*С.Н. Зиненко*

# *Математический анализ*

## *Предел и непрерывность функций одной переменной*

***(теория к задачам)***

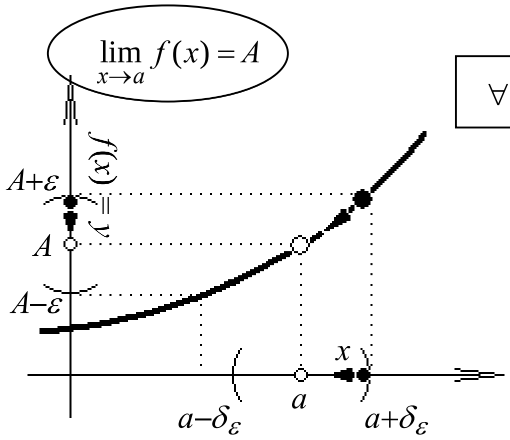
**2014**

***Предел*** *функции* $y = f(x) \to \{ A, \infty \} = \Omega$ *при* $x \to \{ a, \infty \} = \omega$ *нестрого означает, что* $y$ *становится почти равной (стремится, приближается сколь угодно близко к )* $\Omega$, *если* $x$ *сделать почти равным (устремить, приблизить достаточно близко к )* $\omega$. *Ощущения “близко”, “малое расстояние” строго выражаются понятием* ***окрестностей***

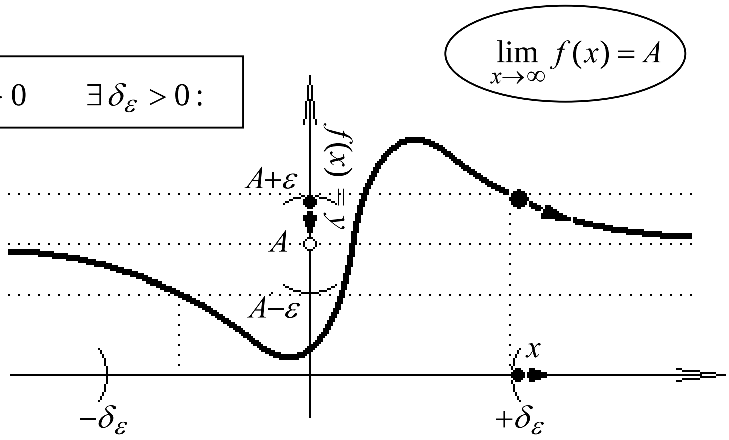
$$\lim_{x\to\omega} f(x) = \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \forall U_\varepsilon(\Omega) \ \exists \overset{\circ}{V}_{\delta_\varepsilon}(\omega): \quad \forall x \in \overset{\circ}{V}_{\delta_\varepsilon}(\omega) \quad \Rightarrow \quad y = f(x) \in U_\varepsilon(\Omega)$$

*что на языке их размеров* $\{ \varepsilon - \delta \}$ *в развернутом виде означает*

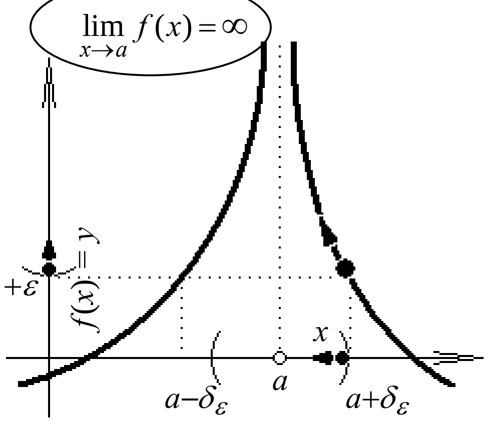
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta_\varepsilon > 0:}$$



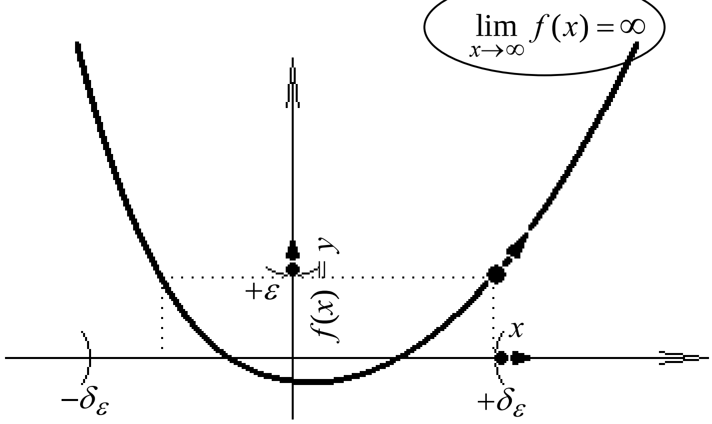

$$\boxed{0 \neq |x-a| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |y - A| < \varepsilon}$$




$$\boxed{|x| > \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |y - A| < \varepsilon}$$




$$\boxed{0 \neq |x-a| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |y| > \varepsilon}$$




$$\boxed{|x| > \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |y| > \varepsilon}$$

*При нахождении пределов функций используется*

***Теорема*** *(о* ***конечных*** *пределах арифметических выражений)*

*Пусть*

*1)* $\lim_{x\to\omega} f(x) = A, \quad \lim_{x\to\omega} g(x) = B$

$\Rightarrow$

*1)* $\lim_{x\to\omega}\left( f(x) \ \overset{+}{\underset{\diagup}{\times}} \ g(x) \right) = \left( A \ \overset{+}{\underset{\diagup}{\times}} \ B \right)$ *(если* $\{\diagup\}$, *то* $B \neq 0$*)*

*Учитывая простую связь между* ***бесконечно малыми*** *и* ***бесконечно большими*** *функциями*

$$\lim_{x\to\omega} f(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to\omega}\frac{1}{f(x)}=\infty \qquad\qquad \lim_{x\to\omega} g(x)=\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to\omega}\frac{1}{g(x)}=0$$

*которую символически удобно записать в виде*

$$\frac{1}{0}=\infty \qquad\qquad \frac{1}{\infty}=0$$

*теорему о конечных пределах можно распространить (иногда!) и на* ***бесконечные***

$$A\pm\infty=\infty \qquad A(\neq 0)\times\infty=\infty \qquad \infty\times\infty=\infty \qquad \frac{A(\neq 0)}{0}=\infty \qquad \frac{A}{\infty}=0 \qquad \frac{\infty}{B}=\infty$$

$$\left\{\infty\pm\infty\right\}=? \qquad \left\{0\times\infty\right\}=? \qquad \left\{\frac{0}{0}\right\}=? \qquad \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=?$$

*Таким образом, проблема нахождения пределов в конечном итоге сводится к раскрытию неопределенностей следующих двух видов*

$$\boxed{\left\{\frac{0}{0}\right\} \quad \text{или} \quad \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}}$$

*Один из основных приемов состоит в умении представить функцию в виде*

$$\{+\} \qquad \{-\} \qquad \{\times\} \qquad \{/\}$$

*других, более простых функций, пределы которых известны, причем подстановка пределов не приводит к неопределенности.*

*Так, в частности, при нахождении пределов простейших элементарных функций*

$$x^{\alpha} \qquad e^{x} \qquad \ln x \qquad \sin x \qquad \cos x \qquad \arcsin x \qquad \arccos x \qquad \operatorname{arctg} x \qquad \operatorname{arcctg} x$$

*мы пользуемся их* ***непрерывностью*** ***(предел*** *равен просто* ***значению*** *функции в* ***точке)***

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)}$$

*Другой важнейший прием сводится к умению представить функцию в виде* $\{\times\}$ *или* $\{/\}$ *множителей из* ***“таблицы эквивалентных бесконечно малых”***

$x\to 0$

| | |
|---|---|
| $\sin x \sim x$ | $(e^{x}-1) \sim x$ |
| $\arcsin x \sim x$ | $\ln(1+x) \sim x$ |
| $\operatorname{tg} x \sim x$ | $(1+x)^{\alpha}-1 \sim \alpha x$ |
| $\operatorname{arctg} x \sim x$ | |
| $(1-\cos x) \sim \frac{1}{2}x^2$ | |

*и применить*

***Теорема*** *(о замене функций на им эквивалентные в* $\{\times\}$ *и* $\{/\}$*)*

*Пусть*

*1)* $f(x)\underset{x\to\omega}{\sim}\tilde{f}(x), \qquad g(x)\underset{x\to\omega}{\sim}\tilde{g}(x)$

$\Rightarrow$

*1)* $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) \overset{\times}{/} g(x)=\lim\limits_{x\to\omega}\tilde{f}(x) \overset{\times}{/} \tilde{g}(x)$

## 1. Пределы степенных функций

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^{n}+\ldots}{b_m x^{m}+\ldots}=\left[\begin{array}{ll} 0, & n<m \\ \dfrac{a_n}{b_n}, & n=m \\ \infty, & n>m \end{array}\right.}$$

## 2. Пределы тригонометрических функций

*На этом занятии активно применяется прием, связанный с заменой функций на им эквивалентные в* $\{\times\}$ *и* $\{\not\}$, *и часть таблицы эквивалентных бесконечно малых*

| $x \to 0$ | |
|---|---|
| $\sin x \sim x$<br>$\arcsin x \sim x$<br>$\operatorname{tg} x \sim x$<br>$\operatorname{arctg} x \sim x$<br>$(1-\cos x) \sim \frac{1}{2}x^2$ | |

*Основная идея остается прежней: разложить функцию в* $\{\times\}$ *( или* $\{\not\}$ *) множителей из нашей таблицы, заменить каждый из них на соответствующую степень* $Cx^{\alpha}$, *сократить и перейти к пределу.*

## 3. Пределы трансцендентных функций

*На этом занятии активно применяется прежний прием, связанный с заменой функций на им эквивалентные в* $\{\times\}$ *и* $\{/\}$, *и часть таблицы эквивалентных бесконечно малых*

$x \to 0$

| | |
|---|---|
| | $(e^x - 1) \sim x$<br>$\ln(1 + x) \sim x$<br>$(1 + x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$ |

*Основная идея остается прежней: разложить функцию в* $\{\times\}$ *( или* $\{/\}$ *) множителей из нашей таблицы, заменить каждый из них на соответствующую степень* $Cx^{\alpha}$, *сократить и перейти к пределу.*

## 4. Главная часть функции, $o$-символика

*Так называемая* ***o-*** *символика позволяет известные соотношения для пределов записать в более удобном виде, наглядно выражающим их интуитивное восприятие*

$$\lim_{x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x)\underset{x\to\omega}{=}o\big(g(x)\big)$$

*“функция* $f(x)$ ***o-чень*** *маленькая по сравнению с* $g(x)$ *при* $x\to\omega$*”.*

*Следовательно,*

$$\lim_{x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)}=C \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x)\underset{x\to\omega}{=}Cg(x)+o\big(g(x)\big)$$

*В частности,*

$$\lim_{x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\underset{x\to\omega}{\sim}g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\underset{x\to\omega}{=}g(x)+o\big(g(x)\big)$$

***Замечание****. Равносильные записи*

$$f(x)\underset{x\to\omega}{\sim}g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x)\underset{x\to\omega}{=}g(x)+o\big(g(x)\big)$$

*можно воспринимать как “приближенное” и “точное” равенство. В последнем “точном” равенстве наглядно видно, что первое слагаемое* $g(x)$ *вносит в итоговую сумму* $f(x)$ *основной (главный) вклад, в то время как второе слагаемое* $o(g(x))$ *пренебрежимо мало по сравнению с* $g(x)$ *при* $x\to\omega$*.*

***Замечание****. Функция, имеющая конечный предел, может быть представлена в виде*

$$A=\lim_{x\to\omega}f(x)=\lim_{x\to\omega}\frac{f(x)}{1} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x)\underset{x\to\omega}{=}A+o(1)$$

*в частности,* ***бесконечно малая*** *при* $x\to\omega$*,*

$$0=\lim_{x\to\omega}f(x)=\lim_{x\to\omega}\frac{f(x)}{1} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x)\underset{x\to\omega}{=}o(1)$$

*“****Таблица эквивалентных бесконечно малых****” превращается в*

*“****таблицу главных частей бесконечно малых****”*

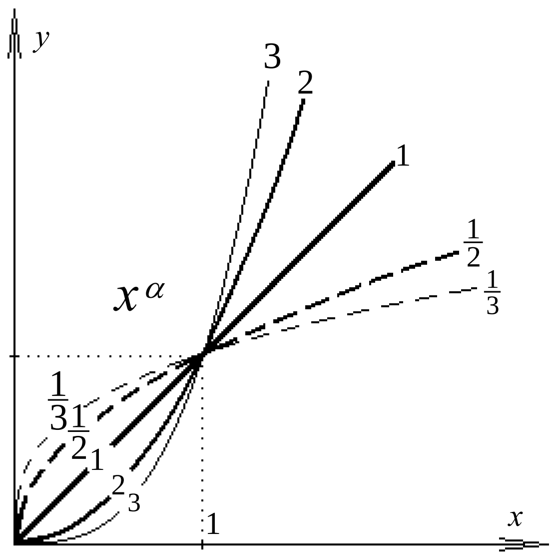
$\boxed{x\to 0}$

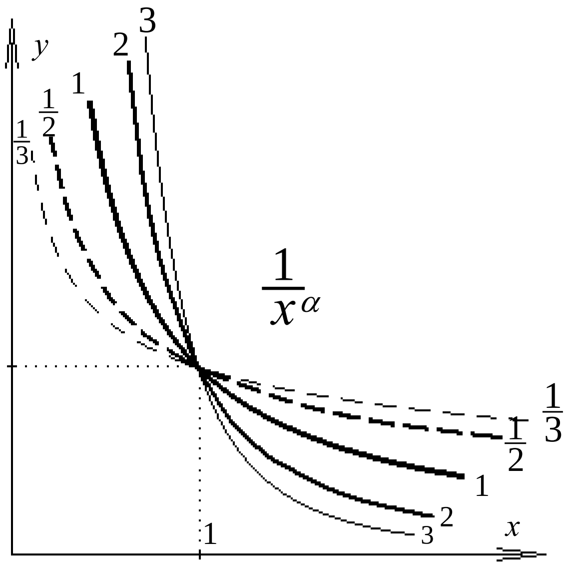
| | |
|---|---|
| $\sin x = x+o(x)$ <br> $\arcsin x = x+o(x)$ <br> $\operatorname{tg} x = x+o(x)$ <br> $\operatorname{arctg} x = x+o(x)$ <br> $(1-\cos x) = \frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ | $(e^x-1) = x+o(x)$ <br> $\ln(1+x) = x+o(x)$ <br> $(1+x)^\alpha-1 = \alpha x+o(x)$ |

***Замечание****. В общем случае главной частью функции* $f(x)$ *при* $x\to\omega$ *называется степенная функция* $s_\alpha(x)$ *соответствующего вида, эквивалентная данной при* $x\to\omega$

$$f(x)\underset{x\to\omega}{\sim}s_\alpha(x)=\begin{array}{c} f(x)\underset{x\to\omega}{\to}0 \\ \left[\begin{array}{c} Cx^\alpha \\ C(x-a)^\alpha \\ C\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha \end{array}\right. \end{array},\quad \begin{array}{c} f(x)\underset{x\to\omega}{\to}\infty \\ \left[\begin{array}{c} C\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha \\ C\left(\frac{1}{x-a}\right)^\alpha \\ Cx^\alpha \end{array}\right. \end{array},\quad \begin{array}{c} \\ \omega=0 \\ \omega=a \\ \omega=\infty \end{array} \qquad (\alpha>0)$$

*Графики степенных функций наглядно позволяют запомнить простое правило степенные функции* ***убывают*** ↘ *( или* ***растут*** ↗ *) при* $x \to +\mathbf{0},\ +\infty$ *тем* ***быстрее****, чем* ***больше*** *показатель* $\alpha > 0$




*так что сравнение степенных функций сводится к сравнению их числовых показателей.*

***Замечание.*** *При нахождении пределов замена функций “точным” равенством*

$$f(x) \underset{x\to\omega}{=} g(x) + o\big(g(x)\big)$$

*возможна в любых выражениях* $\{+\}$, $\{-\}$, $\{\times\}$, $\{/\}$, *в отличие от “приближенного”*

$$f(x) \underset{x\to\omega}{\sim} g(x)$$

*безошибочно верного в* $\{\times\}$, $\{/\}$. ***o-*** *символика позволяет легко понять, почему это так. Очевидно (?!), главная часть* $\{\times\}$ *или* $\{/\}$ *функций равна* $\{\times\}$ *или* $\{/\}$ *их главных частей, что равносильно теореме о замене функций на им эквивалентные в* $\{\times\}$ *или* $\{/\}$. *В то же время, при* $\{+\}$ *или* $\{-\}$ *функций их главные части вообще могут сократиться.*

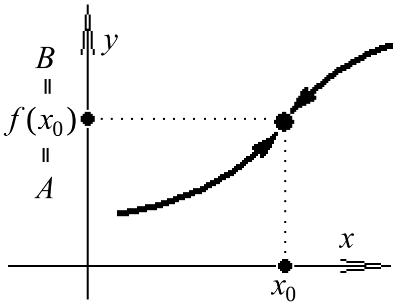
## 5. Точки разрыва функции

*Если функция* $f(x)$ *определена в некоторой проколотой окрестности* $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(x_0)$ *точки* $x_0$, *то можно поставить вопрос о* $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = ?$

*Точка* $x_0$ *называется точкой* ***непрерывности*** *функции* $f(x)$, *если*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \left( \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0 \right)$$

*что в развернутом виде означает*




1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$

2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$

3) $A = B$

4) $A = B = f(x_0)$

*Соответственно,* $x_0$ *называется точкой* ***разрыва*** *функции* $f(x)$, *если*

$$\xcancel{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

*т.е. нарушено хотя бы одно условие* 1), 2), 3) *или* 4)

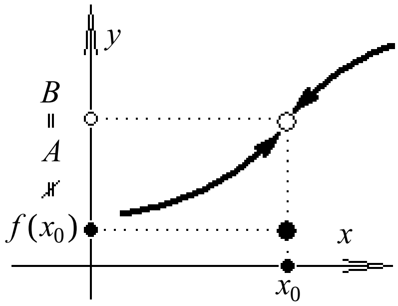
***Устранимый*** *разрыв*

1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$

2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$

3) $A = B$

$\cancel{4)}$ $A = B \neq f(x_0)$ *или* $\nexists$ $f(x_0)$




***Скачок***

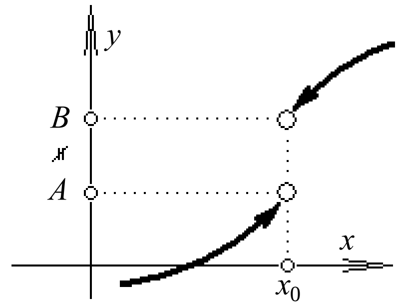
1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$

2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$

$\cancel{3)}$ $A \neq B$

$\Rightarrow$

$\cancel{4)}$




***Бесконечный*** *разрыв*

$\cancel{1)}$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$

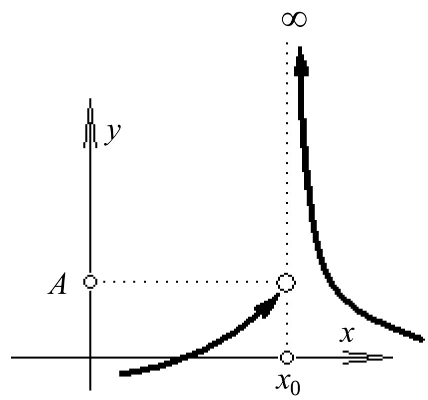
*или*

$\cancel{2)}$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$

$\Rightarrow$

$\cancel{3)}$

$\cancel{4)}$




***Существенная*** *особенность*

$\cancel{1)}$ $\nexists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$

*или*

$\cancel{2)}$ $\nexists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$

$\Rightarrow$

$\cancel{3)}$

$\cancel{4)}$