УДК 517.982.254+517.982.37

А. В. БРАТИЩЕВ

О КЕТЕ БАЗИСНОСТИ И ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ФРЕШЕ С ОСЛАБЛЕННОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

1. Пусть E — пространство Фреше с топологией ν, задаваемой системой норм $\{p_s(\cdot)\}$, точнее, будем считать его проективным пределом банаховых пространств E_s с топологиями ν_s, определяемыми нормами p_s, $E_{s+1} \hookrightarrow E_s$, $\overline{(E, \nu_s)} = E_s$, $s = 1 \ldots$

Обозначим (E_s', ν_s') сопряженное с E_s банахово пространство E_s с сопряженной нормой p_s', определяющей топологию ν_s'. Очевидно, $E' = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} E_s'$; если ν' — топология индуктивного предела $\lim\operatorname{ind}(E_s', \nu_s')$, то $\nu' \geqslant \beta(E', E)$; семейства $\sigma(E', E)$- и ν' — ограниченных в E' множеств совпадают, и (E', ν') — регулярный индуктивный предел [1] в силу теоремы Банаха—Штейнгауза.

Будем рассматривать на E еще топологию ν_q проективного предела нормированных пространств (E_{q_s}, ν_{q_s}) с непрерывными на $(E_1 \nu)$ нормами q_s, $E_{q_{s+1}} \hookrightarrow E_{q_s}$, $s = 1, 2, \ldots$

Пусть, наконец, $\{e_n\}$ — линейно независимая последовательность элементов в E, $W := \operatorname{span}\{e_n\}$ — замыкание в (E, ν) линейной оболочки $\{e_n\}$:

$$A_{q_s} := \{b := \{b_n\} : \| b \|_{q_s} := \sum_{n=1}^{\infty} | b_n | \, q_s(e_n) < \infty\}, \ s = 1, 2, \ldots,$$

$A_q := \lim\limits_{s} \operatorname{proj} A_{q_s}$ — пространство Кете с матрицей $(q_s(e_n))$. При условии

$$\forall s \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_s(e_n)}{q_{s+1}(e_n)} < \infty \tag{1}$$

A_q становится ядерным рефлексивным пространством Фреше с сильным сопряженным

$$A'_q := \lim_{s} \operatorname{ind} A'_{q_s}, \; A'_{q_s} := \left\{a = \{a_n\} : \|a\|'_{q_s} := \sup_{k} \frac{|a_n|}{q_s(e_n)}\right\}.$$

2. В работе [2] показано, что Кете регулярная базисность $\{e_n\}$ в W эквивалентна разрешимости проблемы моментов в сопряженном пространстве E'. В [3] установлено достаточное условие базисности системы элементов в ядерном пространстве. В [4] исследовались так называемые стягивающие (*shrinking*) базисы в E, когда из базисности $\{e_n\}$ в E следует базисность биортогональной с $\{e_n\}$ системы функционалов $\{t_n\}$ в E'. Следующие ниже теоремы этого пункта можно рассматривать как дальнейшее развитие этих исследований для пространств Фреше.

Теорема 1. *Пусть E — пространство Фреше, $\{e_n, t_n\}$ — биортогональная система элементов в (E, E'), и $\{e_n\}$ удовлетворяет условию (1). Тогда равносильны следующие утверждения: 1) $\{e_n\}$ — q — Кете базис в W, т.е. $\forall x \in W x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} < x, t_n > e_n$ в (W, ν_q) и*

$$\forall s \;\; \exists C_s > 0 \;\; \exists s_1 \;\; \forall x \in W \;\; \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, t_n\rangle| \, q_s(e_n) \leqslant C_s p_s(x); \tag{2}$$

2) для каждого s существует биортогональная с $\{e_n\}$ система функционалов $\{t_n^s\} \subset E$ такая, что

$$\exists C_s > 0 \;\; \exists s_1 \;\; \forall a \in A'_{q_s} \;\; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, p'_{s_1}(t_n^s) \leqslant C_s \|a\|'_{q_s}; \tag{3}$$

3) проблема моментов

$$\langle e_n, t\rangle = a_n, \;\; n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

для каждой правой части $\{a_n\} \in A'_q$ разрешима в E'; 4) для каждого s существует ограниченная в E' ортогональная с $\{e_n\}$ система функционалов $\{t_n^s\}$ такая, что

$$|\langle e_n, t_n^s\rangle| \geqslant q_s(e_n), \;\; n = 1, 2, \ldots; \tag{5}$$

5) для каждого s существует биортогональная с $\{e_n\}$ последовательность функционалов $\{t_n^s\}$ такая, что

$$\exists C_s > 0 \, \exists s_1 \, \forall n \; q_s(e_n) \, p'_{s_1}(t_n^s) \leqslant C_s. \tag{6}$$

Доказательство. Пространство W', сопряженное с $W = (W, \nu)$, алгебраически изоморфно E'/W^0. По теореме Хана—Банаха о продолжении линейных форм имеем

$$\forall T \in W' \quad \forall s \; p_s'(T) := \sup_{x \in W_s} \frac{|\langle x, T\rangle|}{p_s'(x)} = \inf\{p_s'(t) : t \in T \cap E_s'\},$$

где

$$W_s = W \cap E_s.$$

Пусть имеет место утверждение 1). Определим оператор l на W по формуле $l(x) := \{\langle x, t_n\rangle\}$. Соотношение (2) эквивалентно его непрерывности в A_q. Из плотности $l(W)$ в A_q следует взаимная однозначность слабо непрерывного сопряженного $l' : A_q' \to W'$. Он сопоставляет каждой последовательности $\{a_n\} \in A_q'$ функционал $T \in W'$ со свойством $\langle e_n, T\rangle \equiv a_n$. В частности, для $T_n := l'(\tilde{e}_n)$, где $\tilde{e}_n := \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0 \ldots\}$, имеем $T_n|_W = t_n|_W$, $n = 1, 2, \ldots$ Так как $\{q_s(e_n)\tilde{e}_n\}$ ограничена в A_q', то $\{q_s(e_n)T_n\}$ слабо ограничена в сопряженном W', т. е.

$$\exists C_s > 0 \quad \exists s_1 \quad \forall n \quad q_s(e_n)\, p_{s_1}'(T_n) \leqslant C_s. \tag{7}$$

Выберем $t_n^s \in T_n$ так, чтобы $p_{s_1}'(t_n^s) \leqslant p_{s_1}'(T_n) + \frac{1}{q_s(e_n)}$. Отсюда и из (7) имеем $q_s(e_n)\, p_{s_1}'(t_n^s) \leqslant C_s + 1$, $n = 1, 2, \ldots,$ и с учетом (1) получаем (3).

Если выполнено 2), то для каждой $\{a_n\} \in A_q'$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t_n^s$ абсолютно сходится в банаховом пространстве $E_s' \subset E'$, и его сумма дает решение проблемы моментов для $\{a_n\}$.

Пусть имеет место утверждение 3). Оно позволяет определить взаимно однозначный линейный оператор $l_1 : A_q' \to W'$, сопоставляющий каждой $\{a_n\} \in A_q'$ функционал $T \in W'$ со свойством $\langle e_n, T_\xi\rangle = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Пространство W', наделенное топологией Макки $\tau = \tau(W', W)$, является совершенно полным [5]. Пространство A_q' бочечно как индуктивный предел банаховых пространств. Область определения $D := \{x \in (W', \tau)' = W : x \circ l_1 \in A_q''\}$ сопряженного с l_1 оператора l_1' тотальна (слабо плотна) в W, так как span $\{e_n\}$ слабо плотна в W, и $e_n \circ l_1 \equiv \tilde{e}_n \in A_q''$, $n = 1, 2, \ldots$ Поэтому по теореме 8.11.5 [5] оператор $l_1 : A_q' \to (W', \tau)$ непрерывен. Так как $\{q_s(e_n)\tilde{e}_n\}$ ограничена в A_q', то $T_n^s = l'(q_s(e_n)\tilde{e}_n)$ ограничена в $(W'\tau)$, и потому $\exists$ $\exists C_s$ $\forall p_s'(T_n^s) \leqslant C_s$. Выделим $t_n^s \in T_n^s$ со свойством $p_s'(t_n^s) \leqslant p_{s_1}'(T_n^s) + 1$, $n = 1, 2, \ldots \{t_n^s\}$, как и $\{T_n^s\}$, ортогональна с $\{e_n\}$, и

$$|\langle e_n, t_n^s\rangle| = |\langle e_n, T_n^s\rangle| = q_s(e_n), \; n = 1, \ldots$$

Пусть последовательность $\{t_n^s\}$ удовлетворяет утверждению 4). В частности, $\exists s_1 \exists C_s > 0$ $p_{s_1}(t_n^s) \leqslant C_s \forall n$. Тогда последовательность $\tilde{t}_n^s := \frac{t_n^s}{\langle e_n, t_n^s\rangle}$ биортогональна с $\{e_n\}$ и

$$q_s(e_n)\, p'_{s_1}(\tilde{t}_n^s) = \frac{q_s(e_n)}{|\langle e_n, t_n^s\rangle|}\, p'_{s_1}(t_n^s) \leqslant C_s,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Пусть, наконец, имеет место утверждение 5). Образуем семейство непрерывных из (W, ν) в (W, ν_q) операторов $\{S_N(\cdot)\}$, $S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \langle x, T_n\rangle e_n - x$ и докажем его равностепенную непрерывность. Учитывая $p'_s(T_n) \leqslant p'_s(t_n^s)$, имеем

$$\forall T \in (W, \nu_q)' \subset \{T \in (W, \nu)' : \{\langle e_n T\rangle\} \in A'_q\}\ \ \exists C_s > 0\ \ \exists s_1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, T\rangle|\, p'_{s_1}(T_n) \leqslant \|\{\langle e_n, T\rangle\}\|_{q_s} C_s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_s(e_n)}{q_{s+1}(e_n)} < \infty$$

и потому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, T\rangle T_n$ сходится к T в топологии банахова пространства W'_{s_1}. Отсюда $\forall x \in W \subset (W_s, \nu_s)$ $\langle x, T\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, T_n\rangle \langle e_n, T\rangle$ или иначе $\forall x \in W\ \forall T \in (W, \nu_q)'\ \lim_{N\to\infty} \langle S_N(x), T\rangle = 0$. Следовательно, $\{S_N(\cdot)\}$ слабо поточечно ограничена в (W, ν_q). Так как (W, ν) — пространство Фреше, по теореме Банаха—Штейнгауза $\{S_N(\cdot)\}$ равностепенно непрерывно.

Пусть теперь $x \in W$, V — произвольная окрестность нуля в (W, ν_q), U — окрестность нуля в (W, ν) такая, что $\forall N\ S_N(U) \subset V$, наконец, элемент $x_u \in \operatorname{span}\{e_n\}$ такой, что $x - x_u \in U$. Так как $\forall N > N_x$ $S_N(x_n) = 0$, то $\forall N > N_x$ $S_N(x) = S_N(x - x_n) \in V$. Это означает, что $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, T_n\rangle e_n$ в топологии ν_q. Соотношение (2) очевидным образом вытекает из (1), (6).

Теорема доказана.

Если в теореме 1 отказаться от условия (1), то от нее «останется» такая

Теорема 2. *Пусть E — пространство Фреше, $\{e_n, t_n\}$ — биортогональная система в (E, E'). Тогда верны следующие импликации: 1) $\Leftrightarrow$ 3), 2) $\Rightarrow$ 3), 3) $\Rightarrow$ 5), 4) $\Leftrightarrow$ 5).*

Докажем лишь импликацию 3) $\Rightarrow$ 1). Из соображений предыдущей теоремы $l_1 : A'_q := \operatorname{ind}_s A'_{q_s} \to (W', \tau)$ непрерывен. Поэтому сильно непрерывно сопряженное отображение $l'_1 : (W'', \beta) \to (\bigcap_{s=1}^{\infty} A''_{q_s}, \beta)$. Так как $\forall n\, l'_1(e_n) = \tilde{e}_n$ и A_q непрерывно вложено в $(\bigcap_{s=1}^{\infty} A''_{q_s}, \beta)$, сужение

$l:\operatorname{span}\{e_n\}\to A_q$ непрерывно. В свою очередь в силу полноты $\{e_n\}$ в W и отделимости, и полноты $A_q l$ расширяется единственным образом до непрерывного отображения из W в $A_q \cdot l = l'_1|_W$ и $\forall x \in W\ \langle l_x, \tilde{e}_n\rangle = \langle l'_1 x, e_n\rangle = \langle x, T_n\rangle$, т. е. для l имеет место соотношение (2). В свою очередь из последнего

$$\forall s\ \exists s_1, s_2\ \exists C_{s_1}, C_{s_2} > 0\ \forall x \in W\ \forall N;$$

$$q_s(S_N(x)) \leqslant \sum_{n=1}^{N} |\langle x, T_n\rangle|\, q_s(e_n) + q_s(x) \leqslant C_1 p_{s_1}(x) + $$

$$+ C_2 p_{s_2}(x) \leqslant (C_1 + C_2)\, p_{s_3}(x).$$

Выбирая по любому $\varepsilon > 0$ $x_\varepsilon \in \operatorname{span}\{e_n\}$ таким, что $p_{s_3}(x - x_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{C_1 + C_2}$, и N_ε таким, что $\forall N > N_\varepsilon S_n(x_\varepsilon) = 0$, получаем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, T_n\rangle e_n$ к x в ν_q-топологии. Таким образом, имеет место 1). Теорема доказана.

Замечание. Эквивалентность 1) $\leftrightarrow$ 3) обобщает упомянутый выше результат из [2].

Следующие теоремы являются прямыми следствиями теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть $\{e_n\}$ — линейно независимая последовательность элементов в пространстве Фреше E с топологией, задаваемой системой норм $\{p_s(\cdot)\}$ и*

$$\forall s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_s(e_n)}{p_{s+1}(e_n)} < \infty. \tag{8}$$

Тогда равносильны следующие утверждения:

1) $\{e_n\}$ — Кете базис в W, т. е. каждый элемент единственным образом представим в виде суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)\, e_n$$

и

$$\forall s \exists C_s > 0\, \exists s_1\, \forall s \in W \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(x)|\, p_s(e_n) \leqslant C_s p_{s_1}(x);$$

2) для каждого s существует биортогональная с $\{e_n\}$ последовательность функционалов t_n^s такая, что

$$\exists C_s > 0\, \exists s_1\, \forall a \in A_{p_s} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, p'_{s_1}(t_n^s) \leqslant C_s \|a\|_{p_s}; \tag{9}$$

3) проблема моментов (4) разрешима в E' для каждой правой части из A'_p;

4) для каждого s существует ограниченная ортогональная с $\{e_n\}$ последовательность функционалов $\{t_n^s\}$ такая, что

$$|\langle e_n, t_n^s\rangle| \geqslant p_s(e_n),\ n = 1, 2, \ldots; \tag{10}$$

5) для каждого s существует биортогональная с $\{e_n\}$ последовательность функционалов $\{t_n^s\}$ такая, что

$$\exists C_s > 0 \,\exists s_1 \,\forall n \, p_s(e_n)\, p'_{s_1}(t_n^s) \leqslant C_s. \tag{11}$$

Теорема 4. *Пусть в условиях теоремы 1 дополнительно известно, что $\{e_n\}$ полна в E. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) $\{e_n\}$ — q-Кете базис в E;

2) $\{t_n\}$ удовлетворяет условию

$$\forall s \,\exists C_s > 0 \,\exists s_1 \,\forall a \in A'_{q_s} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, p'_{s_1}(t_n) \leqslant C_s \|a\|'_{q_s};$$

3) проблема моментов (4) разрешима в E' для каждой правой части из A';

4) для каждого s существует ортогональная с $\{e_n\}$ последовательность функционалов $\{t_n^s\}$, удовлетворяющая соотношению (5);

5) $\forall s \,\exists C_s > 0 \,\exists s_1 \,\forall n \; q_s(e_n)\, p'_s(t_n) \leqslant C_s$.

Замечание. Данная теорема обобщает нашу теорему 1 из [7]. Ознакомление с рукописным вариантом последней статьи позволило Ю. Ф. Коробейнику сформулировать результаты, близкие к теореме 3 [8].

Теорема 5. *Пусть $\{e_n\}$ — полная линейно независимая система в пространстве Фреше с топологией, задаваемой последовательностью норм $\{p_s\}$, удовлетворяющей условию (8). Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $\{e_n\}$ — Кете базис в E;

2) существует биортогональная с $\{e_n\}$ система функционалов t_n, и она образует сильный p'-Кете индуктивный базис в E', т. е. $\{t_n\}$-базис в $(E', \beta(E', E))$ и

$$\forall s \exists C_s > 0 \exists s_1 \forall t \in E' \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n t\rangle|\, p'_{s_1}(t_n) \leqslant C_s \| \{\langle e_n, t\rangle\} \|'_s;$$

3) отображение L, $L(t) := \langle e_n, t\rangle$ является алгебраическим изоморфизмом E' на A'_p;

4) существует биортогональная с $\{e_n\}$ последовательность функционалов $\{t_n\}$ и

$$\forall s \;\exists C_s > 0 \;\exists s_1 \forall n \; p_s(e_n)\, p'_{s_1}(t_n) \leqslant C_s.$$

Замечание. В работе [9] в предположении ядерности E (вместо условия (8)) и наличия биортогональной системы доказано, что условие 1) (точнее, шаудеровская базисность $\{e_n\}$ в E) равносильна такому утверждению:

$$4') \quad \forall s \;\exists C_s > 0 \;\exists s_1 \;\forall b \in A_p \;\forall n \;\; |b_n|\, p_s(e_n) \leqslant C_s p_{s_1}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k\Big),$$

менее жесткому, чем 4).

3. С помощью доказанных теорем получим достаточные условия Кете базисности одной системы аналитических функционалов.

Пусть $\{u_s(z)\}$ — последовательность непрерывных субгармонических в C функций, удовлетворяющих условиям

$$\text{а) } \forall s \ \forall |z| > r_s \max_{|t-z|<1} u_s(t) \leqslant u_{s+1}(z);$$

$$\text{б) } \exists \delta > 0 \ \forall |z| > r_{\delta, s} u_{s+1}(z) - u_s(z) \geqslant \delta \ln (1 + r^2), \ r := |z|.$$

Положим

$$P_s := \left\{ f \in A(C) : r_s'(f) := \sup_{z \in C} \frac{|f(z)|}{\exp u_s(z)} < \infty \right\};$$

$$P := \lim_s \operatorname{ind} P_s.$$

Очевидно, P является топологическим модулем над кольцом многочленов. При дополнительном условии

$$\text{в) } \forall s \ \exists C_s > 0 \ \exists s_1 \ \forall |z| < \infty \ 2u_s(z) \leqslant u_{s_1}(z) + C_s$$

P становится топологической алгеброй.

Лемма. *Вложение* $P_s \subset P_{s+1}$, $s = 1, 2, \ldots$ *вполне непрерывно.* Это утверждение обобщает лемму 2 [10]. Поскольку доказательство аналогично, на нем останавливаться не будем. Из леммы следует, что P является LN^* — пространством, и значит отделимым, полным и рефлексивным.

Пусть E — пространство Фреше, и его сильно сопряженное (E', β) топологически изоморфно P. Отсюда следует, что (E', β) бочечно, и значит, $\beta = \nu'$ ([5], 8. 4.18).

Второе сопряженное E'' является пространством Фреше (проективным пределом банаховых пространств P_s' с точностью до изоморфизма), содержащем E в качестве замкнутого топологического подпространства. Поскольку последовательности норм $\{P_s\}$ и $\{r_s'\}$ определяют одну и ту же топологию на E, из оценки (8) следует аналогичная оценка для $\{r_s'\}$:

$$\forall s \ \exists s_1 \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_s'(e_n)}{r_{s_1}(e_n)} < \infty. \tag{12}$$

Фиксируем последовательность $\Lambda := \{\lambda_n, p_n\}$ комплексных чисел $\{\lambda_n\}$ с соответствующими кратностями p_n и свойствами: $\ldots |\lambda_n| \leqslant \leqslant |\lambda_{n+1}| \leqslant \ldots \to \infty$. Пусть сначала $\{u_s(z)\}$ удовлетворяет условиям а) — в), и существует последовательность попарно непересекающихся областей $D = \{D_m\}$ со спрямляемыми границами Γ_m, удовлетворяющая следующим условиям 1 — 6.

1. $\Lambda \subset D$.

Перенумеруем точки из $\Lambda \cap D_m$ и их кратности в порядке возрастания индексов

$$\mu_1^{(m)} (= \lambda_{n_m}), \ \mu_2^{(m)}, \ \ldots, \ \mu_{q_m}^{(m)};$$

$$r_1^{(m)} (= p_{n_m}), \ r_2^{(m)}, \ \ldots, \ r_{q_m}^{(m)}, \ m = 1, 2, \ldots$$

2. $\forall s_1 \ \exists s_1, s_2 \ \exists C_{s_1}, C_{s_2} > 0$

$$\max_{z \in D_m} u_{s_1}(z) - C_{s_1} < \min_{z \in D_m} u_s(z) \leqslant \max_{z \in D_m} u_s(z) \leqslant \min_{z \in D_m} u_{s_2}(z) + C_{s_2}.$$

3. $\exists s_1,\ C>0$ длина контура $\Gamma_m\, l(\Gamma_m)\leqslant \exp\{u_{s_1}(\lambda_{n_m})+C_1\}$.

4. Положим

$$\omega_{i,j}^{(m)}(z):=\prod_{l=1}^{i-1}\left(\frac{z}{\mu_l^{(m)}}-1\right)^{r_l^{(m)}}\left(\frac{z}{\mu_l^{(m)}}-1\right)^j,\ i=1,\ \ldots,\ q_m,\ j=1,\ \ldots$$

$\ldots,\ r_l^{(m)}$ и потребуем

$$\exists s_1,\ s_2\ \exists C_1C_2>0\ \forall m\ \forall i\leqslant q_m\ \forall j\leqslant r_i^m;$$

$$\exp\{-u_{s_1}(\lambda_{n_m})-C_1\}\leqslant\min_{z\in\Gamma_m}|\omega_{ij}^{(m)}(z)|\leqslant\max_{z\in D_m}|\omega_{ij}^{(m)}(z)|\leqslant$$

$$\leqslant\exp\{u_{s_2}(\lambda_{n_m})+C_2\}.$$

5. В P существует последовательность функций $\{a_s(z)$, обращающихся в нуль на Λ и

$$\forall s\ \exists C\ \inf_{z\in\Gamma_m}|a_s(z)|\geqslant\exp\{u_s(\lambda_{n_m})-C\}.$$

6. $$\forall s\exists s_1\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{q_m}r_i^{(m)}\exp\{u_s(\lambda_{n_m})-u_{s_1}(\lambda_{n_m})\}.$$

Пусть теперь $\{u_s(z)$ удовлетворяет условиям а), б), а последовательность $D:=\{D_m\}$, $\Lambda=\{\lambda_n,\ p_n\}$ — следующим условиям $1'$—$6'$.

$1'$. $\Lambda<D$. $6':=6$.

$2'$. $$\forall s\geqslant 1\exists C_1,\ C_2>0,\ \max_{z\in D_m}u_{s-1}(z)-C_1\leqslant$$

$$\leqslant\min_{z\in D_m}u_s(z)\leqslant\max_{z\in D_m}u_s(z)\leqslant\min_{z\in D_m}u_{s+1}(z)+C_2.$$

$3'$. $\forall s\geqslant 1\exists C>0\ \ l(\Gamma_m)\leqslant C\exp\{u_s(\lambda_{n_m})-u_{s-1}(\lambda_{n_m})\}$.

$4'$. $$\forall s>1\exists C_1,\ C_2>0\forall m\forall i\leqslant q_m\forall j\leqslant r_i^m;$$

$$C_1\exp\{u_{s-1}(\lambda_{n_m})-u_s(\lambda_{n_m})\}\leqslant\min_{z\in\Gamma_m}|\omega_{i,j}^{(m)}(z)|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{z\in D_m}|\omega_{i,j}^{(m)}(z)|\leqslant C_2\exp\{u_{s+1}(\lambda_{n_m})-u_s(\lambda_{n_m})\}.$$

$5'$. В P существует последовательность функций $\{a_s(z)\}$, обращающихся в нуль на Λ и $\forall s\exists C\inf|a_s(z)|\geqslant C\exp\{u_s(\lambda_{n_m})\}$.

Предположим, что δ-функции δ_t и все их производные принадлежат $E\subset P'$ и положим

$$e_{i,j}^{(m)}:=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{\delta_t dt}{\mu_i^{(m)}\omega_{i,j}^{(m)}(t)},\quad a_{s,i,j}^{(m)}(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}\frac{\omega_{i,j-1}^{(m)}(t)}{a_s(t)}\frac{a_s(z)}{z-t}dt,$$

$$j\leqslant r_i^{(m)},\ i\leqslant q_m,\ m=1,\ 2,\ \ldots$$

Очевидно, $\{e_{i,j}^{(m)}\}\subset E$, а $\{a_{s,i,j}^{(m)}(z)\}\subset P$. В работе [11] показано, что система $(e_{i,j}^{(m)},\ a_{s,i,j}^{(m)}(z))$ биортогональна.

Теорема 6. *Пусть последовательности $\{u_s(z)\}$, D, Λ удовлетворяют условиям а)—в), 1—6 или а)—б), $1'$—$6'$. Тогда система* *аналитических функционалов* $\{e_{l,j}^{(m)}\}$ *образует Кете базис в пространстве* $W_\Lambda := \operatorname{span}\{\delta_{\lambda-1}^{(l-1)}\}_{i=1}^{p_n}{}_{n=1}^{\infty} \subset E$. W_Λ — *топологически изоморфно ядерному пространству Кете*

$$\tilde{A}_p := \{b := \{b_{l,j}^{(m)}\} : \forall s \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{q_m} \sum_{j=1}^{r_l^{(m)}} |b_{l,j}^{(m)}| \exp\{u_s(\lambda_{n_m})\} < \infty\}$$

при отображении $l(e) := \{< e, a_{s,l}^{(m)}(z) >\}$.

Поскольку доказательства обоих утверждений сходны, ограничимся первым. Число точек (с учетом кратностей) из Λ, содержащихся в D_m, равно

$$n_\Lambda(D_m) \leqslant \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \frac{a_1'(t)}{a_1(t)}\, dt \leqslant C_2 \exp\{u_{s_2}(\lambda_{n_m})\} \tag{13}$$

$$r_s'(e_{l,j}^{(m)}) = \sup_{f \in P_s} \left| \frac{1}{2\pi i \mu_l^{(m)}} \int\limits_{\Gamma_m} \frac{f(t)}{p_s(f)} \frac{dt}{\mu_{l,j}^{(m)}(t)} \right| \leqslant C_3 \exp\{u_{s_3}(\lambda_{n_m})\}.$$

Если $a_{s_0,l,j}^{(m)}(z) \in P_{s_a}$, то

$$r_{s_1}(a_{s_0,l,j}^{(m)}(z)) \leqslant \frac{l(\Gamma_m)}{2\pi} \frac{\max\limits_{t \in D_m} |\omega_{l,j-1}^{(m)}(t)|}{\min\limits_{t \in \Gamma_m} |a_{s_0}(t)|} \max\{\exp \max_{z \in D_m + C(0,1)} \{u_{s_0}(z) -$$

$$- u_{s_1}(z)\}, \exp\{\max_{z \in \Gamma(D_m + C(0,1))} u_{s_0}(z) - \min_{z \in D_m + C(0,1)} u_{s_1}(z)\}\}. \tag{14}$$

В последнем неравенстве модуль произведения первых двух сомножителей оценивается сверху $\leqslant C_4 \exp\{u_{s_4}(\lambda_{n_m}) - u_{s_0}(\lambda_{n_m})\}$. При фиксированном s_0 и достаточно большом s_1 третий сомножитель будет $\leqslant 1$. Отсюда, в частности,

$$r_{s_1}'(e_{l,j}^{(m)}) \geqslant \frac{|\langle e_{i,j}^{(m)} a_{s_0,l,j}^{(m)}(z)\rangle|}{r_{s_1}(a_{s_0,l,j}^{(m)}(z))} \geqslant \frac{1}{C_4} \exp\{u_{s_0}(\lambda_{n_m}) - u_{s_4}(\lambda_{n_m})\}. \tag{15}$$

Соотношение (12) и изоморфизм пространств $\tilde{A}_p$,

$$A_p := \{b := \{b_{l,j}^{(m)}\} : \forall s \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{q_m} \sum_{j=1}^{r_l^{(m)}} |b_{l,j}^{(m)}| r_s'(e_{l,j}^{(m)}) < \infty$$

следуют из оценок (13), (6), (15), а утверждение 5 теоремы 3 — из (13), (14). Теорема доказана.

Замечание 1. Предположим, что выполнены первая или вторая группы условий теоремы, и положим $\alpha_{l,j}^{(m)} := \prod_{k=1}^{l-1} \mu_k^{mr_k^{(m)}} \mu_l^{(m)j-1}$. Тогда утверждение 3 теоремы 2 разворачивается в такую задачу определения целой функции по ее заданным элементам [12, с. 215]: для каждой последовательности из

$$A_p' := \{b = \{b_{l,j}^{(m)}\} : \exists s \sup_m \frac{\max\limits_{l \leqslant q_m} \max\limits_{j \leqslant r_l^{(m)}} |b_{l,j}^{(m)} \alpha_{l,j}^{(m)}|}{\exp u_s(\lambda_{n_m})} < \infty\}$$

существует целая функция $f(z) \in P$, разделенные разности которой $\Delta_{l,j}^{(m)}(f) := [\underbrace{\mu_1^{(m)}, \ldots, \mu_1^{(m)}}_{g_1^m}; \ldots; \underbrace{\mu_l^{(m)}, \ldots, \mu_l^{(m)}}_{j}]$ удовлетворяют соотношениям

$$\Delta_{l,j}^{(m)}(f) = b_{l,j}^{(m)}, \quad j \leqslant r_l^{(m)}, \quad l \leqslant q_m, \quad m < \infty.$$

При этом решение задачи согласно утверждению 2 теоремы 3 записывается в виде суммы ряда

$$f(z) := \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{q_m} \sum_{j=1}^{r_l^m} b_{l,j}^{(m)} a_{s,l,j}^{(m)}(z). \tag{16}$$

Пусть последовательность $a = \{a_{n,l}\}_{l=1}^{p_n}{}_{n=1}^{\infty}$ обладает тем свойством, что построенная по a, и Λ последовательность разделенных разностей $\{\Delta_{l,j}^{(m)}(a)\} \in A_p'$. Тогда сумма соответствующего ряда (16) интерполирует $\{a_{n,l}\}$ на Λ:

$$f^{(l-1)}(\lambda_n) = a_{n,l}, \quad l = 1, \ldots, p_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

Обратно, если $f(z) \in P$, то непосредственной оценкой интегрального представления разделенной разности убеждаемся, что $\{\Delta_{l,j}^{(m)}(f)\} \in A_p'$. Тем самым доказана

Теорема 7. Пусть Λ, D и $\{u_s(z)\}$ удовлетворяют одной из групп условий а)—в), 1)—6) или а)—б), 1′)—6′). Для того чтобы интерполяционная задача (17) была разрешима в P для последовательности $a = \{a_{n,l}\}$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая последовательность разделенных разностей $\{\Delta_{l,j}^{(m)}(a)\} \in \tilde{A}_p'$.

Замечание 2. В работе [13] доказана теорема существования базиса Шаудера в ядре системы сверточных операторов $T_{\mu_1}, \ldots, T_{\mu_N}$ на E. При этом E' предполагается алгебраически изоморфным $D \in N$-пространству $\lim\limits_{s} \operatorname{ind} P_s$, весовые функции удовлетворяют условиям близким к а)—в), а система ассоциированных с $\{T_{\mu_l}\}$ функций $\{F_1, \ldots, F_N\} \subset P$ медленно растущая, то есть удовлетворяет условиям, сходным с 1)—3), 5). Таким образом, при дополнительных условиях 4), 6), которые в конкретных классах нередко следуют из остальных, теорема 6 устанавливает явный вид базиса и биортогональной с ней системы.

4. В заключение остановимся на двух конкретных пространствах из введенных в предыдущем пункте классов. Пусть функция $h(r)$ логарифмически выпукла на $[0, \infty)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{h(r)}{\ln r} = \infty$, $\exists M > 0$ $h(2r) < Mh(r)$ и $h(r) \equiv 0$ вблизи нуля. Известно [14], что

$$\forall r < \infty \, \forall \gamma \in (1, 2) \, h(\gamma r) \leqslant (1 + M^3(\gamma - 1)) \, h(r).$$

Положим сначала $u_s(z) := sh(r)$, $z := re^{i\theta}$, $s = 1, 2 \ldots$ $\{u_s(z)\}$ удовлетворяет условиям а)—в). Обозначим $n_\Lambda(r) := n_\Lambda(C(0, 1)$ считающую функцию последовательности Λ и предположим

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{h(r)} \int^{r} \frac{n_\Lambda(t)}{t} \, dt < \infty. \tag{18}$$

Согласно [15] существует целая функция $a(z) \in P_{s_0} \subset P$, $a(z) \not\equiv 0$, имеющая в точках λ_n нули кратностей соответственно $\geqslant p_n$ $n = 1, 2, \ldots$. По лемме 4 [16] плоскость можно разбить на концентрические кольца, а каждое кольцо конечным числом выходящих из начала координат лучей на усеченные секторы так, что на их границах имеет место равномерная по z оценка

$$\exists s \exists C > 0 \quad \ln|a(z)| > -sh(r) - C.$$

Обозначим секторы, содержащие узлы из Λ, через D_m, $m = 1, 2, \ldots$ в порядке возрастания наименьших индексов n_m содержащихся в них узлов. Диаметр D_m можно считать $< \delta|\lambda_{n_m}|$, $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, откуда следуют условия 2), 3) и оценка сверху для $|\omega_{l,j}^{(m)}(z)|$ в условии 4). Оценка снизу на Γ_m получается из соотношения

$$|\omega_{l,j}^{m}(z)| \geqslant a(z) | \min_{|t-\lambda_{n_m}|=2\delta|\lambda_{n_m}|} \frac{|\omega_{l,j}^{(m)}(t)|}{|a(t)|}$$

и условия (18).

Определим биортогональную с $\{e_{l,j}^{(m)}\}$ систему функций по формуле

$$a_{s,l,j}^{(m)}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \frac{\omega_{l,j-1}^{(m)}(t)\, a(z)\, z^{m_s}}{a(t)\, t^{m_s}(z-t)}\, dt,$$

где $m_s := [s|\lambda_{n_m}|h'(|\lambda_{n_m}|)]$, $m = 1, 2 \ldots$ и оценим их нормы

$$r_{s_1}(a_{s_0,l,j}^{(m)}(z)) \leqslant \frac{C\exp\{s_2 h(|\lambda_{n_m}|)\}}{|\lambda_{n_m}|^{m_{s_0}}} \max\left\{\frac{\max\limits_{z \in \Gamma(D_m + C(0,1)}|a(z)\, z^{m_{s_0}}|}{\min\limits_{z \in D_m + C(0,1)}\{s_1 h(r)\}},\right.$$

$$\left.\max_{z \notin D_m + C(0,1)} \frac{|a(z)\, z^{m_{s_0}}}{\exp\{s_1 h(r)\}}\right\} \leqslant C\max\{\exp\{(s_3 - s_1)h(|\lambda_{n_m}|)\} \times$$
$$\exp\{(s_2 - s_0)h(|\lambda_{n_m}|)\} \max_{r>0}\{(s_a + s_0 - s_1)h(r)\}\}.$$

Далее рассуждаем, как в теореме 6.

Пусть теперь $h(r)$ та же:

$$h_1(r) := \int\limits_0^r \int\limits_0^t \frac{h(\tau)}{\tau}\, d\tau\, \frac{dt}{t}$$

$$\left.\begin{matrix}\varkappa^{-2}\\ \rho^{-2}\end{matrix}\right\} := \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{h_1(r)}{h(r)}$$

$0 \leqslant \varkappa \leqslant \rho < \infty$[13]. Пусть $\{G_s(\theta)\}$ — строго возрастающая последовательность ограниченных 2π-периодических $[\varkappa, \rho]$-тригонометрически выпуклых (т. е. $\forall \nu \in [\varkappa, \rho]$ ν — тригонометрически выпуклых) функций, $u_s(z) := G_s(\theta) h(r)$. Для $z_k := r_k e^{i\theta_k}$, $k = 1, 2$, $|z_1 - z_2| < \delta r_1$ имеем

$$|u_s(z_2) - u_s(z_1)| \leqslant \max_{|z_2 - z_1| < \delta r_1} |G_s(\theta_2) - G_s(\theta_2)| h(r_1) +$$
$$+ \max_{|z_2 - z_1| < \delta r_1} G_s(\theta_2)(h(r_2) - h(r_1)) \leqslant \omega(G_s, \arcsin\delta) h(r_1) +$$
$$+ \sigma_s(h(r_2) - h(r_1)) \leqslant (\omega(G_s \arcsin\delta) + \delta_s M^3 \delta) h(r_1),$$

где $\omega(\cdot)$ — модуль непрерывности функции G_s, $\sigma_s = \max\limits_{\theta} G_s(\theta)$. Очевидно, это оценка равномерна по θ_1, θ_2 при $r_1 = |z_1| \to \infty$.

Пусть тройка последовательностей $\{G_s(\theta) h(r)\}$, $\Lambda := \{\lambda_n, p_n\}$, $D = \{D_m\}$ удовлетворяет условиям 1'), 2'), 5') и таким аналогам условий 3'), 4':

$$\exists \delta < 1 \forall m > m_0 l(\Gamma_m) < \delta |\lambda_{n_m}|, \ \forall s \exists C_1 > 0 \forall m,$$
$$\min_{z \in \Gamma_m} \{|\omega^{(m)}_{q_m, r^{(m)}_{q_m}}(z)|\} \geqslant C_1 \exp\{(G_s(\theta_{n_m}) - G_{s+1}(\theta_{n_m})) h(|\lambda_{n_m}|)\}.$$

Отсюда и из выше приведенной оценки легко следует выполнение условий а)—б), 1')—6') теоремы 6.

В частном случае, когда $\rho(r) := \dfrac{\ln h(r)}{\ln r}$ — уточненный порядок, условия 1)—6') удается заменить более «геометрическими». В этом случае $\varkappa = \rho$ и $G_s(\theta)\rho$ — тригонометрически выпуклые функции. Функция $H(\theta) := \lim\limits_{s \to \infty} G_s(\theta)$ — периодическая и полунепрерывная снизу. Она ρ — тригонометрически выпукла на каждом отрезке множества $F_H := \{\theta : H(\theta) < \infty\}$, и длины отрезков, на которых $H(\theta) = \infty$, не меньше $\dfrac{\pi}{\rho}$ (доказательство получается переходом к пределу по s в фундаментальном соотношении для $G_s(\theta)$). Положим еще $\Delta_H(\theta) :=$

$$:= \frac{1}{2\pi\rho}\left(H'(\theta - 0) - H'(\theta_0 + 0) + \rho^2 \int_{\theta_0}^{\theta} H(\varphi)\, d\varphi\right) \text{ на отрезках } [\theta_0, \theta] \subset F_H.$$

Пусть $\Lambda := \{\lambda_n, p_n\}$ — последовательность с конечной максимальной угловой плотностью $D_\Lambda(\theta)$ относительно $\rho(r)$ (см. определение в [17]). Это условие эквивалентно существованию функции вполне регулярного роста $a(z)$, обращающейся в нуль на Λ, однако еще не обязательно $a(z) \in P$ хотя бы для одной такой функции. Поэтому потребуем согласованность Λ с P в том смысле, что $\Lambda_H(\theta) - D_\Lambda(\theta)$ не убывает на отрезках из F_H вне, возможно, счетного множества, и

$$\min\left\{H(\theta) + H\left(\theta + \frac{\pi}{\rho}\right) - 2\pi \int_{\theta}^{\theta + \frac{\pi}{\rho}} \sin\rho\left(\theta + \frac{\pi}{\rho} - \varphi\right) dD_\Lambda(\varphi)\right\} > 0.$$

При этих условиях, как показано в [11], существует последовательность областей $D = \{D_m\}$ и последовательность функций $\{a_s(z)\} \subset P$ вполне регулярного роста, обладающая свойствами: 1″) $\Lambda \subset D$, причем каждая $a_s(z)$ в каждом D_m не имеет других нулей кроме нулей кратности $= r_l^{(m)}$ в точках $\mu_l^{(m)}$, $l = 1, \ldots, q_m$; 2″) последовательность индикаторов $H_s(\theta)$ функций $a_s(z)$, $s = 1, 2, \ldots$, строго возрастает и исчерпывает $H(\theta)$. 3″) $l(\Gamma_m) = o(|\lambda_{n_m}|)$; 4″) $\forall \varepsilon > 0\ \exists C > 0 \forall z \in D \,|\, \omega_{a_m, r_{q_m}^{(m)}}^{(m)}(z)| \geqslant C \exp\{-\varepsilon h(r)\}$; 5″) $\forall s \ln |a_s(z)| \sim H_s(\theta) h(r) \times \{\Gamma_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$.

Последовательность субгармонических функций $\{H_s(\theta) h(r)\}$ определяет в P ту же топологию, что и $\{G_s(\theta) h(r)\}$, а из свойств 1″)—5″) вытекают условия 1′)—5′) теоремы 6.

Таким образом, имеет место теорема

Теорема 8. *Пусть последовательность Λ удовлетворяет условию (18) (либо $\rho(r) := \frac{\ln h(r)}{\ln r}$ — уточненный порядок, и Λ имеет конечную максимальную угловую плотность и согласована с P) и $u_s(z) := sh(r)$; $(u_s(z) := G_s(\theta) h(r)$, $s = 1, 2, \ldots$. Тогда существует такое разбиение Λ на группы $\{\mu_l^{(m)}, r_l^{(m)}\}_{l=1}^{q_m}$, что последовательность аналитических функционалов $E_\Lambda := \{e_{l,j}^{(m)}\}$ образует Кете базис в замыкании своей линейной оболочки в соответствующем пространстве P' с биортогональной системой $\{a_{s,l,j}^{(m)}(z)\}$ при любом фиксированном s, пространство последовательностей коэффициентов базисных разложений совпадает с*

$$\tilde{A}_p := \{b := \{b_{l,j}^{(m)}\} : \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{h(|\lambda_{n_m}|)} \ln \max_{l,j} |b_{l,j}^{(m)}| = -\infty\}$$

(совпадает с

$$\tilde{A}_p := b\{= \{b_{l,j}^{(m)}\} : \forall s \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{h(|\lambda_{n_m}|)} \ln \max_{l,j} |b_{l,j}^{(m)}| + G_s(\theta_{n_m}) \leqslant 0\Big);$$

интерполяционная задача (17) разрешима в соответствующем пространстве P для заданной правой части $a := \{a_n, l\}$ тогда и только тогда, когда последовательность разделенных разностей $\{\Delta_{l,j}^{(m)}(a)\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{h(|\lambda_{n_m}|)} \ln \max_{i,j} |\Delta_{i,j}^{(m)}(a)\,\alpha_{i,j}^{(m)}| < \infty$$

(соответственно условию

$$\exists s \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{h(|\lambda_{n_m}|)} \ln \max_{l,j} |\Delta_{l,j}^{(m)}(a)\,\alpha_{l,j}^{(m)}| - G_s(\theta_{n_m}) \leqslant 0,$$

при этом решение представимо в виде суммы ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{q_m} \sum_{j=1}^{r_l^{(m)}} \Delta_{l,j}^{(m)}(a)\, a_{s,l,j}^{(m)}(a),$$

абсолютно сходящегося в некотором P_s.

Замечание 1. В случае $u_s(z) \equiv sh(r)$ критерий разрешимости интерполяционной задачи был установлен ранее в [18], теорема 11).

Замечание 2. В случае $u_s(z) = G_s(\theta) h(r)$ вторая часть теоремы иным методом доказана в теореме 6 работы [11], а первая часть при дополнительном условии $\rho(r) \equiv 1$ — в теоремах 14, 15 той же работы.

Список литературы: 1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1958. 684 с. 2. *Драгилев М. М., Захарюта В. П., Коробейник Ю. Ф.* Двойственность между некоторыми вопросами базисности и интерполяции // ДАН СССР. 1974. **215**, № 3. С. 522—525. 3. *Митягин Б. С.* Аппроксимационная размерность и базисы в ядерных пространствах // УМН. 1961. **18**, Вып. 4. С. 63—132. 4. *Weill L. I.* Unconditional and shrinking basis in convex spaces // Pacif. J. of Math. 1969. **29**, № 1. P. 467—483. 5. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1971. 1072 с. 6. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967. 260 с. 7. *Bratishchev A. V.* Analitical functional basis in invariant subspaces // Мат. вестн. 1988. **40**, № 3, 4. С. 185—188. 8. *Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н.* Реализация сопряженного пространства с помощью преобразования Фурье — Бореля. Приложения // Комплексный анализ и математическая физика. 1988. С. 62—73. 9. *Haslinger F.* Complete biortogonal system in nuclear (F)-spaces // Math. Nachr. 1978. **83**. P. 305—310. 10. *Ткаченко В. А.* Уравнения типа свертки в пространствах аналитических функционалов // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1977. **41**. № 2. С. 378—392. 11. *Братищев А. В.* Последовательности с конечной максимальной угловой плотностью и некоторые их приложения. М., 1987. 90 с. Деп. в ВИНИТИ 14.12.87, № 8703-В87. 12. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 376 с. 13. *Meise R., Schwerdtfeger K., Taylor B. A.* On kernel of slowly decreasing operators. Manuscript. P. 1—25. 14. *Кондратюк А. А.* Ряды Фурье и мероморфные функции. Львов: Вища шк., 1988. 196 с. 15. *Rubel L. A., Taylor B. A.* A Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. Math. Fr. 1968. **96**. P. 53—96. 16. *Братищев А. В., Коробейник Ю. Ф.* Кратная интерполяционная задача в пространствах целых функций заданного уточненного порядка // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1976. **40**, № 5. С. 1102—1127. 17. *Братищев А. В.* Достаточные условия интерполяционности множества в классах целых функций, характеризуемых индикатором // ДАН СССР. 1984. Т. 279. № 5. С. 1036—1039. 18. *Братищев А. В.* Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. **48**, № 3. С. 451—475.