ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 32 Записки механико-математического факультета и Харьковского математического общества 1966

ОБ УСЛОВИЯХ ИНЕРЦИАЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Я. Л. Геронимус

Пусть наблюдатель, связанный с некоторой системой отсчета S, изучает движения нескольких свободных материальных точек относительно этой системы; пусть некоторые точки движутся относительно S инерциальным движением (т. е. при отсутствии действующих на них сил движутся относительно S прямолинейно и равномерно); можно ли в этом случае утверждать, что S — инерциальная система? Иными словами — *может ли S быть неинерциальной системой, если для нескольких материальных точек справедлив в S закон инерции*? При этом мы исключаем из рассмотрения тот тривиальный случай, когда все рассматриваемые точки движутся по одной прямой в S, а S вращается вокруг этой прямой по любому закону.

Настоящая заметка посвящена рассмотрению этих вопросов. Мы будем говорить об общем случае, если скорости и начальные координаты наших точек выбраны совершенно произвольно, и об особом случае, если указанные величины должны быть связаны некоторыми соотношениями.

§ 1

Рассмотрим сперва движение трех точек. Закон движения свободной материальной точки относительно любой системы отсчета, как известно, таков:

$$m\overline{w} = \overline{F} - m\overline{w}_0 - m\overline{\omega}\times(\omega\times\overline{r}) - m\overline{\varepsilon}\times\overline{r} - 2m\overline{\omega}\times\overline{v}, \qquad (1.1)$$

где $\overline{v}$, $\overline{w}$ — векторные скорость и ускорение точки M относительно S; $\overline{\omega}$, $\overline{\varepsilon}$ — векторные угловая скорость и угловое ускорение переносного движения системы S относительно некоторой инерциальной системы отсчета S_0; $\overline{w}_0$ — векторное ускорение начала координат O системы S относительно S_0; $\overline{r} = \overline{OM}$ — радиус вектор точки M. Так как в рассматриваемом случае $w \equiv F \equiv 0$, то уравнение

$$\overline{w}_0 + \overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r}_s) + \overline{\varepsilon}\times\overline{r}_s + 2\overline{\omega}\times\overline{v}_s = 0, \quad (s = 1,\ 2,\ 3) \qquad (1.2)$$

всегда допускают „тривиальное“ решение

$$w_0 \equiv 0, \quad \omega \equiv 0, \quad \varepsilon \equiv 0; \qquad (1.3)$$

нужно найти условия, при которых оно единственно. Вводя обозначения

$$\overline{r}_s = \overline{v}_s t + \overline{r}_{s0}, \quad (s = 1,\ 2,\ 3), \qquad (1.4)$$

$$\overline{r}_s - \overline{r}_1 = \overline{\rho}_s, \quad \overline{v}_s - \overline{v}_1 = \overline{u}_s, \quad \overline{\rho}_s = \overline{u}_s t + \overline{\rho}_{s0}, \quad (s = 2,\ 3),$$

---

* Через $\overline{a}\times\overline{b}$ обозначено векторное, через $\overline{a}\cdot\overline{b}$ —скалярное, через $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c} = (\overline{abc})$— смешанное произведения векторов.

находим из (1.2)

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_s) + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_s + 2\bar{\omega} \times \bar{u}_s = 0, \quad (s = 2, 3); \tag{1.5}$$

если из этих уравнений будут найдены векторы $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$, то вектор $\bar{w}_0$ можно затем найти по формуле

$$\bar{w}_0 = -\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_1) - \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_1 - 2\bar{\omega} \times \bar{v}_1. \tag{1.6}$$

Выясним сперва возможность нетривиального решения, для которого выполнялось бы условие $\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon} \neq 0$. Умножая скалярно (1.5) на вектор $\bar{\omega}$, получим

$$(\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_s) \cdot \bar{\omega} = (\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon}) \cdot \bar{\rho}_s = (\bar{\omega}\, \bar{\varepsilon}\, \bar{\rho}_s) = 0, \quad (s = 2, 3), \tag{1.7}$$

т. е. векторы $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\rho}_2$, $\bar{\rho}_3$ должны быть параллельны некоторой плоскости P_0. Если через $\bar{\sigma}_0$ обозначить орт нормали к ней

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{\bar{\rho}_2 \times \bar{\rho}_3}{|\bar{\rho}_2 \times \bar{\rho}_3|}, \quad \bar{\rho}_2 \times \bar{\rho}_3 \neq 0, \tag{1.8}$$

то очевидно, имеем

$$\{\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_s) + 2(\bar{\omega} \times \bar{\sigma}_0)(\bar{u}_s \cdot \bar{\sigma}_0)\} + \{2\bar{\omega} \times [\bar{u}_s - (\bar{u}_s \cdot \bar{\sigma}_0)\bar{\sigma}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_s\} = 0,$$
$$(s = 2, 3).$$

Вектор в первых фигурных скобках параллелен плоскости P_0, а во вторых — перпендикулярен ей; поэтому получаем

$$\bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times \bar{\rho}_s + 2\bar{\sigma}_0\, \bar{u}_s \cdot \bar{\sigma}_0)] = 0, \quad (s = 2, 3);$$

вектор в квадратных скобках не может быть параллельным вектору $\bar{\omega}$ — следовательно, он должен равняться нулю и мы имеем

$$\bar{\omega} \times \bar{\rho}_s + 2(\bar{u}_s \cdot \bar{\sigma}_0)\bar{\sigma}_0 = 0, \quad (s = 2, 3). \tag{1.9}$$

Так как векторы $\bar{\omega}$, $\bar{\rho}_2$, $\bar{\rho}_3$ компланарны, то мы можем положить

$$\bar{\omega} = \alpha\bar{\rho}_2 + \beta\bar{\rho}_3;$$

неизвестные скалярные множители α, β найдем из условий (1.9)

$$\alpha(\bar{\rho}_2 \times \bar{\rho}_3) + 2(\bar{u}_3 \cdot \bar{\sigma}_0)\bar{\sigma}_0 = 0, \quad \beta(\bar{\rho}_3 \times \bar{\rho}_2) + 2(\bar{u}_2\, \bar{\sigma}_0)\bar{\sigma}_0 = 0, \tag{1.10}$$

откуда будем иметь

$$\bar{\omega} = -\frac{2[(\bar{u}_3 \cdot \bar{\sigma}_0)\bar{\rho}_2 - (\bar{u}_2 \cdot \bar{\sigma}_0)\bar{\rho}_3]\,\bar{\sigma}_0}{\bar{\rho}_2 \times \bar{\rho}_3} = \frac{2[(\bar{\rho}_2\, \bar{\rho}_3\, \bar{u}_2)\bar{\rho}_3 - (\bar{\rho}_2\, \bar{\rho}_3\, \bar{u}_3)\bar{\rho}_2]}{|\bar{\rho}_2 \times \bar{\rho}_3|^2}. \tag{1.11}$$

Таким образом, при условии $\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon} \neq 0$ уравнения (1.5) допускают кроме тривиального решения единственное нетривиальное решение*

$$\bar{\omega} = \frac{2(\dot{\bar{D}} \times \bar{D})}{D^2}, \quad \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \frac{2\{D(\ddot{\bar{D}} \times \bar{D}) - 2\dot{D}(\dot{\bar{D}}) \times \bar{D}\}}{D^3}, \tag{1.12}$$

где мы положили

* Точка сверху означает производную по времени; для векторов производная берется в системе отсчета S.

$$\overline{D}=\overline{\rho}_2\times\overline{\rho}_3=(\overline{u}_2t+\overline{\rho}_{20})\times(\overline{u}_3t+\overline{\rho}_{30})=\overline{A}t^2+\overline{B}t+\overline{C}, \tag{1.13}$$

причем векторы

$$\overline{A}=\overline{u}_2\times\overline{u}_3,\ \ \overline{B}=\overline{u}_2\times\overline{\rho}_{30}+\overline{\rho}_{20}\times\overline{u}_3,\ \ \overline{C}=\overline{\rho}_{20}\times\overline{\rho}_{30}. \tag{1.14}$$

не зависят от времени.

§ 2

Нетрудно убедиться непосредственным вычислением в том, что *при единственном условии* $A^2+B^2+C^2>0$ *функции* (1.12) *являются решением уравнений* (1.5). Действительно, после подстановки (1.12) в (1.5) левая часть приобретает такой вид:

$$\frac{2}{D^4}\Big\{2(\dot{\overline{D}}\times\overline{D})\times[(\dot{\overline{D}}\times\overline{D})\times\overline{\rho}_s]+D^2[(\ddot{\overline{D}}\times\overline{D})\times\overline{\rho}_s]-$$

$$-2D\dot{D}[(\dot{\overline{D}}\times\overline{D})\times\overline{\rho}_s]+2D^2[(\dot{\overline{D}}\times\overline{D})\times\overline{u}_s).$$

$$(s=2,3).$$

Это выражение можно упростить, если раскрыть двойные векторные произведения и воспользоваться тем, что $\overline{D}\cdot\overline{\rho}_s=0$:

$$\frac{2}{D^4}\Big\{\overline{D}[D^2(\ddot{\overline{D}}\cdot\overline{\rho}_s)+2(\dot{\overline{D}}\cdot\dot{\overline{D}}\ (\dot{\overline{D}}\cdot\overline{\rho}_s)+2D^2(\dot{\overline{D}}\cdot\overline{u}_s)-$$

$$-2D\dot{D}(\dot{\overline{D}}\cdot\overline{\rho}_s)]-2D^2\dot{\overline{D}}[\overline{D}\cdot\overline{u}_s+\dot{\overline{D}}\cdot\overline{\rho}_s],\quad (s=2,3); \tag{2.1}$$

дифференцируя указанное равенство дважды по времени, получим

$$\dot{\overline{D}}\cdot\overline{\rho}_s+\overline{D}\cdot\overline{u}_s=0,\ \ \ddot{\overline{D}}\cdot\overline{\rho}_s+2\dot{\overline{D}}\cdot\overline{u}_s=0;$$

так как, кроме того, $\overline{D}\cdot\dot{\overline{D}}=D\dot{D}$, то выражение (2.1) действительно равно нулю.

Нетрудно проверить также справедливость формулы

$$\overline{\omega}\times\overline{\varepsilon}=\frac{4\overline{D}}{D^4}(\overline{D}\,\dot{\overline{D}}\,\ddot{\overline{D}}), \tag{2.2}$$

вытекающей из (1.12); пользуясь (1.13), (1.14), выразим все величины через заданные

$$\overline{\omega}\times\overline{\varepsilon}=-\frac{8\overline{D}}{D^4}(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=\frac{8\overline{D}}{D^4}\{(\overline{\rho}_{20}\,\overline{\rho}_{30}\,\overline{u}_2)(\overline{u}_2\,\overline{\rho}_{30}\,\overline{u}_3)-$$

$$-(\overline{\rho}_{20}\,\overline{\rho}_{30}\,\overline{u}_3)(\overline{\rho}_{20}\,\overline{u}_3\,\overline{u}_2)\}. \tag{2.3}$$

Таким образом, *при дополнительном условии*

$$(\overline{\rho}_{20}\,\overline{\rho}_{30}\,\overline{u}_2)(\overline{u}_2\,\overline{\rho}_{30}\,\overline{u}_3)\neq(\overline{\rho}_{20}\,\overline{\rho}_{30}\,\overline{u}_3)(\overline{\rho}_{20}\,\overline{u}_3\,\overline{u}_2) \tag{2.4}$$

произведение $\overline{\omega}\times\overline{\varepsilon}$ *и вектор* $\overline{D}$ *не обращаются в нуль во все время движения, а из приведенных нами геометрических соображений ясно, что решение (1.12) — единственное из нетривиальных.*

Рассмотрим теперь случай, когда выполняются условия

$$\begin{gathered}\overline{A}\times\overline{C}=(\overline{u}_2\times\overline{u}_3)\times(\overline{\rho}_2\times\overline{\rho}_3)\neq 0,\\ (\overline{\rho}_{20}\,\overline{\rho}_{30}\,\overline{u}_2)(\overline{u}_2\,\overline{\rho}_{30}\,\overline{u}_3)=(\overline{\rho}_{20}\,\overline{\rho}_{30}\,\overline{u}_3)(\overline{\rho}_{20}\,\overline{u}_3\,\overline{u}_2),\end{gathered} \tag{2.5}$$

т. е. четыре заданных вектора $\overline{\rho}_2$, $\overline{\rho}_3$, $\overline{u}_2$, $\overline{u}_3$ не компланарны, а векторы $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ параллельны некоторой плоскости P_1. Формулы (1.12), как было показано, и в этом случае дают решение, причем во все время движения векторы $\overline{D}$, $\dot{\overline{D}}$ параллельны неизменной относительно S плоскости P_1; следовательно, в этом случае векторы $\overline{\omega}$, $\overline{\varepsilon}$ перпендикулярны плоскости P_1, т. е. имеют неизменное направление относительно S. Из (1.12) имеем

$$\overline{\omega} = \frac{2\{(\overline{A}\times\overline{B})t^2 + 2(\overline{A}\times\overline{C})t + \overline{B}\times\overline{C}\}}{D^2}; \tag{2.6}$$

при этом все три вектора

$$\begin{gathered}\overline{A}\times\overline{B} = -\overline{u}_2(\overline{u}_2\overline{\rho}_{30}\overline{u}_3) + \overline{u}_3(\overline{\rho}_{20}\overline{u}_3\overline{u}_2),\\ \overline{A}\times\overline{C} = \overline{u}_3(\overline{\rho}_{20}\overline{\rho}_{30}\overline{u}_2) - \overline{u}_2(\overline{\rho}_{20}\overline{\rho}_{30}\overline{u}_3) = \overline{\rho}_{20}(\overline{u}_2\overline{u}_3\overline{\rho}_{30}) - \overline{\rho}_{30}(\overline{u}_2\overline{u}_3\overline{\rho}_{20}),\\ \overline{B}\times\overline{C} = \overline{\rho}_{30}(\overline{\rho}_{20}\overline{\rho}_{30}\overline{u}_2) - \overline{\rho}_{20}(\overline{\rho}_{20}\overline{\rho}_{30}\overline{u}_3)\end{gathered} \tag{2.7}$$

должны быть коллинеарны, как это вытекает и из условия (2.5); вектор $\overline{\omega}$ в этом случае направлен по прямой пересечения двух плоскостей, определяемых векторами $\overline{\rho}_{20}$, $\overline{\rho}_{30}$, и, соответственно, $\overline{u}_2$, $\overline{u}_3$.

Так как в данном случае векторы $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ компланарны, то можно положить

$$\overline{B} = \lambda\overline{A} + \mu\overline{C},\quad \overline{u}_2\times\overline{\rho}_{30} + \overline{\rho}_{20}\times\overline{u}_3 = \lambda(\overline{u}_2\times\overline{u}_3) + \mu(\overline{\rho}_{20}\times\overline{\rho}_{30}).$$

Неизвестные скалярные множители λ, μ легко найдем, умножая скалярно все векторы сперва на $\overline{u}_2$, затем на $\overline{\rho}_{30}$

$$\lambda = \frac{(\overline{\rho}_{20}\overline{u}_3\overline{\rho}_{30})}{(\overline{u}_2\overline{u}_3\overline{\rho}_{30})},\quad \mu = \frac{(\overline{\rho}_{20}\overline{u}_3\overline{u}_2)}{(\overline{\rho}_{20}\overline{\rho}_{30}\overline{u}_2)},\quad \lambda \neq 0; \tag{2.8}$$

на основании условия (2.5) имеем $\lambda\mu = 1$; поэтому числитель (2.6) примет такой вид:

$$2\mu(\overline{A}\times\overline{C})(t+\lambda)^2.$$

С другой стороны, вектор $\overline{D}$ в данном случае таков:

$$\overline{D} = t\overline{A}(t+\lambda) + \overline{C}(\mu t + 1) = \mu\{(\overline{A}\lambda t + \overline{C})(t+\lambda)\};$$

поэтому *при условии* (2.5) *вектор* $\overline{\omega}$ *выражается более простой формулой*

$$\overline{\omega} = \frac{2\lambda(\overline{A}\times\overline{C})}{|\overline{A}\lambda t + \overline{C}|^2} = \frac{2\{\overline{\rho}_{20}(\overline{\rho}_{20}\overline{u}_3\overline{\rho}_{30}) + \overline{\rho}_{30}(\overline{\rho}_{20}\overline{\rho}_{30}\overline{u}_2)}{at^2 + 2bt + c}, \tag{2.9}$$

$$a = \lambda^2|\overline{u}_2\times\overline{u}_3|^2,\quad b = \lambda(\overline{u}_2\times\overline{u}_3)\cdot(\overline{\rho}_{20}\times\overline{\rho}_{30}),\quad c = |\overline{\rho}_{20}\times\overline{\rho}_{30}|^2.$$

§ 3

Рассмотрим теперь случай $D = 0$, т. е. пусть мы имеем

$$\overline{u}_2\times\overline{u}_3 = 0,\ \overline{u}_2\times\overline{\rho}_{30} + \overline{\rho}_{20}\times\overline{u}_3 = 0,\ \overline{\rho}_{20}\times\overline{\rho}_{30} = 0; \tag{3.1}$$

мы можем положить $\overline{u}_3 = \alpha\overline{u}_2$, $\overline{\rho}_{30} = \beta\overline{\rho}_{20}$, откуда получим

$$(\beta - \alpha)(\overline{u}_2\times\overline{\rho}_{20}) = 0.$$

Пусть сперва $\bar{u}_2 \times \bar{\rho}_{20} \neq 0$; тогда $\alpha = \beta$ и мы имеем

$$\bar{\rho}_3 = \bar{u}_3 t + \bar{\rho}_{30} = \alpha(\bar{u}_2 t + \bar{\rho}_{20}) = \alpha\bar{\rho}_2, \quad \bar{u}_3 = \alpha\bar{u}_2;$$

в этом случае два уравнения (1.5) сведутся к одному, ибо

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_3) + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_3 + 2\bar{\omega} \times \bar{u}_3 = \alpha[\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_2) + \\ + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_2 + 2\bar{\omega} \times \bar{u}_2].$$

Возьмем два произвольных вектора $\bar{u}_3'$, $\bar{\rho}_{30}'$, подчиненных условиям $\bar{u}_3' \times \bar{u}_2 \neq 0$, $\bar{\rho}_3' \times \bar{\rho}_2 \neq 0$, и рассмотрим систему уравнений

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_2) + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_2 + 2\bar{\omega} \times \bar{u}_2 = 0 \quad \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_3') + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_3' + 2\bar{\omega} \times \bar{u}_3' = 0;$$

мы сможем построить вектор $\bar{D}' = \bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_3' \neq 0$ и найти нетривиальное решение по формуле (1.12) (с заменой $\bar{D}$ на $\bar{D}'$); благодаря произвольности векторов $\bar{u}_3'$, $\bar{\rho}_{30}'$ таких решений бесчисленное множество.

Пусть теперь $\bar{u}_2 \times \bar{\rho}_{20} = 0$, т. е. пусть все четыре вектора $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, $\bar{\rho}_{20}$, $\bar{\rho}_{30}$ коллинеарны. Введем систему отсчета S_1, имеющую начало в движущейся точке M_1 и движущуюся поступательным движением относительно системы S. Ясно, что обе системы отсчета S, S_1 могут быть инерциальными лишь одновременно. В нашем случае точки M_2, M_3 движутся относительно S_1 по одной прямой, имеющей неизменное направление — очевидно, система S_1 может при этом вращаться вокруг этой прямой по любому закону, т. е. мы придем к случаю, исключенному нами с самого начала.

Итак, *при условии* (3.1) *существует бесчисленное множество нетривиальных решений*.

§ 4

Система S, таким образом, будет инерциальной, лишь тогда, когда $D \neq 0$ и когда решения (1.12) и (2.9) не будут отличаться от тривиальных, т. е. когда выполняется любое из шести эквивалентных между собой условий:

1) $\bar{\omega} \equiv 0$;

2) направление вектора $\bar{D}$ не изменяется с течением времени;

3) векторы $\bar{A}$ и $\bar{C}$ коллинеарны (отсюда вытекает коллинеарность всех трех векторов $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$);

4) векторы $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, $\bar{\rho}_{20}$, $\bar{\rho}_{30}$ компланарны;

5) плоскость, в которой лежат в любой момент времени три движущиеся точки, сохраняет неизменное направление относительно S;

6) плоскость, в которой лежат три движущиеся точки в начальный момент времени, параллельна плоскости, проведенной через концы векторных скоростей этих точек, если эти векторы отложить от общего начала.

Итак, *если три свободные материальные точки движутся относительно системы отсчета S инерциальным движением, то в общем случае нельзя утверждать, что система S инерциальна; это верно лишь в том особом случае, когда* $D \neq 0$ и *выполняется любое из условий* 1)—6).

Рассмотрим пример: пусть в начальный момент времени все три точки находятся в одной точке и пусть в какой-нибудь один дальнейший момент времени они не лежат на одной прямой. Если в этой начальной точке поместить начало координат системы S, то будем иметь

$$\rho_{20} = \rho_{30} = 0, \ B = C = 0, \ A \neq 0, \ \overline{D} = \overline{A} t^2; \tag{4.1}$$

таким образом, в этом случае выполняется условие 2), а, следовательно, и условие 1); поэтому в этом особом случае система S инерциальна. Интересно отметить, что Л. Ланге * принял условия, рассмотренные в этом примере, за определение инерциальности системы отсчета.

Возвращаясь к общему случаю, рассмотрим теперь движение четырех точек. В этом случае для возможности нетривиального решения необходимо, чтобы вектор $\overline{\omega}$ (1.12), или (2.6), найденный по трем точкам, был бы одним и тем же, какие бы три из четырех точек мы ни взяли — это возможно лишь в особом случае при наличии дополнительных соотношений между заданными величинами.

* L. Lange. Nochmals über das Beharrungsgesetz. Phil. Stud., herausgegeben von Wundt, II, 539—545, Leipzig, 1885.