Линейныя дифференціальныя уравненія съ частными производными перваго порядка [1]).

В. П. Ермакова.

Есть $n-1$ различныхъ функцій $f_1, f_2, \dots f_{n-1}$, каждая изъ которыхъ, будучи подставлена вмѣсто z, обращаетъ выраженіе

$$X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

въ нуль. Эти функціи называются *частными интегралами* дифференціальнаго уравненія, которое получается, приравнивая выраженіе (1) нулю. Произвольная функція этихъ интеграловъ, будучи подставлена вмѣто z, также обращаетъ выраженіе (1) въ нуль, и потому называется *общимъ интеграломъ*.

Если частные интегралы $f_1, f_2, \dots f_{n-1}$ приравняемъ произвольнымъ постояннымъ, то полученныя уравненія

$$f_1 = C_1, \; f_2 = C_2, \; \dots f_{n-1} = C_{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

будутъ интегралами системы совокупныхъ уравненій

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

---

[1]) Настоящая замѣтка представляетъ конспектъ изложенія теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка. Для молодыхъ математиковъ она можетъ послужить схемою для усвоенія этого ученія въ его современномъ развитіи. Въ монографіяхъ относящихся къ этой области въ русской литературѣ недостатка нѣтъ; было бы желательно появленіе систематическаго сочиненія обработаннаго соотвѣтственно указываемому здѣсь плану (*примѣч. ред.*).

Обратно, если полную систему интеграловъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (3) разрѣшимъ относительно произвольныхъ постоянныхъ (2), то полученныя функціи f_1, f_2, ... f_{n-1}, будучи подставлены вмѣсто z, обращаютъ выраженіе (1) въ нуль.

Если f_1, f_2, ... f_{n-1} представляютъ полную систему частныхъ интеграловъ, то выраженіе (1), будучи умножено на нѣкоторый множитель R, не зависящій отъ z, можетъ быть представлено въ формѣ опредѣлителя

$$\left|\begin{array}{cccc} \frac{dz}{dx_1}, & \frac{dz}{dx_2}, & \ldots & \frac{dz}{dx_n} \\ \frac{df_1}{dx_1}, & \frac{df_1}{dx_2}, & \ldots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{df_{n-1}}{dx_1}, & \frac{df_{n-1}}{dx_2}, & \ldots & \frac{df_{n-1}}{dx_n} \end{array}\right| . \quad \ldots \ldots (4)$$

Если мы этотъ опредѣлитель разложимъ по элементамъ перваго горизонтальнаго ряда,

$$A_1 \frac{dz}{dx_1} + A_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + A_n \frac{dz}{dx_n},$$

то полученные коэффиціенты находятся въ слѣдующей зависимости:

$$\frac{dA_1}{dx_1} + \frac{dA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dA_n}{dx_n} = 0 .$$

Множитель R, на который нужно умножить выраженіе (1), чтобы его привести къ опредѣлителю (4), называется *интегральнымъ множителемъ* выраженія (1). Свойства этого множителя въ первый разъ изслѣдовалъ Якоби [1]).

---

[1]) C. G. J. Jacobi, Gesammelte Werke, Vierter Band, *Theoria novi multiplicatoris ystemati aequationum differentialium vulgarium applicandi,* стр. 317 — 509; — Suplesmentband, 10—15 Vorlesungen.

Интегральный множитель R удовлетворяетъ уравненію

$$X_1\frac{dR}{dx_1}+X_2\frac{dR}{dx_2}+\ldots+X_n\frac{dR}{dx_n}+R\left(\frac{dX_1}{dx_1}+\frac{dX_2}{dx_2}+\ldots+\frac{dX_n}{dx_n}\right)=0.$$

Если мы интегральный множитель умножимъ на произвольную функцію интеграловъ, то получимъ общее выраженіе интегральнаго множителя,

$$R'=R\Phi(f_1\,,\,f_2\,,\,\ldots\,f_{n-1})\,.$$

Отношеніе двухъ интегральныхъ множителей есть частный интегралъ.

Выраженіе (1), послѣ преобразованія къ новымъ перемѣннымъ $y_1\,,\,y_2\,,\,\ldots\,y_n$, принимаетъ форму

$$Y_1\frac{dz}{dy_1}+Y_2\frac{dz}{dy_2}+\ldots+Y_n\frac{dz}{dy_n}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(5)$$

Если R есть интегральный множитель выраженія (1), то умноживъ его на опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dy_1}, & \frac{dx_1}{dy_2}, & \ldots\frac{dx_1}{dy_n} \\ \frac{dx_2}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dy_2}, & \ldots\frac{dx_2}{dy_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{dx_n}{dy_1}, & \frac{dx_n}{dy_2}, & \ldots\frac{dx_n}{dy_n} \end{vmatrix}$$

получимъ интегральный множитель преобразованнаго выраженія (5).

Если извѣстенъ одинъ частный интегралъ f_1, то уравненіе

$$X_1\frac{dz}{dx_1}+X_2\frac{dz}{dx_2}+\ldots+X_n\frac{dz}{dx_n}=0\,.\;.\;.\;.\;.\quad(6)$$

можетъ быть приведено къ уравненію

$$X_2\frac{dz}{dx_2}+\ldots+X_n\frac{dz}{dx_n}=0\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(7)$$

гдѣ вмѣсто x_1 нужно подставить его выраженіе чрезъ $x_2\,,\ldots x_n$ и f_1, послѣ чего f_1 нужно принимать за постоянное. Если R есть интегральный множитель уравненія (6), то интегральный множитель уравненія (7) будетъ

$$\frac{R}{\left(\frac{df_1}{dx_1}\right)}.$$

Если f_1 и f_2 суть два частные интеграла уравненія (6), то остальные интегралы того же уравненія будутъ также интегралами уравненія.

$$X_3\frac{dz}{dx_3}+\ldots+X_n\frac{dz}{dx_n}=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

гдѣ вмѣсто x_1 и x_2 нужно подставить ихъ выраженія чрезъ $x_3, \ldots x_n$, f_1 и f_2. Если R есть интегральный множитель уравненія (6), то интегральный множитель уравненія (8) будетъ

$$\frac{R}{\frac{df_1}{dx_1}\frac{df_2}{dx_2}-\frac{df_1}{dx_2}\frac{df_2}{dx_1}}.$$

Эти изслѣдованія можно распространить на какое угодно число данныхъ интеграловъ.

Если извѣстенъ интегральный множитель и всѣ частные интегралы, кромѣ одного, то нахожденіе послѣдняго интеграла приводится къ квадратурамъ.

Прежде чѣмъ приступить къ дальнѣйшему изложенію, условимся въ нѣкоторыхъ сокращенныхъ обозначеніяхъ. Выраженіе

$$X_1\frac{dz}{dx_1}+X_2\frac{dz}{dx_2}+\ldots+X_n\frac{dz}{dx_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

мы будемъ кратко обозначать чрезъ $X(z)$. Результатъ подстановки въ выраженіе (1) вмѣсто z какой-нибудь функціи f будемъ обозначать чрезъ $X(f)$. Подобнымъ образомъ символомъ $A(P)$ будемъ обозначать выраженіе

$$A_1\frac{dP}{dx_1}+A_2\frac{dP}{dx_2}+\ldots+A_n\frac{dP}{dx_n}.$$

Всякій интегралъ, удовлетворяющій двумъ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$A_1\frac{dz}{dx_1}+A_2\frac{dz}{dx_2}+\ldots+A_n\frac{dz}{dx_n}=0,$$

$$B_1\frac{dz}{dx_1}+B_2\frac{dz}{dx_2}+\ldots+B_n\frac{dz}{dx_n}=0,$$

будетъ также интеграломъ уравненія

$$B(A_1)\frac{dz}{dx_1}+B(A_2)\frac{dz}{dx_2}+\ldots+B(A_n)\frac{dz}{dx_n}=$$

$$=A(B_1)\frac{dz}{dx_1}+A(B_2)\frac{dz}{dx_2}+\ldots+A(B_n)\frac{dz}{dx_n}.$$

Пусть дана система уравненій

$$\left.\begin{aligned}
&X_1\frac{dz}{dx_1}+X_2\frac{dz}{dx_2}+\ldots+X_n\frac{dz}{dx_n}=0,\\
&X_1'\frac{dz}{dx_1}+X_2'\frac{dz}{dx_2}+\ldots+X_n'\frac{dz}{dx_n}=0,\\
&X_1''\frac{dz}{dx_1}+X_2''\frac{dz}{dx_2}+\ldots+X_n''\frac{dz}{dx_n}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\;(9)$$

Первыя части этихъ уравненій сокращено будемъ обозначать черезъ

$$(z)\,,\ (z)'\,,\ (z)''\,,\ldots$$

Результаты подстановки въ первыя части какой-нибудь функціи P вмѣсто z будемъ обозначать черезъ

$$(P)\,,\ (P)'\,,\ (P)''\,,\ldots$$

Всякій интегралъ, удовлетворяющій уравненіямъ (9), будетъ также интеграломъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}
&(X_1^i)^j\frac{dz}{dx_1}+(X_2^i)^j\frac{dz}{dx_2}+\ldots+(X_n^i)^j\frac{dz}{dx_n}=\\
&=(X_1^j)^i\frac{dz}{dx_1}+(X_2^j)^i\frac{dz}{dx_2}+\ldots+(X_n^j)^i\frac{dz}{dx_n}
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\;(10)$$

Система уравненій (9) называется *замкнутою*, если уравненія (10) суть слѣдствія уравненій (9).

Замкнутая система уравненій послѣ преобразованія къ новымъ перемѣннымъ является также замкнутою системою.

Система уравненій (9) называется нормальною, если уравненіе (10) обращается въ простое тождество, т. е. имѣютъ мѣсто тождества

$$(X_k^i)^j = (X_k^j)^i .$$

Число интеграловъ, удовлетворяющихъ замкнутой или нормальной системѣ уравненій, равно числу независимыхъ перемѣнныхъ безъ числа уравненій.

Всякая замкнутая система уравненій рѣшеніемъ относительно столькихъ частныхъ производныхъ, какъ велико число уравненій приводится въ нормальную систему.

Положимъ, что намъ дана нормальная система уравненій въ разрѣшенномъ видѣ

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dz_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n}, \\
\frac{dz}{dt'} &= X_1' \frac{dz}{dx_1} + X_2' \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n' \frac{dz}{dx_n}, \\
\frac{dz}{dt''} &= X_1'' \frac{dz}{dx_1} + X_2'' \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n'' \frac{dz}{dx'}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (11)$$

Покажемъ, какъ упрощается интегрированіе этихъ уравненій въ томъ случаѣ, когда намъ извѣстна полная система частныхъ интеграловъ перваго изъ этихъ уравненій. Пользуясь тѣмъ обстоятельствомъ, что произвольныя функціи интеграловъ суть также интегралы, мы можемъ привести интегралы въ такую форму, чтобы удовлетворялись нѣкоторыя условія. Мы можемъ интегралы $f_1, f_2, \ldots f_n$ перваго изъ уравненій (11) привести въ такую форму, чтобы послѣ подстановки вмѣсто t его частнаго значенія t_0 эти интегралы превратились соотвѣтственно въ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Въ такомъ случаѣ интегрированіе нормальной системы (11) приводится къ нормальной системѣ

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt'} &= X_1' \frac{dz}{dx_1} + X_2' \frac{dz}{dx_2} + \ldots, \\
\frac{dz}{dt''} &= X''' \frac{dz}{dx_1} + X_2'' \frac{dz}{dx_2} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

гдѣ вмѣсто t нужно подставить его частное значеніе t_0. Пользуясь этою теоремой Mayer [1]) показалъ, что интегрированіе нормальной системы

[1]) Ueber unbeschränkt integrable systeme linearer totaler Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen (Mathematische Annalen, томъ V, 1872).

уравненій (11) можетъ быть приведено къ одному уравненію. Это приведеніе состоитъ въ слѣдующемъ.

Положимъ

$$t' = t'_0 + \tau'(t - t_0),$$
$$t'' = t''_0 + \tau''(t - t_0),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

и составимъ уравненіе

$$\frac{dz}{dt} = Y_1 \frac{dz}{dx_1} + Y_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

въ которомъ

$$Y_1 = X_1 + \tau' X_1' + \tau'' X_1'' + \dots$$
$$Y_2 = X_2 + \tau' X_2' + \tau'' X_2'' + \dots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Найдемъ полную систему интеграловъ уравненія (12) и приведемъ ихъ въ такую форму, чтобы они обращались въ $x_1, x_2, \dots x_n$, послѣ подстановки t_0 вмѣсто t. Если мы въ этихъ интегралахъ вмѣсто $\tau', \tau'', \dots$ подставимъ ихъ значенія

$$\tau' = \frac{t' - t'_0}{t - t_0}, \quad \tau'' = \frac{t'' - t''_0}{t - t_0}, \dots$$

то получимъ полную систему интеграловъ уравненій (11).

Пусть дана система уравненій

$$\left.\begin{aligned} X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = 0, \\ X_1' \frac{dz}{dx_1} + X_2' \frac{dz}{dx_1} + \dots + X_n' \frac{dz}{dx_n} = 0, \\ X_1'' \frac{dz}{dx_1} + X_2'' \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n'' \frac{dz}{dx_n} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Преобразуемъ эти уравненія къ новымъ перемѣннымъ и положимъ, что формулы преобразованія содержатъ произвольное постоянное α. Разсмотримъ тотъ случай, когда ни данная, ни преобразованная системы уравненій не зависятъ отъ постояннаго α. Въ этомъ случаѣ къ уравненіямъ (9) можетъ быть прибавлено еще одно уравненіе. Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ положить, что искомый интегралъ послѣ преобразованія къ новымъ перемѣннымъ также не содержитъ постояннаго α; въ такомъ случаѣ

$$\frac{dz}{dx_1}\frac{dx_1}{d\alpha}+\frac{dz}{dx_2}\frac{dx_2}{d\alpha}+\ldots+\frac{dz}{dx_n}\frac{dx_n}{d\alpha}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Это и есть то уравненіе, которое можетъ быть прибавлено къ уравненіямъ (9). Само собою разумѣется, что мы не получимъ добавочнаго уравненія въ томъ случаѣ, когда это уравненіе (13) есть слѣдствіе уравненій (9).

Если число уравненій (9) на единицу менѣе числа независимыхъ перемѣнныхъ, то онѣ имѣютъ только одинъ интегралъ. Мы можемъ положить, что этотъ интегралъ, будучи преобразованъ къ новымъ перемѣннымъ, содержитъ постоянное α какъ придаточное постоянное; въ такомъ случаѣ

$$\frac{dz}{dx_1}\frac{dx_1}{d\alpha}+\frac{dz}{dx_2}\frac{dx_2}{d\alpha}+\ldots+\frac{dz}{dx_n}\frac{dx_n}{d\alpha}=1.$$

Это послѣднее уравненіе совмѣстно съ уравненіями (9) вполнѣ опредѣлитъ частныя производныя искомой функціи z, и вся задача приводится къ квадратурамъ.

Какъ частный случай, положимъ, дано уравненіе

$$Mdx+Ndy=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Если

$$F(x, y)=C$$

есть интегралъ этого уравненія, то функція F должна удовлетворять уравненію

$$N\frac{dF}{dx}-M\frac{dF}{dy}=0.$$

Положимъ, что формулы преобразованія содержатъ произвольное постоянное α, которое не входитъ явно ни въ уравненіе (14), ни въ преобразованное уравненіе. Въ этомъ случаѣ можно положить

$$\frac{dF}{dx}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{d\alpha}=1.$$

Изъ послѣднихъ двухъ уравненій находимъ

$$\frac{dF}{dx} = \frac{M}{M\frac{dx}{d\alpha} + N\frac{dy}{d\alpha}}, \quad \frac{dF}{dy} = \frac{N}{M\frac{dx}{d\alpha} + N\frac{dy}{d\alpha}},$$

откуда

$$dF = \frac{Mdx + Ndy}{M\frac{dx}{d\alpha} + N\frac{dy}{d\alpha}}.$$

Изъ этого уравненія помощью квадратуръ опредѣляется искомая функція F [1])

*) В. Ермаковъ, Дифференціальныя уравненія перваго порядка съ двумя перемѣнными, Кіевъ, 1887; страницы 125—131.