СПЕКТР СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

В. А. Марченко, Л. А. Пастур

Настоящая работа посвящена исследованию распределения собственных значений некоторых ансамблей случайных эрмитовых матриц. Как постановка вопроса, так и метод исследования ведут начало от работ Дайсона [1] и И. М. Лифшица [2] об энергетических спектрах неупорядоченных систем. Заметим, однако, что рассматриваемые нами ансамбли случайных матриц больше похожи на ансамбли, изученные Вигнером [3], и указать физическую модель, которая точно им соответствует, мы не можем.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы будем рассматривать действующие в N-мерном унитарном пространстве H_N самосопряженные операторы $B_N(n)$ вида

$$B_N(n) = A_N + \sum_{i=1}^{n} \tau_i(\cdot, q^i) q^i. \tag{1.1}$$

Здесь

A_N — неслучайный самосопряженный оператор;

n — неслучайное число;

τ_i — независимые одинаково распределенные вещественные случайные величины;

q^i — независимые между собой и с τ_i случайные векторы из H_N.

Операторы $L_i = q^i(\cdot, q^i)$ действуют на векторы $x \in H_N$ по формуле

$$L_i[x] = q^i(x, q^i),$$

где (x, q_i) — скалярное произведение в H_N.

Таким образом, рассматриваемые операторы $B_N(n)$ являются суммой неслучайного оператора и некоторого числа случайных независимых одномерных операторов. Каждый набор чисел $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ и векторов $q^1, q^2, \ldots, q^n$, который мы всегда для краткости будем обозначать через T_n, Q_n, дает некоторую реализацию случайного оператора $B_N(n)$.

Нас будет интересовать функция $\nu(\lambda; N, T_n, Q_n)$, равная отношению числа собственных значений оператора $B_N(n)$, лежащих левее λ, к размерности пространства. Везде в дальнейшем мы будем называть ее нормированной спектральной функцией оператора. Очевидно, что $\nu(\lambda; N, T_n, Q_n)$ при любой реализации набора T_n, Q_n является неубывающей, непрерывной слева и кусочно постоянной функцией от λ, причем $0 \leqslant \nu(\lambda; N, T_n, Q_n) \leqslant 1$.

При каждом фиксированном значении λ $\nu(\lambda; N, T_n, Q_n)$ является случайной величиной, сложным образом выражающейся через случайные числа $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ и случайные векторы $q^1, q^2, \ldots, q^n$. Обозначим через

$$\nu(\lambda; N, n) = \mathbf{E}\,\nu(\lambda; N, T_n, Q_n)$$

математическое ожидание этой случайной величины.

Отыскание функции $\nu(\lambda; N, n)$ является одной из основных задач спектрального анализа случайных операторов. Особенно интересен случай очень больших N и n.

Пусть при $N \to \infty$ выполняются такие условия:

I. *Существует предел*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n}{N} = c,$$

который мы будем называть концентрацией.

II. *Последовательность нормированных спектральных функций* $\nu(\lambda; N)$ *операторов* A_N *сходится к некоторой функции* $\nu(\lambda)$ *во всех ее точках непрерывности*

$$\lim_{N \to \infty} \nu(\lambda; N) = \nu(\lambda). \tag{1.2}$$

Считая эти условия выполненными, нужно прежде всего выяснить, какие вероятностные свойства операторов $B_N(n)$ вида (1.1) обеспечивают существование предела

$$\lim_{N \to \infty} \nu(\lambda; N, n) = \nu(\lambda; c) \tag{1.3}$$

и когда последовательность $\nu(\lambda; N, T_n, Q_n)$ сходится по вероятности к этому пределу.

Главная же задача для таких ансамблей случайных операторов состоит, конечно, в отыскании самой предельной функции $\nu(\lambda; c)$.

Важным для физики является случай, когда все τ_i равны неслучайному числу τ, а векторы q^i выбираются из фиксированной ортонормированной системы $e_1, e_2, \ldots, e_N$ с равной вероятностью. В упомянутых выше работах И. М. Лифшица именно для этого случая были разработаны методы приближенного вычисления функции $\nu(\lambda; c)$ при малых значениях c.

Отметим одну специфическую особенность этого случая. Поскольку случайные векторы q^i выбираются из фиксированного ортонормированного базиса, то вся задача не инвариантна относительно унитарных преобразований оператора A_N, и поэтому ответ зависит не только от нормированной спектральной функции $\nu(\lambda; N)$ этого оператора, но и от всех его собственных векторов. Эта особенность сохраняется и при $N \to \infty$.

В настоящей работе мы рассмотрим другой тип задач, которые при $N \to \infty$ становятся инвариантными относительно унитарных преобразований операторов A_N. Для формулировки условий, которые мы накладываем на случайные векторы, удобно выбрать в пространстве H_N какой-нибудь ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots e_N$ и записывать векторы в координатах этого базиса, полагая

$$q = (q_1, q_2, \ldots q_N),$$

где $q_i = (q_1, e_i)$. Везде в дальнейшем предполагаются выполненными следующие условия:

III. *Случайные векторы $q = (q_1, q_2, \ldots q_N)$, входящие в формулу* (1.1), *имеют абсолютные моменты до четвертого порядка включительно, причем четные моменты $\mathrm{E}\, q_i\bar{q}_j$, $\mathrm{E}\, q_i\bar{q}_j q_e\bar{q}_m$ можно представить в таком виде*:

$$\mathrm{E}\, q_i\bar{q}_j = N^{-1}\delta_{ij} + m_{ij}(N); \tag{1.4}$$

$$\mathrm{E}\, q_i\bar{q}_j q_e\bar{q}_m = N^{-2}(\delta_{ij}\delta_{em} + \delta_{im}\delta_{je}) + \varphi_{ie}(N)\bar{\varphi}_{jm}(N) + d_{ijem}(N), \tag{1.5}$$

где δ_{ik} — *символ Кронекера, и величины*

$$\varepsilon_1(N) = \{N\sum_{i,j}|m_{ij}(N)|^2\}^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon_2(N) = \sum_{i,j}|\varphi_{ij}(N)|^2$$

$$\varepsilon_3(N) = N\{\sum_{i,j,e,m}|d_{ijem}|^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{1.6}$$

стремятся к нулю при $N \to \infty$.

IV. *Случайные величины τ_i, входящие в формулу* (1.1), *ограничены, то есть существует такое число M, что любая реализация случайной величины τ_i удовлетворяет неравенству*

$$|\tau_i| \leqslant M.$$

Нетрудно проверить, что условия III, наложенные на случайные векторы q^i, унитарно инвариантны, то есть выполнение их при некотором фиксированном выборе ортонормированных базисов в пространствах H_N $(N = 1, 2, \ldots)$ влечет за собой выполнение этих условий при любом другом выборе.

Приведем два примера ансамблей векторов, удовлетворяющих условиям III.

а) Ансамбль вещественных векторов единичной длины, плотность вероятности которых $p(q_1, q_2, \ldots q_N)$, является симметричной и четной функцией всех своих переменных.

У таких векторов $\mathrm{E}\, q_i q_j = N^{-1}\delta_{ij}$ и

$$\mathrm{E}\, q_i\bar{q}_j q_e\bar{q}_m = a_1(\delta_{ij}\delta_{em} + \delta_{ie}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{je}) + (a_2 - 3a_1)\delta_{ij}\delta_{em}\delta_{ie},$$

где

$$a_1 = \mathrm{E}\, q_1^2 q_2^2 = \mathrm{E}\, q_i^2 q_j^2 \quad i \neq j, \quad a_2 = \mathrm{E}\, q_1^4 = \mathrm{E}\, q_i^4 \quad i = 1, 2, \ldots N.$$

Если учесть соотношение $1 = N(N-1)a_1 + Na_2$, следующее из нормированности всех векторов рассматриваемого ансамбля, то нетрудно показать, что для справедливости условия III достаточно, чтобы при $N \to \infty$

$$a_1 = \mathrm{E}\, q_1^2 q_2^2 = N^{-2} + o(N^{-\frac{5}{2}}).$$

Например, для векторов, равномерно распределенных по единичной сфере, $a_1 = [N(N+2)]^{-1}$. Поэтому вещественные случайные векторы, равномерно распределенные на единичной сфере, удовлетворяют условию III.

в) Ансамбль случайных векторов, которые в некотором базисе имеют вид

$$q = N^{-\frac{1}{2}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots \xi_N),$$

где ξ_i — независимые одинаково распределенные случайные величины, математическое ожидание которых равно нулю, дисперсия — единице и момент четвертого порядка μ_4 конечен. В этом случае $m_{ij}(N)=0$, $\varphi_{ie}(N)=N^{-1}\delta_{ie}$, а среди чисел $d_{ijem}(N)$ отличны от нуля лишь $d_{iiii}(N)=$ $=N^{-2}(\mu_4-3)$. Следовательно, $\varepsilon_1(N)=0$, $\varepsilon_2(N)=N^{-1}$, $\varepsilon_3(N)=$ $=N^{-\frac{1}{2}}|\mu_4-3|$, откуда следует, что случайные векторы этого ансамбля тоже удовлетворяют условиям III.

Как уже указывалось, основной задачей является доказательство существования и фактическое отыскание функции $\nu(\lambda;\ c)$, определяемой формулой (1.3). Удобнее, однако, вместо $\nu(\lambda;\ c)$ искать ее преобразование Стильтьеса

$$m(z;\ c)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\nu(\lambda;\ c)}{\lambda-z},\tag{1.7}$$

зная которое, можно найти искомую функцию во всех точках ее непрерывности по известным формулам обращения

$$\nu(\lambda_2;\ c)-\nu(\lambda_1;\ c)=\lim_{y\to+0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\operatorname{Im} m(x+iy)\,dx.\tag{1.8}$$

Для краткости мы будем функцию $m(z;\ 0)$, существование которой обеспечено условием II, обозначать просто через $m_0(z)$, так что

$$m_0(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\nu(\lambda)}{\lambda-z},\tag{1.9}$$

где функция $\nu(\lambda)$ определена формулой (1.2).

Основные результаты настоящей работы содержатся в следующей теореме.

Теорема. *Пусть выполнены перечисленные выше условия I—IV. Тогда*

1) *Предел* (1.3) *существует и последовательность нормированных спектральных функций* $\nu(\lambda;\ N,\ T_n,\ Q_n)$ *операторов* $B_N(n)$ *при* $N\to\infty$ *сходится по вероятности к функции* $\nu(\lambda;\ c)$ *во всех точках непрерывности последней.*

Кроме того,

$$\nu(-\infty;\ c)=\nu(-\infty);\quad \nu(+\infty;\ c)=\nu(+\infty),$$

где функция $\nu(\lambda)$ *определена формулой* (1.2)

Поэтому во всех точках непрерывности функция $\nu(\lambda;\ c)$ *выражается через ее преобразование Стильтьеса* $m(z;\ c)$ *по формуле*

$$\nu(\lambda;\ c)=\nu(-\infty)+\lim_{\mu\to\infty}\{\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\mu}^{\lambda}\operatorname{Im} m(x+iy;\ c)\,dx\}.$$

2) *Функция* $m(z;\ c)$ *равна взятому при* $t=1$ *решению уравнения*

$$u(z\ \ t)=m_0(z)-c\int\limits_0^t\frac{\tau(\xi)}{1+\tau(\xi)\,u(z,\ \xi)}\cdot\frac{\partial u(z,\ \xi)}{\partial z}\,d\xi,\tag{1.10}$$

где функция $m_0(z)$ определена формулой (1.9), *а* $\tau(\xi)$ (*обобщенная обратная функции распределения вероятностей* $\sigma(\tau)$ *случайной величины* τ) *определена формулой**

$$\tau(\xi) = \inf_{\tau}\{\tau:\ \sigma(\tau) \geqslant \xi\}. \tag{1.11}$$

3) *Решение уравнения* (1,10) *существует и единственно. Уравнение* (1,10) *эквивалентно дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка*

$$\frac{\partial u(z_1 t)}{\partial t} + \frac{\tau(t)}{1+\tau(t)\,u(z_1 t)}\cdot\frac{\partial u(z_1 t)}{\partial z} = 0;\quad u(z,\ 0) = m_0(z), \tag{1.12}$$

решение которого методом характеристик приводит к следующему неявному выражению для функции $u(z_1 t)$:

$$u(z,\ t) = m_0\left(z - c\int_0^t \frac{\tau(\xi)\,d\xi}{1+\tau(\xi)\,u(z_1 t)}\right). \tag{1.13}$$

Во избежание недоразумений отметим, что под решением уравнения (1,10) или (1,12) мы понимаем функцию $u(z,t)$, аналитическую по z и непрерывную по t при $\operatorname{Im} z > 0$ и $t \in [0,1]$.

Заметим еще, что из определения функции $\tau(\xi)$ следует

$$\int_0^1 \frac{\tau(\xi)\,d\xi}{1+\tau(\xi)\,u(z,1)} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau\,d\sigma(\tau)}{1+\tau u(z,1)},$$

откуда, согласно (1,13) и равенству $m(z;\ c) = u(z,\ 1)$, заключаем, что преобразование Стильтьеса $m(z;\ c)$ функции $\nu(\lambda;\ c)$ удовлетворяет такому уравнению:

$$m(z;\ c) = m_0\left(z - c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau\,d\sigma(\tau)}{1+\tau m(z;\ c)}\right), \tag{1.14}$$

где $\sigma(\tau)$ — функция распределения вероятностей случайной величины τ.

Рассмотрим два примера.

1) Сумма случайных независимых и равновероятных проекторов.

Пусть $B_N(n) = \tau\sum_{i=1}^{n} P_i$, где P_i — операторы проектирования на случайные векторы q^i, независимые и равномерно распределенные на единичной сфере, а τ — неслучайное число. Выше было показано, что в данном случае условие III выполнено. Так как $A_N = 0$ и τ — неслучайное число, то условия I, IV тоже выполнены, причем

$$m_0(z) = z^{-1},\quad d\sigma(\xi) = \delta(\xi - \tau)\,d\xi.$$

* Нетрудно проверить, что $\tau(\xi)$ является непрерывной слева, неубывающей и ограниченной функцией. На участках строгого возрастания $\tau(\xi)$ и $\sigma(\tau)$ являются обратными друг другу функциями, интервалам постоянства $\sigma(\tau)$ соответствуют скачки $\tau(\xi)$, а скачкам $\sigma(\tau)$ — интервалы постоянства $\tau(\xi)$.

Поэтому если $\frac{n}{N} \to c$ при $N \to \infty$, то выполняются все условия I—IV, и функция $m(z; c)$ удовлетворяет уравнению (1,14), которое в данном случае таково:

$$m(z; c) = -\left(z - \frac{c\tau}{1 + \tau m(z; c)}\right)^{-1}.$$

Решая это квадратное уравнение относительно $m(z; c)$, получим

$$m(z; c) = -\frac{1-c}{2z} + \frac{-z + \sqrt{(z - c\tau + \tau)^2 - 4z\tau}}{2\tau z},$$

где при $\operatorname{Im} z > 0$ нужно брать такую ветвь корня, чтобы $\operatorname{Im} m(z; c) > 0$ (так как $m(z; c)$ — преобразование Стильтьеса неубывающей функции).

Отсюда, используя формулу обращения (1,8), находим, что $\nu(\lambda; c) = \nu_1(\lambda; c) + \nu_2(\lambda; c)$, где

$$\frac{d\nu_1(\lambda; c)}{d\lambda} = \begin{cases} (1-c)\,\delta(\lambda) & 0 \leqslant c \leqslant 1 \\ 0 & c > 0 \end{cases}; \quad \frac{d\nu_2(\lambda; c)}{d\nu} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4c\tau^2 - (\lambda - \tau - \tau c)^2}}{2\pi\lambda\tau} & (\lambda - \tau - \tau c)^2 \leqslant 4c\tau^2 \\ 0 & (\lambda - \tau - \tau c)^2 > 4c\tau^2 \end{cases}$$

Из этих формул при $c > 1$, в частности, следует, что нормированные спектральные функции случайных операторов

$$K_N(n) = -\tau\left(1 + \frac{n}{N}\right)I + \tau\sum_{i=1}^{n} P_i \quad \left(\lim_{N\to\infty} \frac{n}{N} = c > 1\right)$$

при $N \to \infty$ сходятся по вероятности к функции $\nu(\lambda; c)$, производная которой равна

$$\frac{d\nu(\lambda; c)}{d\lambda} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4c\tau^2 - \lambda^2}}{2\pi c\tau^2}\left(1 + \dfrac{\lambda + \tau}{\tau c}\right)^{-\tau} & \lambda^2 \leqslant 4c\tau^2 \\ 0 & \lambda^2 > 4c\tau^2 \end{cases}.$$

Правая часть этой формулы при $c \to \infty$ переходит в полукруговой закон, полученный Вигнером для гауссовского ансамбля случайных матриц [3]. Этого, конечно, и следовало ожидать, так как $K_N(n)$ есть сумма независимых одинаково распределенных случайных матриц

$$K_N(n) = \tau\sum_{i=1}^{n}\left\{-\frac{n+N}{nN}I + P_i\right\}$$

и в силу центральной предельной теоремы функция распределения вероятностей случайных матриц $K_N(n)$ должна быть близка к гауссовой, если $n \gg N$.

Именно это обстоятельство мы имели в виду, отмечая сходство рассматриваемых ансамблей с ансамблями Вигнера.

2) Сумма случайных независимых и равновероятных проекторов со случайными коэффициентами.

Пусть $B_N(n) = \sum_{i=1}^{n} \tau_i P_i$, где P_i — такие же проекционные операторы, как выше, а коэффициенты τ_i — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью вероятности равной $\frac{1}{\pi}(1 - \tau^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Ясно, что все условия I—IV выполнены, если существует $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{n}{N} = c$, причем $A_N = 0$, $m_0(z) = z^{-1}$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau d\sigma(\tau)}{1+\tau m} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\tau(1-\tau^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+\tau m} d\tau = \frac{1}{m}[1-(1-m^2)^{-\frac{1}{2}}].$$

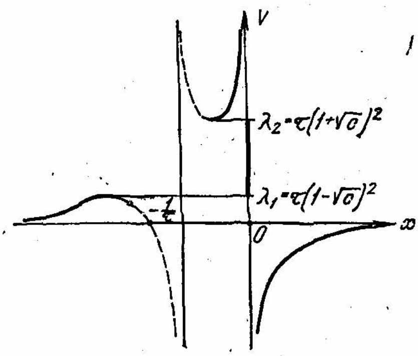
Поэтому в данном случае уравнение (1.14) таково:

$$m = -\left\{z - \frac{c}{m}[1-(1-m^2)^{-\frac{1}{2}}]\right\},$$

откуда после элементарных преобразований получим

$$z^2m^4 + 2(1-c)zm^3 + [(1-c)^2 - z^2]m^2 - 2(1-c)zm - 1 + 2c = 0,$$

где для краткости положено $m(z;\ c) = m$. В частности, при $c = 1$ мы получим биквадратное уравнение, решая которое (с учетом того, что $m(z; c) \to 0$ при $\operatorname{Im} z \to +\infty$ и $\operatorname{Im} m(z; c) > 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$), находим сначала $m(z;\ 1)$, а затем по формулам (1,8) и $\nu(\lambda;\ 1)$



$$\frac{d\nu(\lambda;\ 1)}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2-|\lambda|}{|\lambda|}} & |\lambda| < 2 \\ 0 & |\lambda| > 2 \end{cases}$$

В заключение отметим, что найти функцию $m(z;\ c)$ и тем более $\nu(\lambda;\ c)$ в явном виде, как правило, нельзя, так как уравнение (1.14) относительно $m(z;\ c)$, вообще говоря, не решается в явном виде. В этом смысле приведенные выше примеры являются исключениями. Тем не менее, часто можно изучить качественную картину спектра: число и расположение его связных компонент, а также поведение $\nu(\lambda;\ c)$ вблизи границ спектра. Мы имеем в виду следующее: на интервалах вещественной оси, дополнительных к спектру, функция $m(x+i0;\ c)$ существует, непрерывна, вещественна и монотонно растет. Поэтому на этих интервалах существует обратная функция, тоже вещественная и монотонно возрастающая, причем область ее значений совпадает, очевидно, с дополнением к спектру.

Обозначая эту обратную функцию через $v(x;\ c)$ и используя формулу (1.14), получим

$$v(x;\ c) = \overset{0}{v}(x) + c \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau d\sigma(\tau)}{1+\tau x}, \tag{1.15}$$

где $\overset{0}{v}(x)$ — функция, обратная к $m_0(x)$. Таким образом, для определения спектра получаем правило: нужно найти интервалы монотонного возрастания функции, стоящей в правой части равенства (1.15), и затем определить множество ее значений на этих интервалах; дополнение к этому множеству и есть спектр.

Проиллюстрируем это правило на решенном выше примере 1. Здесь

$$v(x;\ c) = -\frac{1}{x} + \frac{c\tau}{1+\tau x}.$$

График этой функции при $c < 1$ приведен на рисунке, где пунктиром обозначены участки убывания правой части (1.16), которые нужно отбросить. Из графика видно, что спектр состоит из отрезка $[\lambda_1, \lambda_2]$ и точки 0. Так как при подходе к концам этого отрезка первая производная функции $v(x;\ c)$ обращается в нуль, то обратная ей функция $m(x;\ c)$ имеет в этих точках корневую особенность. Следовательно, $\frac{d\nu(\lambda;\ c)}{d\lambda}$ ведет себя как $\sqrt{|\lambda-\lambda_i|}$, $i = 1,2$ вблизи концов отрезка $[\lambda_1, \lambda_2]$.

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим линейный оператор A, отображающий пространство H_N в себя. Матрицу оператора A в каком-нибудь ортонормированном базисе этого пространства будем обозначать через $\|A_{ik}\|$.

Лемма 1. *Если случайный вектор $q = (q_1, q_2, \ldots q_N)$ удовлетворяет условию III, то*

$$\mathrm{E}\,|(Aq,\ q) - N^{-1}\mathrm{Sp}A\,| \leqslant \|A\|\,\varepsilon(N),$$

где $\|A\|$ — норма оператора A, величина $\varepsilon(N)$ не зависит от A и стремится к нулю при $N\to\infty$.

Доказательство. Полагая для краткости

$$\eta = (Aq, q) = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij}\bar{q}_i q_j,$$

будем иметь согласно (1.4)

$$\mathrm{E}\eta = \sum_{i,j} A_{ij}\,\mathrm{E}\,\bar{q}_i q_j = N^{-1}\sum_{i,j} A_{ij}\delta_{ij} + \sum_{i,j} A_{ij} m_{ji}(N)$$

или

$$|\,\mathrm{E}\,\eta - N^{-1}\mathrm{Sp}A\,| = |\sum_{i,j} A_{ij} m_{ji}(N)\,| \leqslant \Big(\sum_{i,j} |A_{ij}|^2 \sum_{i,j} |m_{ij}(N)|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

откуда, используя очевидное неравенство

$$\sum_{i,j} |A_{ij}|^2 \leqslant N \max_i \sum_j |A_{ij}|^2 \leqslant N\|A\|^2,$$

получим согласно (1.6)

$$|\mathrm{E}\eta - N^{-1}\,\mathrm{Sp}\,A\,| \leqslant \|A\|\Big(N\sum_{i,j}|\,m_{ij}(N)\,|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|A\|\cdot\varepsilon_1(N).$$

Аналогичным образом из формулы (1.5) найдем

$$\mathrm{E}\,\eta\bar{\eta} = N^{-2}\,|\,\mathrm{Sp}\,A\,|^2 + N^{-2}\sum_{i,j} A_{ij}\bar{A}_{ij} + \sum_{i,j,l,m} A_{ij}\bar{A}_{lm}\varphi_{jl}(N)\bar{\varphi}_{im}(N) +$$
$$+ \sum_{i,j,l,m} A_{ij}A_{lm}d_{ijlm}(N).$$

Второе и четвертое слагаемые правой части оцениваются с помощью неравенства (2.1):

$$N^{-2}\sum A_{ij}\bar{A}_{ij} \leqslant N^{-1}\| A \|^2$$

$$\sum_{i,j,l,m} A_{ij}\bar{A}_{lm}d_{ijlm}(N)| \leqslant \Big(\sum_{i,j,l,m} |A_{ij}|^2 |A_{lm}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i,j,l,m} |d_{ijlm}(N)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \| A \|^2 N \Big(\sum_{i,j,l,m} |d_{ijlm}(N)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \| A \|^2 \varepsilon_3 (N).$$

Оценим теперь третье слагаемое:

$$|\sum_{i,j,l,m} A_{ij}\bar{A}_{lm}\varphi_{jl}(N)\overline{\varphi_{im}(N)}| \leqslant \Big(\sum_{l,e}|\sum_{j} A_{ij}\varphi_{je}(N)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i,l}|\sum_{m} A_{lm}\varphi_{im}(N)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{l}\| A \|^2\sum_{j}|\varphi_{jl}(N)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i}\| A \|^2\sum_{m}|\varphi_{im}(N)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \| A \|^2\sum_{j,l}|\varphi_{jl}|^2 = \| A \|^2 \varepsilon_2 (N).$$

Таким образом,

$$|\,\mathbf{E}\,\eta\bar{\eta} - N^{-2}|\,\mathrm{Sp}\, A\,|^2\,| \leqslant \| A \|^2 \{N^{-1} + \varepsilon_2 (N) + \varepsilon_3 (N)\}. \tag{2.3}$$

Имеем далее

$$\mathbf{E}\,|\eta - N^{-1}\,\mathrm{Sp}\, A\,| \leqslant \{\mathbf{E}\,|\eta - N^{-1}\,\mathrm{Sp}\, A\,|^2\}^{\frac{1}{2}} = \{\mathbf{E}\,\eta\bar{\eta} - N^{-2}|\,\mathrm{Sp}\, A\,|^2 - 2N^{-1} \times$$

$$\times \,\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\, A\,(\mathbf{E}\,\eta - N^{-1}\,\mathrm{Sp}\, A)\}^{\frac{1}{2}},$$

откуда, используя неравенства (2.2) и (2.3) и замечая, что всегда $|N^{-1}\mathrm{Sp}\, A\,| \leqslant \| A \|$ получим,

$$\mathbf{E}\,|\,\eta - N^{-1}\,\mathrm{Sp}\, A\,| \leqslant \| A \| \{N^{-1} + \varepsilon_2 (N) + \varepsilon_3 (N) + 2\varepsilon_1 (N)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому, полагая

$$\varepsilon (N) = \{N^{-1} + \varepsilon_2 (N) + \varepsilon_3 (N) + 2\varepsilon_1 (N)\}^{\frac{1}{2}},$$

будем иметь

$$\mathbf{E}\,|(Aq_1q) - N^{-1}\,\mathrm{Sp}\, A\,| \leqslant \| A \|\,\varepsilon (N),$$

где $\varepsilon (N)$ не зависит от A и в силу условия III стремится к нулю при $N \to \infty$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть эрмитовы операторы $\tilde{A}$ и A, действующие в пространстве H_N, связаны соотношением*

$$\tilde{A} - A = \tau(\cdot,\, q)\, q,$$

где τ — вещественное число, а q — случайный вектор, удовлетворяющий условию III. Тогда для разности следов резольвент $\tilde{R}_z$ и R_z этих операторов имеет место следующая формула:

$$\mathrm{Sp}\,\tilde{R}_z - \mathrm{Sp}\, R_z = -\frac{\partial}{\partial z}\ln (1 + \tau N^{-1}\,\mathrm{Sp}\, R_z) + \delta (q, N),$$

в которой $\delta(q, N)$ — *случайная величина, удовлетворяющая неравенству*

$$\mathbf{E}\,|\delta(q, N)| \leqslant 2\left|\frac{\tau}{(1+\tau N^{-1}\operatorname{Sp} R_z)\,y^2}\right|\varepsilon(N),$$

где $\varepsilon(N)$ *не зависит от* A, z *и* τ *и стремится к нулю при* $N \to \infty$.

Доказательство. Так как детерминант матрицы любого оператора равен произведению всех ее собственных значений, то из тождества

$$\tilde{R}_z = (\tilde{A} - zI)^{-1} = \{A - zI + (\tilde{A} - A)\}^{-1} = \{I + R_z(\tilde{A} - A)\}^{-1} R_z$$

следует, что

$$\prod_1^N (\tilde{\lambda}_k - z) = \prod_1^N (\lambda_k - z)\,\{\det[I + R_z(\tilde{A} - A)]\}^{-1},$$

где $\tilde{\lambda}_k$ и λ_k — собственные значения операторов $\tilde{A}$ и A.

Беря логарифмическую производную по z от обеих частей этого равенства, получим хорошо известную формулу для разности следов резольвент:

$$\operatorname{Sp}\tilde{R}_z - \operatorname{Sp} R_z = -\frac{\partial}{\partial z}\ln\det[I + R_z(\tilde{A} - A)].$$

В частности, если $\tilde{A} - A = \tau(\cdot\,, q)\,q$, то, как легко видеть,

$$\det[I + R_z(\tilde{A} - A)] = 1 + \tau(R_z q, q)$$

и, следовательно, в этом случае

$$\operatorname{Sp}\tilde{R}_z - \operatorname{Sp} R_z = -\frac{\partial}{\partial z}\ln[1 + \tau(R_z q, q)]$$

или

$$\operatorname{Sp}\tilde{R}_z - \operatorname{Sp} R_z = -\frac{\tau(R_z^2 q, q)}{1 + \tau(R_z q, q)}. \tag{2.4}$$

Оценим теперь правую часть этой формулы. Для этого обозначим через $\mathscr{E}_\lambda$ разложение единицы оператора A и введем неубывающую функцию $\alpha(\lambda) = (\mathscr{E}_\lambda q, q)$. Тогда

$$(R_z q, q) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha(\lambda)}{\lambda - z}, \quad (R_z^2 q_\lambda, q) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha(\lambda)}{(\lambda - z)^2},$$

откуда при $z = x + iy$ следует:

$$|1 + \tau(R_z q, q)| \geqslant |\tau\,\operatorname{Im}(R_z q, q)| = |\tau y|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + y^2}$$

$$|\tau(R_z^2 q, q)| \leqslant |\tau|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + y^2},$$

так что

$$\left|\frac{\tau(R_z^2 q, q)}{1 + \tau(R_z q, q)}\right| \leqslant |y|^{-1}. \tag{2.5}$$

Для окончания доказательства леммы перепишем формулу (2. в виде

$$\operatorname{Sp}\tilde{R}_z - \operatorname{Sp}R_z = -\frac{\tau N^{-1}\operatorname{Sp}R_z^2}{1+\tau N^{-1}\operatorname{Sp}R_z} + \delta(q, N),$$

где

$$\delta(q, N) = \frac{\tau N^{-1}\operatorname{Sp}R_z^2}{1+\tau N^{-1}\operatorname{Sp}R_z} - \frac{\tau(R_z^2 q, q)}{1+\tau(R_z q, q)},$$

и оценим математическое ожидание $|\delta(q, N)|$.

Имеем

$$\delta(q, N) = \frac{\tau(R_z^2 q, q)}{1+\tau(R_z q, q)}\cdot\frac{\tau[(R_z q, q) - N^{-1}\operatorname{Sp}R_z]}{1+\tau N^{-1}\operatorname{Sp}R_z} - \frac{\tau}{1+\tau N^{-1}\operatorname{Sp}R_z}\times$$
$$\times[(R_z^2 q, q) - N^{-1}\operatorname{Sp}R_z^2],$$

откуда, используя оценку (2.5), получим

$$|\delta(q, N)| \leqslant \left|\frac{\tau}{y(1+\tau N^{-1}\operatorname{Sp}R_z)}\right|\{|(R_z q, q) - N^{-1}\operatorname{Sp}R_z| + |y|\cdot|(R_z^2 q, q) -$$
$$- N^{-1}\operatorname{Sp}R_z^2|\}.$$

Так как случайный вектор q удовлетворяет условию III, то, переходя в этом неравенстве к математическим ожиданиям и используя при этом лемму 1, будем иметь

$$\mathbf{E}|\delta(q, N)| \leqslant \left|\frac{\tau}{y(1+\tau N^{-1}\operatorname{Sp}R_z)}\right|(\|R_z\| + |y|\cdot\|R_z^2\|)\,\mathscr{E}(N).$$

Из эрмитовости оператора A следует, что $\|R_z\| \leqslant |y|^{-1}$ и $\|R_z^2\| \leqslant$ $\leqslant |y|^{-2}$. Поэтому

$$\mathbf{E}|\delta(q, N)| \leqslant 2\left|\frac{\tau}{y^2(1+\tau N^{-1}\operatorname{Sp}R_z)}\right|\mathscr{E}(N),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь величины τ_j. По условию это независимые случайные величины с одной и той же функцией распределения $\sigma(x)$. Пусть T_n — некоторая реализация n этих случайных величин. Занумеруем полученные в T_n величины в порядке их возрастания:

$$\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n$$

и построим соответствующую этой реализации экспериментальную функцию распределения $\sigma(x, T_n)$, положив

$$\sigma(x, T_n) = \begin{cases} 0 & x \leqslant \tau_1 \\ \dfrac{i}{n} & \tau_i < x \leqslant \tau_{i+1} \\ 1 & x > \tau_n \end{cases}$$

Согласно теореме Гливенко [4], при $n\to\infty$ функции $\sigma(x, T_n)$ почти наверное сходятся к $\sigma(x)$ равномерно на всей оси.

Нам понадобится аналог этой теоремы для функций, обратных $\sigma(x, T_n)$ и $\sigma(x)$. Под обратными функциями мы здесь понимаем функции $\tau(\xi)$ и $\tau(\xi, T_n)$, определенные на интервале $(0,1)$ равенствами

$$\tau(\xi) = \inf_x \{x : \sigma(x) \geqslant \xi\}; \tag{2.8}$$

$$\tau(\xi, T_n) = \inf_x \{x : \sigma(x, T_n) \geqslant \xi\}. \tag{2.8'}$$

Заметим, что из определения функции $\sigma(x, T_n)$ следует:

$$\tau(\xi; T_n) = \tau_{i+1} \text{ при } \frac{i}{n} < \xi \leqslant \frac{i+1}{n} \quad (i = 0, 1, \ldots n-1). \tag{2.9}$$

Лемма 3. При $n \to \infty$ последовательность функций $\tau(\xi, T_n)$ почти наверное сходится в метрике $L^1(0,1)$ к функции $\tau(\xi)$, то есть последовательность

$$\alpha_n = \int_0^1 |\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)|\, d\xi$$

почти наверное сходится к нулю.

Доказательство. Согласно теореме Гливенко, последовательность

$$\beta_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |\sigma(x, T_n) - \sigma(x)|$$

почти наверное сходится к нулю. Поэтому лемма будет доказана, если мы сможем указать такое число C, что при всех n

$$\alpha_n \leqslant C\beta_n.$$

Из определения β_n следует, что если $\sigma(x, T_n) \geqslant \xi$, то $\sigma(x) \geqslant \xi - \beta_n$, а если $\sigma(x) \geqslant \xi + \beta_n$, то $\sigma(x, T_n) \geqslant \xi$. Поэтому

$$\{x : \sigma(x) \geqslant \xi + \beta_n\} \subset \{x : \sigma(x, T_n) \geqslant \xi\} \subset \{x : \sigma(x) \geqslant \xi - \beta_n\},$$

откуда при $\xi \in (\beta_n, 1 - \beta_n)$, согласно определениям функций $\tau(\xi, T_n)$ и $\tau(\xi)$, получим

$$\tau(\xi + \beta_n) \geqslant \tau(\xi, T_n) \geqslant \tau(\xi - \beta_n).$$

Так как функция $\tau(\xi)$ не убывает, то из этих неравенств следует, что

$$|\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)| \leqslant \tau(\xi + \beta_n) - \tau(\xi - \beta_n),$$

если $\beta_n < \xi < 1 - \beta_n$.

По условию, случайная величина τ ограничена, так что

$$|\tau(\xi)| \leqslant M, \quad |\tau(\xi, T_n)| \leqslant M \quad (0 < \xi < 1).$$

Поэтому неравенство

$$\alpha_n = \int_0^1 |\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)|\, d\xi \leqslant 2M$$

выполняется всегда. Если же $\beta_n < \frac{1}{2}$, то

$$\alpha_n = \int_0^1 |\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)|\, d\xi = \int_0^{\beta_n} + \int_{1-\beta_n}^{1} + \int_{\beta_n}^{1-\beta_n} \leqslant 4M\beta_n + \\ + \int_{\beta_n}^{1-\beta_n} |\tau(\xi, T_n) - \tau(\xi)|\, d\xi,$$

откуда, используя неравенство (2,10), найдем

$$\alpha_n \leqslant 4M\beta_n + \int_{\beta_n}^{1-\beta_n} [\tau(\xi+\beta_n) - \tau(\xi-\beta_n)]\, d\xi = 4\beta_n M - \\ - \int_0^{2\beta_n} \tau(t)\, dt + \int_{1-2\beta_n}^{1} \tau(t)\, dt \leqslant 8M\beta_n.$$

Таким образом, при $\beta_n < \frac{1}{2}$

$$\alpha_n \leqslant 8M\beta_n. \tag{2.11}$$

Но это неравенство верно и при $\beta_n \geqslant \frac{1}{2}$, так как α_n никогда не превосходит $2M$. Итак, неравенство (2,11) выполняется всегда, откуда и вытекает справедливость доказываемой леммы.

§ 3. ВЫВОД ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть T_n, Q_n — некоторая реализация случайных величин τ и случайных векторов q, входящих в формулу (1.1).

Занумеруем в этой реализации пары τ_i, q^i в порядке возрастания τ

$$\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n$$
$$q^1, q^2, \ldots q^n$$

и построим цепочку операторов $B_N(j)$ $j = 0, 1, \ldots n$, положив

$$B_N(j) = A_N + \sum_{\alpha=1}^{j} \tau_\alpha q^\alpha(\cdot, q^\alpha), \tag{3.1}$$

так что $B_N(0) = A_N$, а $B_N(n)$ — интересующий нас оператор (1.1). Резольвенты операторов $B_N(j)$ обозначим через $R_z(j)$. Каждой реализации T_n, Q_n будем сопоставлять функцию $u(z, \xi; N, T_n, Q_n)$, определенную при всех невещественных z и вещественных $\xi \in [0, 1]$ равенствами

$$u(z, \xi; N, T_n, Q_n) = N^{-1}\operatorname{Sp} R_z(j) + \frac{n}{N}\operatorname{Sp}\{R_z(j+1) - R_z(j)\}\left(\xi - \frac{j}{n}\right) \tag{3.2}$$

для

$$\xi \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right], \quad j = 0, 1, \ldots n-1.$$

Заметим, что $u(z, 0; N, T_q, Q_n)$ и $u(z, 1; N, T_n, Q_n)$ являются преобразованиями Стильтьеса нормированных спектральных функций операторов A_N и $B_N(n)$:

$$u(z, 0; N, T_n, Q_n) = N^{-1}\operatorname{Sp} R_z(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu(\lambda; N)}{\lambda - z}, \tag{3.3}$$

$$u(z,\ 1;\ N,\ T_n,\ Q_n) = N^{-1}\operatorname{Sp} R_z(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu(\lambda;\ N,\ T_n,\ Q_n)}{\lambda - z}. \qquad (3.3')$$

Из определения (3.2) функций $u(z,\ \xi;\ N,\ T_n,\ Q_n)$ видно, что они непрерывны во всей области определения, причем по z они голоморфны, а по ξ — кусочно линейны.

Покажем, что множество функций $u(z,\ \xi;\ N,\ T_n,\ Q_n)$ и множество их производных $u_z'(z,\ \xi;\ N,\ T_n,\ Q_n)$ компактны относительно равномерной сходимости по $\xi \in [0,1]$ и $z \in G$, где G — любое ограниченное множество, расстояние от которого до вещественной оси строго больше нуля. Из неравенств ($\operatorname{Im} z = y$)

$$|N^{-1}\operatorname{Sp} R_z| \leqslant |y|^{-1}, \ \left|N^{-1}\frac{d}{dz}\operatorname{Sp} R_z\right| \equiv |N^{-1}\operatorname{Sp} R_z^2| \leqslant |y|^{-2}, \qquad (3.4)$$

справедливых для резольвент любых самосопряженных операторов, и формулы (3.2) следует:

$$|u(z,\ \xi;\ N,\ T_n,\ Q_n)| \leqslant |y^{-1}|, \quad |u_z'(z,\ \xi;\ N,\ T_n,\ Q_n)| \leqslant |y^{-2}|. \qquad (3,5)$$

Так как операторы $B_N(j+1)$ и $B_N(j)$ отличаются на одномерный оператор $\tau_{j+1}(\cdot,\ q^{j+1})q^{j+1}$, то к их резольвентам $R_z(j+1)$ и $R_z(j)$ применима формула (2.4).

Поэтому

$$\operatorname{Sp}\{R_z(j+1) - R_z(j)\} = -\frac{\tau_{j+1}(R_z^2(j)q^{j+1},\ q^{j+1})}{1+\tau_{j+1}(R_z(j)q_{j+1},\ q_{j+1})},$$

откуда, согласно неравенству (2.5), получим

$$|\operatorname{Sp}\{R_z(j+1) - R_z(j)\}| \leqslant |y|^{-1} \qquad (3.6)$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi} u(z,\ \xi;\ N,\ T_n,\ Q_n)\right| \leqslant \frac{n}{N}|y|^{-1}. \qquad (3.7)$$

Так как функция

$$\frac{\partial}{\partial\xi} u(z,\ \xi;\ N,\ T_n,\ Q_n) = \frac{n}{N}\operatorname{Sp}\{R_z(j+1) - R_z(j)\},\ \ \frac{j}{n} \leqslant \xi \leqslant \frac{j+n}{n}$$

голоморфна по z, то, используя оценку Коши для производной голоморфной функции в центре круга через максимум ее модуля на окружности, получим согласно (3.6):

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi} u_z'(z,\ \xi;\ N,\ T_n,\ Q_n)\right| \leqslant 4\frac{n}{N}|y|^{-2}. \qquad (3.8)$$

Неравенства (3.5), (3.7) и (3.8), очевидно, гарантируют нужную нам компактность множеств $\{u(z,\ \xi;\ N,\ T_n,\ Q_n)\}$ и $\{u_z'(z,\ \xi;\ N,\ T_n,\ Q_n)\}$.

Теперь мы будем рассматривать функции $u(z,\ \xi;\ N,\ T_n,\ Q_n)$ при z, лежащих в полуплоскостях $|\operatorname{Im} z| \geqslant 3M$, где M — число, ограничивающее модули случайных величин τ (см. условие IV).

Пусть $\tau(\xi)$ — определенная формулой (2.8) обобщенная обратная функции распределения $\sigma(x)$ случайной величины τ и G — любое ограниченное множество, лежащее в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 3M$.

Лемма 4. Если выполнены условия I, II, III, IV', то при $N \to \infty$ математическое ожидание величины

$$\varphi_N = \sup_{\substack{0<t<1 \\ z \in G}} \left| u(z, t; N, T_n, Q_n) - m_0(z) + c \int_0^t \frac{\tau(\xi)\, u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n)}{1+\tau(\xi)\, u(z, \xi; N, T_n, Q_n)} d\xi \right|$$

стремится к нулю: $\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\varphi_N = 0$.

Доказательство. Из формулы (3.2) и неравенства (3.6) следует, что при $\xi \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$

$$|u(z, \xi; N, T_n, Q_n) - N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(j)| \leqslant N^{-1} |y|^{-1}. \tag{3.9}$$

Используя это неравенство и оценку Коши для производной голоморфной функции, получим также

$$|u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n) - N^{-1} \operatorname{Sp} R_z^2(j)| \leqslant 4N^{-1} |y|^{-1}. \tag{3.10}$$

Операторы $B_N(j+1)$ и $B_N(j)$ отличаются на одномерный оператор $\tau_{j+1}(\cdot, q^{j+1})\, q^{j+1}$, и, следовательно, к их резольвентам $R_z(j+1)$ и $R_z(j)$ применима лемма 2. Используя эту лемму, мы можем преобразовать формулу (3.2) к такому виду:

$$u(z, \xi; N, T_n, Q_n) = N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(j) - \frac{n}{N} \frac{\tau_{j+1} N^{-1} \operatorname{Sp} R_z^2(j)}{1+\tau_{j+1} N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(j)} \left(\xi - \frac{j}{n}\right) + N^{-1} \theta_j(\xi)\, \delta_j(q^{j+1}, N), \tag{3.11}$$

где $0 \leqslant \theta_j(\xi) = n\left(\xi - \frac{j}{n}\right) \leqslant 1$ и

$$\mathrm{E}\, |\delta_j(q^{j+1}, N)| \leqslant 2 \left| \frac{\tau_{j+1}}{y^2 (1+\tau_{j+1} N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(j))} \right| \varepsilon(N),$$

причем $\varepsilon(N) \to 0$ при $N \to \infty$. При $\operatorname{Im} z > 3M$ из оценки (3.4) и неравенства $|\tau_{j+1}| \leqslant M$ следует, что

$$|1+\tau_{j+1} N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(j)| \geqslant \frac{2}{3} \tag{3.12}$$

и в частности,

$$\mathrm{E}\, |\delta_j(q^{j+1}, N)| \leqslant 3M\varepsilon(N). \tag{3.13}$$

Согласно формуле (2.9), $\tau_{j+1} = \tau(\xi, T_n)$ при $\xi \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$, где $\tau(\xi, T_n)$—функция, определенная равенством (2.8'). Поэтому при $t \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$

$$\frac{n}{N} \cdot \frac{\tau_{j+1} N^{-1} \operatorname{Sp} R_z^2(j)}{1+\tau_{j+1} N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(j)} \left(t - \frac{j}{n}\right) = \frac{n}{N} \int_{\frac{j}{n}}^{t} \frac{\tau(\xi, T_n) N^{-1} \operatorname{Sp} R_z^2(j)}{1+\tau(\xi, T_n) N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(j)} d\xi.$$

Заменив в правой части этого равенства $\tau(\xi, T_n)$ на $\tau(\xi)$, $N^{-1} \operatorname{Sp} R_z(j)$ на $u(z, \xi; N, T_n, Q_n)$ и $N^{-1} \operatorname{Sp} R_z^2(j)$ на $u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n)$

и оценив получающуюся при этом погрешность с помощью неравенств (3.9), (3.10), (3.12), получим неравенство

$$\left|\frac{n}{N}\frac{\tau_{j+1}N^{-1}\operatorname{Sp}R_z^2(j)}{1+\tau_{j+1}N^{-1}\operatorname{Sp}R_z(j)}\left(t-\frac{j}{n}\right)-\frac{n}{N}\int\limits_{\frac{j}{n}}^{t}\frac{\tau(\xi)\,u_z'(z,\xi;N,T_n,Q_n)}{1+\tau(\xi)\,u(z,\xi;N,T_n,Q_n)}\,d\xi\right|<$$

$$<\frac{n}{NM^2}\int\limits_{\frac{j}{n}}^{t}|\tau(\xi,T_n)-\tau(\xi)|\,d\xi+3N^{-2}M^{-1},$$

справедливое при всех $t\in\left[\frac{j}{n},\ \frac{j+1}{n}\right]$ и всех z из полуплоскости $\operatorname{Im}z>3M$. Так как

$$u\left(z,\ \frac{j}{n};\ N,\ T_n,\ Q_n\right)=N^{-1}\operatorname{Sp}R_z(j),$$

то из последнего неравенства и формулы (3.11) следует, что

$$\left|u(z,\ t;\ N,\ T_n,\ Q_n)-u\left(z,\frac{j}{n};\ N,\ T_n,\ Q_n\right)+\frac{n}{N}\int\limits_{\frac{j}{n}}^{t}\frac{\tau(\xi)\,u_z'(z,\xi;N,T_n,Q_n)}{1+\tau(\xi)\,u(z,\xi;N,T_n,Q_n)}\times\right.$$

$$\left.\times\,d\xi\right|\leqslant\frac{n}{NM^2}\int\limits_{\frac{j}{n}}^{t}|\tau(\xi,T_n)-\tau(\xi)|\,d\xi+3N^{-2}M^{-1}+N^{-1}|\delta_j(q^{j+1},N)|$$

при всех $t\in\left[\frac{j}{n},\ \frac{j+1}{n}\right]$ и всех z из полуплоскости $\operatorname{Im}z>3M$. Складывая полученные неравенства, получим для функции

$$\varphi(z,\ t;\ N,\ T_n,\ Q_n)=u(z,\ t;\ N,\ T_n,\ Q_n)-m_0(z)+$$
$$+c\int\limits_{0}^{t}\frac{\tau(\xi)\,u_z'(\xi,\ z;\ N,\ T_n,\ Q_n)\,d\xi}{1+\tau(\xi)\,u(z,\ \xi;\ N,T_n,Q_n)}\tag{3.14}$$

такую оценку:

$$|\varphi(z,\ t;\ N,\ T_n,\ Q_n)|\leqslant\frac{n}{NM^2}\int\limits_{0}^{1}|\tau(\xi,\ T_n)-\tau(\xi)|\,d\xi+|\,m_0(z)-$$

$$-u(z,\ 0;\ N,\ T_n,\ Q_n)|+3N^{-1}M^{-1}+\left|c-\frac{n}{N}\right|M^{-1}+N^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}|\delta_j(q^{j+1},\ N)|,$$

откуда, согласно (3.13), следует:

$$\mathbf{E}|\varphi(z,\ t;\ N,\ T_n,\ Q_n)|\leqslant\frac{n}{NM^2}\mathbf{E}\int\limits_{0}^{1}|\tau(\xi,\ T_n)-\tau(\xi)|\,d\xi+$$

$$+|m_0(z)-u(z,\ 0;\ N,\ T_n,\ Q_n)|+3N^{-1}M^{-1}+\left|c-\frac{n}{M}\right|M^{-1}+\frac{n}{N}\cdot 3M\varepsilon(N).$$

Из этого неравенства, формулы (3.3), условий I, II, и леммы 3 выводим, что

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{E} |\varphi(z,\ t;\ N,\ T_n,\ Q_n)| = 0 \tag{3.15}$$

при каждых фиксированных z, t ($\operatorname{Im} z > 3M$, $t \in [0,1]$).

Заметим теперь, что из неравенств (3.5), (3.7), (3.8) следует, что функции $u(z,\ t;\ N,\ T_n,\ Q_n)$, $u_z'(z,\ t;\ N,\ T_n,\ Q_n)$, а значит, и $\varphi(z,\ t;\ N,\ T_n,\ Q_n)$, равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Поэтому на множестве $0 \leqslant t \leqslant 1$; $z \in G$ можно для всех функций $\varphi(z,\ t;\ N,\ T_n,\ Q_n)$ выбрать конечную общую ε-сеть $t_1,\ z_1;\ t_2,\ z_2;\ \ldots\ t_{m_\varepsilon},\ z_{m_\varepsilon}$, так что

$$\varphi_N = \sup_{\substack{0 \leqslant t \leqslant 1 \\ z \in G}} |\varphi(z,\ t;\ N,\ T_n,\ Q_n)| \leqslant \varepsilon + \max_{1 \leqslant i \leqslant m_\varepsilon} |\varphi(z_i,\ t_i;\ N,\ T_n,\ Q_n)|$$

и, следовательно,

$$\mathbf{E}\varphi_N \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \mathbf{E} |\varphi(z_i,\ t_i;\ N,\ T_n,\ Q_n)|,$$

Из этого неравенства при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ получим, согласно (3.15),

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \mathbf{E}\varphi_N < \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}\varphi_N = 0,$$

что и требовалось доказать.

Из доказанной леммы, очевидно, следует, что обязательно существуют такие реализации T_n', Q_n', для которых

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\substack{0 \leqslant t \leqslant 1 \\ z \in G}} \left| u(z),\ t;\ N,\ T_n',\ Q_n' - m_0(z) + c \int_0^t \frac{\tau(\xi)\, u_z'(z,\ \xi;\ N,\ T_n',\ Q_n')}{1 + \tau(\xi)\, u(z,\xi;\ N, T_n', Q_n')}\, d\xi \right| = 0.$$

Выше мы доказали компактность множества функций $u(z,\ t;\ N,\ T_n,\ Q_n)$ и $u_z'(z,\ t;\ N,\ T_n,\ Q_n)$. Поэтому из последовательности $u_z(z,\ t;\ N,\ T_n',\ Q_n')$ можно выделить такую подпоследовательность, которая равномерно по $t \in [0,1]$ и $z \in G$ сходится к функции $u(z,\ t)$, удовлетворяющей уравнению

$$u(z,\ t) = m_0(z) - c \int_0^t \frac{\tau(\xi)\, u_z'(z,\ \xi)}{1 + \tau(\xi)\, u(z,\ \xi)}\, d\xi. \tag{3.16}$$

Таким образом, это уравнение имеет по крайней мере одно решение, непрерывное по t, z ($t \in [0,1]$; $\operatorname{Im} z > 3M$)* и голоморфное по z при фиксированном t. При этом из неравенства (3.5) следует, что

$$|u,\ z,\ t)| \leqslant (3M)^{-1} \quad (\operatorname{Im} z > 3M).$$

---

* Из оценок (3.5) следует, что функция $u(z,\ t)$ голоморфна по z при $\operatorname{Im} z > 0$, а из (3.2) — что $\operatorname{Im} u(z,\ t) > 0$. Поэтому обе части уравнения (3.16) голоморфны во всей верхней полуплоскости и, следовательно, функция $u(z,\ t)$ удовлетворяет этому уравнению при всех z, лежащих в верхней полуплоскости.

Обозначим через $K(M)$ множество функций $f(z, t)$ непрерывных по совокупности переменных z, t в некотором цилиндре $0 \leqslant t \leqslant 1$; $|z - z_0| \leqslant R$, голоморфных по z ($|z - z_0| \leqslant R$) при любом фиксированном $t \in [0,1]$ и ограниченных по модулю числом M^{-1}:

$$\sup_{\substack{0 \leqslant t \leqslant 1 \\ |z - z_0| \leqslant R}} |f(z, t)| < M^{-1}.$$

Слегка видоизменяя метод Хаара [5], мы докажем, что в множестве $K(M)$ уравнение (3.16) может иметь только одно решение.

Лемма 5. *В множестве $K(M)$ уравнение* (3.16) *не может иметь двух различных решений.*

Доказательство. Пусть $u_1(z, t)$ и $u_2(z, t)$ — какие-нибудь решения уравнения (3.16), принадлежащие множеству $K(M)$.

Обозначим через ξ_0 точную верхнюю границу множества $\xi \in [0,1]$, обладающего тем свойством, что разность решений

$$v(z, t) = u_1(z, t) - u_2(z, t)$$

тождественно равна нулю при всех $t \in [0, \xi]$. Нам нужно доказать, что $\xi_0 = 1$. Допустим противное. Тогда функция $v(z, t)$ равна нулю в цилиндре $0 \leqslant t \leqslant \xi_0$; $|z - z_0| \leqslant R$, но при любом $h > 0$ в цилиндре $\xi_0 \leqslant t \leqslant \xi_0 + h$; $|z - z_0| \leqslant R$ найдутся точки, где $v(z, t) \neq 0$. Далее из уравнения (3.16) следует, что при $\xi_0 \leqslant t \leqslant 1$; $|z - z_0| \leqslant R$

$$v(z, t) = \int_{t_0}^{t} [A(z, \xi) v(z, \xi) + B(z, \xi) v_z'(z, \xi)] d\xi,$$

где голоморфные по z функции

$$A(z, \xi) = \frac{c\tau^2(\xi) u_{1z}'(z_1, \xi)}{[1 + \tau(\xi) u_1(z, \xi)][1 + \tau(\xi) u_2(z, \xi)]},$$

$$B(z, \xi) = \frac{-c\tau(\xi)}{1 + \tau(\xi) u_2(z, \xi)}$$

равномерно ограничены в цилиндре $0 \leqslant \xi \leqslant 1$; $|z - z_0| \leqslant \frac{R}{2}$, так как из неравенства $|\tau(\xi)| \leqslant M$ и принадлежности функций $u_1(z, \xi)$, $u_2(z, \xi)$ множеству $K(M)$ следует, что модули $|1 + \tau(\xi) u_i(z, \xi)|$, $i = 1, 2$ ограничены снизу положительным числом. Обозначим через L верхнюю границу модулей $A(z, \xi)$, $B(z, \xi)$ и рассмотрим функцию $v(z, t)$ в конусе

$$\xi_0 \leqslant t \leqslant \xi_0 + T; \quad |z - z_0| \leqslant (\xi_0 + T - t)\frac{R}{2T}, \tag{3.17}$$

где

$$T = \min\left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{R}{1 + L}, \ 1 - \xi_0\right\}.$$

Она не может быть тождественно равна нулю в этом конусе, так как тогда, в силу аналитичности по z, она была бы равна нулю во всем *цилиндре $\xi_0 \leqslant t \leqslant \xi_0 + T$; $|z - z_0| \leqslant R$, что противоречит определению ξ_0*. Поэтому в конусе модуль функции $e^{-2Lt}v(z, t)$ достигает положительного максимума в некоторой точке $t_1 z_1$. При достаточно малом $s > 0$ и любом комплексном α, удовлетворяющем условию $|\alpha| < L+1$, точки $z_1 - \alpha s$, $t_1 - s$ лежат в конусе (3.17) и, следовательно, модуль функции

$$e^{-2L(t_1-s)}v(z_1 - \alpha s, t_1 - s,)$$

не больше модуля $e^{-2Lt_1}(z_1, t_1)$. Так как функция $v(z, t)$ непрерывна во всем исходном цилиндре, то из интегральной формулы Коши для производных следует, что функция $v'_z(z, t)$ заведомо непрерывна в конусе (3.17). Поэтому при $s \to 0$

$$v(z_1 - \alpha s, t_1 - \alpha s) = v(z_1, t_1 - s) - \alpha s[v'_z(z_1, t_1) + o(1)]. \qquad (3.18)$$

Имеем далее

$$v(z_1, t_1) - v(z_1, t_1 - s) = \int_{t_1-s}^{t_1} [A(\overline{z_1, \xi})v(z_1, \xi) + B(z_1, \xi)v'_z(z_1, \xi)]\,d\xi,$$

откуда при $s \to +0$ следует, что

$$v(z_1, t_1) - v(z_1, t_1 - s) = s[Av(z_1, t_1) + Bv'_z(z_1, t_1) + o(1)], \qquad (3.19)$$

где

$$A = \lim_{s\to+0} A(z_1, t_1 - s); \quad B = \lim_{s\to+0} B(z_1, t_1 - s).$$

Существование последних пределов гарантирует монотонность функции $\tau(\xi)$ и непрерывность функций $u_i(z, \xi)$; $u'_{iz}(z, \xi)$ $(i = 1,2)$. Из формул (3.18) и (3.19) следует, что при $s \to +0$

$$e^{-2L(t_1-s)}v(z_1 - \alpha s, t_1 - s) = e^{-2L(t_1-s)}\{(1 - sA)v(z_1, t_1) -$$
$$- s(A + B)v'_z(z_1, t_1) + so(1)\} = e^{-2Lt_1}v(z_1, t_1)\left\{1 + 2LS\left[1 - \frac{A}{2L} -\right.\right.$$
$$\left.\left. \frac{\alpha + B}{2L} \times \frac{v'_z(z_1, t_1)}{v(z_1, t_1)} + o(1)\right]\right\},$$

и если взять здесь $\alpha = -B - e^{i\varphi_0}$, где

$$\varphi_0 = \arg\frac{v'_z(z_1, t_1)}{v(z_1, t_1)},$$

то

$$e^{-2L(t_1-s)}v(z_1 - \alpha s, t_1 - s) = \{1 + 2Ls[1 - \frac{A}{2L} + \frac{1}{2L}\left|\frac{v'_z(z_1, t_1)}{v(z_1, t_1)}\right| +$$
$$+ o(1)]\}e^{-2Lt_1}v(z_1, t_1).$$

Так как $|A| \leqslant L$, то при достаточно малых $s > 0$ вещественная часть выражения, стоящего в фигурных скобках, станет больше, чем $1 + \frac{2}{3}Ls$. Значит, и модуль этого выражения станет больше $1 + \frac{2}{3}Ls$, откуда следует, что

$$|e^{-2L(t_1-s)}v(z_1 - \alpha s, t_1 - s)| > |e^{-2Lt_1}v(z_1, t_1)| \qquad (3.20)$$

при достаточно малых $s > 0$. С другой стороны, так как $|B| \leqslant L$, то $|\alpha| \leqslant L + 1$ и, следовательно, $t_1 - s$, $z_1 - \alpha s$ при малых $s > 0$ лежит в конусе (3.17), что несовместимо с неравенством (3.20), в правой части которого стоит максимум модуля функции $e^{-2Lt}v(z, t)$ в этом конусе. Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение $\xi_0 < 1$ неверно, что и требовалось доказать.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

В предыдущем параграфе мы установили существование такой последовательности $N = N'$ и реализаций T'_n, Q'_n, что

$$\lim_{N' \to \infty} u(z, t; N', T'_n, Q'_n) = u(z, t),$$

где $u(z, t)$ — решение уравнения (3.16). Рассмотрим соответствующую последовательность нормированных спектральных функций $\nu(\lambda; N, T_n, Q_n)$. Согласно теоремам Хелли, из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $\nu'(\lambda)$ во всех ее точках непрерывности, причем согласно формуле (3.3')

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu'(\lambda)}{\lambda - z} = \lim_{N' \to \infty} u(z, 1; N', T'_n, Q'_n) = u(z, 1).$$

Из этой формулы при $y \to +\infty$ следует

$$\nu'(+\infty) - \nu'(-\infty) = -i \lim_{y \to +\infty} yu(iy, 1),$$

а непосредственно из уравнения (3.16), оценок (3.5) и определения (1.9) функции $m_0(z)$ —

$$-i \lim_{y \to +\infty} yu(iy, 1) = -i \lim_{y \to +\infty} ym_0(iy) = \nu(+\infty) - \nu(-\infty).$$

Поэтому

$$\nu'(+\infty) - \nu'(-\infty) = \nu(+\infty) - \nu(-\infty). \tag{4.1}$$

Формула обращения (1,8) позволяет по функции $u(z,1)$ найти $\nu'(\lambda)$ с точностью до постоянного слагаемого, которое мы пока не знаем. В связи с этим мы введем функцию

$$\nu(\lambda; c) = \nu'(\lambda) + \nu(+\infty) - \nu'(-\infty),$$

которая имеет, во-первых, то же преобразование Стильтьеса, что $\nu'(\lambda)$ и, во-вторых, согласно (4.1), те же пределы на $\pm\infty$, что $\nu(\lambda)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu(\lambda; c)}{\lambda - z} = u(z, 1); \tag{4.2}$$

$$\nu(+\infty; c) = \nu(+\infty); \quad \nu(-\infty; c) = \nu(-\infty). \tag{4.3}$$

Таким образом, согласно формуле обращения (1. 8), во всех точках непрерывности

$$\nu(\lambda; c) = \nu(-\infty) + \lim_{\mu \to -\infty} \left\{ \lim_{y \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\lambda} \operatorname{Im} u(x + iy, 1)\, dx \right\}. \tag{4.4}$$

Для доказательства первых двух утверждений теоремы, сформулированной в начале работы, нам нужно показать, что при $N \to \infty$ последовательность $\nu(\lambda; N, T_n, Q_n)$ сходится по вероятности к $\nu(\lambda; c)$ во всех ее точках непрерывности. Нетрудно заметить, что для этого достаточно доказать справедливость при любом $\varepsilon > 0$ равенств

$$\lim_{N\to\infty} P\{|\nu(\lambda_1; N, T_n, Q_n) - \nu(\lambda_0; N, T_n, Q_n) - \nu(\lambda_1; c) + \nu(\lambda_0; c)| < \varepsilon\} = 1; \tag{4.5}$$

$$\lim_{N\to\infty} P\{\nu(-\infty; c) - \varepsilon < \nu(\lambda; N, T_n, Q_n) < \nu(+\infty; c) + \varepsilon)\} = 1. \tag{4.6}$$

где λ_1 и λ_0 — любые фиксированные точки непрерывности функции $\nu(\lambda; c)$, а λ — любое фиксированное вещественное число. Сначала мы установим справедливость формулы (4.5), а затем с ее помощью докажем равенство (4.6).

Положим для краткости

$$\Delta(\lambda; c) = \nu(\lambda; c) - \nu(\lambda; c);$$
$$\Delta(\lambda; N, T_n, Q_n) = \nu(\lambda; N, T_n, Q_n) - \nu(\lambda_0; N, T_n Q_n),$$

где λ — любая фиксированная точка непрерывности функции $\nu(\lambda; c)$. Допустим, что формула (4.5) неверна. Тогда найдется такая точка непрерывности λ_1 функции $\nu(\lambda; c)$, что при некотором $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} P\{|\Delta(\lambda_1; N, T_n, Q_n) - \Delta(\lambda_1; c)| \geqslant \varepsilon\} = \delta > 0$$

и, следовательно, существует такая подпоследовательность $N = N_k$, для которой

$$P\{|\Delta(\lambda_1; N, T_n, Q_n) - \Delta(\lambda_1; c)| \geqslant \varepsilon\} > \frac{1}{2}\delta. \tag{4.7}$$

С другой стороны, в силу леммы 4 по данному m найдется такое $N(m)$, что при $N > N(m)$:

$$P\left\{\sup_{\substack{0<t<1\\ z\in G}} \left| u(z, t; N, T_n, Q_n) - m_0(z) + c\int_0^t \frac{\tau(\xi)\, u_z'(z, \xi; N, T_n, Q_n)}{1 + \tau(\xi)\, u(z, \xi; N, T_n, Q_n)} d\xi \right| < \frac{1}{m}\right\} > 1 - \frac{\delta}{4}. \tag{4.8}$$

Поэтому из последовательности N_k можно выделить такую подпоследовательность N_m', что при $N = N_m'$ выполняются оба неравенства (4.7) и (4.8). Так как всегда $P(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{L}) \geqslant P(\mathfrak{A}) + P(\mathfrak{L}) - 1$, то при $N = N_m'$ вероятность одновременного осуществления неравенств

$$|\Delta(\lambda; N, T_n, Q_n) - \Delta(\lambda; c)| \geqslant \varepsilon, \tag{4.9}$$

$$\sup_{\substack{0<t<1\\ z\in G}} \left| u(z, t); N, T_n, Q_n) - m_0(z) + c\int_0^t \frac{\tau(\xi)\, u_t'(z,\xi; N, T_n, Q_n)}{1 + \tau(\xi)\, u(z, \xi, N, T_n, Q_n)} d\xi \right| < \frac{1}{m} \tag{4.10}$$

не меньше, чем $\frac{1}{2}\delta + 1 + \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{4} > 0$. Значит при всех $N = N_m'$ обязательно существуют такие реализации T_n'', Q_n'', при которых имеют места оба неравенства (4.9), (4.10).

Из компактности множеств $\{u(z,\ t;\ N,\ T_n,\ Q_n)\}$, $\{u_z'(z,\ t;\ N,\ T_n,\ Q_n)\}$ и теорем Хелли следует, что из последовательности N'_m можно выделить такую подпоследовательность N''_m, что равномерно по $t \in [0,1]$, $z \in G$

$$\lim_{N''_m \to \infty} u(z,\ t;\ N''_m,\ T''_n,\ Q''_n) = u_1(z,\ t)$$

и во всех точках непрерывности

$$\lim_{N''_m \to \infty} \nu(\lambda;\ N''_m,\ T''_n,\ Q''_n) = \tilde{\nu}(\lambda;\ c).$$

При этом, согласно (4.9),

$$|\tilde{\nu}(\lambda_1;\ c) - \tilde{\nu}(\lambda_0;\ c) - \nu(\lambda_1;\ c) + \nu(\lambda_0;\ c)| > \varepsilon; \tag{4.11}$$

согласно (4,10), функция $u_1(z,\ t)$ удовлетворяет уравнению (3.16) и, согласно (3.3′),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\nu}(\lambda;\ c)}{\lambda - z} = u_1(z,\ 1).$$

Так как уравнение (3.16) не может иметь двух различных решений (лемма 5), то $u_1(z,\ t) = u(z,\ t)$, откуда при $t = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\nu}(\lambda;\ c)}{\lambda - z} \equiv u(z,\ 1) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu(\lambda;\ c)}{\nu - z},$$

что противоречит неравенству (4.11). Следовательно, сделанное предположение неверно и формула (4.5) верна.

Таким образом, мы получили следующий предварительный результат: если λ_0, λ_1 — точки непрерывности функции $\nu(\lambda;\ c)$, то относительное число собственных значений операторов $B_N(n)$, лежащих в интервале $(\lambda_0,\ \lambda_1)$, при $N \to \infty$ сходится по вероятности к приращению $\nu(\lambda;\ c)$ на этом интервале, которое, согласно (4.4), выражается через взятое при $t = 1$ решение уравнения (3.16) по формуле

$$\nu(\lambda_1;\ c) - \nu(\lambda_0;\ c) = \frac{1}{\pi} \lim_{y \to +0} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \operatorname{Im} u(x + iy,\ 1)\, dx.$$

Мы воспользуемся этим результатом для некоторых оценок случайной части оператора $B_N(n)$. Для этого положим все $A_N = 0$, а τ_i возьмем неслучайными и равными M. Этот случай уже был рассмотрен в § 1 (пример 1). Для нас сейчас существенно только то, что из полученного там выражения для $u(z,\ 1)$ вытекает справедливость равенства

$$\frac{1}{\pi} \lim_{y \to +0} \int_{-\delta}^{a} \operatorname{Im} u(x + iy,\ 1)\, dx = 1$$

при всех $\delta > 0$ и $a > M(1 + \sqrt{c})^2$. Согласно вышесказанному, это означает, что вероятность наличия у оператора $M \sum_{i=1}^{n} (\cdot,\ q^i) q^i$ более чем εN

собственных значений, лежащих правее точки $d = M(1+\sqrt{c})^2$, стремится к нулю при $N \to \infty$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Если выполнено условие IV ($|\tau_i| \leqslant M$), то неравенство

$$-M\sum_{i=1}^{n}(\cdot, q^i)q^i \leqslant \sum_{i=1}^{n}\tau_i(\cdot, q^i)q^i \leqslant M\sum_{i=1}^{n}(\cdot, q^i)q^i \tag{4.12}$$

выполняется всегда*. Следовательно, вероятность того, что у оператора $\sum_{i=1}^{n}\tau_i(\cdot, q^i)q^i$ вне интервала $(-d, d)$ лежит более чем εN собственных значений, стремится к нулю при $N \to \infty$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает такое разложение:

$$\sum_{i=1}^{n}\tau_i(\cdot, q^i)q^i = D_1 + D_2, \tag{4.13}$$

где D_1 и D_2 — эрмитовы операторы, причем

$$\|D_1\| \leqslant M(1+\sqrt{c})^2 = d, \tag{4.14}$$

и вероятность того, что у оператора D_2 более чем εN собственных значений, отличных от нуля, стремится к нулю при $N \to \infty$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$.

Имеем согласно неравенству (4.12) и формулам (4.13), (1.1)

$$A_N - dI + D_2 \leqslant B_N(n) \leqslant A_N + dI + D_2. \tag{4.15}$$

Пусть $\nu(\lambda; N)$ — нормированная спектральная функция оператора A_N. Тогда нормированные спектральные функции операторов $A_N - dI$ и $A_N + dI$ равны соответственно $\nu(\lambda + d; N)$ и $\nu(\lambda - d; N)$. Так как добавление оператора D_2 может изменить число собственных значений, лежащих в каком-нибудь интервале, не более чем на размерность области значений оператора D_2, то нормированная спектральная функция оператора, стоящего в левой (правой) части неравенства (4.15), не больше, чем $\nu(\lambda + d; N) + \mu(D_2)$ (не меньше, чем $\nu(\lambda - d; N) - \mu(D_2)$), где $N\mu(D_2)$ — число отличных от нуля собственных значений оператора D_2. Поэтому для интересующей нас нормированной спектральной функции $\nu(\lambda; N, T_n, Q_n)$ оператора $B_N(n)$ справедливы такие оценки:

$$\nu(\lambda + d; N) + \mu(D_2) \geqslant \nu(\lambda; N, T_n, Q_n) \geqslant \nu(\lambda - d; N) - \mu(D_2),$$

причем, согласно предыдущему,

$$\lim_{N\to\infty} P\{\mu(D_2) > \varepsilon\} = 0$$

при любом $\varepsilon > 0$. Так как, согласно условию I, $\nu(\lambda; N) \to \nu(\lambda)$ при $N \to \infty$, то из полученных оценок следует, что

$$\lim_{N\to\infty} P\{\nu(\lambda + d) + \varepsilon \geqslant \nu(\lambda; N, T_n, Q_n) \geqslant \nu(\lambda - d) - \varepsilon\} = 1,$$

* Мы пишем для эрмитовых матриц $A \leqslant B$, если все собственные значения оператора $B - A$ неотрицательны.

если $\varepsilon > 0$, откуда, используя очевидные неравенства $\nu(+\infty) \geqslant \nu(\lambda) \geqslant \nu(-\infty)$, выводим

$$\lim_{N\to\infty} P\{\nu(+\infty)+\varepsilon \geqslant \nu(\lambda; N, T_n, Q_n) \geqslant \nu(-\infty)-\varepsilon\} = 1.$$

Справедливость формулы (4.6) является следствием этого равенства и формул (4.3).

Итак, оба первых утверждения теоремы доказаны. Существование и единственность решения уравнения (3.16) были установлены раньше. Эквивалентность этого уравнения уравнению в частных производных (1.12) очевидна. Что же касается формулы (1.13), то ее проще всего непосредственно проверить.

Таким образом, сформулированная в первом параграфе теорема доказана полностью.

В связи с доказанной теоремой заметим, что

1) числа $\nu(-\infty; c)$ и $1-\nu(+\infty; c)$ равны относительному числу собственных значений оператора $B_N(\pi)$, ушедших соответственно в $-\infty$ и $+\infty$;

2) вместо условия I достаточно потребовать сходимости $\nu(\lambda; N)$ к $\nu(\lambda)$ по вероятности, считая A_N случайным оператором, независящим от τ_i, q^i.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. J. Dyson. Phys. Rev., 92, 1331 (1953).
2. И. М. Лифшиц. О структуре энергетического спектра и квантовых состояний неупорядоченных конденсированных систем. «Усп. физ. наук», т. 83, вып. 4, (1964), 617—665.
3. E. P. Wigner. Ann. Math., 65, 203 (1957).
4. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
5. А. Д. Мышкис. Единственность решения задачи Коши. «Усп. матем. наук», т. 3, вып. 2 (1948).

Поступила 26 марта 1966 г.