая

$$m = -n + \frac{n}{1+\delta n}$$

выражается такимъ отношеніемъ

$$v = x^{n-k} \Delta_k \frac{1}{\xi} \Delta_{k+1} \frac{1}{\xi} \ldots \Delta_{n-1} \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^{n} C_i e^{r_i \xi} . \quad (26)$$

для случая-же

$$m = -n - \frac{n}{1 - \delta n}$$

такимъ

$$v = x^{n-k} \Delta_k \frac{1}{\xi} \Delta_{k+1} \frac{1}{\xi} \ldots \Delta_{n-1} \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^{n} C_i \xi^{n-1} e^{\frac{r_i}{\xi}} \quad (27)$$

гдѣ постоянный множитель a^{n-k} отнесенъ къ произвольнымъ.

Мы уже видѣли, что если въ уравненіи (18) положить $k = 1$, то оно обратится въ уравненіе Рикатти съ модулемъ m. Отсюда слѣдуетъ, что интегралъ уравненія Рикатти для случаевъ

$$m = -n \pm \frac{n}{1 \pm \delta n}$$

найдется по предыдущимъ формуламъ, если сдѣлать въ нихъ $k = 1$. Такъ, на-примѣръ, для интеграла уравненія

$$\frac{d^2v}{dx^2} = x^{\frac{-4k}{2k-1}} . v$$

по формулѣ (24), положивъ въ ней $n = 2$, $k = 1$, находимъ:

$$v = \left(x^{\frac{2k+1}{2k-1}} \frac{d}{dx} \right)^k (c_1 e^{\xi} + c_2 e^{-\xi}) .$$

Этому отношенію при условіи

$$x^{\frac{2k+1}{2k-1}} = 2(1-2k) \frac{dx}{dz}, \xi = z^{1/2} = (1-2k)\, x^{\frac{1}{1-2k}}$$

можно дать такую форму

$$v = c_1 \frac{d^k}{dz^k} e^{z^{1/2}} + c_2 \frac{d^k}{dz^k} e^{-z^{1/2}} .$$

Въ той же формѣ интегралъ предыдущаго уравненія можно получить изъ равенства (25). Разсмотримъ еще примѣръ:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = x^{\frac{-4k}{2k+1}} . v$$

Сдѣлавъ въ формулѣ (26) $n = 2$, $k = 1$, найдемъ

$$v = x\left(\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right)^{k} \frac{1}{\xi}(c_1 e^{\xi} + c_2 e^{-\xi})$$

или

$$v = x\left(\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right)^{k+1} (c_1 e^{\xi} + c_2 e^{-\xi}).$$

Отсюда, положивъ

$$\xi = z^{1/2} = (2k+1)\, x^{\frac{1}{2k+1}},$$

получимъ

$$v = c_1 x \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} e^{z^{1/2}} + c_2 x \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} e^{-z^{1/2}}.$$

Въ той же формѣ интегралъ предыдущаго уравненія можно найдти изъ равенства (27).

Обращаясь теперь къ уравненію (7), замѣтимъ, что для вычисленія его интеграла достаточно показать, какъ онъ выражается черезъ v, интегралъ уравненія Рикатти. Вопросъ этотъ для положительнаго δ непосредственно разрѣшается формулой (22), которая даетъ:

$$u = \left(x^{-m-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \right)^{\delta} v.$$

Что касается того случая, когда въ уравненіи (7) δ означаетъ отрицательное число, то, замѣнивъ въ немъ δ черезъ $-\delta$, на основаніи формулы (23), въ которой нужно предварительно положить $p = 0$, получимъ:

$$u = x^{\delta(m+n)+k-n}\left(x^{-m-n+k}\frac{d^k}{dx^k}\right)^{\delta} x^{k-n} v.$$

§ 14. Перейдемъ теперь къ констатированію новыхъ случаевъ интегрируемости уравненія Рикатти. Съ этою цѣлью обратимся къ формулѣ (23) и сдѣлаемъ въ ней положенія

$$p = \delta = r - 1, \ \alpha_i = \frac{1}{(-i)!}, \ u_{-\delta} = \frac{d^k v}{dx^k};$$

тогда формула эта дастъ

$$x^{k-n}.u = \left(x^{-m-n+k}\frac{d^k}{dx^k}\right)^{r-1} x^{(r-1)(m+n)+k-n}.\frac{d^k v}{dx^k}.$$

Этимъ отношеніемъ выражается связь между интегралами слѣдующихъ уравненій

$$\frac{d^n u}{dx^n} = x^m u$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(x^{(r-1)(m+n)}\frac{d^n v}{dx^n}\right) = x^{m+(r-1)(m+n)}\frac{d^k v}{dx^k}.$$

Но легко видѣть, что второе изъ нихъ при условіи

$$m + (r-1)(m+n) = 0$$

дѣлается тождественнымъ съ первымъ. Отсюда слѣдуетъ, что функція, интегрирующая уравненіе

$$\frac{d^n u}{dx^n} = x^{-n+\frac{n}{r}}.u \ , \tag{28}$$

интегрируетъ въ то же время и такое уравненіе:

$$\left(x^{k-\frac{n}{r}}\frac{d^k}{dx^k}\right)^r u = x^{k-n}\,.\,u.$$

Свойство интеграла уравненія Рикатти, выражаемое предыдущимъ отношеніемъ, имѣетъ мѣсто для всякаго k (при $k=0, n, \frac{n}{r}$ оно легко повѣряется). Особенную важность имѣетъ это свойство для случая $k=1$, приводящаго къ уравненію

$$\left(x^{1-\frac{n}{r}}\frac{d}{dx}\right)^r u = x^{1-n}u,$$

которому при условіи

$$x^{1-\frac{n}{r}} = a\frac{dx}{dz},$$

вызывающемъ существованіе отношенія

$$z = \frac{ar}{n}x^{\frac{n}{r}},$$

можно дать такой видъ:

$$\frac{d^r u}{dz^r} = z^{-r+\frac{r}{n}}u, \tag{29}$$

гдѣ относительно a предположено:

$$a^r = \left(\frac{n}{r}\right)^{r(1-n)}$$

Понятно, что въ какомъ бы отношеніи другъ къ другу ни стояли величины чиселъ n и r, разъ намъ извѣстенъ интегралъ одного изъ предыдущихъ уравненій, полный интегралъ другаго найдется изъ него посредствомъ замѣны x черезъ z или, наоборотъ, по формулѣ

$$(r^r x)^n = (n^n z)^r.$$

Дѣйствительно, формула эта даетъ nr различныхъ значенiй какъ для $x^{\frac{1}{r}}$ такъ и для $z^{\frac{1}{n}}$. Отсюда слѣдуетъ, что всякiй (неразлагаемый) частный интегралъ одного изъ упомянутыхъ уравненiй способенъ дать полный интегралъ другаго. Такъ, напримѣръ, мы видѣли, что частный интегралъ уравненiя

$$\frac{d^2v}{dx^2} = x^{-2+\frac{2}{2k+1}} \cdot v$$

выражается отношенiемъ

$$v = x\frac{d^{k+1}}{d\xi^{k+1}} e^{\alpha_i \xi^{1/2}}, \quad \xi = (2k+1)^2 x^{\frac{2}{2k+1}},$$

въ которомъ α_i означаетъ корень уравненiя $\alpha^2 = 1$.

Кромѣ того легко подмѣтить

$$\alpha_i \xi^{1/2} = 2\beta_i z^{1/2}, \quad \beta^{2k+1} = 1.$$

Отсюда слѣдуетъ, что полный интегралъ уравненiя

$$\frac{d^{2k+1}v}{dx^{2k+1}} = z^{-\frac{2k+1}{2}} \cdot v$$

будетъ:

$$v = z^{\frac{2k+1}{2}} \cdot \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} \sum_{i=1}^{2k+1} C_i e^{2\beta_i z^{1/2}}$$

гдѣ C_i произвольное постоянное. Этому отношенію, если угодно, можно сообщить иную форму. Именно, представивъ данное уравненіе въ видѣ

$$v = z^{\frac{2k+1}{2}} \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} \left(\frac{d^k v}{dz^k} \right),$$

заключаемъ

$$\frac{d^k v}{dz^k} = \sum_{i=1}^{2k+1} C_i \, e^{2\beta_i z^{1/2}},$$

отсюда получаемъ

$$v = \sum_{i=1}^{2k+1} C_i \int e^{2\beta_i z^{1/2}} \, . \, dz^k$$

Извѣстно, что уравненіе (29) интегрируется при $n = ri \pm 1$, гдѣ i цѣлое положительное число; отсюда заключаемъ, что уравненіе (28) интегрируется въ томъ случаѣ, когда r есть какой-нибудь дѣлитель того или другаго изъ чиселъ $n-1$, $n+1$. Испытавъ этимъ новымъ признакомъ способность уравненія Рикатти, модуль котораго m, а порядокъ n, интегрироваться конечною формой, получимъ:

$$m = -n \pm \frac{n}{r - \delta n}$$

Хотя случаи интегрируемости уравненія Рикатти, указанные нами выше, суть частные по отношенію къ сейчасъ найденнымъ (они получаются изъ послѣднихъ при допущеніи $r = 1$, $n - 1$, $n + 1$ возможномъ при всякомъ n), однако предыдущая формула не обнимаетъ собою всѣхъ подобныхъ случаевъ и не есть, слѣдовательно, самая общая. По поводу этой послѣдней мы замѣтимъ лишь, что она будетъ имѣть видъ предыдущей формулы, но что r получитъ въ ней болѣе общее (не уловленное нами) значеніе.

§ 15. До сего времени мы предполагали, что числа k и n, фигурирующія въ уравненіи (1), удовлетворяютъ условію $k<n$. Это предположеніе не необходимостью, однако, было вызвано, а просто желаніемъ не вводить въ вычисленіе производныхъ съ отрицательными указателями; поэтому полученные выше результаты имѣютъ мѣсто и для того случая, когда $k>n$. Не останавливаясь на томъ, какую форму при этомъ условіи принимаетъ уравненіе (1), займемся уравненіями (20) и (21). Если сдѣлаемъ въ нихъ подстановки

$$u=\frac{d^{k-n}}{dx^{k-n}}y,\ v=\frac{d^{k-n}}{dx^{k-n}}w$$

и въ результатѣ напишемъ n вмѣсто $k-n$, то получимъ:

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(x^py\right)=x^q\frac{d^ny}{dx^n} \tag{30}$$

$$\frac{d^kw}{d\xi^k}=\xi^m\frac{d^nw}{dx^n}=x^{mc}\frac{d^nw}{dx^n} \tag{31}$$

Замѣтивъ далѣе, что условія интегрируемости уравненій (20) и (21) на основаніи предыдущаго параграфа выражаются формулами

$$p=\pm\frac{n\delta}{ni-r},\quad q=-n\pm\frac{n(\delta+1)}{ni-r}$$

$$c=1\pm\frac{n\delta}{ni-r},\quad m=-n\pm\frac{n+n\delta(n-k)}{n(i\pm\delta)-r},$$

гдѣ δ и i цѣлыя числа, а r одинъ изъ дѣлителей $n\pm1$, заключаемъ, что уравненія (30) и (31) интегрируются во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда

$$p = \pm \frac{(k-n)\delta}{(k-n)i-r}\,, \quad q = n-k \pm \frac{(k-n)(\delta+1)}{(k-n)i-r}$$

$$c = 1 \pm \frac{(k-n)\delta}{(k-n)i-r}\,, \quad m = n-k \pm \frac{(k-n)(1-n\delta)}{(k-n)(i\pm\delta)-r}\,,$$

гдѣ r означаетъ какого-либо дѣлителя того или другаго изъ чиселъ $k-n+1$, $k-n-1$. Хотя въ уравненіяхъ (30) и (31) подъ n нужно разумѣть число меньшее k, однако легко подмѣтить, что условія интегрируемости этихъ уравненій будутъ выражаться предыдущими формулами и въ томъ случаѣ, когда $n > k$. Дѣйствительно, распространяя полученные въ предыдущихъ параграфахъ результаты на отрицательныя значенія n (что всегда возможно, какъ это легко видѣть изъ разсмотрѣнія нумера втораго) и замѣняя въ уравненіяхъ (20) и (21) n черезъ $-n$, мы послѣ нѣкоторыхъ очевидныхъ преобразованій перейдемъ отъ этихъ уравненій къ такимъ, которыя и по виду и по условіямъ интегрируемости будутъ тождественны съ уравненіями (30) и (31), но въ которыхъ n будетъ больше k.

Въ заключеніе нашей статьи замѣтимъ, что случаи интегрируемости уравненій (30) и (31), а также полные интегралы ихъ для этихъ случаевъ, могутъ быть найдены изъ разсмотрѣнія уравненія

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^i u^i = x^m u^n\,,$$

изслѣдованіе котораго по способу академика Импенецкаго, прилично видоизмѣненному, не представляетъ никакихъ затрудненій.