УДК 517.53

И. В. ОСТРОВСКИЙ

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ

§ 1. Формулировки основных результатов. В 60-х гг. Н. В. Говоров построил теорию краевой задачи Римана с бесконечным индексом степенного характера, позднее изложенную в его монографии [1]. Эта теория обобщалась рядом авторов в различных направлениях; обзор соответствующих результатов и библиографию можно найти в [2, § 49; 3—6]. В настоящей статье речь пойдет только об однородной задаче. Основное отличие наших результатов от предшествующих состоит в существенно меньшей жесткости ограничений на поведение в бесконечности аргумента коэффициента задачи.

Будем пользоваться терминологией, принятой в [1]. Пусть D — плоскость, разрезанная вдоль луча $\{t: 1 \leqslant t < \infty\}$. Рассмотрим в D следующую краевую задачу:

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t), \quad 1 < t < \infty, \tag{1.1}$$

где G — коэффициент задачи — непрерывная, не обращающаяся в нуль на $[1, \infty)$ функция. Пусть $\arg G$ — непрерывная на $[1, \infty]$ ветвь аргумента, выделяемая условием $0 \geqslant \arg G(1) > -2\pi$. Будем в дальнейшем считать, что функция $\ln G = \ln|G| + i \arg G$ непрерывна по Дини на каждом отрезке $[1, a]$, т. е. при любом $a > 1$ ее модуль непрерывности $\omega_a(\delta)$ на $[1, a]$ удовлетворяет условию $\int\limits_0 \omega_a(\delta)\,\delta^{-1} d\delta < \infty$.

Чтобы ввести классы функций, в которых мы будем искать решение задачи (1.1), а также чтобы сформулировать ограничения, относящиеся к поведению $\ln G$ на бесконечности, понадобится понятие уточненного порядка. Напомним, что уточненным порядком называется положительная функция $\rho(r) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющая условиям

$$\exists \lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho \in [0, \infty), \quad \lim_{r\to\infty} \rho'(r)\, r \ln r = 0, \quad r^{\rho(r)} \uparrow \infty \ (r \uparrow \infty).$$

Будем считать известными свойства уточненных порядков в объеме [7, гл. 1, § 12] или [8, гл. II, § 2]. Иногда мы будем задавать уточненный порядок только на некоторой полуоси $[r_0, \infty)$, $r_0 > 0$, так как способ его продолжения до положительной функции из $C^1(\mathbb{R}_+)$ не имеет значения.

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок. Положим $V(r) = r^{\rho(r)}$, $V^0(r) = \int\limits_0^r V(t)\frac{dt}{t}$. Нетрудно убедиться, что $V^0(r) = r^{\rho^0(r)}$, где $\rho^0(r)$ — уточненный порядок, причем $\lim\limits_{r\to\infty} \rho^0(r) = \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$ и $\lim\limits_{r\to\infty} V(r)/V^0(r) = \rho$, $\lim\limits_{r\to\infty} V^0(r)/\ln r = \infty$. Заметим, что при $\rho > 0$ можно было бы всюду в дальнейшем вместо V^0 брать V/ρ.

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho < 1/2$. Обозначим через $B(\rho^0(r))$ класс функций Φ, удовлетворяющих условиям: (а) Φ аналитична в D; (б) Φ непрерывна на множестве (D), получаемом присоединением к D обоих берегов разреза вдоль открытой полуоси $(1, \infty)$, и ограничена в окрестности точки $z = 1$; (в) для любого $\varepsilon > 0$ существует равномерный относительно $\theta \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ предел

$$\lim_{r\to\infty} (\ln|\Phi(re^{i\theta})|)/V^0(r) = -\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\theta - \pi); \tag{1.2}$$

(г) существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \max\{(\ln|\Phi(re^{i\theta})|)/V^0(r) : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\} = -\pi\rho \operatorname{ctg} \pi\rho. \tag{1.3}$$

При $\rho = 0$ выражения в правых частях (1.2) и (1.3) следует по определению считать равными -1. Заметим, что при любом $\rho \in [0, 1/2)$ правая часть (1.3) отрицательна, поэтому функции $\Phi \in B(\rho^0(r))$ ограничены в (D) и стремятся к 0 на бесконечности. Можно показать (мы это не используем), что функции $\Phi \in B(\rho^0(r))$ являются в замыкании области D функциями вполне регулярного роста в смысле Левина — Пфлюгера относительно уточненного порядка $\rho^0(r)$.

Обозначим через $B^r(\rho^0(r))$ подкласс класса $B(\rho^0(r))$, состоящий из функций Φ, для которых (1.2) выполняется равномерно относительно $\theta \in [0, 2\pi]$.

На поведение функции $\ln G$ на бесконечности будем накладывать следующие ограничения. Найдется пара уточненных порядков $(\rho(r), \rho_1(r))$, удовлетворяющая условиям

$$\rho = \lim_{r\to\infty} \rho(r) < 1/2;\ V_1(r)\ln r = o(V^0(r)),\ r\to\infty\ (V_1(r) = r^{\rho_1(r)}), \tag{1.4}$$

и неубывающая целозначная функция $n(t) \geqslant 0$ такие, что: (А) справедливо представление

$$\frac{1}{2\pi}\arg G(t) = n(t) + V(t) + O(V_1(t)),\ t\to\infty; \tag{1.5}$$

(Б) имеет место соотношение

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} (V^0(t))^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{k(t)} (\arg G(t+u) - \arg G(t-u))\frac{du}{u} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{k(t)} (n(t+u) - n(t-u)\left(\frac{du}{u}\right\} \leqslant 0, \tag{1.6}$$

где

$$k(t) = \exp\{-V^0(t)/(V_1(t)\ln t)\}; \tag{1.7}$$

(В) справедлива оценка

$$\ln|G(t)| = o(V(t)),\ t \to \infty. \tag{1.8}$$

Теорема 1. *Пусть функция* $\ln G$ *непрерывна по Дини на каждом отрезке* $[1, a]$, $a > 1$, *и, кроме того, удовлетворяет условиям* (А), (Б), (В). *Тогда задача* (1.1) *имеет решение* $\Phi \in B(\rho^0(r))$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Предположим дополнительно, что в* (А) *имеем* $n(t) \equiv 0$, *а* (Б) *заменено более сильным условием:*

(Б^0) *справедливо соотношение*

$$\int_0^{k(t)} (\arg G(t+u) - \arg G(t-u))\,\frac{du}{u} = o(V^0(t)),\ t \to \infty.$$

Тогда задача (1.1) *имеет решение* $\Phi \in B^r(\rho^0(r))$.

Рассмотрим также следующие ограничения на поведение $\ln G$ на бесконечности, имеющие более простой характер, чем (А) — (В): найдется целозначная функция $0 \leqslant n(t) \uparrow \infty\ (t \uparrow \infty)$ такая, что (А$'$) справедливо представление

$$\frac{1}{2\pi}\arg G(t) = n(t) + O(1),\ t \to \infty;$$

(Б$'$) при некотором $\sigma > 0$ имеет место соотношение

$$\varlimsup_{t\to\infty} (\ln t)^{-1}\left\{\int_0^{t-\sigma} (\arg G(t+u) - \arg G(t-u))\,\frac{du}{u} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{t-\sigma} (n(t+u) - n(t-u))\,\frac{du}{u}\right\} < \infty;$$

(В$'$) справедлива оценка

$$\ln|G(t)| = O(\ln t),\ \ t \to +\infty.$$

Теорема 3. *Пусть функция* $\ln G$ *непрерывна по Дини на каждом отрезке* $[1, a]$, $a > 1$, *и, кроме того, удовлетворяет условиям* (А$'$), (Б$'$), (В$'$). *Тогда задача* (1.1) *имеет нетривиальное решение* Φ, *ограниченное в* (D).

§ 2. Связь с известными результатами. Н. В. Говоров [1, гл. V] рассматривал задачу (1.1) при следующих ограничениях на коэффициент G: 1) справедливо представление

$$\frac{1}{2\pi}\arg G(t) = \varphi(t)\,t^\rho,\ \ 1 \leqslant t < \infty, \tag{2.1}$$

где $\rho > 0$, а функция φ удовлетворяет условиям

$$\varphi \in H_{[1,\infty)}(\mu_0),\ \ 1 \geqslant \mu_0 > \left(\frac{2\rho-1}{2\rho+1}\right)^+,\ \varphi(\infty) > 0,\ 0 \geqslant \varphi(1) > -1; \tag{2.2}$$

2) выполняется

$$\ln|G| \in H_{[1,\infty)}(\mu), \ 1 \geqslant \mu > 0.$$

При этих ограничениях им было, в частности, установлено [1, § 28], что если положительное $\sigma < \min(1/2, \rho)$ таково, что $\mu_0 > (\rho - \sigma)/(1 + \rho - \sigma)$, то при произвольном $\tau > 0$ задача (1.1) имеет решение Φ в классе B_σ (определение см. [1, с. 132]), допускающее оценку

$$\max\{|\Phi(re^{i\theta})| : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\} \leqslant \exp\{-(\pi\tau \operatorname{ctg} \pi\sigma + o(1)) r^\sigma\}, \ r \to \infty. \tag{2.3}$$

Покажем, что этот результат содержится в теореме 1. Как установлено в [1, с. 166, (28.9)] (см. также лемму 2 ниже), из условия 1) следует, что существуют неубывающая целозначная функция $n(t) \geqslant 0$ и число $\nu \in (0, \sigma)$ такие, что

$$\frac{1}{2\pi} \arg G(t) = n(t) + \tau t^\sigma + O(t^\nu), \ t \to \infty. \tag{2.4}$$

Считая t_0 достаточно большим, определим при $t \geqslant t_0$ уточненные порядки $\rho(t) = \sigma + (\ln\tau)/\ln t$, $\rho_1(t) \equiv \nu$. Равенство (2.4) показывает, что выполнено условие (А).

Для проверки условия (Б), заметим, что второй интеграл в (1.6) неотрицателен, поскольку функция n неубывающая. Следовательно, (Б) будет выполнено, если выполнено условие

($\tilde{\text{Б}}$) имеет место соотношение

$$\varlimsup_{t\to\infty} (V^0(t))^{-1} \int_0^{k(t)} (\arg G(t+u) - \arg G(t-u)) \frac{du}{u} \leqslant 0, \tag{2.5}$$

где $k(t)$ определено равенством (1.7). Отметим сразу же, что условия (Б) и ($\tilde{\text{Б}}$) неэквивалентны (см. замечание в конце § 7).

Так как $V(t) = \tau t^\sigma$, $V_1(t) = t^\nu$, то

$$V^0(t) = (\tau/\sigma) t^\sigma + O(1), \quad k(t) = \exp\{-(\tau/\sigma) t^{\sigma-\nu}/\ln t + O(1)\}, \ t \to \infty. \tag{2.6}$$

Поскольку $\varphi \in H_{[1,\infty)}(\mu_0)$, то из (2.1) следует, что при $0 < u \leqslant t/2$ выполняется

$$|\arg G(t+u) - \arg G(t-u)| \leqslant |\varphi(t+u) - \varphi(t-u)|(t+u)^\rho + |\varphi(t-u)|((t+u)^\rho - (t-u)^\rho)) \leqslant C_1 u^{\mu_0} t^{\rho - 2\mu_0} + C_2 u t^{\rho-1}. \tag{2.7}$$

Поэтому из (2.6) вытекает справедливость (2.5).

Условие (В) выполнено, так как в силу (1.8) имеем $\ln|G(t)| = O(1)$, $t \to \infty$. Непрерывность функции $\ln G$ по Дини на любом отрезке $[1, a]$, $a > 1$ является очевидным следствием условий 1) и 2). Таким образом, выполнены условия теоремы 1. Так как функции класса $B(\rho^0(r))$ с $\rho^0(r) = \sigma + \ln(\tau/\sigma)/\ln r$ принадлежат B_σ и допускают оценку (2.3), получаем цитированный результат Н. В Говорова.

Если в (2.1) имеем $\rho < 1/2$, то можно вместо (2.4) воспользоваться соотношением $\frac{1}{2\pi}\arg G(t) = \varphi(\infty)t^{\rho} + O(t^{\rho-\mu_0})$, $t \to \infty$, непосредственно вытекающим из (2.1) и того, что $\varphi \in H_{[1,\infty)}(\mu_0)$. Легко видеть, что тогда мы находимся в условиях теоремы 2 (с $V(t) = \varphi(\infty)t^{\rho}$, $V^0(t) = (\varphi(\infty)/\rho)t^{\rho} + O(1)$, $V_1(t) = t^{\nu}$, $\nu = \max(\rho - \mu_0, \rho/2)$). С ее помощью заключаем, что задача (1.1) имеет решение Φ, для которого существует равномерный по $\theta \in [0,2\pi]$ предел $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-\rho}\ln|\Phi(re^{i\theta})| = -\pi(\sin\pi\rho)^{-1}\cos\rho(\theta - \pi)$. Этот результат также был получен Н. В. Говоровым [1, с. 115].

П. Г. Юров [9] (см. также [2, п. 49.4]) рассматривал задачу (1.1) при следующих ограничениях на коэффициент G:

1′) справедливо представление

$$\frac{1}{2\pi}\arg G(t) = \varphi(t)\ln^{\alpha}(\mathrm{e}t),\ 1 \leqslant t < \infty,$$

где $\alpha > 0$, $\varphi \in D_{[1,\infty)}(\beta)$, $\beta > \alpha + 1$, $\varphi(\infty) > 0$, $0 \geqslant \varphi(1) > -1$;

2′) $\ln|G(t)| \in D_{[1,\infty)}(\gamma)$, $\gamma > 1$.

Через $D_{[1,\infty)}(\beta)$ здесь обозначен класс функций $\varphi(t)$, $1 \leqslant t < \infty$ таких, что $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant C\ln^{-\beta}\{2|t_1^{-1} - t_2^{-1}|^{-1}\}$, $1 \leqslant t_1, t_2 < \infty$, $C > 0$.

При этих ограничениях им было, в частности, установлено, что задача (1.1) имеет решение Φ, допускающее равномерную относительно $\theta \in [0, 2\pi]$ асимптотику $\ln|\Phi(re^{i\theta})| = -(1 + o(1))\varphi(\infty)(\alpha + 1)^{-1}\ln^{\alpha+1}r$, $r \to \infty$. Покажем, что этот результат содержится в теореме 2.

Так как из $\varphi \in D_{[1,\infty)}(\beta)$ следует, что $\varphi(t) = \varphi(\infty) + O(\ln^{-\beta}t)$, $t \to \infty$, имеем $\frac{1}{2\pi}\arg G(t) = \varphi(\infty)\ln^{\alpha}(t) + O(1)$, $t \to \infty$. Поэтому выполнено условие (А) с $n(t) \equiv 0$, $\rho(t) = (\alpha\ln\ln t + \ln\varphi(\infty))/\ln t$, $\rho_1(t) = \gamma\ln\ln t/\ln t$, $t \geqslant t_0 > 1$, где γ — любое число из интервала $(0, \alpha)$. Очевидно, $V^0(t) = \frac{\varphi(\infty)}{\alpha+1}\ln^{\alpha+1}t + O(1)$, $k(t) = \exp\left\{-\frac{\varphi(\infty)}{\alpha+1}\ln^{\alpha-\gamma}t + O(1)\right\}$, $t \to \infty$. Ясно, что условия (Б^0) и (В) выполнены, кроме того, функция $\ln G$ непрерывна по Дини на каждом отрезке $[1, a]$, $a > 1$. Поэтому из теоремы 2 следует цитированный результат П. Г. Юрова.

И. Е. Сандригайло [10] рассматривал краевую задачу Римана для полуплоскости, аналогичную задаче (1.1), при следующих ограничениях на коэффициент G:

1″) справедливо представление $\frac{1}{2\pi}\arg G(t) = \varphi(t)t^{\rho(t)}$, $t \geqslant 1$, где $\rho(t)$ — уточненный порядок, $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(t) = \rho > 0$, а функция φ удовлетворяет (2.2);

2″) $t^{-\beta}\ln|G(t)| \in H_{[1,\infty)}(\mu)$, $1 \geqslant \mu > 0$, где $\beta \in (0, \sigma)$, а число $\sigma < \min(1/2, \rho)$ таково, что $\mu_0 > (\rho - \sigma)/(1 + \rho - \sigma)$.

На основании [10] представляется возможным, что И. Е. Сандригайло имел доказательство того, что при указанных ограничениях задача (1.1) имеет при любом $\tau > 0$ решение $\Phi \in B_\sigma$, допускающее оценку (2.3). Этот факт также содержится в теореме 1. Действительно, с помощью рассуждений, близких к проведенным в [1, с. 164—166] (см. также лемму 2 ниже), устанавливается, что из условия 1") вытекает справедливость представления (2.4). Поэтому можно применить теорему 1 с $\rho(t) = \sigma + \ln\tau/\ln t$, $\rho_1(t) \equiv \nu$, $t \geqslant t_0 > 1$.

Отметим, что условие 2"), в отличие от 2) и 2'), допускает возможность степенного роста для $\ln|G(t)|$ при $t \to \infty$. Впервые такое ослабление условий 2), 2') появилось одновременно в [10] и в работе С. В. Рогозина [11].

§ 3. Результаты, являющиеся следствиями основных. Во всех трех приведенных выше результатах — Н. В. Говорова, П. Г. Юрова и И. Е. Сандригайло — ограничения на асимптотическое поведение коэффициента G задачи (1.1) таковы, что $\arg G(t) \sim t^{\rho(t)}$, $\ln|G(t)| \sim \pm t^{\tilde\rho(t)}$, $t \to \infty$, где $\rho(t)$, $\tilde\rho(t)$ — некоторые уточненные порядки. Теоремы 1—3 позволяют установить разрешимость задачи (1.1) при ограничениях, допускающих не столь регулярное асимптотическое поведение коэффициента G, а также при ограничениях, допускающих сколь угодно быстрый рост $\arg G$ при $t \to \infty$. Ограничения первого рода будут указаны ниже в формулировках теорем 4 и 5, а второго — в формулировке теоремы 6.

Пусть $l(r)$ — уточненный порядок Бутру, т. е. $l(r) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ и выполнены условия

$$\lim_{r\to\infty} l'(r)\, r \ln r = 0, \quad 0 < \lambda = \varliminf_{r\to\infty} l(r) \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} l(r) = \rho < \infty. \tag{3.1}$$

Уточненный порядок Бутру обладает некоторыми свойствами, присущими обычному уточненному порядку [8, с.91], в частности, функция $r^{l(r)}$ возрастает при достаточно больших r. Пример $l(r) = \lambda + \frac{1}{2}(\rho - \lambda)(1 + \sin\ln\ln\ln(r + b))$, $b > e^e$, показывает, что для любой пары чисел (λ, ρ), $0 < \lambda \leqslant \rho < \infty$, существует уточненный порядок Бутру, удовлетворяющий (3.1).

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение цитированного в § 2 результата Н. В. Говорова.

Теорема 4. *Пусть числа* λ, ρ, σ, μ_0 *таковы, что*

$$0 < \lambda \leqslant \rho < \infty, \ 0 < \sigma < \min(1/2, \lambda), \ 0 < \mu_0 \leqslant 1,$$
$$\min(\mu_0, \lambda - \sigma) > \frac{\rho - \sigma}{1 + \rho - \sigma}. \tag{3.2}$$

Предположим, что коэффициент G *задачи* (1.1) *удовлетворяет условиям:* 1) *справедливо представление*

$$\frac{1}{2\pi} \arg G(t) = \varphi(t)\, t^{l(t)}, \ 1 \leqslant t < \infty,$$

где $l(t)$ *— уточненный порядок Бутру,* $\lambda = \varliminf_{t\to\infty} l(t)$, $\rho = \varlimsup_{t\to\infty} l(t)$, *а*

$$\varphi \in H_{[1,\infty)}(\mu_0), \ \varphi(\infty) > 0, \ 0 \geqslant \varphi(1) > -1; \tag{3.3}$$

2) *функция* $\ln|G|$ *непрерывна по Дини на каждом отрезке* $[1, a]$, $a>1$, *и справедлива оценка* $\ln|G(t)|=o(t^{\sigma})$, $t\to\infty$. *Тогда при любом* $\tau>0$ *задача* (1.1) *имеет решение* $\Phi\in B_{\sigma}$, *допускающее оценку* (2.3).

Легко видеть, что при заданных λ и ρ можно найти σ и μ_0, удовлетворяющие (3.2), тогда и только тогда, когда $\rho/(1+\rho)<\lambda\leqslant\leqslant\rho<\infty$. В связи с этим представляет интерес следующий результат, в котором можно, в частности, положить $\frac{1}{2\pi}\arg G(t)=t^{l(t)}$, где $l(t)$ — уточненный порядок Бутру с произвольными наперед заданными λ и ρ.

Теорема 5. *Предположим, что коэффициент* G *задачи* (1.1) *удовлетворяет условиям:*

1′) *функция* $\arg G$ *непрерывно дифференцируема на* $(1, \infty)$, *монотонно стремится к* $+\infty$ *при* $t\uparrow\infty$, *и для некоторого* $\sigma>0$ *справедлива оценка* $(d/dt)\arg G(t)=O(t^{\sigma})$, $t\to\infty$;

2′) *функция* $\ln|G|$ *непрерывна по Дини на каждом отрезке* $[1, a]$, $a>1$, и $\ln|G(t)|=O(\ln t)$, $t\to\infty$. *Тогда задача* (1.1) *имеет нетривиальное решение, ограниченное в* (D).

Далее понадобится такой факт из [12].

Лемма [12]. *Пусть заданы непрерывная на* $[1, \infty)$ *функция* $q(r)\uparrow\infty$ *и число* $\beta>0$. *Существует целая функция* h, $h(r)\geqslant\geqslant q(r)$ $(r\geqslant 1)$, *удовлетворяющая условиям:*

$$|h(z)|\leqslant h(\operatorname{Re} z),\ \operatorname{Re} z\geqslant 0; \tag{3.4}$$

$$e^{r}\leqslant h(r+h^{-\beta}(r))=O(h(r)),\ r\to+\infty. \tag{3.5}$$

Примерами функций h, удовлетворяющих (3.4), (3.5), могут служить экспонента, ее итерации любого порядка и их производные.

Теорема 6. *Пусть коэффициент* G *задачи* (1.1) *удовлетворяет условиям:*

(1) *справедливо представление*

$$\frac{1}{2\pi}\arg G(t)=\int_{1}^{t}h(u)\,du+V(t)-1,\ 1\leqslant t<\infty, \tag{3.6}$$

где h — *целая функция, для которой выполняются* (3.4) *и* (3.5) *с некоторым* $\beta\in(0, 1/2)$, *а* $V(t)=t^{\rho(t)}$, $\rho(t)$ — *уточненный порядок*, $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(t)<1/2$;

2) *функция* $\ln|G|$ *непрерывна по Дини на каждом отрезке* $[1, a]$, $a>1$, *и справедлива оценка* $\ln|G(t)|=o(V(t))$, $t\to\infty$.
Тогда задача (1.1) *имеет решение* $\Phi\in B(\rho^{0}(r))$.

Лемма из [12] показывает, что функции h, о которых говорится в условии 1) теоремы 6, могут иметь сколь угодно быстрый рост.

§ 4. Доказательства теорем 1, 2 и 3. Установленная Н. В. Говоровым формула [1, с. 165, (28.7)] для решения задачи (1.1) при условиях 1), 2) из § 2 позволяет предположить, что решение задачи (1.1) в классе $B(\rho^{0}(r))$ при условиях теоремы 1 имеет вид

$$\Phi(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_1^{\infty}\frac{\ln G(t) - 2\pi i n(t)}{t(t-z)}\,dt\right\}. \tag{4.1}$$

Докажем, что это действительно имеет место.

Заметим, что интеграл, фигурирующий в (4.1), абсолютно сходится при всех $z \in D$, так как в силу условий (1.5), (1.8), (1.4) имеем

$$\ln G(t) - 2\pi i n(t) = \ln|G(t)| + 2\pi i\left(\frac{1}{2\pi}\arg G(t) - n(t)\right) =$$

$$= O(V(t)) = o(\sqrt{t}),\ t \to \infty.$$

В силу известной теоремы Племеля—Привалова непрерывность по Дини функции $\ln G$ на любом отрезке $[1,\ a]$, $a > 1$, влечет непрерывность функции Φ на множестве (D). Формула Сохоцкого—Племеля показывает, что функция Φ удовлетворяет краевому условию (1.1). Функция Φ ограничена в окрестности точки $z = 1$: это вытекает (ср. [1, с. 115]) из нормировки $0 \geqslant \arg G(1) > -2\pi$ и того, что $n(1) \geqslant 0$. Таким образом, теорема 1 будет доказана, если удастся установить, что функция Φ удовлетворяет условиям (в) и (г) из определения класса $B(\rho^0(r))$.

Сначала покажем, что функция Φ ограничена в (D) — это составляет основную часть доказательства. Будем опираться на следующую теорему, по существу принадлежащую Р. Неванлинне [13] и представляющую обобщение принципа Фрагмена—Линделефа.

Теорема А. *Пусть функция Ψ аналитична в полуплоскости $\{\zeta:\ \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ и ограничена в каждом полукруге $\{\zeta: |\zeta| < R,\ \operatorname{Im}\zeta > 0\}$, $R > 0$. Обозначим через $\Psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, угловые предельные значения функции Ψ и предположим, что почти всюду*

$$|\Psi(x)| \leqslant M < \infty,\ x \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Если выполнено условие

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_0^{\pi}\ln^+|\Psi(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta = 0, \tag{4.3}$$

то будем иметь $\sup\{|\Psi(\zeta)|: \operatorname{Im}\zeta > 0\} \leqslant M$.

Эта теорема доказана в [13] при дополнительном предположении аналитичности функции Ψ в $\{\zeta: \operatorname{Im}\zeta \geqslant 0\}$. Без этого предположения она получается с помощью тех же рассуждений — только вместо формулы Р. Неванлинны для полукруга [8, с. 16, (2.3)] нужно воспользоваться ее обобщением, данным в [1, с. 23, (2.4)].

Применяя теорему А к функции $\Psi(\zeta) = \Phi(\zeta^2)$, $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$, видим, что для доказательства ограниченности функции Φ в (D) достаточно установить справедливость двух следующих фактов:

$$|\Phi^+(r)| + |\Phi^-(r)| \leqslant M < \infty,\ 1 \leqslant r < \infty; \tag{4.4}$$

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^{2\pi}\ln^+|\Phi(re^{i\theta})|\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = 0. \tag{4.5}$$

Докажем сначала, что для функции (4.1) имеет место (4.5). Так как

$$\ln \Phi(z) = \frac{z}{2\pi i} \int_1^\infty \frac{\ln |G(t)|\, dt}{t(t-z)} + z \int_1^\infty \frac{\frac{1}{2\pi} \arg G(t) - n(t)}{t(t-z)}\, dt,$$

в силу условий (1.8), (1.5), (1.4) получаем

$$|\ln \Phi(re^{i\theta})| \leqslant \frac{r}{2\pi} \int_1^\infty \frac{|\ln |G(t)||}{t\,|t - re^{i\theta}|}\, dt + r \int_1^\infty \frac{\left|\frac{1}{2\pi} \arg G(t) - n(t)\right|}{t\,|t - re^{i\theta}|}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant Cr \int_1^\infty \frac{V(t)\, dt}{t\,|t - re^{i\theta}|}$$

(здесь и далее буквой C, возможно, с индексами, обозначаем положительные постоянные, не обязательно одинаковые). Отсюда следует

$$\int_0^{2\pi} |\ln \Phi(re^{i\theta})| \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta \leqslant Cr \int_1^\infty \frac{V(t)\, dt}{t} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta}{|t - re^{i\theta}|} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 r \int_1^\infty \frac{V(t)\, dt}{t \max(r, t)} = C_1 \int_1^r \frac{V(t)\, dt}{t} + C_1 r \int_r^\infty \frac{V(t)\, dt}{t^2}. \qquad (4.6)$$

Используя свойства уточненных порядков [7, с. 49—50; 8, с. 73—74], заключаем, что

$$\int_0^{2\pi} |\ln \Phi(re^{i\theta})| \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta \leqslant C_2 V^0(r),\ \ r > r_0. \qquad (4.7)$$

Поскольку в силу (1.4) имеем $V^0(r) = o(\sqrt{r})$, $r \to \infty$, то выполняется (4.5).

Докажем теперь, что для функции (4.1) имеет место также и (4.4). При любом $r > 1$, не являющемся точкой разрыва функции n, имеем в силу формулы Сохоцкого—Племеля

$$\ln \Phi^{\pm}(r) = \pm\frac{1}{2}(\ln G(r) - 2\pi i n(r)) + \frac{r}{2\pi i} \int_1^\infty \frac{\ln G(t) - 2\pi i n(t)}{t(t-r)}\, dt$$

(интеграл существует в смысле главного значения). Отделяя действительную часть, получим

$$\ln |\Phi^{\pm}(r)| = \pm\frac{1}{2} \ln |G(r)| + \frac{r}{2\pi} \int_1^\infty \frac{\arg G(t) - 2\pi n(t)}{t(t-r)}\, dt.$$

Пусть $k(r)$ — величина, фигурирующая в (2.5); положим $\Lambda(r) = [r - k(r),\ r + k(r)]$, $\Omega(r) = [1, \infty) \setminus \Lambda(r)$, $r \geqslant 2$. Имеем

$$\ln|\Phi^\pm(r)| = \pm\frac{1}{2}\ln|G(r)| + \frac{r}{2\pi}\left(\int\limits_{\Delta(r)} + \int\limits_{\Omega(r)}\right)\frac{\arg G(t) - 2\pi n(t)}{t(t-r)}\,dt =$$

$$= \pm\frac{1}{2}\ln|G(t)| + J_1(r) + J_2(r). \qquad (4.8)$$

Оценим сверху интегралы $J_1(r)$ и $J_2(r)$. Имеем

$$J_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta(r)}\frac{\arg G(t) - 2\pi n(t)}{t-r}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta(r)}\frac{\arg G(t) - 2\pi n(t)}{t}\,dt. \qquad (4.9)$$

Так как в силу (1.5) и (1.4) справедлива оценка $\arg G(t) - 2\pi n(t) = o(\sqrt{t})$, $t\to\infty$, второй интеграл в (4.9) есть $o(k(r)/\sqrt{r}) = o(1)$, $r\to\infty$. Преобразуя первый интеграл, получим

$$J_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{k(r)}\{(\arg G(r+u) - \arg G(r-u)) - 2\pi(n(r+u) -$$

$$- n(r-u))\}\frac{du}{u} + o(1),\ r\to\infty,$$

откуда с помощью условия (Б) (1.6) заключаем, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}(V^0(r))^{-1}J_1(r) \leqslant 0. \qquad (4.10)$$

Интеграл $J_2(r)$ запишем в виде

$$J_2(r) = r\int\limits_{\Omega(r)}\left\{\frac{1}{2\pi}\arg G(t) - n(t) - V(t)\right\}\frac{dt}{t(t-r)} +$$

$$+ r\int\limits_{\Omega(r)}\frac{V(t)\,dt}{t(t-r)} = J_2^{(1)}(r) + J_2^{(2)}(r).$$

В силу (1.5) имеем

$$|J_2^{(1)}(r)| \leqslant Cr\int\limits_{\Omega(r)}\frac{V_1(t)\,dt}{t|t-r|} = Cr\left(\int\limits_1^{r/2} + \int\limits_{r/2}^{r-k(r)} + \int\limits_{r+k(r)}^{2r} + \int\limits_{2r}^{\infty}\frac{V_1(t)\,dt}{t|t-r|} \leqslant\right.$$

$$\leqslant Cr\left(\frac{2}{r}V_1\left(\frac{r}{2}\right)\ln\frac{r}{2} + \frac{2}{r}V_1(r-k(r))\int\limits_{r/2}^{r-k(r)}\frac{dt}{r-t} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{r+k(r)}V_1(2r)\int\limits_{r+k(r)}^{2r}\frac{dt}{t-r} + 2\int\limits_{2r}^{\infty}V_1(t)\frac{dt}{t^2}\right) \leqslant CV_1(r)\ln(r/k(r)).$$

(как и при выводе (4.7) из (4.6), использовались свойства уточненных порядков). Учитывая выражение (1.7) для $k(r)$ и условие (1.4), заключаем, что $J_2^{(1)}(r) = o(V^0(r))$, $r\to\infty$. Для оценки интеграла $J_2^{(2)}(r)$ понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\rho(r)$ — *уточненный порядок*, $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r) = \rho < 1$. *Справедливо соотношение*

$$r\int_1^\infty \frac{V(t)\,dt}{t(t-r)} = -(\pi\rho \operatorname{ctg}\pi\rho + o(1))\,V^0(r),\ r\to\infty, \tag{4.11}$$

(интеграл понимается в смысле главного значения, а $\pi\rho \operatorname{ctg} \times \times \pi\rho|_{\rho=0} = 1$).

С помощью леммы 1 завершим доказательство теоремы, а в § 5 докажем эту лемму. Так как в силу свойств уточненных порядков имеем

$$r\int_{\Delta(r)} \frac{V(t)\,dt}{t(t-r)} = \int_0^{k(r)} (V(r+u) - V(r-u))\frac{du}{u} + \int_{\Delta(r)} V(t)\frac{dt}{t} = o(1),\ r\to\infty,$$

применяя лемму, получим

$$J_2^{(2)}(r) = r\int_1^\infty \frac{V(t)\,dt}{t(t-r)} + o(1) = -(\pi\rho \operatorname{ctg}\pi\rho + o(1))\,V^0(r),\ \ r\to\infty.$$

Таким образом, для интеграла $J_2(r)$ справедливо равенство

$$J_2(r) = -(\pi\rho \operatorname{ctg}\pi\rho + o(1))\,V^0(r),\ r\to\infty. \tag{4.12}$$

Из соотношений (4.8), (4.10) и (4.12) следует, что

$$\ln|\Phi^\pm(r)| \leqslant -(\pi\rho \operatorname{ctg}\pi\rho + o(1))\,V^0(r),\ r\to\infty,\ \ r\notin E, \tag{4.13}$$

где E — множество точек разрыва функции n. Отсюда вытекает, что найдется $A > 1$ такое, что обе функции $\Phi^\pm$ ограничены на $[A, \infty)\setminus E$. Так как эти функции непрерывны на $(1, \infty)$ и ограничены в окрестности точки $z = 1$, выполняется (4.4).

Итак, функция Φ удовлетворяет условиям (4.4) и (4.5). Отсюда, как уже говорилось, следует, что эта функция ограничена в (D).

Докажем, что функция Φ удовлетворяет условию (в) из определения класса $B(\rho^0(r))$. Имеем

$$\ln\Phi(z) = z\int_1^\infty \frac{V(t)\,dt}{t(t-z)} + \frac{z}{2\pi i}\int_1^\infty \frac{\ln G(t) - 2\pi i\,(n(t) + V(t))}{t(t-z)}\,dt =$$

$$= I_1(z) + I_2(z),\ z\in D. \tag{4.14}$$

Стандартные рассуждения (см. также лемму 1′ ниже) показывают, что справедливо равномерное по $\theta\in[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, асимптотическое равенство

$$I_1(re^{i\theta}) = -\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\,e^{i\rho(\theta-\pi)}\,V^0(r) + o(V^0(r)),\ \ r\to\infty. \tag{4.15}$$

В силу условий (А) и (В) имеем

$$\ln G(t) - 2\pi i\,(n(t) + V(t)) = o(V(t)),\ t\to\infty.$$

Поэтому равномерно по $\theta\in[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ получим

$$|I_2(re^{i\theta})| = o\left(r\int_1^\infty \frac{V(t)\,dt}{t(t+r)}\right) = o(|I_1(-r)|) = o(V^0(r)),\ r\to\infty.$$

Тем самым выполнение условия (в) установлено.

Докажем, что функция Φ удовлетворяет условию (г) из определения класса $B(\rho^0(r))$. Рассмотрим индикатор функции Φ относительно уточненного порядка $\rho^0(r)$

$$h(\theta,\ \Phi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}(V^0(r))^{-1}\ln|\Phi(re^{i\theta})|,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

В силу уже доказанного свойства (в) имеем при $0<\theta<2\pi$

$$h(\theta,\ \Phi)=-\pi\rho(\sin\pi\rho)^{-1}\cos\rho(\theta-\pi). \tag{4.16}$$

В силу оценки (4.13) значения $h(0,\ \Phi)$ и $h(2\pi,\ \Phi)$ не превосходят $-\pi\rho\operatorname{ctg}\pi\rho$, т. е. значений правой части (4.16) при $\theta=0,\ 2\pi$. Отсюда в силу тригонометрической выпуклости индикатора при $\rho>0$ и его обычной выпуклости при $\rho=0$ [14] следует, что (4.16) сохраняет силу также и при $\theta=0,\ 2\pi$. Так как функция Φ ограничена в (D), то, используя известный факт [7, с. 97; 14] заключаем, что справедлива равномерная относительно $\theta\in[0,\ 2\pi]$ асимптотическая оценка

$$\ln|\Phi(re^{i\theta})|\leqslant\{-\pi\rho(\sin\pi\rho)^{-1}\cos\rho(\theta-\pi)+o(1)\}V^0(r),\ r\to\infty. \tag{4.17}$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\max\{(V^0(r))^{-1}\ln|\Phi(re^{i\theta})|:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}\leqslant-\pi\rho\operatorname{ctg}\pi\rho.$$

В силу свойства (в) имеем для любого $\varepsilon>0$

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\max\{(V^0(r))^{-1}\ln|\Phi(re^{i\theta})|:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}\geqslant\underline{\lim_{r\to\infty}}\max\{(V^0(r))^{-1}\times$$
$$\times\ln|\Phi(re^{i\theta})|:\varepsilon\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\varepsilon\}=-\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\pi-\varepsilon).$$

Тем самым доказано, что функция Φ удовлетворяет условию (г), и доказательство теоремы 1 завершено.

Докажем теорему 2. Определим функцию Φ формулой (4.1) с $n(t)\equiv 0$. Далее проводим те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, но учитываем, что использование условия ($Б^0$) вместо условия (Б), позволяет оценку (4.10) заменить более сильной $J_1(r)=o(V^0(r))$, $r\to\infty$. Это приводит к тому, что асимптотическое неравенство (4.13) превращается в равенство

$$\ln|\Phi^{\pm}(r)|=-(\pi\rho\operatorname{ctg}\pi\rho+o(1))V^0(r),\ r\to\infty. \tag{4.18}$$

Рассмотрим функцию $\Phi_1(z)=(1-z)/\Phi(z)$. Эта функция аналитична в D и, кроме того (ведь $n(t)\equiv 0$), непрерывна на $(D)\cup\{1\}$. В силу (1.2) индикатор функции Φ_1 относительно уточненного порядка $\rho^0(r)$ дается равенством

$$h(\theta,\ \Phi_1)=\pi\rho(\sin\pi\rho)^{-1}\cos\rho(\theta-\pi),\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

Если будет установлено, что

$$\ln|\Phi_1(z)|\leqslant CV^0(|z|),\ z\in D, \tag{4.19}$$

то можно будет к функции Φ_1 применить уже использовавшийся выше известный факт [7, с. 97; 14] и заключить, что равномерно по $\theta \in [0, 2\pi]$ выполняется

$$\ln|\Phi_1(re^{i\theta})| \leqslant (\pi\rho(\sin\pi\rho)^{-1}\cos\rho(\theta-\pi)+o(1))\,V^0(r), \quad r\to\infty.$$

Это означает, что равномерно по $\theta \in [0, 2\pi]$ имеем

$$\ln|\Phi(re^{i\theta})| \geqslant (-\pi\rho(\sin\pi\rho)^{-1}\cos\rho(\theta-\pi)+o(1))\,V^0(r), \quad r\to\infty.$$

Отсюда и из (4.17) вытекает справедливость теоремы 2.

Доказательство справедливости (4.19) мы получим с помощью теоремы А, приведенной выше. Рассмотрим аналитическую в полуплоскости $\{z:\operatorname{Im} z>0\}$ и непрерывную в $\{z:\operatorname{Im} z\geqslant 0\}$ функцию $\Psi(z)=\Phi_1(z)\exp\{KI_1(iz)\}$, где I_1 определяется равенством (4.14), а число $K>0$ будет выбрано позднее. В силу соотношения (4.15) имеем при $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ оценку

$$\operatorname{Re} I_1(iz) = -\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\cos\frac{\pi\rho}{2}V^0(r)+o(V^0(r))\leqslant -\frac{\pi}{4}V^0(r), \quad r>r_0. \quad (4.20)$$

Поэтому

$$\int_0^\pi \ln^+|\Psi(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta \leqslant \int_0^\pi \ln^+|\Phi_1(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^\pi |\ln\Phi(re^{i\theta})|\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta + O(\ln r) = O(V^0(r)), \quad r\to\infty,$$

в силу (4.7). Следовательно, функция Ψ удовлетворяет условию (4.3). Используя (4.13) и (4.20), имеем при $x>1$

$$\ln|\Psi(x)| = \ln|1-x| - \ln|\Phi^+(x)| + K\operatorname{Re} I_1(ix) \leqslant$$
$$\leqslant O(\ln x) + \{\pi\rho\operatorname{ctg}\pi\rho - K\pi/4 + o(1)\}\,V^0(x), \quad x\to\infty.$$

Если считать, что $K>4\rho\operatorname{ctg}\pi\rho$, то величина в фигурных скобках становится отрицательной при достаточно большом x и, значит, функция Ψ ограничена на полуоси $[0,\infty)$. Так как в силу (1.2) и (4.20)

$$\ln|\Psi(-x)| = \ln(1+x) - \ln|\Phi(-x)| + K\operatorname{Re} I_1(-ix) \leqslant$$
$$\leqslant O(\ln r) + \left\{\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho} - K\pi/4 + o(1)\right\}V^0(x), \quad x\to\infty,$$

если считать, что $K>4\rho/\sin\pi\rho$, то функция Ψ будет удовлетворять условию (4.2).

По теореме А функция Ψ ограничена в полуплоскости $\{z:\operatorname{Im} z>0\}$. Следовательно, в этой полуплоскости имеем

$$\ln|\Phi_1(z)| = \ln|\Psi(z)| - K\operatorname{Re} I_1(iz) \leqslant C + K|I_1(iz)|,$$

откуда в силу (4.15) вытекает справедливость (4.19) при дополнительном ограничении $\operatorname{Im} z\geqslant 0$.

Рассматривая вместо функции $\Psi(z)$ функцию $\Psi_1(z)=\Phi_1(-z)\times\exp\{KI_1(iz)\}$ и проводя аналогичные рассуждения, убеждаемся в справедливости (4.19) и при $\operatorname{Im} z\leqslant 0$. Тем самым (4.19) доказано, а вместе с тем — и теорема 2.

Для доказательства теоремы 3 рассмотрим функцию Φ, определенную равенством (4.1). Проводя такие же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 1, но с заменой условий (А), (Б), (В) на (А′), (Б′), (В′), получим вместо оценок (4.7) и (4.13) соответственно следующие

$$\int_0^{2\pi} |\ln \Phi(re^{i\theta})| \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta \leqslant C \ln^2 r,\ r \geqslant 2;$$

$$\ln|\Phi^{\pm}(r)| \leqslant C \ln r,\ r \geqslant 2. \tag{4.21}$$

Пусть h — полином, степень которого больше постоянной C из оценки (4.21), а корни лежат в точках разрыва функции n (множество последних бесконечно в силу условия $n(t) \uparrow \infty$). Функция $\Phi_1 = \Phi/h$ аналитична в D, имеет непрерывные предельные значения на обоих берегах разреза вдоль $(1, \infty)$, ограничена в окрестности точки $z = 1$ и удовлетворяет краевому условию (1, 1). Для этой функции выполнены условия (4.4), (4.5) и, следовательно, она ограничена в (D).

§ 5. **Доказательство леммы 1.** Рассмотрим сначала случай $0 < \rho < 1$. Обозначим интеграл, стоящий в левой части (4.11), через $Q(r)$ и, считая r настолько большим, чтобы $0 < \rho(r) < 1$, положим

$$q(r) = r \int_1^{\infty} \frac{t^{\rho(r)}\, dt}{t(t-r)}$$

(где интеграл понимается в смысле главного значения). Оценим разность $Q(r) - q(r)$. Пусть $0 < \varepsilon < 1/2$, а r достаточно велико. Имеем

$$Q(r) - q(r) = r\left(\int_1^{\varepsilon r} + \int_{r/\varepsilon}^{\infty}\right) \frac{t^{\rho(t)}\, dt}{t(t-r)} + r\left(\int_1^{\varepsilon r} + \int_{r/\varepsilon}^{\infty}\right) \frac{t^{\rho(r)}\, dt}{t(t-r)} +$$

$$+ r\int_{\varepsilon r}^{r/\varepsilon} \frac{t^{\rho(t)} - t^{\rho(r)}}{t(t-r)}\, dt = B_1 + B_2 + B_3.$$

Используя свойства уточненных порядков, получаем

$$|B_1| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\int_1^{\varepsilon r} t^{\rho(t)-1}\, dt + \frac{r}{1-\varepsilon}\int_{r/\varepsilon}^{\infty} t^{\rho(t)-2}\, dt \leqslant \left(\frac{2}{\rho} + o(1)\right) V(\varepsilon r) +$$

$$+ \left(\frac{2}{1-\rho} + o(1)\right)\varepsilon V(r/\varepsilon) \leqslant \left(\frac{2\varepsilon^{\rho}}{\rho} + o(1)\right) V(r) +$$

$$+ \left(\frac{2\varepsilon^{1-\rho}}{1-\rho} + o(1)\right) V(r),\ r \to \infty;$$

$$|B_2| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\int_1^{\varepsilon r} t^{\rho(r)-1}\, dt + \frac{r}{1-\varepsilon}\int_{r/\varepsilon}^{\infty} t^{\rho(r)-2}\, dt \leqslant \frac{2}{\rho(r)}(\varepsilon r)^{\rho(r)} +$$

$$+ \frac{2\varepsilon}{1-\rho(r)}(r/\varepsilon)^{\rho(r)} \leqslant \left(\frac{2\varepsilon^{\rho}}{\rho} + o(1)\right) V(r) + \left(\frac{2\varepsilon^{1-\rho}}{1-\rho} + o(1)\right) V(r),\ r \to \infty.$$

Фиксируя ε, будем считать r настолько большим, чтобы $\max\{|\rho'(t)\times t\ln t|: t\in[\varepsilon r, r/\varepsilon]\}<\varepsilon^2$. С помощью формулы конечных приращений заключаем, что при $t\in[\varepsilon r, r/\varepsilon]$ выполняется

$$|\rho(t)-\rho(r)|\leqslant|t-r|\,\varepsilon\,(r\ln(\varepsilon r))^{-1}\leqslant(\ln(\varepsilon r))^{-1},$$

и, следовательно,

$$|t^{\rho(t)}-t^{\rho(r)}|=t^{\rho(r)}\,|e^{(\rho(t)-\rho(r))\ln t}-1|\leqslant t^{\rho(r)}\,|\rho(t)-\rho(r)|\ln t\times$$
$$\times e^{|\rho(t)-\rho(r)|\ln t}\leqslant t^{\rho(r)}\,|t-r|\,\frac{\varepsilon\ln(r/\varepsilon)}{r\ln(\varepsilon r)}\exp\left\{\frac{\ln(r/\varepsilon)}{\ln(\varepsilon r)}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant r^{\rho(r)-1}\,|t-r|\,\varepsilon^{1-\rho(r)}e^2,\quad r>r_0.$$

В силу этой оценки имеем $|B_3|\leqslant e^2\varepsilon^{1-\rho(r)}\ln(\varepsilon^{-2})\,V(r)$, $r>r_0$. Ввиду произвола в выборе ε приходим к выводу, что $Q(r)-q(r)=o(V(r))$, $r\to\infty$.

Используя теорию вычетов, получаем

$$q(r)=r\int_0^\infty\frac{t^{\rho(r)}\,dt}{t(t-r)}+O(1)=-\pi\,(\operatorname{ctg}\pi\rho(r))\,r^{\rho(r)}+O(1),\quad r\to\infty.$$

Поскольку $\rho(r)\to\rho$, $V^0(r)\sim(1/\rho)V(r)$, $r\to\infty$, приходим к соотношению (4.11).

Рассмотрим случай $\rho=0$. Имеем

$$Q(r)=-\int_1^{3r/2}V(t)\frac{dt}{t}+r\int_{3r/2}^\infty\frac{V(t)\,dt}{t(t-r)}+\int_1^{r/2}\frac{V(t)\,dt}{t-r}+\int_{r/2}^{3r/2}\frac{V(t)\,dt}{t-r}=$$
$$=Q_1+Q_2+Q_3+Q_4;$$
$$Q_1=-V^0(3r/2)=-(1+o(1))\,V^0(r),\quad r\to\infty;$$
$$|Q_2|\leqslant 3r\int_{3r/2}^\infty t^{\rho(t)-2}\,dt=(2+o(1))\,V(r)=o(V^0(r)),\quad r\to\infty;$$
$$|Q_3|\leqslant\frac{2}{r}\int_1^{r/2}V(t)\,dt\leqslant V(r/2)=o(V^0(r)),\quad r\to\infty;$$
$$Q_4=\int_0^{r/2}\{V(r+u)-V(r-u)\}\frac{du}{u}.$$

Поскольку $V'(t)=(\rho'(t)\,t\ln t+\rho(t))\,t^{\rho(t)-1}=o(V(t)\,t^{-1})$, $t\to\infty$, то по формуле конечных приращений имеем при $u\in[0, r/2]$

$$\{V(r+u)-V(r-u)\}\,u^{-1}\leqslant 2\max\{V'(t): t\in[r/2,\ 3r/2]\}=$$
$$=o(V(r)\,r^{-1}),\quad r\to\infty.$$

Поэтому $Q_4=o(V(r))=o(V^0(r))$, $r\to\infty$, и доказательство леммы закончено.

Отметим следующее утверждение, являющееся обобщением леммы 1 в случае $0<\rho<1$.

Лемма 1′. *Пусть $l(r)$ — уточненный порядок Бутру, $0 < \underline{\lim}_{r\to\infty} l(r) \leqslant \overline{\lim}_{r\to\infty} l(r) < 1$. Справедливо равномерное относительно $\theta \in (0, 2\pi)$ асимптотическое равенство*

$$re^{i\theta}\int_1^\infty \frac{t^{l(t)}\,dt}{t\,(t - re^{i\theta})} = -\left(\frac{\pi}{\sin \pi l(r)} + o(1)\right) e^{il(r)(\theta-\pi)} r^{l(r)},\quad r\to\infty. \qquad (5.1)$$

Отличие этого утверждения от известных [8, с. 93—94] состоит в том, что равномерность по θ обеспечивается на $(0, 2\pi)$, а не на $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Лемма 1 при $0 < \rho < 1$ получается из (5.1) предельным переходом при $\theta \to 0$ с использованием формулы Сохоцкого — Племеля. /

Доказательство леммы 1′ получается почти дословным повторением рассуждений, проведенных при доказательстве леммы 1 в случае $0 < \rho < 1$. При этом роль $q(r)$ играет интеграл

$$re^{i\theta}\int_1^\infty \frac{t^{l(r)}\,dt}{t\,(t - re^{i\theta})} = -\frac{\pi}{\sin \pi l(r)} e^{il(r)(\theta-\pi)} r^{l(r)} + O(1),\quad r\to\infty.$$

§ 6. Доказательства теорем 4 и 5. Чтобы доказать теорему 4, достаточно убедиться в том, что если выполнены ее условия 1) и 2), то при любом $\tau > 0$ выполнены условия теоремы 1 (А), (Б), (В) с $V(t) = \tau t^{\sigma}$, $V_1(t) = t^{\nu}$, где σ — число, о котором говорится в формулировке теоремы 4, а $\nu \in (0, \sigma)$. Нам понадобится следующая лемма, являющаяся обобщением одной леммы Н. В. Говорова [1, с. 164] и доказываемая близкими рассуждениями.

Лемма 2. *Пусть $l(t)$ — уточненный порядок Бутру и пусть $\psi \in H_{[1,\infty)}(\mu)$, $0 < \mu \leqslant 1$, $\psi(\infty) > 0$. Тогда: а) если $\mu < 1$, то*

$$\psi(t)\,t^{l(t)} = \max\{\psi(x)\,x^{l(x)} : 1 \leqslant x \leqslant t\} + O(t^{l(t)-\mu/(1-\mu)}),\quad t\to\infty;$$

б) если $\mu = 1$, то функция $\psi(t)\,t^{l(t)}$ является неубывающей при достаточно больших t.

Сначала с помощью леммы 2 докажем теорему 4, а затем приведем доказательство леммы.

Пользуясь обозначениями из формулировки теоремы 4, положим $\psi(t) = \varphi(t) - \tau t^{\sigma - l(t)}$. Очевидно, $\psi(\infty) = \varphi(\infty) > 0$ и, так как $\varphi \in H_{[1,\infty)}(\mu_0)$, $\tau t^{\sigma-l(t)} \in H_{[1,\infty)}(\min(1, \lambda-\sigma))$, то $\psi \in H_{[1,\infty)}(\mu)$, где $\mu = \min(\mu_0, \lambda-\sigma)$. Положим $n(t) = [\max\{\psi(x)\,x^{l(x)} : 1 \leqslant x \leqslant t\}^+]$. Очевидно, функция n неотрицательна, целозначна и не убывает. Если $\mu < 1$, то в силу п. а) леммы 2 имеем

$$\psi(t)\,t^{l(t)} - n(t) = O(t^{l(t)-\mu/(1-\mu)}) + O(1),\quad t\to\infty,$$

откуда

$$\varphi(t)\,t^{l(t)} = n(t) + \tau t^{\sigma} + O(t^{l(t)-\mu/(1-\mu)}) + O(1),\quad t\to\infty.$$

Поскольку в силу последнего из условий (3.2) имеем $\overline{\lim}_{t\to\infty}\{l(t) - \mu/(1-\mu)\} = \rho - \mu/(1-\mu) < \sigma$, то тем самым доказано, что выполнено условие (A) с $V(t)=\tau t^{\sigma}$, $V_1(t)=t^{\nu}$, где $\nu\in(0,\sigma)$. Если $\mu=1$, то в силу п. б) леммы 2 имеем $\psi(t)t^{l(t)}-n(t)=O(1)$, $\varphi(t)t^{l(t)}=n(t)+\tau t^{\sigma}+O(1)$, $t\to\infty$, и приходим к такому же выводу.

Учитывая, что функции $V^0(t)$ и $k(t)$ выражаются равенствами (2.6), легко убеждаемся в том, что из условия 1) теоремы 4 следует выполнение условия ($\tilde{Б}$), более сильного, чем (Б). Выполнение условия (В) непосредственно следует из условия 2). Тем самым теорема 4 доказана.

Докажем лемму 2. Положим $W(t)=t^{l(t)}$, $\Delta(t,h)=\psi(t)W(t)-\psi(t-h)W(t-h)$, $h\in[0,\ t-1]$. Выясним, насколько большим должно быть h, чтобы обеспечить $\Delta(t,h)>0$.

Пусть $K=\max\{\psi(t):t\in[1,\infty]\}$. Выберем число $b\in(0,1)$ настолько близким к 1, чтобы выполнялось $\psi(\infty)/2-K(1-b)^{\lambda/2}>0$. При $bt\leqslant h\leqslant t-1$ и достаточно большом t имеем $\Delta(t,h)\geqslant\frac{1}{2}\psi(\infty)W(t)-KW(t(1-b))\geqslant W(t)\{\psi(\infty)/2-K(1-b)^{\lambda/2}\}>0$. (использовалось свойство уточненного порядка Бутру [8, с. 91], в силу которого $W(t(1-b))\sim(1-b)^{l(t)}W(t)$, $t\to\infty$). При $0\leqslant h\leqslant bt$ и достаточно большом t выполняется

$$\Delta(t,h)=\psi(t)\{W(t)-W(t-h)\}+\{\psi(t)-\psi(t-h)\}W(t-h)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\psi(\infty)\int\limits_{t-h}^{t}\{l'(\tau)\tau\ln\tau+l(\tau)\}W(\tau)\frac{d\tau}{\tau}-Ch^{\mu}t^{-2\mu}W(t)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{4}\psi(\infty)\lambda W(t(1-b))ht^{-1}-Ch^{\mu}t^{-2\mu}W(t)\geqslant$$

$$\geqslant W(t)\left\{\frac{1}{4}\psi(\infty)\lambda(1-b)^{2\rho}ht^{-1}-Ch^{\mu}t^{-2\mu}\right\}.$$

Если $\mu=1$, то величина в фигурных скобках положительна при $t\geqslant t_0$, где t_0 не зависит от h. Если $\mu<1$, то величина в фигурных скобках положительна при $t\geqslant t_0$ и $h\geqslant C_1t^{(1-2\mu)/(1-\mu)}$.

Таким образом, если $\mu=1$, то $\Delta(t,h)>0$ при любом $h\in(0,t-1]$, $t\geqslant t_0$. Это уже доказывает справедливость утверждения б).

Если $\mu<1$, то $\Delta(t,h)>0$ при $C_1t^{(1-2\mu)/(1-\mu)}\leqslant h\leqslant t-1$, $t\geqslant t_0$. Отсюда следует, что $\max\{\psi(x)W(x):1\leqslant x\leqslant t\}=\max\{\psi(x)W(x):t-C_1t^{(1-2\mu)/(1-\mu)}\leqslant x\leqslant t\}$. Поэтому для доказательства утверждения а) достаточно установить, что при $0\leqslant h\leqslant C_1t^{(1-2\mu)/(1-\mu)}$ выполняется $|\Delta(t,h)|\leqslant C_2W(t)t^{-\mu/(1-\mu)}$, $t\geqslant t_0$. Последнее вытекает из оценки

$$|\Delta(t,h)|\leqslant|\psi(t)|\{W(t)-W(t-h)\}+|\psi(t)-\psi(t-h)|W(t-h)\leqslant$$

$$\leqslant K\int\limits_{t-h}^{t}\{l'(\tau)\tau\ln\tau+l(\tau)\}W(\tau)\frac{d\tau}{\tau}+Ch^{\mu}t^{-2\mu}W(t)\leqslant$$

$$\leqslant 2K\rho W(t)ht^{-1}+Ch^{\mu}t^{-2\mu}W(t)\leqslant(2K\rho C_1+CC_1^{\mu})W(t)t^{-\mu/(1-\mu)}.$$

Тем самым лемма 2 доказана.

Для доказательства теоремы 5 достаточно заметить, что если выполнены ее условия, то выполнены и условия (A′), (Б′), (В′) теоремы 3 с $n(t)=\left[\frac{1}{2\pi}(\arg G(t))^{+}\right]$.

§ 7. Доказательство теоремы 6. Покажем, что если выполнены условия теоремы 6, то выполнены условия (А) и (Б) с $V(t)$, взятым из (3.6) и любым $V_1(t) = o(V^0(t)/\ln t)$, $t \to \infty$. То, что выполнено условие (В), — тривиально.

Положим $H(t) = \int\limits_1^t h(u)\,du$, $t \geqslant 1$, и обозначим через $\vartheta(x)$, $x \geqslant 0$, функцию, обратную к $H(t)$. В качестве $n(t)$ возьмем целозначную неубывающую функцию, определяемую условиями

$$n(\vartheta(m)) = H(\vartheta(m)) = m, \quad \int\limits_{\vartheta(m)}^{\vartheta(m+1)} (H(t) - n(t))\,dt = 0, \ m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{7.1}$$

Легко видеть, что

$$|H(t) - n(t)| \leqslant 1, \ t \geqslant 1, \tag{7.2}$$

поэтому выполнение условия (А) очевидно. Займемся проверкой выполнения (Б).

Обозначим через $Y(t)$ величину, стоящую в фигурных скобках в левой части соотношения (1.6) в условии (Б). Нам надлежит показать, что

$$(Y(t))^+ = o(V^0(t)), \ t \to \infty. \tag{7.3}$$

В силу (1.5) имеем

$$Y(t) = \int\limits_0^{k(t)} (H(t+u) - H(t-u))\frac{du}{u} - \int\limits_0^{k(t)} (n(t+u) - n(t-u))\frac{du}{u} + \int\limits_0^{k(t)} (V(t+u) - V(t-u))\frac{du}{u}.$$

Так как $V^0(t)/(V_1(t)\ln t) = o(\sqrt{t})$, $1/h(t) = O(e^{-t})$, $t \to \infty$, для достаточно больших t имеем $1/h(t) < k(t)$, и величину Y можно представить в виде

$$Y(t) = \left\{ \int\limits_0^{1/h(t)} (H(t+u) - H(t-u))\frac{du}{u} - \int\limits_0^{1/h(t)} (n(t+u) - n(t-u))\frac{du}{u}\right\} + \int\limits_{1/h(t)}^{k(t)} \{(H(t+u) - n(t+u)) - (H(t-u) - n(t-u))\}\frac{du}{u} + \int\limits_0^{k(t)} (V(t+u) - V(t-u))\frac{du}{u} = Y_1(t) + Y_2(t) + Y_3(t).$$

Используя условие (3.5), получаем

$$Y_1(t) \leqslant \int\limits_0^{1/h(t)} (H(t+u) - H(t-u))\frac{du}{u} \leqslant \int\limits_0^{1/h(t)} (2uh(t+u))\frac{du}{u} \leqslant \leqslant 2h(t + 1/h(t))/h(t) \leqslant C.$$

Легко видеть, что $Y_3(t) = o(1)$, $t \to \infty$. Остается получить оценку для величины $Y_2(t)$. Положим $R(t) = \int\limits_1^t (H(u) - n(u))\, du$. Нам понадобится следующая оценка:

$$|R(t)| \leqslant C/h(t),\ t \geqslant t_0 > 1. \tag{7.4}$$

Чтобы получить ее, обозначим через m_t целое число, определяемое условием $\vartheta(m_t) \leqslant t < \vartheta(m_t + 1)$, и заметим, что в силу (7.1), (7.2)

$$|R(t)| = \Bigl|\int\limits_{\vartheta(m_t)}^{t} (H(u) - n(u))\, du\Bigr| \leqslant \vartheta(m_t + 1) - \vartheta(m_t) =$$

$$= \int\limits_{m_t}^{m_t+1} \vartheta'(u)\, du = \int\limits_{m_t}^{m_t+1} (1/h(\vartheta(u)))\, du \leqslant 1/h(\vartheta(m_t)).$$

Отсюда с помощью условия (3.5) получаем оценку (7.4):

$$|R(t)| \leqslant \frac{1}{h(t)} \frac{h(\vartheta(m_t + 1))}{h(\vartheta(m_t))} \leqslant \frac{1}{h(t)} \cdot \frac{h(\vartheta(m_t) + 1/h(\vartheta(m_t)))}{h(\vartheta(m_t))} \leqslant \frac{C}{h(t)}.$$

Запишем величину $Y_2(t)$ в виде

$$Y_2(t) = \int\limits_{t+1/h(t)}^{t+k(t)} (u - t)^{-1}\, dR(u) - \int\limits_{t-k(t)}^{t-1/h(t)} (t - u)^{-1}\, dR(u) = Y_2^{(1)} - Y_2^{(2)}.$$

Интегрируя по частям и используя оценку (7.4), получим

$$|Y_2^{(1)}| = \Bigl|\frac{R(u)}{u - t}\Bigr|_{t+1/h(t)}^{t+k(t)} + \int\limits_{t+1/h(t)}^{t+k(t)} \frac{R(u)}{(u - t)^2}\, du\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{k(t)\, h(t + k(t))} + \frac{Ch(t)}{h(t + 1/h(t))} \leqslant C_1.$$

Получить оценку для $Y_2^{(2)}$ несколько сложнее. Сначала с помощью (7.4) имеем

$$|Y_2^{(2)}| = \Bigl|\frac{R(u)}{t - u}\Bigr|_{t-k(t)}^{t-1/h(t)} - \int\limits_{t-k(t)}^{t-1/h(t)} \frac{R(u)}{(t - u)^2}\, du\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Ch(t)}{h(t - 1/h(t))} + \frac{C}{k(t)\, h(t - k(t))} + C \int\limits_{t-k(t)}^{t-1/h(t)} \frac{du}{h(u)\,(t - u)^2}.$$

Замечая, что в силу (3.5) выполняется $h(t) \leqslant h(t - 1/h(t) + 1/h(t - 1/h(t))) \leqslant Ch(t - 1/h(t))$, и, кроме того, $1/k(t) = o(e^t)$, $1/h(t) = O(e^{-t})$, $t \to \infty$, имеем

$$|Y_2^{(2)}| \leqslant O(1) + C \int\limits_{t-k(t)}^{t-1/h(t)} \frac{du}{h(u)\,(t - u)^2}.$$

Обозначим интеграл, стоящий в правой части последнего неравенства через I, и оценим его. Дважды интегрируя по частям, будем иметь

$$I=\frac{1}{h(u)(t-u)}\Bigg|_{t-k(t)}^{t-1/h(t)}+\left(\frac{1}{h(u)}\right)'\ln(t-u)\Bigg|_{t-k(t)}^{t-1/h(t)}-$$

$$-\int\limits_{t-k(t)}^{t-1/h(t)}\left(\frac{1}{h(u)}\right)''\ln(t-u)\,du\leqslant\frac{h(t)}{h(t-1/h(t))}+\frac{h'(t-1/h(t))}{h^2(t-1/h(t))}\ln h(t)+$$

$$+\max\left\{\frac{h''(u)}{h^2(u)}+2\frac{(h'(u))^2}{h^3(u)}:u\geqslant t-k(t)\right\}\int\limits_{t-k(t)}^{t}|\ln(t-u)|\,du.$$

Покажем, что

$$h'(u)\leqslant Ch^{3/2}(u),\ h''(u)\leqslant Ch^3(u).$$

Пусть $\beta\in(0,1/2)$ — число, фигурирующее в (3.5). По теореме Коши имеем

$$h^{(p)}(u)=\frac{p!}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-u|=h^{-\beta}(u)}\frac{h(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-u)^{p+1}},\ p=0,1,2,\ \ldots,$$

откуда $h^{(p)}(u)\leqslant p!\ h^{p\beta}(u)\max\{|h(\zeta)|:|\zeta-u|=h^{-\beta}(u)\}$. Так как функция h удовлетворяет условиям (3.4), (3.5), то $|h(\zeta)|\leqslant h(\operatorname{Re}\zeta)\leqslant$ $\leqslant h(u+h^{-\beta}(u))\leqslant Ch(u)$, поэтому имеем $h^{(p)}(u)\leqslant Cp!\,h^{1+p\beta}(u)$, откуда следуют оценки (7.5).

Учитывая (7.5), заключаем, что $I=O(1)$, $t\to\infty$, и, следовательно $\tilde{Y}_2^{(2)}(t)=O(1)$, $t\to\infty$. Тем самым мы доказали оценку (7.3) (более того, установлено, что $(Y(t))^+=O(1)$, $t\to\infty$) и завершили доказательство теоремы 6.

Замечание. Из доказательства теоремы 6 следует неэквивалентность условий (Б) и ($\tilde{\text{Б}}$). В самом деле, если бы функция (3.6) удовлетворяла условию ($\tilde{\text{Б}}$), то мы имели бы

$$\int\limits_0^{k(t)}(H(t+u)-H(t-u))\frac{du}{u}\leqslant CV^0(t). \tag{7.6}$$

Поскольку $H(t+u)-H(t-u)\geqslant 2uh(t-u)$, то из (7.6) следует, что $2k(t)\,h(t-k(t))\leqslant CV^0(t)$, откуда

$$h(t-1)\leqslant CV^0(t)/k(t)=CV^0(t)\exp\left(\frac{V^0(t)}{V_1(t)\ln t}\right)=O(e^{\sqrt{t}}),\ t\to\infty.$$

Это противоречит цитированной лемме из [12].

Список литературы: 1. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., 1986. 240 с. 2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., 1977. 640 с. 3. *Роговин С. В.* Краевые задачи и особые интегральные уравнения с бесконечным индексом // Науч. тр. юбил. семинара по краевым задачам. Минск, 1985. С. 95—103. 4. *Грудский С. М.* Сингулярные интегральные операторы с бесконечным индексом и произведения Бляшке // Math. Nachr. 1986. 120. С. 313—331. 5. *Дыбин В. Б.*

Корректные задачи для сингулярных интегральных уравнений. Ростов на Дону, 1988. 160 с. 6. *Алехно А. Г.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом произвольного степенного порядка // Докл. АН БССР. 1988. 32, № 2. С. 112—115. 7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с. 8. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., 1970. 592 с. 9. *Юров П. Г.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического типа // Изв. высш. учеб. завед. Сер. Математика. 1966. № 2. С. 158—163. 10. *Сандригайло И. Е.* О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости // Докл. АН БССР. 1975. 19, № 10. С. 872—875. 11. *Рогозин С. В.* Об однородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом и неограниченным модулем коэффициента для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1975. № 6. С. 124—125. 12. *Камынин И. П., Островский И. В.* О нулевых множествах целых эрмитово-положительных функций // Сиб. мат. журн. 1982. 23, № 3. С. 66—82. 13. *Nevanlinna R.* Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum // Acta Soc. Sci. Fenn. 1925. 50, N 12. S. 1—45. 14. *Гришин А. Ф.* О функциях, голоморфных внутри угла и имеющих там нулевой порядок // Теория функции, функцион. анализ и их прил. 1965. Вып. 1. С. 41—56.

Поступила в редколлегию 10.12.89