ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXX. Серия 4 1964

МНОГОТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА И ЯДРА КЕЛЛОГА

И. Я. Чертков

Введение

Исследованию осцилляционных свойств собственных функций для дифференциальных операторов второго порядка посвящены многочисленные работы [1], начало которым было положено ещё исследованием Штурма в 1836 году.

Наиболее полные результаты, относящиеся к уравнениям Штурма — Лиувилля

$$L[y] = \lambda \rho(x) y \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{1.1}$$

с двухточечными самосопряжёнными граничными условиями

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11} y(a) + \alpha_{12} y'(a) + \beta_{11} y(b) + \beta_{12} y'(b) = 0 \\ \alpha_{21} y(a) + \alpha_{22} y'(a) + \beta_{21} y(b) + \beta_{22} y'(b) = 0 \end{array}\right\}, \tag{1.2}$$

где

$$L[y] = -\frac{d}{dx}(py') + qy; \quad p(x) > 0, \quad q(x) \gtreqqless 0 \ (a \leqslant x \leqslant b),$$

а функция

$$\sigma(x) = \int_a^b \rho(s)\, ds$$

монотонно возрастает, принадлежат Биркгофу [2], установившему, что в зависимости от коэффициентов граничных условий (1.2) n-я собственная функция может иметь $n-1$, n или $n+1$ нулей на интервале (a, b).

Дальнейшее исследование осцилляционных свойств собственных функций краевых задач принадлежит М. Г. Крейну, который впервые применил для этой цели аппарат нагруженных интегральных уравнений вида

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s)\, d\sigma(s), \tag{1.3}$$

где функция $\sigma(s)$ $(a \leqslant s \leqslant b)$ монотонно возрастает и $K(x, s)$ — ядро Келлога.

Следуя терминологии, введенной М. Г. Крейном, вещественное непрерывное симметричное или несимметричное ядро $K(x, s)$ называется обыкновенным, чётным или нечётным ядром Келлога, если при всяком натуральном n или всяком чётном или нечётном n выполняются неравенства

$$K\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_n \\ s_1 s_2 \dots s_n \end{pmatrix} \geqslant 0 \text{ (или } \leqslant 0) \text{ и } K\begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_n \\ s_1 s_2 \dots s_n \end{pmatrix} > 0 \text{ (или } < 0) \tag{1.4}$$

для произвольных систем чисел, удовлетворяющих условиям:

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant b; \quad a \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leqslant b.$$

М. Г. Крейн [3] и Ф. Р. Гантмахер [4] доказали, что фундаментальные функции ядер Келлога обладают осцилляционными свойствами, позволяющими широко использовать классическую теорию интерполентных рядов, развитую П. Л. Чебышевым, А. А. Марковым и С. Н. Бернштейном [5].

Опираясь на исследования М. Г. Крейна и Ф. Р. Гантмахера, П. Д. Калафати [6] нашёл необходимые и достаточные условия, при которых функция Грина краевой задачи (1.1) с произвольными граничными условиями (1.2) являются обыкновенным, чётным или нечётным ядром Келлога*. В случае самосопряжённой краевой задачи эти результаты содержат, как частный случай, осцилляционные теоремы Биркгофа.

Несмотря на то, что краевая задача (1.1), (1.2) содержит наиболее общие двухточечные граничные условия, она всё же не исчерпывает всех тех условий, которые можно наложить на линейный упругий континуум. В частности, возможны многоточечные граничные условия. При этом следует сразу же указать, что в докторской диссертации и других работах А. С. Смогоржевского [7] рассматривалась задача построения функций Грина линейного дифференциального уравнения с многоточечными граничными условиями. Однако, занимаясь главным образом алгеброй функций Грина, а не их осцилляционными свойствами, А. С. Смогоржевский рассматривал многоточечные граничные условия, связывающие значения функции и её производных в промежуточных точках, которые не допускают естественной механической интерпретации.

В настоящей работе, представляющей собой развитие классической осцилляционной теории Штурма и возможных её механических приложений, даётся полное решение следующей многоточечной краевой задачи, предложенной автору Б. Я. Левиным. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$L[y] = \lambda \rho y \tag{1.1}$$

и многоточечные граничные условия

$$U_i[y] = \alpha_{i1}^{(1)} y(c_1) + \alpha_{i1}^{(2)} y'(c_1) + \sum_{j=2}^{n+1} \{\alpha_{ij}^{(1)} y(c_j) + \alpha_{ij}^{(2)} \delta y'(c_j)\} +$$

$$+ \alpha_{i,\,n+2}^{(1)} y(c_{n+2}) + \alpha_{i,\,n+2}^{(2)} y'(c_{n+2}) = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n+2), \tag{1.5}$$

где

$$a = c_1 < c_2 < \ldots < c_{n+1} < c_{n+2} = b, \quad \delta y'(c_j) = y'(c_j + 0) - y'(c_j - 0)$$
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots\ n+1)$$

и граничные условия (1.5) линейно-независимы, то есть ранг прямоугольной матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{11}^{(2)} & \alpha_{12}^{(1)} & \alpha_{12}^{(2)} & \ldots & \alpha_{1,\,n+2}^{(1)} & \alpha_{1,\,n+2}^{(2)} \\ \alpha_{21}^{(1)} & \alpha_{21}^{(2)} & \alpha_{22}^{(1)} & \alpha_{22}^{(2)} & \ldots & \alpha_{2,\,n+2}^{(1)} & \alpha_{2,\,n+2}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n+2,1}^{(1)} & \alpha_{n+2,1}^{(2)} & \alpha_{n+2,2}^{(1)} & \alpha_{n+2,2}^{(2)} & \ldots & \alpha_{n+2,n+2}^{(1)} & \alpha_{n+2,\,n+2}^{(2)} \end{Vmatrix},$$

---

* В новом издании книги «Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем» [8] Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн называют обыкновенное ядро Келлога осцилляционным ядром.

составленной из коэффициентов линейных выражений (1.5), равен $n+2$. Требуется найти необходимые и достаточные условия, при которых функция Грина краевой задачи (1.1), (1.5) будет обыкновенным, чётным или нечётным ядром Келлога.

В отличие от граничных условий, рассматриваемых А. С. Смогоржевским, краевые условия (1.5), представляющие собой линейные однородные связи между величинами $y(a)$, $y'(a)$, $y(b)$, $y'(b)$, $y(c_j)$, $\delta y'(c_j)$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$, имеют естественный механический смысл. Они отвечают граничным условиям колебания неоднородной струны с самыми общими упругими опорами в промежуточных точках.

Полученные в этой работе результаты содержат, как частный случай, упомянутую раньше теорему П. Д. Калафати [6] об осцилляционных свойствах фундаментальных функций оператора Штурма — Лиувилля с несамосопряжёнными двухточечными граничными условиями и теорему М. Г. Крейна, устанавливающую, что при введении не связанных между собой упругих опор любой жёсткости и в любом количестве в подвижных точках струны сохраняется осцилляционность её функции Грина [8].

§ 1. Функция Грина многоточечной краевой задачи

Для применения теории интегральных ядер Келлога к изучению осцилляционных свойств краевой задачи (1.1), (1.5) необходимо обобщить понятие функции Грина на случай многоточечных граничных условий. С этой целью обозначим через Φ совокупность всех непрерывных функций на сегменте $[a,\ b]$, дважды непрерывно дифференцируемых на множестве E, получаемом удалением из сегмента $[a,\ b]$ точек $c_2,\ c_3,\ \ldots\ c_{n+1}$, производные которых в этих точках непрерывны или имеют разрыв первого рода, и примем следующее определение.

Определение. Непрерывная в квадрате $a \leqslant x,\ s \leqslant b$ функция $G(x,\ s)$ называется функцией Грина краевой задачи (1.1), (1.5), если для всякой кусочно-непрерывной на интервале $(a,\ b)$ функции $\varphi(x)$ из соотношения

$$\left.\begin{aligned} L[y] &= \varphi(x) \\ U_i[y] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n+2), \tag{1.6}$$

где $y \in \Phi$, следует

$$y(x) = \int_a^b G(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds, \tag{1.7}$$

и, наоборот, из (1.7) следует (1.6).

Теорема 1. *Для того чтобы непрерывная в квадрате $a \leqslant x,\ s \leqslant b$ функция $G(x,\ s)$ являлась функцией Грина краевой задачи (1.1), (1.5), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующим трём условиям:*

1. *$G(x, s)$ как функция от x при всяком фиксированном $s \in [a,\ b]$ и $x \in E$, кроме значений $x = s$, имела непрерывную вторую производную и удовлетворяла однородному уравнению $L[y] = 0$.*

2. *Производная $G'_x(x,\ s)$ в точке $x = s$ $(x \in E)$ имеет разрыв первого рода, равный $\frac{1}{p(s)}$, то есть*

$$G'_x(s+0,\ s) - G'_x(s-0,\ s) = \frac{1}{p(s)}.$$

3. *Функция $G(x,\ s)$ при всех $s \in E$ удовлетворяет граничным условиям (1.5).*

Доказательство. Достаточность условия 1, 2 и 3 очевидна. Для доказательства необходимости допустим, что $\varphi(x)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция на сегменте $[a, b]$, тогда общее решение уравнения

$$L[y] = \varphi(x)$$

на множестве Φ будет [9]

$$y(x) = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds + \sum_{k=1}^{n+2} a_k K(x, c_k), \tag{1.8}$$

где $K(x, s)$ — функция Грина оператора $L[y]$ с произвольными неособенными граничными условиями и a_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, n+2)$ — постоянные, для определения которых имеем алгебраическую систему линейных уравнений

$$\int_a^b U_i[K(x, s)]\varphi(s)\,ds + \sum_{k=1}^{n+2} a_k U_i[K(x, c_k)] = 0. \tag{1.9}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n+2)$$

Если многоточечные граничные условия (1.5) неособенные, то есть

$$D = \operatorname{Det} \| U_i[K(x, c_k)] \|_{i, k=1}^{n+2} \neq 0,$$

то система (1.9) имеет единственное решение и постоянные однозначно определяются по формулам

$$a_k = \int_a^b \beta_k(s)\varphi(s)\,ds \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n+2), \tag{1.10}$$

где

$$\beta_k(s) = \frac{(-1)^k}{D} \begin{vmatrix} U_1[K(x, s)] & \ldots & U_{n+2}[K(x, s)] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ U_1[K(x, c_{k-1})] & \ldots & U_{n+2}[K(x, c_{k-1})] \\ U_1[K(x, c_{k+1})] & \ldots & U_{n+2}[K(x, c_{k+1})] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ U_1[K(x, c_{n+2})] & \ldots & U_{n+2}[K(x, c_{n+2})] \end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

Определив a_k по формуле (1.10), мы из (1.8) находим единственную функцию y на множестве Φ, удовлетворяющую уравнению $L[y] = \varphi(x)$ и граничным условиям (1.5)

$$y(x) = \int_a^b \left[K(x, s) + \sum_{k=1}^{n+2} \beta_k(s) K(x, c_k)\right] \varphi(s)\,ds, \tag{1.12}$$

и единственную функцию Грина краевой задачи (1.1), (1.5)

$$G(x, s) = K(x, s) + \sum_{k=1}^{n+2} \beta_k(s) K(x, c_k). \tag{1.13}$$

Поскольку функция $G(x, s)$, определённая формулой (1.13), удовлетворяет выше указанным условиям 1, 2, 3, то теорема доказана полностью.

В дальнейшем мы будем различать два типа многоточечных грани ных условий: общие (1.5) и штурмовые (1.14), которые имеют следу щий вид

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1^{(1)} y(c_1) + \alpha_1^{(2)} y'(c_1) = 0 \\ &\alpha_j^{(1)} y(c_j) + \alpha_j^{(2)} \delta y'(c_j) = 0 \\ &\alpha_{n+2}^{(1)} y(c_{n+2}) + \alpha_{n+2}^{(2)} y'(c_{n+2}) = 0 \end{aligned}\right\} (j = 2, 3, 4, \ldots, n+1), \qquad (1.1$$

где

$$(\alpha_1^{(1)})^2 + (\alpha_1^{(2)})^2 > 0; \ (\alpha_{n+2}^{(1)})^2 + (\alpha_{n+2}^{(2)})^2 > 0$$

и

$$\alpha_j^{(1)} \cdot \alpha_j^{(2)} \neq 0 \quad (j = 2, 3, \ldots, n+1).$$

Если обозначить через $K(x, s)$ обычную функцию Грина оператор $L_1[y]$ с граничными условиями Штурма

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1^{(1)} y(c_1) + \alpha_1^{(2)} y'(c_1) = 0 \\ &\alpha_{n+2}^{(1)} y(c_{n+2}) + \alpha_{n+2}^{(2)} y'(c_{n+2}) = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (1.15$$

отвечающими в (1.14) точкам $c_1 = a$ и $c_{n+2} = b$, и учесть, что

$$U_i[K(x, c_j)] = \begin{cases} \alpha_i^{(1)} K(c_i, c_j) & \text{при } i \neq j \\ \alpha_i^{(1)} K(c_i, c_i) + \dfrac{\alpha_i^{(2)}}{p(c_i)} & \text{при } i = j, \end{cases}$$

то из (1.13) непосредственно следует, что функция Грина оператора $L[y]$ с многоточечными граничными условиями Штурма определяется формулой

$$H(x, s) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} K(x, s) & K(c_2, s) & \ldots & K(c_{n+1}, s) \\ K(x, c_2) & K(c_2, c_2) + \gamma_2 & \ldots & K(c_{n+1}, c_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(x, c_{n+1}) & K(c_2, c_{n+1}) & \ldots & K(c_{n+1}, c_{n+1}) + \gamma_{n+1} \end{vmatrix}, \qquad (1.16)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} K(c_2, c_2) + \gamma_2 & \ldots & K(c_{n+1}, c_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K(c_{n+1}, c_2) & \ldots & K(c_{n+1}, c_{n+1}) + \gamma_{n+1} \end{vmatrix} \qquad (1.17)$$

и

$$\gamma_j = \frac{\alpha_j^{(2)}}{\alpha_j^{(1)} p'(c_j)} \ (j = 2, 3, \ldots n+1). \qquad (1.18)$$

Формула (1.16) устанавливает зависимость между функцией Грина краевой задачи с штурмовыми многоточечными граничными условиями и функцией Грина краевой задачи с классическими граничными условиями Штурма (1.15), которая, как доказал М. Г. Крейн, является однопарным обыкновенным ядром Келлога [3б].

Вместе с формулой (1.16) доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. *Функция Грина $H(x, s)$ оператора Штурма — Лиувилля с многоточечными граничными условиями Штурма есть симметричное ядро.*

Теорема 3. *Пусть* $d_j f(x) = f(c_j)$ *обозначает значение функции* $f(x)$ *в точке* $x = c_j$, *а* δ_j *обозначает скачек функции при переходе от* $x = c_j - 0$ *к* $x = c_j + 0$. *Тогда имеют место формулы*

$$d_1 H'(x, c_1) - [d_1 H'_x(x, s)]_{s=c_1} = -\frac{1}{p(c_1)}$$

$$d_j H'(x, c_j) - [\delta_j H'_x(x, s)]_{s=c_j} = \frac{1}{p(c_j)} \quad (j = 2, 3, \ldots n+1)$$

$$d_{n+2} H'(x, c_{n+2}) - [d_{n+2} H'_x(x, s)]_{s=c_{n+2}} = \frac{1}{p(c_{n+2})}. \tag{1.19}$$

Пусть теперь $H(x, s)$ — функция Грина краевой задачи (1.1), (1.14), тогда в соответствии с (1.13) функцией Грина $G(x, s)$ оператора (1.1) с общими многоточечными граничными условиями (1.5) будет

$$G(x, s) = H(x, s) + \sum_{k=1}^{n+2} \beta_k(s) H(x, c_k), \tag{1.20}$$

где $\beta_k(s)$ определяются формулами (1.11).

Для того, чтобы функцию Грина $G(x, s)$ представить в удобной для дальнейших исследований детерминантной форме, рассмотрим следующие системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{i1}^{(1)} H(c_1, s) + \alpha_{i2}^{(2)} H'_x(c_1, s) = U_{i1}(s) \\ &\alpha_1^{(1)} H(c_1, s) + \alpha_1^{(2)} H'_x(c_1, s) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n+2)$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{ij}^{(1)} H(c_j, s) + \alpha_{ij}^{(2)} \delta_j H'_x(c_j, s) = U_{ij}(s) \\ &\alpha_j^{(1)} H(c_j, s) + \alpha_j^{(2)} \delta_j H'_x(c_j, s) = 0 \end{aligned}\right\} (i=1, 2, \ldots, n+2;\ j=2, 3, \ldots, n+2)$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{i,n+2}^{(1)} H(c_{n+2}, s) + \alpha_{i,n+2}^{(2)} d_{n+2} H'_x(c_{n+2}, s) = U_{i,n+2}(s) \\ &\alpha_{n+2}^{(1)} H(c_{n+2}, s) + \alpha_{n+2}^{(2)} d_{n+2} H'_x(c_{n+2}, s) = 0 \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots, n+2), \tag{1.21}$$

которые определят функции $U_{ij}(s)$ по формулам

$$U_{ij}(s) = \sigma_{ij} H(c_j, s), \tag{1.22}$$

где

$$\sigma_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{ij}^{(1)} & \alpha_{ij}^{(2)} \\ \alpha_j^{(1)} & \alpha_j^{(2)} \end{vmatrix}}{\alpha_j^{(2)}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n+2;\ j = 2, 3, \ldots, n+1). \tag{1.23}$$

Из (1.21) и теоремы 3 следует

$$\alpha_{i1}^{(1)} H(c_i, c_1) + \alpha_{i1}^{(2)} d_i H'(x, c_1) - U_{i1}(c_1) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq 1 \\ -\dfrac{\alpha_{i1}^{(2)}}{p(c_1)} \text{ при } i = 1 \end{cases}$$

$$\alpha_{ij}^{(1)} H(c_i, c_j) + \alpha_{ij}^{(2)} \delta_i H'(x, c_j) - U_{ij}(c_j) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j \\ \dfrac{\alpha_{ij}^{(2)}}{p(c_j)} \text{ при } i = j \end{cases} \tag{1.24}$$

$$\alpha_{i,n+2}^{(1)} H(c_i, c_{n+2}) + \alpha_{i,n+2}^{(2)} d_i H'(x, c_{n+2}) - U_{i,n+2}(c_{n+2}) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq n+2 \\ \dfrac{\alpha_{i,n+2}^{(2)}}{p(c_{n+2})} \text{ при } i = n+2 \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n+2;\ j = 2, 3, \ldots n+1).$$

Введём теперь в рассмотрение матрицу

$$B = \| \alpha_{i1}^{(2)} \alpha_{i2}^{(2)} \ \dots \ \alpha_{i,\,n+2}^{(2)} \sigma_{i1} \sigma_{i2} \ \dots \ \sigma_{i,\,n+2} \| \ (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n+2). \quad (1.25)$$

Пусть $\sigma = \mathrm{Det} \| \sigma_{ij} \|_{i,\,j=1}^{n+2}$ и обозначим через $[j_1,\ j_2,\ \dots\ j_r \,|\, i_1,\ i_2,\ \dots\ i_r]$ детерминант, который получается, если в σ заменить вертикали с номерами $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ $(1 \leqslant i_r \leqslant n+2)$ вертикалями с номерами $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ $(1 \leqslant j_r \leqslant n+2)$ детерминанта $\alpha = \mathrm{Det} \| \alpha_{ij} \|_{i,\,j=1}^{n+2}$ и затем расположить колонны в порядке возрастания их номеров. Очевидно, что таким способом можно образовать любой детерминант $n+2$ порядка матрицы B.

Две последовательности целых чисел $u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_r$ и $v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_{n+2-r}$ мы назовём дополнительными, если среди чисел $u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_r,\ v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_{n+2-r}$ содержатся все целые числа от 1 до $n+2$ включительно.

Нетрудно доказать формулу (1.26), верную при $\sigma \neq 0$

$$\mathrm{Det} \left\| \frac{[j_i \,|\, i_k]}{\sigma} \right\|_{i,k=1}^{n+2} = \frac{[j_1,\ j_2,\ \dots\ j_r \,|\, i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_r]}{\sigma}. \quad (1.26)$$

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 4. *Если $H(x,\ s)$ — функция Грина краевой задачи, состоящей из оператора Штурма — Лиувилля и неособенных многоточечных граничных условий Штурма* (1.12), *то функция Грина $G(x,\ s)$ того же оператора с общими многоточечными граничными условиями* (1.15) *определяется формулой*

$$G(x,\ s) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} H(x,\ s) & H(c_1,\ s) & \dots\dots\dots\dots & H(c_{n+2},\ s) \\ H(x,\ c_1) & H(c_1,\ c_1) + \gamma_{11} & \dots\dots\dots\dots & H(c_{n+2},\ c_1) + \gamma_{n+2,\,1} \\ H(x,\ c_2) & H(c_1,\ c_2) + \gamma_{12} & \dots\dots\dots\dots & H(c_{n+2},\ c_2) + \gamma_{n+2,\,n+2} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots \\ H(x,\ c_{n+2}) & H(c_1,\ c_{n+2}) + \gamma_{1,\,n+2} & \dots\dots\dots\dots & H(c_{n+2},\ c_{n+2}) + \gamma_{n+2,\,n+2} \end{vmatrix}, \quad (1.27)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} H(c_1,\ c_1) + \gamma_{11} & \dots & H(c_{n+2},\ c_1) + \gamma_{n+2,\,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ H(c_1,\ c_{n+2}) + \gamma_{1,\,n+2} & \dots & H(c_{n+2},\ c_{n+2}) + \gamma_{n+2,\,n+2} \end{vmatrix} \quad (1.28)$$

и

$$\gamma_{i1} = \frac{(-1)^{i+1}\,[1 \,|\, i]}{\sigma p(c_1)},\ \gamma_{ij} = \frac{(-1)^{i}\,[j \,|\, i]}{\sigma p(c_j)}. \quad (1.29)$$

$$(i = 1,\ 2,\ \dots,\ n+2;\ j = 2,\ 3,\ \dots,\ n+1)$$

Доказательство. Действительно, из формулы (1.27) следует, что $G(x,\ s)$ удовлетворяет первым двум условиям теоремы 1. Докажем, что она удовлетворяет также и условию 3, то есть граничным условиям (1.5).

Из (1.27) имеем

$$U_i[G(x,\ s)] =$$

$$= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} U_i[H(x,\ s)] & H(c_1,\ s) & \dots & H(c_{n+2},\ s) \\ U_i[H(x,\ c_1)] & H(c_1,\ c_1) + \gamma_{11} & \dots & H(c_{n+2},\ c_1) + \gamma_{n+2,\,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_i[H(x,\ c_{n+2})] & H(c_1,\ c_{n+2}) + \gamma_{1,\,n+2} & \dots & H(c_{n+2},\ c_{n+2}) + \gamma_{n+2,\,n+2} \end{vmatrix}. \quad (1.30)$$

Умножим последовательно элементы второй вертикали детерминанта правой части формулы (1.30) на σ_{i1}, элементы третьей вертикали на σ_{i2} и т. д., умножим элементы $n+3$ вертикали на $\sigma_{i,\,n+2}$ и вычтем их линейную комбинацию от соответствующих элементов первой вертикали. Тогда элементы первой вертикали $U_i[H(x, c_j)]$ $(j = 2, 3, \dots n+2)$ в соответствии с (1.23), (1.24) и (1.29) станут равными

$$U_i[H(x, c_j)] = \alpha_{i1}^{(1)} H(c_1, c_j) + \alpha_{i1}^{(2)} d_1 H'(x, c_j) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n+1} [\alpha_{ik}^{(1)} H(c_k, c_j) + \alpha_{ik}^{(2)} \delta_k H'(x, c_j)] + \alpha_{i\,n+2}^{(1)} H(c_{n+2}, c_j) +$$

$$+ \alpha_{i,\,n+2}^{(2)} d_{n+2} H'(x, c_j) - \sum_{k=1}^{n+2} [U_{ik}(c_j) + \sigma_{ik}\gamma_{kj}] =$$

$$= \frac{\alpha_{ij}^{(2)}}{p(c_j)} - \sum_{k=1}^{n+2} \sigma_{ik}\gamma_{kj} = \frac{\alpha_{ij}^{(2)}}{p(c_j)} -$$

$$- \frac{(-1)^k}{\sigma p(c_j)} \sum_{k=1}^{n+2} \begin{vmatrix} \alpha_{ij}^{(2)}\sigma_{11} & \dots & \sigma_{1,\,k-1} & \sigma_{1,\,k+1} & \dots & \sigma_{1,\,n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n+2,\,j}^{(2)}\sigma_{n+2,\,1} & \dots & \sigma_{n+2,\,k-1} & \sigma_{n+2,\,k+1} & \dots & \sigma_{n+2,\,n+2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\, p(c_j)} \begin{vmatrix} \alpha_{ij}^{(2)} & \sigma_{i1}\sigma_{i2} \dots \sigma_{i,\,n+2} \\ \alpha_{1j}^{(2)} & \sigma_{11}\sigma_{12} \dots \sigma_{1,\,n+2} \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_{ij}^{(2)} & \sigma_{i1}\sigma_{i2} \dots \sigma_{i,\,n+2} \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_{n+2,\,j}^{(2)} & \dots \sigma_{n+2,\,n+2} \end{vmatrix} = 0\ (j = 2,\ 3,\ \dots\ n+2).$$

Аналогично легко проверить, что при этом и первый элемент первой строки детерминанта правой части формулы (1.30) обращается в нуль. Отсюда, все элементы первой вертикали этого детерминанта $U_i[G(x, s)] = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n+2)$ и теорема доказана.

В дальнейшем, не нарушая общности рассуждений, мы будем считать функцию Грина $H(x, s)$ краевой задачи (1.1), (1.14) положительно определённым ядром, чего всегда можно добиться соответствующей заменой параметра λ в дифференциальном уравнении (1.1).

§ 2. Исследование функции Грина в случае штурмовых многоточечных граничных условий

Приступим теперь к изучению функции Грина краевой задачи с многоточечными граничными условиями Штурма (1.14).

На основании теоремы Сильвестра [8] можно из (1.16) получить выражение символов Фредгольма ядра $H(x, s)$ через символы Фредгольма обыкновенного ядра Келлога $K(x, s)$ по следующей формуле

$$H\begin{pmatrix} x_1 x_2 & \dots & x_m \\ s_1 s_2 & \dots & s_m \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left[K\begin{pmatrix} x_1 x_2 & \dots & x_m \\ s_1 s_2 & \dots & s_m \end{pmatrix} +\right.$$

$$+ \sum_{i=2}^{n+1} \gamma_i K\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m c_2 & \dots & c_{i-1} c_{i+1} & \dots & c_{n+1} \\ s_1 & \dots & s_m c_2 & \dots & c_{i-1} c_{i+1} & \dots & c_{n+1} \end{pmatrix} +$$

$$+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n+2}\gamma_i\gamma_j K\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_m c_2 & \ldots & c_{i-1}c_{i+1} & \ldots & c_{j-1}c_{j+1} & \ldots & c_{n+1}\\ s_1 & \ldots & s_m c_2 & \ldots & c_{i-1}c_{i+1} & \ldots & c_{j-1}c_{j+1} & \ldots & c_{n+1}\end{pmatrix}+$$
$$+\ldots+\gamma_2\gamma_3\ldots\gamma_{n+1}K\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_m\\ s_1 & \ldots & s_m\end{pmatrix}\Bigg]. \qquad (2.1)$$

Ядро $K(x, s)$ — однопарное, то есть

$$K(x, s)=\begin{cases}\Psi(x)\chi(s) & \text{при } x\leqslant s\\ \Psi(s)\chi(x) & \text{при } x\geqslant s\end{cases}\qquad (a\leqslant x,\ s\leqslant b).$$

Для таких ядер М. Г. Крейн дал следующее правило (которое мы в дальнейшем будем называть правилом К [3а]): если

$$a\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_m\leqslant b \text{ и } a\leqslant s_1<s_2<\ldots<s_m\leqslant b$$

и условие

$$a<\frac{x_1}{s_1}<\frac{x_2}{s_2}<\ldots<\frac{x_m}{s_m}<b \qquad (2.2)$$

не выполняется, то

$$K\begin{pmatrix}x_1x_2 & \ldots & x_m\\ s_1s_2 & \ldots & s_m\end{pmatrix}=0.$$

Если же условие (2.2) выполняется, то

$$K\begin{pmatrix}x_1x_2 & \ldots & x_m\\ s_1s_2 & \ldots & s_m\end{pmatrix}=\Psi(r_1)\begin{vmatrix}\chi(r_2)\chi(r_3)\\ \Psi(r_2)\Psi(r_3)\end{vmatrix}\ldots\begin{vmatrix}\chi(r_{2m-2})\chi(r_{2m-1})\\ \Psi(r_{2m-2})\Psi(r_{2m-1})\end{vmatrix}\chi(r_{2m}),$$

где $r_1\leqslant r_2\leqslant\ldots\leqslant r_{2m}$ есть числа $x_1, x_2, \ldots x_m$ и $s_1, s_2, \ldots s_m$, расположенные в порядке возрастания.

Докажем теперь две леммы, которые будут нам полезны в дальнейшем.

Лемма 1. *Если условие* (2.2) *выполнено, то*

$$H\begin{pmatrix}x_1x_2 & \ldots & x_m\\ s_1s_2 & \ldots & s_m\end{pmatrix}=0.$$

Лемма 2. *Если условие* (2.2) *выполняется и* $\operatorname{sign}\alpha_j^{(1)}=\operatorname{sign}\alpha_j^{(2)}$ $(j=2, 3, \ldots n+1)$, *то*

$$H\begin{pmatrix}x_1x_2 & \ldots & x_m\\ s_1s_2 & \ldots & s_m\end{pmatrix}\geqslant 0 \text{ и } H\begin{pmatrix}x_1x_2 & \ldots & x_m\\ x_1x_2 & \ldots & x_m\end{pmatrix}>0.$$

при любом натуральном m.

Доказательство. Справедливость леммы 1 очевидна, так как в случае невыполнения условия (2.2) все слагаемые в правой части формулы (2.1), содержащие множителями символы Фредгольма однопарного ядра $K(x, s)$, на основании правила К обращаются в нуль, что влечёт за собой обращение в нуль символа

$$H\begin{pmatrix}x_1x_2 & \ldots & x_m\\ s_1s_2 & \ldots & s_m\end{pmatrix}.$$

Пусть теперь условие (2.2) выполняется. Тогда, поскольку $K(x, s)$ — обыкновенное ядро Келлога и по условию

$$\gamma_i=\frac{\alpha_i^{(2)}}{\alpha_i^{(1)}p(c_i)}>0 \ (i=2, 3, \ldots, n+1),$$

то все слагаемые правой части формулы (2.1) неотрицательны в случае, когда x и s не совпадают и положительны, если $x_i = s_i$ $(i = 2, 3, \ldots n+1)$, откуда

$$H\begin{pmatrix} x_1 x_2 & \ldots & x_m \\ s_1 s_2 & \ldots & s_m \end{pmatrix} \geqslant 0 \text{ и } H\begin{pmatrix} x_1 x_2 & \ldots & x_m \\ x_1 x_2 & \ldots & x_m \end{pmatrix} > 0.$$

Леммы 1 и 2 доказаны.

Теорема 5. *Все символы Фредгольма функции Грина оператора $L[y]$ с многоточечными граничными условиями Штурма удовлетворяют неравенству*

$$H\begin{pmatrix} x_1 x_2 & \ldots & x_m \\ s_1 s_2 & \ldots & s_m \end{pmatrix} \geqslant 0, \tag{2.3}$$

где $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leqslant b$ *и* $a \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_m \leqslant b$.

Доказательство. Для упрощения выкладок, не нарушая общности рассуждений, мы при доказательстве ограничимся случаем, когда многоточечные граничные условия Штурма содержат всего две промежуточные точки c_2 и c_3.

В соответствии с леммой 1 достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда «x» и «s» удовлетворяют условиям (2.2). Пусть при некотором выборе «x» и «s» точки c_2 и c_3 совместно с точками «x» и «s» удовлетворяют неравенствам

$$a < {c_2 \atop c_2} < {x_1 \atop s_1} < {x_2 \atop s_2} < {c_3 \atop c_3} < {x_3 \atop s_3} < \ldots < {x_m \atop s_m} < b,$$

тогда из (2.1) имеем

$$H\begin{pmatrix} x_1 x_2 & \ldots & x_m \\ s_1 s_2 & \ldots & s_m \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\Bigg[K\begin{pmatrix} c_2 x_1 x_2 x_3 & \ldots & x_m \\ c_2 s_1 s_2 s_3 & \ldots & s_m \end{pmatrix} + \gamma_2 K\begin{pmatrix} x_1 x_2 c_3 x_3 & \ldots & x_m \\ s_1 s_2 c_3 s_3 & \ldots & s_m \end{pmatrix} +$$
$$+ \gamma_3 K\begin{pmatrix} c_2 x_1 x_2 & \ldots & x_m \\ c_2 s_1 s_2 & \ldots & s_m \end{pmatrix} + \gamma_2\gamma_3 K\begin{pmatrix} x_1 x_2 & \ldots & x_m \\ s_1 s_2 & \ldots & s_m \end{pmatrix}\Bigg], \tag{2.4}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} K(c_2, c_2) + \gamma_2 & K(c_2, c_3) \\ K(c_3 c_2) & K(c_3, c_3) + \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Произведём теперь расчленение символов Фредгольма в правой части равенства (2.4) по формуле

$$K\begin{pmatrix} x_1 x_2 & \ldots & x_m \\ s_1 s_2 & \ldots & s_m \end{pmatrix} = \frac{K\begin{pmatrix} x_1 x_2 & \ldots & x_k \\ s_1 s_2 & \ldots & s_k \end{pmatrix} K\begin{pmatrix} x_k x_{k+1} & \ldots & x_m \\ s_k s_{k+1} & \ldots & s_m \end{pmatrix}}{K\begin{pmatrix} x_k \\ s_k \end{pmatrix}}, \tag{2.5}$$

которая легко устанавливается при помощи правила К. В (2.5)

$$K\begin{pmatrix} x_k \\ s_k \end{pmatrix} = K(x_k, s_k).$$

Расчленение символов $K\begin{pmatrix} x_1 x_2 & \ldots & x_m \\ s_1 s_2 & \ldots & s_m \end{pmatrix}$ будем производить таким образом, чтобы колонна «${c_i \atop c_i}$» или группа их, когда они стоят рядом, имела обязательно смежной колонной справа и слева по одной колонне «${x_k \atop s_k}$», когда они находятся в средине, и только справа (слева), если такая группа колонн стоит в начале (в конце). Тогда получим

$$H\begin{pmatrix} x_1x_2 & \ldots & x_m \\ s_1s_2 & \ldots & s_m \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1x_2 & \ldots & x_m \\ s_1s_2 & \ldots & s_m \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta}\left[K\begin{pmatrix} c_2x_1 \\ c_2s_1 \end{pmatrix} K\begin{pmatrix} x_2c_3x_3 \\ s_2c_3s_3 \end{pmatrix} + \right.$$
$$+ \gamma_2 K\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix} K\begin{pmatrix} x_2c_3x_3 \\ s_2c_3s_3 \end{pmatrix} + \gamma_3 K\begin{pmatrix} c_2x_1 \\ c_2s_1 \end{pmatrix} K\begin{pmatrix} x_2x_3 \\ s_2s_3 \end{pmatrix} +$$
$$\left. + \gamma_2\gamma_3 K\begin{pmatrix} x_2x_3 \\ s_2s_3 \end{pmatrix} K\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix} \right], \tag{2.6}$$

где

$$A\begin{pmatrix} x_1x_2 & \ldots & x_m \\ s_1s_2 & \ldots & s_m \end{pmatrix} = \frac{K\begin{pmatrix} x_1x_2 \\ s_1s_2 \end{pmatrix} K\begin{pmatrix} x_3 & \ldots & x_m \\ s_3 & \ldots & s_m \end{pmatrix}}{K\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix} K\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} K\begin{pmatrix} x_3 \\ s_3 \end{pmatrix}} \geqslant 0. \tag{2.7}$$

Знак «$>$» имеет место при

$$a < \begin{matrix} x_1 \\ s_1 \end{matrix} < \begin{matrix} x_2 \\ s_2 \end{matrix} < \ldots < \begin{matrix} x_m \\ s_m \end{matrix} < b$$

и

$$A\begin{pmatrix} x_1x_2 & \ldots & x_m \\ s_1s_2 & \ldots & s_m \end{pmatrix} = 0,$$

если $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$; $s_1 < s_2 < \ldots < s_m$, но не выполняется условие строгого монотонного возрастания пар «$\begin{matrix} x_k \\ s_k \end{matrix}$».

Так как по условию $H(x, s)$ — положительная функция Грина, то, положив в (2.6) $x_k = s_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, учитывая неравенство (2.7) и правило K, мы приходим к неравенству

$$\frac{1}{\Delta}\chi(s_1)\Psi(s_2)\chi(s_3)\left[\Psi(c_2)\begin{vmatrix} \chi(c_2)\,\chi(s_1) \\ \Psi(c_2)\,\Psi(s_1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \chi(s_2)\,\chi(c_3) \\ \Psi(s_2)\,\Psi(c_3) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \chi(c_3)\,\chi(s_3) \\ \Psi(c_3)\,\Psi(s_3) \end{vmatrix} + \right.$$
$$+ \gamma_2\Psi(s_1)\begin{vmatrix} \chi(s_2)\,\chi(c_3) \\ \Psi(s_2)\,\Psi(c_3) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \chi(c_3)\,\chi(s_3) \\ \Psi(c_3)\,\Psi(s_3) \end{vmatrix} + \gamma_3\Psi(c_2)\begin{vmatrix} \chi(c_2)\,\chi(s_1) \\ \Psi(c_2)\,\Psi(s_1) \end{vmatrix} \times$$
$$\left. \times \begin{vmatrix} \chi(c_3)\,\chi(s_3) \\ \Psi(c_3)\,\Psi(s_3) \end{vmatrix} + \gamma_1\gamma_2\Psi(s_1)\begin{vmatrix} \chi(s_2)\,\chi(s_3) \\ \Psi(s_2)\,\Psi(s_3) \end{vmatrix} \right] \geqslant 0. \tag{2.8}$$

Так как функции $\Psi(x)$ и $\chi(x)$ существенно положительные [3б], то из (2.8) имеем

$$B\begin{pmatrix} c_2s_1s_2c_3s_3 \\ c_2s_1s_2c_3s_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left[\Psi(c_2)\begin{vmatrix} \chi(c_2)\,\chi(s_1) \\ \Psi(c_2)\,\chi(s_1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \chi(s_2)\,\chi(c_3) \\ \Psi(s_2)\,\Psi(c_3) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \chi(c_3)\,\chi(s_3) \\ \Psi(c_3)\,\Psi(s_3) \end{vmatrix} + \right.$$
$$+ \gamma_2\Psi(s_1)\begin{vmatrix} \chi(s_2)\,\chi(c_3) \\ \Psi(s_2)\,\Psi(c_3) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \chi(c_3)\,\chi(s_3) \\ \Psi(c_3)\,\Psi(s_3) \end{vmatrix} \cdot + \gamma_3\Psi(c_2)\begin{vmatrix} \chi(c_2)\,\chi(s_1) \\ \Psi(c_2)\,\Psi(s_1) \end{vmatrix} \times$$
$$\left. \times \begin{vmatrix} \chi(s_2)\,\chi(s_3) \\ \Psi(s_2)\,\Psi(s_3) \end{vmatrix} + \gamma_1\gamma_2\Psi(s_1)\begin{vmatrix} \chi(s_2)\,\chi(s_3) \\ \Psi(s_2)\,\Psi(s_3) \end{vmatrix} \right] \geqslant 0. \tag{2.9}$$

Пусть теперь $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant \ldots \leqslant r_{2m-1} \leqslant r_{2m}$ числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и $s_1, s_2, \ldots, s_m$, расположенные в порядке возрастания, тогда символ

$$H\begin{pmatrix} x_1x_2 & \ldots & x_m \\ s_1s_2 & \ldots & s_m \end{pmatrix}$$

в соответствии с формулой (2.6) можно представить следующим образом

$$H\begin{pmatrix} x_1x_2 \dots x_m \\ s_1s_2 \dots s_m \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1x_2 \dots x_m \\ s_1s_2 \dots s_m \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta} \chi(r_2)\Psi(r_3)\chi(r_6)\left[\Psi(c_2)\begin{vmatrix} \chi(c_2)\chi(r_1) \\ \Psi(c_2)\Psi(r_1) \end{vmatrix} \times \right.$$

$$\times \begin{vmatrix} \chi(r_4)\chi(c_3) \\ \Psi(r_4)\Psi(c_3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \chi(c_3)\chi(r_5) \\ \Psi(c_3)\Psi(r_5) \end{vmatrix} + \gamma_2\Psi(r_1)\begin{vmatrix} \chi(r_4)\chi(c_3) \\ \Psi(r_4)\Psi(c_3) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \chi(c_3)\chi(r_5) \\ \Psi(c_3)\Psi(r_5) \end{vmatrix} +$$

$$\left. + \gamma_3\Psi(c_2)\begin{vmatrix} \chi(c_2)\chi(r_1) \\ \Psi(c_2)\Psi(r_1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \chi(r_4)\chi(r_5) \\ \Psi(r_4)\Psi(r_5) \end{vmatrix} + \gamma_2\gamma_3\Psi(r_1)\begin{vmatrix} \chi(r_4)\chi(r_5) \\ \Psi(r_4)\Psi(r_5) \end{vmatrix}\right], \tag{2.10}$$

или

$$H\begin{pmatrix} x_1x_2 \dots x_m \\ s_1s_2 \dots s_m \end{pmatrix} = \chi(r_2)\Psi(r_3)\chi(r_6) A\begin{pmatrix} x_1x_2 \dots x_m \\ s_1s_2 \dots s_m \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} c_2r_1r_4c_3r_5 \\ c_2r_1r_4c_3r_5 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Из (2.7), (2.9) и (2.11) имеем, что при $a < x_1 < x_2 < \dots < x_m < b$ и $a < s_1 < s_2 < \dots < s_m < b$

$$H\begin{pmatrix} x_1x_2 \dots x_m \\ s_1s_2 \dots s_m \end{pmatrix} > 0$$

при любом натуральном m, что и требовалось доказать.

Теорема 6. *Все символы Фредгольма положительной функции Грина оператора $L[y]$ с многоточечными граничными условиями Штурма удовлетворяют усиленному неравенству*

$$H\begin{pmatrix} s_1s_2 \dots s_m \\ s_1s_2 \dots s_m \end{pmatrix} > 0.$$

Доказательство. Установим прежде всего, что $H(s, s) > 0$. С этой целью допустим противное, что при $x = \xi$ $(a \leqslant \xi \leqslant b)$ $H(\xi, \xi) = 0$. Тогда из неравенства

$$H\begin{pmatrix} x\xi \\ s\xi \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} H(x, s) & H(\xi, s) \\ H(\xi, s) & H(\xi, \xi) \end{vmatrix} \geqslant 0$$

следует, что

$$\begin{gathered} -H^2(\xi, s) \geqslant 0, \\ H(\xi, s) \equiv 0. \end{gathered} \tag{2.12}$$

Пусть теперь непрерывная функция $y(x)$, принадлежащая множеству Φ, удовлетворяет граничным условиям (1.14) и в точке $x = \xi$ $y(\xi) \neq 0$. Пусть $L(y) = \varphi(x)$, тогда

$$y(x) = \int_a^b H(x, s)\varphi(s)\,ds$$

и

$$y(\xi) = \int_a^b H(\xi, s)\varphi(s)\,ds. \tag{2.13}$$

Тождества (2.12) и соотношения (2.13) дают $y(\xi) = 0$, что приводит к противоречию. Итак, $H(s, s) > 0$.

Следуя математической индукции, предположим, что

$$H\begin{pmatrix} \xi_1\xi_2 \dots \xi_m \\ \xi_1\xi_2 \dots \xi_m \end{pmatrix} > 0 \text{ и } H\begin{pmatrix} \xi_1\xi_2 \dots \xi_{m+1} \\ \xi_1\xi_2 \dots \xi_{m+1} \end{pmatrix} = 0.$$

Тогда на основании теоремы Сильвестра

$$\begin{vmatrix} H\begin{pmatrix}\xi_1\xi_2 & \ldots & \xi_m x\\ \xi_1\xi_2 & \ldots & \xi_m s\end{pmatrix} & H\begin{pmatrix}\xi_1\xi_2 & \ldots & \xi_m\xi_{m+1}\\ \xi_1\xi_2 & \ldots & \xi_m s\end{pmatrix}\\ H\begin{pmatrix}\xi_1\xi_2 & \ldots & \xi_m x\\ \xi_1\xi_2 & \ldots & \xi_m\xi_{m+1}\end{pmatrix} & H\begin{pmatrix}\xi_1\xi_2 & \ldots & \xi_m\xi_{m+1}\\ \xi_1\xi_2 & \ldots & \xi_m\xi_{m+1}\end{pmatrix}\end{vmatrix} =$$

$$= H\begin{pmatrix}\xi_1 & \ldots & \xi_m\\ \xi_1 & \ldots & \xi_m\end{pmatrix} H\begin{pmatrix}\xi_1 & \ldots & \xi_{m+1}x\\ \xi_1 & \ldots & \xi_{m+1}s\end{pmatrix} \geqslant 0,$$

откуда

$$H\begin{pmatrix}\xi_1\xi_2 & \ldots & \xi_m x\\ \xi_1\xi_2 & \ldots & \xi_m\xi_{m+1}\end{pmatrix} = c_0 H(x, \xi_{m+1}) + \sum_{k=1}^{m} c_k H(x, \xi_k) \equiv 0, \tag{2.14}$$

где

$$c_0 = H\begin{pmatrix}\xi_1\xi_2 & \ldots & \xi_m\\ \xi_1\xi_2 & \ldots & \xi_m\end{pmatrix} \neq 0.$$

Однако, тождество (2.14) невозможно, так как первое слагаемое с коэффициентом $c_0 \neq 0$ имеет разрыв первой производной при непрерывности производных всех остальных слагаемых в этой точке. Полученное противоречие доказывает теорему.

Вместе с теоремами (5.6) доказана основная теорема данного параграфа.

Теорема 7. *Положительная функция Грина оператора Штурма — Лиувилля с неособенными многоточечными граничными условиями Штурма, есть обыкновенное ядро Келлога.*

§ 3. Исследование функции Грина в случае общих многоточечных граничных условий

Пусть $G(x, s)$ — функция Грина краевой задачи оператора (1.1) с общими многоточечными граничными условиями (1.5). Тогда на основании теорем параграфа 2 мы можем считать, что в формуле (1.27) функция Грина $H(x, s)$ есть обыкновенное ядро Келлога.

Воспользовавшись для представления символа Фредгольма $G\begin{pmatrix}x_1x_2 & \ldots & x_m\\ s_1s_2 & \ldots & s_m\end{pmatrix}$ теоремой Сильвестра и раскрывая после этого в соответствии с теоремой Лапласа полученный детерминант по элементам γ_{ij} ($i = 1, 2, \ldots n+2$; $j = 1, \ldots n+2$), воспользовавшись формулой (1.26), получим следующую формулу для символов Фредгольма ядра $G(x, s)$

$$G\begin{pmatrix}x_1x_2 & \ldots & x_m\\ s_1s_2 & \ldots & s_m\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{D} \sum_{\substack{i_1<i_2<\ldots<i_r\\ j_1<j_2<\ldots<j_r}} A_{i_1i_2\ldots i_rj_1j_2\ldots j_r} H\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_m c_{i_1}c_{i_2} & \ldots & c_{i_r}\\ s_1 & \ldots & s_m c_{j_1}c_{j_2} & \ldots & c_{j_r}\end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где

$$A_{i_1i_2\ldots i_rj_1j_2\ldots j_r} =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}+i_1+\ldots i_r} \dfrac{[q_1, q_2, \ldots q_{n+2-r} \mid p_1, p_2, \ldots p_{n+2-r}]}{\sigma p(c_{q_1}) p(c_{q_2}) \ldots p(c_{q_{n+2-r}})} \; (q_s \neq 1; \\ \qquad s = 1, 2, \ldots n+2-r) \\ (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}+1+i_1+\ldots+i_r} \dfrac{[q_1, q_2, \ldots, q_{n+2-r} \mid p_1, p_2, \ldots p_{n+2-r}]}{\sigma p(c_{q_1}) p(c_{q_2}) \ldots p(c_{q_{n+2-r}})} \times \\ \qquad \times (q_s = 1;\ 1 \leqslant s \leqslant n+2-r) \end{cases} \tag{3.2}$$

и $p_1, p_2, \ldots, p_{n+2-r}$ — дополнительные числа по отношению к числам $i_1, i_2, \ldots, i_r$, а $q_1, q_2, \ldots, q_{n+2-r}$ — дополнительные числа к $j_1, j_2, \ldots, j_r$.

В дальнейшем в отличие от точек x и s точки $c_1, \ldots c_{n+2}$ будем называть краевыми точками.

Пусть

$$H\begin{pmatrix} x_1x_2 \ldots x_mc_{i_1}c_{i_2} \ldots c_{i_r} \\ s_1s_2 \ldots s_mc_{j_1}c_{j_2} \ldots c_{j_r}\end{pmatrix} — \tag{3.3}$$

некоторый символ Фредгольма правой части формулы (3.1). Краевую точку c_l, входящую в данный символ, назовём кратной краевой точкой, если она встречается дважды, то есть встречается и в верхней и в нижней строках в отличие от простых точек, которые встречаются в символе всего лишь один раз.

Разобьём все символы (3.3) правой части формулы (3.1) на два рода. К первому роду отнесём такие символы, у которых все внутренние краевые точки кратные, и ко второму роду отнесём символы, содержащие по крайней мере одну внутреннюю простую краевую точку. Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 3. *Если символ Фредгольма*

$$H\begin{pmatrix} x_1x_2 \ldots x_mc_{i_1}c_{i_2} \ldots c_{i_r} \\ s_1s_2 \ldots s_mc_{j_1}c_{j_2} \ldots c_{j_r}\end{pmatrix}$$

второго рода такой, что все другие символы, имеющие те же самые простые точки, содержат не меньшее число кратных точек, то всегда можно так выбрать точки $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ и $s_1 < s_2 < \ldots < s_m$, что все остальные символы, входящие в формулу (3.1), *кроме данного, обратятся в нуль.*

Доказательство. Для доказательства существования точек x и s, удовлетворяющих требования леммы 3, сделаем следующее:

1°) Построим шаблон, состоящий из двух строк, содержащих $2n+3$ конгруэнтных клеток, расположенных одна под другой. В дальнейшем будем называть колонной шаблона две клетки, расположенные одна под другой. Занумеруем слева направо, начиная с первой колонны через одну, последовательные колонны шаблона номерами $1, 2, 3, \ldots, n+2$.

2°) Каждую краевую точку c_i (c_j), входящую в данный символ Фредгольма (3.3), внесём соответственно занумерованную i (j) клетку первой (второй) строки шаблона.

Все пустые, как занумерованные, так и не занумерованные, клетки шаблона первой строки заполняем последовательно числами $x_1, x_2, \ldots$, а все пустые, как занумерованные, так и не занумерованные, клетки нижней строки шаблона заполняем последовательно числами $s_1, s_2 \ldots$.

3°) Числовые значения x и s выбираем так, чтобы они совместно с краевыми точками обеспечили строгое монотонное возрастание всех пар чисел, расположенных в последовательных колоннах шаблона.

4°) Все значения x и s, стоящих в клетках шаблона над (под) простыми краевыми точками, кроме первой внутренней простой точки, полагаем совпадающими с этими простыми краевыми точками.

Во всех колоннах шаблона с x и s, за исключением одной непосредственно предшествующей колонне с первой простой внутренней краевой точкой, полагаем $x = s$. При этом те из них, которые находятся в занумерованных колоннах, свободных от краевых точек, принадлежащих символу (3.3), принимаем $x = s = c_i$ (c_j) совпадающими с краевыми точками, имеющими тот же номер, что и колонна. Все остальные $x = s$

получают произвольные численные значения, отличные от $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_r}$; $c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots c_{j_r}$.

Мы утверждаем, что при таком выборе численных значений x и s все символы Фредгольма правой части формулы (3.1), кроме данного (3.3), обращаются в нуль.

Действительно, пусть

$$H\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_m c_{m_1} c_{m_2} & \ldots & c_{m_r} \\ s_1 & \ldots & s_m c_{x_1} c_{x_2} & \ldots & c_{x_r} \end{pmatrix} —$$

произвольный символ Фредгольма правой части формулы (3.1), отличный от символа (3.3). Если этот символ содержит хотя бы одну краевую точку, отличную от краевых точек, входящих в символ (3.3), то он равен нулю, так как определённый им детерминант будет иметь две одинаковые вертикали или горизонтали, поскольку среди выбранных значений x и s имеются все дополнительные к числам $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots c_{i_r}$ и $c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots c_{j_r}$.

Так как из всех символов второго рода с теми же простыми краевыми точками, что и в символе (3.3), наименьшее число кратных точек имеет символ (3.3), то остаётся рассмотреть случай, когда символ Фредгольма, фигурирующий в формуле (1.3), не имея других краевых точек чем данный символ (3.3), имеет меньшее число простых точек. Легко видеть, что и в данном случае символ Фредгольма обращается в нуль, так как при расположении точек первой и второй строки в порядке возрастания нарушится монотонное возрастание пар.

Лемма доказана полностью.

Теорема 8. *Для того, чтобы функция Грина $G(x, s)$ краевой задачи второго порядка с общими многоточечными граничными условиями являлась ядром Келлога, необходимо, чтобы все коэффициенты при символе второго рода равнялись нулю.*

Доказательство. В самом деле, пусть коэффициент $A_{i_1 i_2 \ldots i_r j_1 j_2 \ldots j_r}$ при некотором символе Фредгольма второго рода (3.3) имеет наименьшее число кратных точек, так как в противном случае должен был бы существовать символ Фредгольма второго рода с теми же простыми точками, что и в символе (3.3) с наименьшим числом кратных точек и коэффициентом при нём, отличным от нуля, который бы мы выбрали для рассмотрения вместо символа (3.3).

На основании леммы 3, мы можем выбрать точки так, чтобы все символы, кроме данного, входящие в правую часть формулы (3.1), обратились в нуль. Тогда из формулы (3.1) имеем

$$G\begin{pmatrix} x_1 x_2 & \ldots & x_m \\ s_1 s_2 & \ldots & s_m \end{pmatrix} = \frac{1}{D} A_{i_1 i_2 \ldots i_r j_1 j_2 j \ldots j_r} H\begin{pmatrix} x_1 x_2 & \ldots & x_m c_{i_1} c_{i_2} & \ldots & c_{i_r} \\ s_1 s_2 & \ldots & s_m c_{j_1} c_{j_2} & \ldots & c_{j_r} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Изменим теперь порядок расположения точек «x» и «s», c_{i_k} и c_{j_k} таким образом, как об этом указывалось в предыдущей лемме, то есть так, чтобы обеспечивалось строгое монотонное возрастание всех пар первой и второй строки символа, расположенных в порядке возрастания. Тогда получим

$$G\begin{pmatrix} x_1 x_2 & \ldots & x_m \\ s_1 s_2 & \ldots & s_m \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{D} \varepsilon A_{i_1 i_2 \ldots i_r j_1 j_2 \ldots j_r} H\begin{pmatrix} c_1 & \ldots & c_{k-1} x_p c_k x_{p+1} & \ldots & c_{n+2} \\ c_1 & \ldots & c_{k-1} s_q s_{q+1} s_{q+2} & \ldots & c_{n+2} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

где ε равняется плюс или минус единице, а c_k — наименьшая внутренняя простая точка символа (3.3).

Выберем после этого значение $\tilde{x}_p$, $\tilde{s}_q$ и $\tilde{s}_{q+1}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$c_k < \tilde{x}_p < x_{p+1};\ c_{k-1} < s_q < \tilde{x}_p;\ \tilde{s}_q < \tilde{s}_{q+1} < s_{q+2},$$

тогда, как легко видеть, теми же рассуждениями, что и в лемме 3, мы устанавливаем обращение в нуль всех символов Фредгольма в правой части формулы (3.1), кроме символа (3.3). Так как при новом выборе численных значений $\tilde{x}_p$, $\tilde{s}_q$, $\tilde{s}_{q+1}$ символ

$$H\begin{pmatrix} c_1c_2 \ldots c_{k-1}x_pc_kx_{p+1} \ldots c_{n+2} \\ c_1c_2 \ldots c_{k-1}s_qs_{q+1}s_{q+2} \ldots c_{n+2}\end{pmatrix}$$

меняет знак, то

$$\operatorname{sign} G\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_p \ldots x_qx_{q+1} \ldots x_m \\ s_1 \ldots s_p \ldots s_qs_{q+1} \ldots s_m\end{pmatrix} =$$

$$= -\operatorname{sign}\begin{pmatrix} x_1 \ldots \tilde{x}_p \ldots x_qx_{q+1} \ldots x_m \\ s_1 \ldots s_p \ldots \tilde{s}_q\tilde{s}_{q+1} \ldots s_m\end{pmatrix}.$$

Таким образом, существует две системы чисел

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_q < s_{q+1} < \ldots < s_m$$

и

$$x_1 < x_2 < \ldots < \tilde{x}_p < \ldots < x_m,\ s_1 < s_2 < \ldots < \tilde{s}_q < \tilde{s}_{q+1} < \ldots < s_m;$$

(где m может быть как чётным, так и нечётным), при которых символ Фредгольма $G\begin{pmatrix} x_1x_2 \ldots x_m \\ s_1s_2 \ldots s_m\end{pmatrix}$ имеет разные знаки, поэтому функция Грина $G(x, s)$ не может быть ядром Келлога, что и требовалось доказать.

Теорема 8 позволяет найти необходимые условия, которым должна удовлетворять матрица коэффициентов общих многоточечных граничных условий, при которых соответствующая им функция Грина $G(x, s)$ является ядром Келлога.

С этой целью в дальнейшем удобно будет оперировать матрицей

$$B_1 = \| \sigma_{i1}\alpha_{i1}^{(2)}\sigma_{i2}\alpha_{i2}^{(2)} \ldots \sigma_{i,\,n+2}\alpha_{i,\,n+2}^{(2)} \|_{i=1,\,2,\,\ldots,\,n+2},$$

которая отличается от матрицы B только порядком расположения колонн.

Лемма 4. *Коэффициент* $\frac{1}{D} A_{i_1i_2 \ldots i_rj_1j_2 \ldots j_r}$ *символа Фредгольма, содержащий простую краевую точку, может иметь множителем те и только те детерминанты* $n+2$ *порядка* $[q_1, q_2, \ldots, q_{n+2-r} \mid p_1, p_2, \ldots p_{n+2-r}]$, *которые содержат по крайней мере две рядом стоящие колонны матрицы* B.

Доказательство. Пусть $H\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_mc_{i_1}c_{i_2} \ldots c_{i_r} \\ s_1 \ldots s_mc_{j_1}c_{j_2} \ldots c_{j_r}\end{pmatrix}$ — символ Фредгольма, содержащий простую точку c_k. В соответствии с определением простой точки k не совпадает ни с одним из чисел $j_1, j_2, \ldots, j_r$ и поэтому содержится среди дополнительных к ним чисел $q_1, q_2, \ldots, q_{n+2-r}$, откуда непосредственно следует, что колонна $\alpha_{ik}^{(2)}$ принадлежит детерминанту $[q_1, q_2, \ldots, q_{n+2-r} \mid p_1, p_2, \ldots, p_{n+2-r}]$. Далее, так как k содержится среди чисел $i_1, i_2, \ldots, i_r$, то оно не содержится среди дополнительных к ним чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{n+2-r}$, то есть колонна σ_{ik} принадлежит детерминанту

$$[q_1, q_2, \ldots, q_{n+2-r} \mid p_1, p_2 \ldots p_{n+2-r}].$$

Так как в матрице B_1 колонны σ_{ik} и $\alpha_{ik}^{(2)}$ стоят рядом, то первая часть теоремы доказана.

Обратно, пусть детерминант $[q_1, q_2, \ldots q_{n+2-r} | p_1, p_2, \ldots p_{n+2-r}]$ содержит две рядом стоящие колонны σ_{ik} и $\alpha_{ik}^{(2)}$ матрицы B_1. Тогда k содержится среди чисел $q_1, q_2, \ldots, q_{n+2-r}$ и не содержится среди чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{n+2-r}$, а поэтому c_k находится в верхней строке и не находится в нижней строке символа Фредгольма и c_k — простая точка, что и требовалось доказать.

Следствие. *Коэффициент* $\frac{1}{D} A_{i_1 i_2 \ldots i_r j_1 j_2 \ldots j_r}$ *символа Фредгольма второго рода может иметь множителем те и только те детерминанты* $n+2$ *порядка* $[q_1, q_2, \ldots, q_{n+2-r} | p_1, p_2, \ldots, p_{n+2-r}]$, *которые содержат не менее двух рядом стоящих колонн матрицы* B_1, *отличные от первой и второй и* $2n+3$ *и* $2n+4$.

Доказательство. Действительно, символ второго рода имеет по крайней мере одну внутреннюю простую точку $c_k (1 < k < n+2)$ и поэтому в соответствии с леммой 4 детерминант $[q_1, q_2, \ldots q_{n+2-r} | p_1, p_2, p_3 \ldots p_{n+2-r}]$ содержит две рядом стоящие колонны σ_{ik}, $\alpha_{ik}^{(2)}$, где $1 < k < n+2$.

Следующая теорема устанавливает необходимые условия келлоговости функции Грина краевой задачи с общими многоточечными граничными условиями.

Теорема 9. *Для того чтобы функция Грина краевой задачи второго порядка с общими многоточечными граничными условиями являлась ядром Келлога, необходимо, чтобы эти условия приводились к эквивалентным с матрицей вида*

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} \\ 0 & 0 & c_{31}^{(1)} & c_{32}^{(2)} & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & c_{n+2,n}^{(1)} & c_{n+2,n}^{(2)} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Доказательство. В соответствии с леммой 3 необходимыми условиями келлоговости функции Грина $G(x, s)$ краевой задачи второго порядка с общими многоточечными граничными условиями является обращение в нуль всех коэффициентов $\frac{1}{D} A_{i_1 i_2 \ldots i_r j_1 j_2 \ldots, j_r}$ при символах Фредгольма второго рода.

Так как $\frac{\pm 1}{D \sigma p(c_{q_1}) \ldots p(c_{q_{n+2-r}})} \neq 0$, то коэффициенты при символах второго рода обращаются в нуль тогда и только тогда, когда обращаются в нуль детерминанты $n+2$ второго порядка $[q_1, q_2, \ldots, q_{n+2-r} | p_1, p_2, \ldots, p_{n+2-r}]$, являющиеся множителями указанных коэффициентов. Отсюда, в соответствии с леммой 4 функция Грина $G(x, s)$ может быть ядром Келлога лишь тогда, когда все детерминанты $n+2$ порядка матрицы B_1, содержащие по крайней мере две рядом стоящие колонны σ_{ij} и $\alpha_{ij}^{(2)}$ $(i < j < n+2)$, равны нулю. Поскольку все детерминанты $n+2$ порядка матрицы B_1 не могут равняться нулю, так как в противном случае равнялись бы нулю все детерминанты $n+2$ порядка матрицы A, что противоречит линейной независимости граничных условий (1.5), то мы приходим к выводу, что функция Грина $G(x, s)$ может быть ядром Келлога при условии

$$\sigma_{ij} = \mu_j \alpha_{ij}^{(2)} \quad (1 < j < n+2).$$

Заменяя σ_{ij} $(i=1, 2, \ldots, n+2;\ j=1, 2, \ldots, n+2)$ по формулам (1.23) имеем

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \varkappa_j \alpha_{ij}^{(2)},$$

где

$$\varkappa_j = \frac{\alpha_j^{(1)}}{\alpha_j^{(2)}} + \mu_j.$$

Теорема доказана.

Приступим теперь к нахождению достаточных условий, при которых функция Грина краевой задачи с общими многоточечными граничными условиями будет ядром Келлога. В соответствии с предыдущей теоремой мы можем ограничиться исследованием только многоточечных граничных условий вида

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) + \beta_{11}y(b) + \beta_{12}y'(b) = 0 \\ \alpha_{21}y(a) + \alpha_{22}y'(a) + \beta_{21}y(b) + \beta_{22}y'(b) = 0 \\ c_j^{(1)}y(c_j) + c_j^{(2)}\delta y'(c_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right\} \tag{3.8}$$

$$[c_j^{(1)} \cdot c_j^{(2)} \neq 0].$$

Пусть $H(x, s)$ — функция Грина краевой задачи с неособенными штурмовыми многоточечными граничными условиями

$$\left.\begin{array}{l} A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0 \\ c_j^{(1)}y(c_j) + c_j^{(2)}\delta y'(c_j) = 0 \\ B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{array}\right\}, \tag{3.9}$$

$$[A_1^2 + A_2^2 > 0;\ B_1^2 + B_2^2 > 0]$$

в которой граничные условия в точках $c_1, c_2, \ldots, c_n$ те же, что и в (3.8).

В соответствии с теоремой 4 функция Грина граничных условий (3.8) выражается через функцию Грина граничных условий (3.9) по формуле

$$G(x, s) = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} H(x, s) & H(a, s) & H(b, s) \\ H(x, a) & H(a, a) + \gamma_{11} & H(b, a) + \gamma_{12} \\ H(x, b) & H(a, b) + \gamma_{21} & H(b, b) + \gamma_{22} \end{vmatrix}, \tag{3.10}$$

где

$$D = \begin{vmatrix} H(a, a) + \gamma_{11} & H(b, a) + \gamma_{12} \\ H(a, b) + \gamma_{21} & H(b, b) + \gamma_{22} \end{vmatrix}$$

и

$$\sigma_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}}{A_2};\ \sigma_{21} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}}{A_2};\ \sigma_{12} = \frac{\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}{B_2};\ \sigma_{22} = \frac{\begin{vmatrix} \beta_{21} & \beta_{22} \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}{B_2};\ \sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix};$$

$$\gamma_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \sigma_{12} \\ \alpha_{22} & \sigma_{22} \end{vmatrix}}{\sigma p(a)};\ \gamma_{12} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \sigma_{11} \\ \alpha_{22} & \sigma_{21} \end{vmatrix}}{\sigma p(a)};\ \gamma_{21} = \frac{\begin{vmatrix} \beta_{12} & \sigma_{12} \\ \beta_{22} & \sigma_{22} \end{vmatrix}}{\sigma p(b)};\ \gamma_{22} = \frac{\begin{vmatrix} \beta_{12} & \sigma_{11} \\ \beta_{22} & \sigma_{21} \end{vmatrix}}{\sigma p(b)}.$$

Для упрощения записи введём следующие обозначения для детерминантов второго порядка матрицы $\| \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\beta_{i_1}\beta_{i_2} \|_{i=1,2}$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = (1,2);\quad \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = (3,4);\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = (1,4);$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{22} & \beta_{22} \end{vmatrix} = (2,4);\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{vmatrix} = (1,3);\quad \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \beta_{11} \\ \alpha_{22} & \beta_{21} \end{vmatrix} = (2,3).$$

Установленная нами формула (3.10) позволяет, пользуясь детерминантной теоремой Сильвестра, после необходимых вычислений получить следующую формулу

$$D_1 = \frac{A_1B_1(2,4) - A_1B_2(2,3) - A_2B_1(1,4) + A_2B_2(1,3)}{A_2B_2} H\begin{pmatrix} ax_1 & \dots & x_m b \\ as_1 & \dots & s_m b\end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{B_1(2,4) - B_2(2,3)}{p(a)B_2} H\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m b \\ s_1 & \dots & s_m b\end{pmatrix} + \frac{-A_1(2,4) + A_2(1,4)}{p(b)A_2} H\begin{pmatrix} ax_1 & \dots & x_m \\ as_1 & \dots & s_m\end{pmatrix} -$$

$$- \frac{(2,4)}{p(a)p(b)} H\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ s_1 & \dots & s_m\end{pmatrix} + (-1)^m \left[\frac{(1,2)}{p(a)} H\begin{pmatrix} a\,x_1 & \dots & x_m \\ s_1 s_2 & \dots & b\end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{(3,4)}{p(b)} H\begin{pmatrix} x_1 x_2 & \dots & x_m & b \\ a\,s_1 & \dots & s_{m-1} s_m\end{pmatrix}\right],$$

где

$$D_1 = \sigma D.$$

Выберем теперь $A_2 > 0$, $B_2 < 0$ и $\operatorname{sign} B_2 = -\operatorname{sign} B_1$; $\operatorname{sign} A_1 = \operatorname{sign} A_2$. Тогда, если взять оба числа $|A_2|$ и $|B_2|$ достаточно малыми, то знаки коэффициентов при символах Фредгольма, не заключенных в квадратных скобках формулы (3.11), совпадут со знаком — (2,4), если только $(2,4) \neq 0$.

Зафиксируем теперь выбранные значения A_2 и B_2, после этого сделаем такую замену параметра λ, при которой $H(x, s)$ будет ядром Келлога.

Рассмотрим теперь формулу (3.11). Следующие выводы из неё очевидны:

1. Если детерминанты (1.2) и (3.4) имеют разные знаки, символ

$$G\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_m \\ s_1 s_2 \dots s_m\end{pmatrix}$$

не может сохранять знак в области своего существования и, следовательно, функция Грина $G(xs)$ не является ядром Келлога.

Рассмотрим теперь случай, когда $\operatorname{sign}(1,2) = \operatorname{sign}(3,4)$. Для определенности будем считать, что коэффициенты граничных условий так пронормированы, что $(1,2) \geqslant 0$ и $(3,4) \geqslant 0$. Тогда:

2. Если $(1,2)^2 + (3,4)^2 > 0$ и $(2,4) \neq 0$, то при $(2,4) > 0$ $G(x, s)$ — нечётное ядро Келлога и при $(2,4) < 0$ $G(x, s)$ — чётное ядро Келлога.

3. Пусть $(2,4) = 0$. Предположим, что $(1,2) \neq 0$ и $(3,4) \neq 0$. Тогда из соотношения

$$\begin{vmatrix} (1,2) & (1,4) \\ (2,3) & (2,4)\end{vmatrix} = (1,2)\cdot(3,4)$$

следует, что $\operatorname{sign}(1,4) = -\operatorname{sign}(2,3)$ и знак выражения, не стоящего в квадратных скобках формулы (3,11), совпадает со знаком (2,3) или (1,4). Поэтому, если $(2,4) = 0$, а $(2,3) \neq 0$ и $(1,4) \neq 0$, то при $(2,3) < 0$ $[(1,4) > 0]$ $G(x, s)$ — чётное ядро Келлога и при $(2,3) > 0$ $[(1,4) < 0]$ $G(x, s)$ — нечётное ядро Келлога.

Если же один из детерминантов (2,3) или (1,4) равен нулю, то при $(2,3) < 0$ $[(2,3) > 0]$ и $(1,4) = 0$ $G(x, s)$ — чётное (нечётное) ядро Келлога и при $(1,4) > 0$ $[(1,4) < 0]$ и $(2,3) = 0$ $G(x, s)$ — чётное (нечётное) ядро Келлога.

4. Если $(2,4) = (1,4) = (2,3) = 0$ и $(1,2)$ или $(3,4) \neq 0$, то при $(1,3) > 0$ $[(1,3) < 0]$ $G(x, s)$ — чётное (нечётное) ядро Келлога.

5. В случае $(1,2) = 0$ и $(3,4) = 0$ многоточечные граничные условия штурмовы и $G(x, s)$ — обыкновенное ядро Келлога.

Объединяя полученные результаты, приведенные в настоящей работе, мы приходим к следующей основной теореме, устанавливающей необходимые и достаточные условия осцилляционности функции Грина краевой задачи Штурма — Лиувилля с наиболее общими многоточечными граничными условиями.

Теорема 10. *Пусть дана краевая задача, определенная оператором Штурма — Лиувилля*

$$L[y] = \lambda\rho y \tag{1.1}$$

и неособенными многоточечными граничными условиями общего вида

$$\alpha_{i1}^{(1)} y(c_1) + \alpha_{i1}^{(2)} y'(c_1) + \sum_{j=2}^{n+1} \{\alpha_{ij}^{(1)} y(c_j) + \alpha_{ij}^{(2)} \delta y'(c_j)\} + \alpha_{i,n+2}^{(1)} y(c_{n+2}) + \\ + \alpha_{i,\,n+2} y'(c_{n+2}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n+2). \tag{1.5}$$

Для того, чтобы положительная функция Грина $G(x, s)$ этой многоточечной краевой задачи (1.1), (1.5) являлась ядром Келлога, необходимо и достаточно, чтобы матрица A граничных условий (1.5) эквивалентными преобразованиями приводилась к виду

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} \\ 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{n1} & c_{n2} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

и чтобы

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

При этом:

1. Если одно из произведений $(1,2) \cdot (2,4)$ или $(3,4) \cdot (2,4) < 0$ или если $(1,2) \cdot (2,4)$ и $(3,4) \cdot (2,4) = 0$, а одно из произведений $(1,2) \cdot (2,4)$; $(1,2) \cdot (2,3)$; $(3,4) \cdot (1,4)$; $(3,4) \cdot (2,3)$; $(3,1) \cdot (1,2)$; $(3,1) \cdot (3,4) < 0$, то $G(x, s)$ — чётное ядро Келлога.

2. Если одно из произведений $(1,2) \cdot (2,4)$ или $(3,4) \cdot (2,4) > 0$ или если $(1,2) \cdot (2,4)$ и $(3,4) \cdot (2,4) = 0$, а одно из произведений $(1,2) \cdot (1,4)$; $(1,2) \cdot (2,3)$; $(3,4) \cdot (1,4)$; $(3,4) \cdot (2,3)$; $(3,1) \cdot (1,2)$; $(3,1) \cdot (3,4) > 0$, то $G(x, s)$ — нечётное ядро Келлога.

3. Если $(1,2) = (3,4) = 0$, то граничные многоточечные условия штурмовы и $G(x, s)$ — обыкновенное ядро Келлога.

В заключение хочу поблагодарить М. Г. Крейна и П. Д. Калафати за ряд ценных указаний, полученных во время выполнения настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГОНТИ, 1939.
2. Birkhoff. Trans Am. Math. Soc. 9 (1908).
3. М. Г. Крейн. а) Об одном специальном классе дифференциальных операторов. «Докл. АН СССР», 2, 345—349 (1935).
б) Sur quelques applications des noyaus de Kellogaux problemes d'oscillation. «Зап. матем. т-ва», Харьков, 4, 11 (1935).
в) Sur les vibration propres des tiges dont l'une des extremites est encastree et l'autre libre. «Зап. матем. т-ва», Харьков, 4, 12 (1936).
г) Об осцилляционных дифференциальных операторах. «Докл. АН СССР», 4, 379—382 (1936).
д) Sur une classe specielle d'operateurs differentiels. «Докл. АН СССР», 4, № 13 1936).

е) О несимметрических осцилляционных функциях Грина обыкновенных дифференциальных операторов. «Докл. АН СССР», **25**, 643—646 (1930).

ж) Осцилляционные теоремы для обыкновенных линейных дифференциальных операторов произвольного порядка. «Докл. АН СССР», **25**, 717—720 (1939).

4. Ф. Р. Гантмахер. О несимметрических ядрах Келлога «Докл. АН СССР», **1**, 3—5 (1936).

5. С. Н. Бернштейн. Экстремальные свойства полиномов. ОНТИ (1937).

6. П. Д. Калафати. К-свойства функции Грина линейных дифференциальных систем 2-го порядка. «Уч. зап. матем. т-ва», Харьков, **4**, 25 (1957).

7. С. А. Смогоржевский. а) Про Green'ову функцію звичайного лінійного диференціального рівняння. «Ж. матем. циклу АН УРСР», **3—4**, 157—169 (1934).

б) Про узагальнену функцію Гріна звичайного лінійного диференціального рівняння. «Ж. Ин-та матем. АН УССР», **3—4**, 61—76 (1935).

8. Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем. ОГИЗ, 1950.

9. И. Я. Чертков, С. И. Пархомовский. Свойства и построение функции влияния дифференциальной системы n-го порядка с многоточечными краевыми условиями. «Научн. зап. пед. ин-та», Николаев, **3** (1951).