

Пряма на дійсній площині

Курінний Г.Ч., Невмержицька О.М., Шугайло О.О.

Травень-2015

Зміст

1	Безкоординатне векторне рівняння прямої в афінному просторі	2
2	Координатні рівняння прямої на площині і в тривимірному просторі	3
2.1	Параметричне рівняння прямої	3
2.2	Рівняння прямої “через точку паралельно вектору” . .	6
2.3	Рівняння “через дві точки”. Рівняння відрізка. Поділ відрізка у даному відношенні	7
2.4	Загальне рівняння прямої	11
2.5	Рівняння прямої у відрізках	12
2.6	Паралельність прямих на площині, паралельність вектора і прямої на площині.	12
2.7	В’язка прямих	14
3	Пряма на площині із прямокутною декартовою системою координат.	14

3.1	Векторне рівняння, вектор нормалі.	15
3.2	Нормальне рівняння. Відхилення точки від прямої. Від- стань від точки то прямої	17
3.3	Рівняння з кутовим коефіцієнтом. Кут між прямими.	18

1 Безкоординатне векторне рівняння прямої в афінному просторі

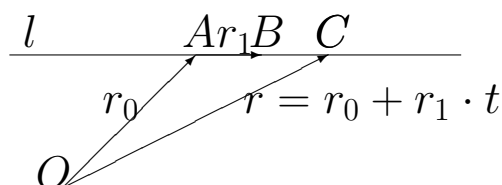
Простір називаємо афінним, щоб підкреслити, що скалярний добуток не використовується.

Теорема 1.1 *Нехай o точка O (точка відліку), пряма l і точки A, B на цій прямій $A \neq B$. Позначимо*

$$\overrightarrow{OA} = r_0, \quad \overrightarrow{AB} = r_1,$$

Точка C з радіус-вектором $r = \overrightarrow{OC}$ лежить на прямій l тоді і тільки тоді коли

$$r = r_0 + r_1 \cdot t, \quad r_1 \neq 0. \quad (1)$$



Сформульовану теорему доводити не будемо. Будемо вважати, що вона відома із шкільний курс геометрії, або може бути доведена з використанням шкільного обсягу знань з аксіоматики площини і тривимірного простору. Ще одне причина відмови від доведення — при узагальненнях дійсної площини, коли шкільна аксіоматика дійсної

площини відсутня, рівняння стає означенням прямої, і, таким чином, не вимагає доведення.

Визначення 1.1 *Рівняння (1) називається векторним рівнянням прямої, а вектор r_1 в ньому називається напрямним вектором прямої.*

З використання означення векторного рівняння прямої теорема 1.1 може бути переформульована наступним чином

Теорема 1.2 *Кожна пряма може бути задана векторним рівнянням, і кожне векторне рівняння задає пряму.*

2 Координатні рівняння прямої на площині і в тривимірному просторі

2.1 Параметричне рівняння прямої

Теорема 2.1 *Кожна пряма на площині може бути задана рівнянням вигляду*

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1 \cdot t, \\ y = y_0 + y_1 \cdot t. \end{cases} \quad (2)$$

і кожне рівняння вигляду (2) задає пряму.

Кожна пряма на площині може бути задана рівнянням вигляду

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1 \cdot t, \\ y = y_0 + y_1 \cdot t, \\ z = z_0 + z_1 \cdot t. \end{cases} \quad (3)$$

і кожне рівняння вигляду (3) задає пряму в тривимірному дійсному афінному просторі..

Теорема правильна тому, що рівняння (2) є рівносильним переписом векторного рівняння (1) у випадку, коли є система координат на площині — в такому випадку рівняння (1) переписується у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot t, \quad (x_1, y_1) \neq 0. \quad (4)$$

Тепер рівняння (2) є покоординатним записом рівності (4). Так само обґрунтовується тривимірний випадок.

Визначення 2.1 *Рівняння (2) називається параметричним рівнянням прямої на площині, а (3) називається параметричним рівнянням прямої у тривимірному просторі.*

Розглянемо пряму, що проходить через точку $A(2, 5)$ і має напрямний вектор $r_1 = (-1, 3)$. Тоді $r_0 = (2, 5)$ і векторним рівнянням цієї прямої буде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot t, \quad (x_1, y_1) \neq 0.$$

Те ж саме рівняння можна подати в покоординатному записі, тобто у вигляді параметричного рівняння.

$$\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 5 + 3t. \end{cases}$$

Якщо пряма проходить через точку $A(2, 5, 0)$ і має напрямний вектор $r_1 = (-1, 0, 3)$. Тоді $r_0 = (2, 5, 0)$ і векторним рівнянням цієї прямої буде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot t.$$

Те ж саме рівняння можна подати в покоординатному записі, тобто у вигляді параметричного рівняння.

$$\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 5, \\ z = 3t. \end{cases}$$

Якщо пряма задана параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = -t, \\ y = 3, \\ z = 0, \end{cases}$$

то переписуємо його із явною вказівкою всіх складових

$$\begin{cases} x = 0 - 1 \cdot t, \\ y = 3 + 0 \cdot t, \\ z = 0 + 0 \cdot t. \end{cases}$$

і тоді переписуємо у вигляді векторного рівняння:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot t.$$

2.2 Рівняння прямої “через точку паралельно вектору”

Знаходячи t з усіх рівнянь параметричного рівняння (2) чи (3) і прирівнюючи їх, ми одержуємо рівняння тієї ж прямої у вигляді

$$\frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} \quad (5)$$

для площини і у вигляді

$$\frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1} \quad (6)$$

для тривимірного простору.

Визначення 2.2 Рівняння (5) називається рівнянням прямої, що проходить через точку (x_0, y_0) в напрямку вектора (x_1, y_1) на площині, а рівняння (6) називаються рівнянням прямої, що проходить через точку (x_0, y_0, z_0) в напрямку вектора (x_1, y_1, z_1) у тривимірному просторі.

В рівняннях (5), (6) немає нічого незвичного, коли вектори (x_1, y_1) та (x_1, y_1, z_1) не мають нульових координат. Якщо ж нульові координати є, то ці рівняння стають умовними — дріб з 0 у знаменнику коректний, коли і чисельник дорівнює нулю, і рівності з цим дробом не розглядається.

Наведемо приклади. Нехай є точка $A(2, 5, 0)$. Пряма, що проходить через точку A в напрямку вектора $r_1 = (2, 3, 1)$ має звичайне рівняння “через точку у напрямку вектора”

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 5}{3} = \frac{z - 0}{1}.$$

Якщо ж напрямний вектор r_1 має нульові координати $r_1 = (0, 2, 3)$, то рівняння “через точку у напрямку” приймає вигляд

$$\frac{x-2}{0} = \frac{x-5}{2} = \frac{z-0}{3},$$

яке за домовленістю розуміється як система

$$x = 2, \quad \frac{x-5}{2} = \frac{z-0}{3}.$$

А якщо напрямний вектор r_1 має дві нульові координати, $r_1 = (0, 1, 0)$ то рівняння

$$\frac{x-2}{0} = \frac{x-5}{1} = \frac{z-0}{0}.$$

за домовленістю розуміється як система

$$x = 2, \quad z = 0.$$

2.3 Рівняння “через дві точки”. Рівняння відрізка. Поділ відрізка у даному відношенні

Розглянемо випадок, коли потрібно написати рівняння прямої, що проходить через дві різні задані точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ (на площині) чи $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ (у тривимірному просторі) В цьому випадку ми можемо вважати, що пряма проходить через точку A у напрямку вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (на площині) чи $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ (у просторі), і переписати рівняння (5) чи (6) у вигляді

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \quad (7)$$

чи у вигляді

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (8)$$

Визначення 2.3 Рівняння (7), (8) називаються рівняннями прямої “через дві точки”

Для прикладу, нехай потрібно записати рівняння сторін (прямих, на яких лежать сторони) трикутника із вершинами $A(2, -2, 1)$, $B(3, 3, 0)$, $C(-1, 7, 2)$. Скористаємося формулами (8): для сторони AB

$$\frac{x - 2}{3 - 2} = \frac{y + 2}{3 + 2} = \frac{z - 1}{0 - 1}, \quad \frac{x - 2}{1} = \frac{y + 2}{5} = \frac{z - 1}{-1};$$

для сторони AC

$$\frac{x - 2}{-1 - 2} = \frac{y + 2}{7 + 2} = \frac{z - 1}{2 - 1}, \quad \frac{x - 2}{-3} = \frac{y + 2}{9} = \frac{z - 1}{1};$$

для сторони BC

$$\frac{x - 3}{-1 - 3} = \frac{y - 3}{7 - 3} = \frac{z - 0}{2 - 0}, \quad \frac{x - 3}{-4} = \frac{y - 3}{4} = \frac{z}{2}.$$

За означенням множення вектора на число точка M лежить на відрізку тоді і тільки тоді коли

$$\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB}, \quad 0 < t < 1, \quad (9)$$

і, відповідно,

$$\overrightarrow{MB} = (1 - t) \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Число

$$\lambda = \frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{MB}|} = \frac{t}{1 - t}, \quad 0 < \lambda < \infty$$

називають відношенням, в якому точка M ділить відрізок AB . Віддаючи данину традиції, говорять про поділ відрізка, але насправді мова йде про напрямлений відрізок, в якому важливим є яка точка є початком, а яка кінцем відрізка.

Теорема 2.2 *Точка $M(x, y, z)$ ділить відрізок AB , $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ у відношенні λ $0 < \lambda, \infty$ тоді і тільки тоді, коли*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (10)$$

Доведення. Розглядати будемо лише тривимірний випадок — нехтуючи третьою координатою ми одержимо двовимірний випадок

Для вибраного числа λ , $0 < \lambda < \infty$ шукаємо число t для якого $\lambda = t/(1 - t)$:

$$\lambda(1 - t) = t, \quad t = \frac{\lambda}{1 + \lambda}, \quad 0 < t < 1,$$

і записуємо рівність (9) в координатному вигляді:

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad z = z_1 + t(z_2 - z_1),$$

Підставляємо $t = \lambda/(1 + \lambda)$ і робимо перетворення

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \frac{\lambda}{1 + \lambda}(x_2 - x_1) = \frac{(\lambda + 1)x_1 + \lambda(x_2 - x_1)}{\lambda + 1} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{\lambda + 1}, \\ y &= y_1 + \frac{\lambda}{1 + \lambda}(y_2 - y_1) = \frac{(\lambda + 1)y_1 + \lambda(y_2 - y_1)}{\lambda + 1} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{\lambda + 1}, \\ z &= z_1 + \frac{\lambda}{1 + \lambda}(z_2 - z_1) = \frac{(\lambda + 1)z_1 + \lambda(z_2 - z_1)}{\lambda + 1} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{\lambda + 1}, \end{aligned}$$

Теорема доведена.

■

Застосуємо теорему до випадку, коли відрізок ділиться навпіл — коли точка M є серединою відрізка AB . Тоді $t = 0.5$, $\lambda = 1$ і ми одержуємо відому формулу для координат середини відрізка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Буває зручно говорити про поділ відрізка у відношенні $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, — точка M ділить відрізок у відношенні $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, якщо

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

— знову ж розрізняємо початок і кінець відрізка AB . В такому випадку підставляємо $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, замість λ і перетворюємо формули (formulas-division-segment-proportion) в

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{\lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2}{1 + \lambda}. \quad (11)$$

Формули (11) є формулами координат точки, що ділить заданий відрізок у заданому відношенні $\lambda_1 : \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Для прикладу, знайдемо координати точки $M(a, b, c)$ переретину медіан трикутника з вершинами $A(2, 4, -1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(3, 4, 6)$.

Для цього спочатку знайдемо середину $N(x_1, y_1, z_1)$ відрізка BC :

$$x_1 = \frac{2 + 0}{2} = 1, \quad y_1 = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2}, \quad z_1 = \frac{-1 + 1}{2} = 0.$$

Далі скористаємося тим, що точка M ділить відрізок AN у відношенні 2:1. Тепер знайдемо координати (abc) за формулами (11)

$$a = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{3} = \frac{4}{3}, \quad b = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{5}{2}}{3} = \frac{22}{15}, \quad c = \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0}{3} = -\frac{1}{3}.$$

2.4 Загальне рівняння прямої

Оскільки напрямний вектор прямої ненульовий, то із одного рівняння можна знайти (виразити через) і підставити в друге. Одержимо рівняння вигляду

$$ax + by + c = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0). \quad (12)$$

Визначення 2.4 Рівняння (12) називається загальним рівнянням прямої на площині.

Приклад 1. Нехай пряма l задана параметричним рівнянням

$$x = 5 - 7t, \quad y = 2 + 3t.$$

Тоді

$$x = -\frac{x-5}{7}, \quad y = 2 + 3 \left(-\frac{x-5}{7} \right) = \frac{14 - 3x + 15}{7},$$

і

$$7y + 3x - 1 = 0$$

є загальним рівнянням цієї прямої.

Нехай пряма l задана загальним рівнянням

$$-x + 3y + 9 = 0.$$

Тоді одну змінну позначаємо через t а другу знаходимо як функцію від t . В нашому випадку позначаємо

$$y = t, \quad x = 3t + 9,$$

і запишемо параметричне рівняння цієї прямої

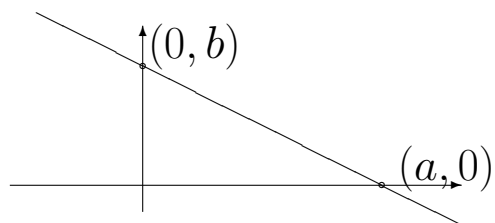
$$\begin{cases} x = 9 + 3t, \\ y = t. \end{cases}$$

Від останнього параметричного рівняння перейдемо до векторного

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t.$$

.

2.5 Рівняння прямої у відрізках



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (13)$$

2.6 Паралельність прямих на площині, паралельність вектора і прямої на площині.

Нехай є дві прямі, що задані загальними рівняннями

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1, \quad l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Позначимо

$$d_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Якщо $d_1 = 0$ то два рівняння прямих l_1, l_2 мають розв'язок і до того ж єдиний, тобто прямі перетинаються; якщо $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, то рівняння прямих рівносильні, і, відповідно, прямі збігаються; якщо $d_1 = 0$, а один із визначників d_2, d_3 ненульовий, то система двох рівнянь, що задають прямі l_1, l_2 не сумісна і, таким чином, прямі не перетинаються, паралельні. Оскільки пряма сама собі паралельна, то маємо в підсумку, що умова $d_1 \neq 0$ є умовою перетину прямих в єдиній точці, а умова $d_1 = 0$ є умовою паралельності l_1, l_2 . Умову $d_1 = 0$ традиційно переписують у вигляді

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \quad (14)$$

навіть якщо у знаменнику стоїть нуль.

Для прикладу, прямі $x - 7y + 12 = 0$, $-4x + 3y - 7 = 0$ перетинаються в єдиній точці, оскільки

$$\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -25 \neq 0;$$

прямі $x - 7y + 12 = 0$, $-4x + 28y - 48 = 0$ збігаються, оскільки

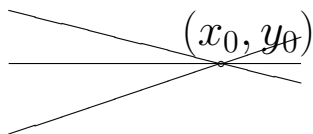
$$\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -4 & 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ -4 & -48 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 28 & -48 \end{vmatrix} = 0;$$

прямі $x - 7y + 12 = 0$, $-4x + 28y - 1 = 0$ паралельні і не перетинаються оскільки

$$\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -4 & 28 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 28 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

2.7 В'язка прямих

Визначення 2.5 Множину всіх прямих, що проходять через задану точку, називають в'язкою прямих.



Кожна пряма, що має рівняння вигляду

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \quad (15)$$

проходить через точку з координатами (x_0, y_0) . Навпаки, якщо пряма l має загальне рівняння $ax + by + c = 0$ і проходить через точку (x_0, y_0) , то $ax_0 + by_0 + c = 0$, $c = -ax_0 - by_0$. Тому рівняння цієї прямої l можна записати у вигляді (15).

Сказане доводить наступну теорему.

Теорема 2.3 Рівняння (15) є рівнянням в'язки прямих.

3 Пряма на площині із прямокутною декартовою системою координат.

Нажче розглядаємо випадок, коли на площині задана прямокутна декартова систем координат і, таким чином, ми можемо шукати скалярний добуток векторів, шукати довжину вектора чи відріза, шукати кут між векторами.

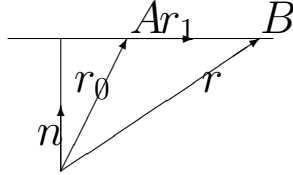
Вектор, що перпендикулярний прямій, називають вектором нормалі цієї прямої.

3.1 Векторне рівняння, вектор нормалі.

Теорема 3.1 *Нехай n ненульовий вектор і a — число. Тоді рівняння*

$$(n, r) = a. \quad (16)$$

задає пряму, що перпендикулярна вектору n , і будь-яка пряма, для якої n є вектором нормалі, може бути задана таким рівнянням.



Доведення. Твердження теореми випливає з того, що для прямої з векторним рівнянням $r = r_0 + r_1 t$ і ненульового вектора n число

$$(n, r) = (n, r + tr_1) = (n, r_0) + t \cdot (n, r_1)$$

є сталим тоді і тільки тоді, коли (n, r_1) дорівнює нулю.

■

Ми маємо рівняння

$$(nr) = (nr_0) \quad (17)$$

прямої, що проходить через точку з радіус-вектором r_0 перпендикулярно вектору n . Якщо вектор n має координати (a, b) , то позначивши $(nr_0) = -c$ перетворимо рівняння (17) в загальне рівняння $ax + by + c = 0$. Таким чином ми довели наступну теорему

Теорема 3.2 *Якщо система координат прямокутна декартова, то коефіцієнти a, b в загальному рівнянні $ax + by + c = 0$ прямої є координатами вектора нормалі цієї прямої. Рівнянням прямої, що проходить через точку (x_0, y_0) перпендикулярно вектору (a, b) є*

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Приклад 1. Написати рівняння висоти трикутника $\triangle ABC$ $A(1, 2)$, $B(5, -1)$, що проходить через вершину A .

Розв'язування. Обчислюємо вектор $\overrightarrow{BC} = (-7, -3)$, який є вектором нормалі до цієї сторони, і пишемо потрібне рівняння

$$-7(x - 1) - 3(y - 2) = 0.$$

Приклад 2. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $(1, 2)$ і перпендикулярна прямій l :

$$\frac{x - 7}{1} = \frac{y + 2}{-4}.$$

Розв'язування. Напрямний вектор прямої l дорівнює $n = (1, -4)$ і він повинен бути вектором нормалі до потрібної прямої. Отже пишемо відповідь

$$1 \cdot (x - 1) - 4(y - 2) = 0.$$

Дві прямі на площині перпендикулярні одна одній, коли їх вектори нормалей ортогональні. Звідси випливає правильність наступної теореми

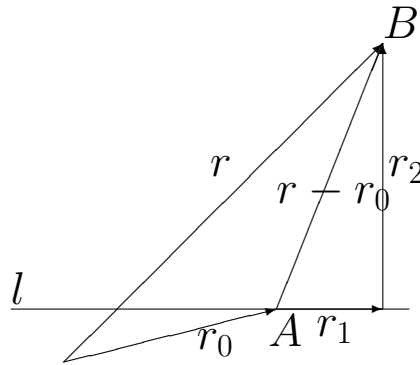
Теорема 3.3 *Прямі $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ перетинаються під прямим кутом тоді і тільки тоді, коли*

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Приклад. Прямі $3x + 5y + 1$, $-4x + y - 2$ не перпендикулярні, тому що $3 \cdot (-4) + 5 \cdot 1 = -7 \neq 0$, а прямі $3x + 5y + 1$, $-5x + 3y - 2$ перпендикулярні одна одній, тому що $3 \cdot (-5) + 5 \cdot 3 = 0$.

3.2 Нормальне рівняння. Відхилення точки від прямої. Відстань від точки до прямої

Нехай l є пряма, одиничний вектор нормалі n , точка A на прямій з радіус-вектором r_0 , і довільна точка B з радіус-вектором r . Розкладемо вектор $r - r_0$ в суму $r - r_0 = r_1 + r_2$ так, щоб вектор r_1 був паралельний прямій l , а вектор r_2 був перпендикулярний цій прямій (отже, паралельний вектору нормалі n).



Тоді

$$(n, r - r_0) = (n, r_1 + r_2) = (n, r_2),$$

а число (n, r_2) дорівнює відстані від B до l , якщо B лежить в одній півплощині, що визначається прямою l , або дорівнює відстані із знаком мінус, якщо точка лежить в іншій півплощині.

Визначення 3.1 *Нехай задана пряма. Функція, яка ставить у відповідність кожній точці однієї півплощини відстань від цієї точки до прямої, а кожній точці другої півплощини ставить у відповідність відстань із знаком мінус, називається відхиленням точки від прямої*

У підсумку ми маємо наступну теорему.

Теорема 3.4 Нехай $(n, r - r_0) = 0$, де n — одиничний вектор, рівняння прямої через точку r_0 перпендикулярно вектору n (див. (17)). Тоді функція, яка ставить у відповідність кожній точці B r площини число $(n, r - r_0)$ є відхиленням точки від заданої прямої. Щоб обчислити відстань від точки до прямої, потрібно взяти модуль відхилення цієї точки від прямої.

Нехай $n = (a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$ Тоді $(n, r - r_0) = ax + by + c$.

Визначення 3.2 Рівняння

$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 = 1. \quad (18)$$

називається нормальним рівнянням прямої.

Тепер одержану вище теорему можна сформулювати так:

Теорема 3.5 якщо $ax + by + c = 0$ — нормальне рівняння прямої, то для будь-якої точки площини число $ax + by + c$ буде відхиленням цієї точки від прямої.

3.3 Рівняння з кутовим коефіцієнтом. Кут між прямими.

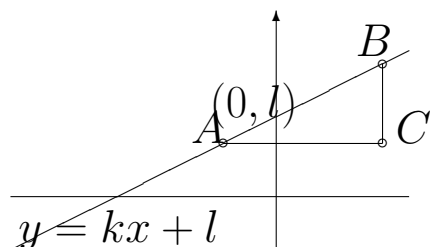
Прямі, що паралельні осі OY , мають рівняння $x = c$. Нехай пряма не паралельна осі OY . Тоді вона має загальне рівняння $ax + by + c = 0$ в якому $b \neq 0$. Це загальне рівняння можна розв'язати відносно y і одержати рівняння вигляду

$$y = kx + l \quad (19)$$

Визначення 3.3 Рівняння називається рівнянням прямої, що розв'язане відносно y або рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Остання назва пов'язана з тим, що числа k і l в (19) має геометричний зміст. Число l є y -ю координатою точки перетину прямої із віссю OY , а k є тангесом кута α , утвореного прямою з віссю OX . Щоб точно вказати кут α вводимо на прямій додатній напрямок — напрямок в якому зростає x -координата — пряма перетворюється на вісь. Вибираємо додатній напрямко обертання площини — звичайно його обирають так, щоб обертання на $\frac{\pi}{2}$ переводило вісь OX у вісь OY . Тепер можна сказати, що k є тангенсом кута, на який потрібно обертати вісь OX в додатньому напрямку до суміщення із прямою. Обертаючи у від'ємному напрямку ми одержуємо від'ємний кут.

Обґрунтуємо сказане. Нехай $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ - дві точки на прямій



і $x_2 > x_1$, $C(x_1, y_2)$. Оскільки точки $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ лежать на прямій, то

$$y_1 = kx_1 + l, \quad y_2 = kx_2 + l, \quad y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1), \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Остання рівність переконує, що k є тангесом кута $\angle BAC$ в трикутнику $\triangle ABC$ із належним знаком. .

Показчик

рівняння

- прямої

 - через дві точки, 7

 - через точку паралельно вектору, 6

 - нормальне, 18

 - параметричне, 3

 - у відрізках, 12

 - векторне, 2, 15

 - з кутовим коефіцієнтом, 18

 - загальне, 11

- відрізка, 7

в'язка прямих, 14

вектор

- напрямний

 - прямої, 3

 - нормалі, 15

відхилення

- точки від прямої, 17

відстань

- від точки

 - до прямої, 17