ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIX. Серия 4 1963

О ВЗВЕШЕННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ НУЛЕВОЙ СТЕПЕНИ МНОГОЧЛЕНАМИ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

И. О. Хачатрян

Пусть $\varphi(t) \geqslant 1$, $-\infty < t < \infty$, — произвольная функция, такая, что

$$\frac{t^n}{\varphi(t)} \to 0 \quad \text{при } |t| \to \infty. \tag{1}$$

Рассмотрим пространство C^0_φ непрерывных функций $f(t)$ на оси $(-\infty, \infty)$, удовлетворяющих условию

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} \to 0 \text{ при } |t| \to \infty.$$

Нормой элемента называют число

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \frac{|f(t)|}{\varphi(t)} = \|f\|. \tag{2}$$

Из (1) следует, что полиномы принадлежат C^0_φ. Задача, поставленная С. Н. Бернштейном в 1924 г., заключается в следующем: найти необходимые и достаточные условия на функцию $\varphi(t)$, при которых полиномы составляют всюду плотное множество в пространстве C^0_φ. В этом случае функцию φ называют весовой.

Этой задаче и ее обобщениям посвящен ряд работ. В частности, укажем на работы самого С. Н. Бернштейна [1], Н. И. Ахиезера [2], Н. И. Ахиезера и С. Н. Бернштейна [3], С. Н. Мергеляна [4], А. Л. Шагиняна [5], М. М. Джрбашяна [6], T. Hall [7], H. Pollard [8] и других авторов.

Подробное изложение этих вопросов можно найти в обзорных статьях [2] и [4].

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество полиномов $P(t)$, для которых

$$\left\| \frac{P(t)}{t-i} \right\| \leqslant 1,$$

а через $\psi(z)$

$$\psi(z) = \sup_{P \in \mathfrak{M}} |P(z)|$$

Тогда каждое из следующих условий является необходимым и достаточным условием полноты:

а) $\psi(z) = \infty$, $\operatorname{Im} z \neq 0$ (С. Н. Мергелян)

б) $\displaystyle\sup_{P \in \mathfrak{M}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|P(t)|}{1+t^2}\,dt = \infty$ (Н. И. Ахиезер и С. Н. Бернштейн)

в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\psi(t)}{1+t^2}\,dt = \infty$ (С. Н. Мергелян)

Предположим, что $\varphi(t)$ — не весовая функция, то есть замыкание $\overline{P}_\varphi$ множества полиномов не совпадает со всем пространством C^0_φ, а составляет его неполную часть. Н. И. Ахиезер показал [2], что $\overline{P}_\varphi$ состоит из функций, которые на множестве E_φ ($t \in E_\varphi$, если $\varphi(t) \neq \infty$) совпадают с целыми функциями конечной степени. В дальнейшем С. Н. Мергелян [4] установил более точный результат, показав, что $\overline{P}_\varphi$ принадлежит множеству C^*_φ функций, совпадающих на E_φ с целыми функциями нулевой степени.

Возникает вопрос: когда это замыкание совпадает со всем C^*_φ, иначе говоря, когда функция φ, не будучи весовой в C^0_φ, будет таковой в C^*_φ. В настоящей заметке дается ответ на этот вопрос.

Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ множество целых функций нулевой степени, удовлетворяющих условию

$$\left\|\frac{f(t)}{t-i}\right\| \leqslant 1, \quad \frac{f(t)}{(t-i)\varphi(t)} \to 0 \quad \text{при } |t| \to \infty,$$

а через $\psi_1(z)$

$$\psi_1(z) = \sup_{f \in \mathfrak{M}_1} |f(z)|$$

Основным результатом настоящей заметки является

Теорема. *Пусть полиномы не составляют плотного множества в C^0_φ. Тогда для того чтобы полиномы составили плотное множество в C^*_φ, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\psi(z) \equiv \psi_1(z), \quad \operatorname{Im} z \neq 0. \tag{3}$$

Необходимость. Пусть множество полиномов плотно в C^*_φ, то есть для любой функции $f(t) \in C^*_\varphi$ и для заданного $\varepsilon > 0$ можно указать такой многочлен $P_n(t)$, что

$$\left|\frac{f(t) - P_n(t)}{\varphi(t)}\right| < \varepsilon, \quad -\infty < t < \infty. \tag{4}$$

Понятно, что если целая функция нулевой степени взята из множества $\mathfrak{M}_1$, то приближающиеся к ней полиномы можно подобрать из $\mathfrak{M}$. Далее, по условию

$$\psi(z) < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \psi(t)}{1+t^2}\,dt < +\infty.$$

Более того, функция $\psi(z)$, как показал С. Н. Мергелян, равномерно ограничена в любой конечной области, в частности

$$\psi(z) < C_R, \quad |z| \leqslant R. \tag{5}$$

Функция

$$\theta(t) = \frac{\psi(t)}{|t-i|} \leqslant \varphi(t) \tag{6}$$

всюду конечна и ограничена на любом конечном отрезке. Наряду с нормой (2), введем новую норму

$$\|f\|_1 = \sup_{-\infty < t < \infty} \frac{|f(t)|}{\theta(t)}. \tag{7}$$

Докажем, что если $f(t)$ — целая функция нулевой степени из C^*_φ, то $\|f\| = \|f\|_1$.

Из (6) имеем

$$\|f\| \leqslant \|f\|_1. \tag{8}$$

Кроме того, из определения $\theta(t)$ при $P \in \mathfrak{M}$ будем иметь

$$\sup_{-\infty<t<\infty} \left| \frac{P(t)}{(t-i)\,\theta(t)} \right| \leqslant 1, \quad \text{то есть} \quad \left\| \frac{P(t)}{t-i} \right\|_1 \leqslant 1.$$

Понятно, что неравенство $\left\| \frac{P(t)}{t-i} \right\| \leqslant C$ влечет неравенство $\left\| \frac{P(t)}{t-i} \right\|_1 \leqslant C$, то есть

$$\left\| \frac{P(t)}{t-i} \right\| \geqslant \left\| \frac{P(t)}{t-i} \right\|_1,$$

и, следовательно, для полиномов $P(t) = (t-i)\,Q(t)$ получим

$$\| Q(t) \| = \| Q(t) \|_1. \tag{9}$$

Пусть $\| Q_n - f_1 \| \to 0$. Тогда $\| Q_n - Q_m \|_1 = \| Q_n - Q_m \| \to 0$, то есть последовательность $\{Q_n\}$ сходится в себе по норме (7). Но функция $\theta(t)$ всюду конечна на $(-\infty, \infty)$ и не является весовой функцией в C_φ^0. Поэтому последовательность $\{Q_n(t)\}$ сходится к целой функции нулевой степени $f_2(t)$, то есть $\| Q_n - f_2 \|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и из (8) следует, что $\| Q_n - f_2 \| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, целая функция нулевой степени $f(t) = f_2(t) - f_1(t) = 0$ на E_φ, то есть $\| f(t) \| = 0$. Если $f(t) \neq 0$, то, выбрав точку z_0, $f(z_0) \neq 0$, можно добиться того, чтобы $\sup\limits_{f \in \mathfrak{M}_1} | f(z_0) | = \infty$. Это означает, что целые функции нулевой степени всюду плотны в C_φ^0, что, в силу предположения теоремы, является противоречием. Следовательно, $f_2(t) \equiv f_1(t)$, откуда получаем $\| Q_n - f_1 \|_1 \to 0$ при $n \to \infty$.

Имеем $\| f_1 \| = \lim \| Q_n \|$, $\| f_1 \|_1 = \lim \| Q_n \|_1$. Написав для Q_n равенство (9) и перейдя к пределу, получим $\| f_1 \| = \| f_1 \|_1$ для целых функций из C_φ^*. Итак, из (4) следует

$$\left| \frac{f(t) - P_n(t)}{\theta(t)} \right| < \varepsilon. \tag{10}$$

Теперь докажем равенство (3). Пусть z_0, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, — любая фиксированная точка. Для любого наперед заданного числа $\delta > 0$ в $\mathfrak{M}_1$ найдется такая функция $f_\delta(t)$, что

$$| f_\delta(z_0) | > \psi_1(z_0) - \delta.$$

Выберем полином $P_{\delta, n}(t) \in \mathfrak{M}$ так, чтобы

$$\left| \frac{P_{\delta, n}(t) - f_\delta(t)}{\theta(t)} \right| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — наперед заданное число. Обозначим

$$a = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \theta(t).$$

Тогда

$$| f_\delta(t) - P_{\delta, n}(t) | < a \cdot \varepsilon, \quad t \in [0,\ 1],$$

то есть

$$\lim P_{\delta, n}(t) = f_\delta(t) \text{ на } [0,1].$$

С другой стороны из (5) следует компактность семейства полиномов в любой конечной области, в частности в круге $|z| \leqslant 1 + |z_0|$. Значит из последовательности $\{P_{\delta, n}\}_{n=1}^{\infty}$ можно извлечь равномерно сходящуюся в круге $|z| \leqslant 1 + |z_0|$ подпоследовательность. Ее предел $\lim P_{\delta, n}(z) = \chi(z)$, $|z| \leqslant 1 + |z_0|$ есть аналитическая функция в круге $|z| \leqslant 1 + |z_0|$ и $f_\delta(t) = \chi(t)$, откуда следует, что $f_\delta(z) = \chi(z)$ всюду в круге $|z| \leqslant 1 + |z_0|$ и, в частности,

$$\lim | P_{\delta, n}(z_0) | = | f_\delta(z_0) |,$$

откуда следует, что

$$\sup_{P \in \mathfrak{M}} |P(z_0)| \geqslant |f_\delta(z_0)| > \psi(z_0) - \delta,$$

и так как $\delta > 0$ — произвольно, то

$$\sup_{P \in \mathfrak{M}} |P(z_0)| \geqslant \psi(z_0).$$

Обратное неравенство очевидно, то есть имеет место равенство (3).

Достаточность. Докажем, что при равенстве (3) функционал F в C_φ^*, обращающийся в нуль на полиномах, есть тождественный нуль. Пусть

$$F[t^n] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда для любого полинома $P(t)$

$$F\left[\frac{P(t) - P(z)}{t - z}\right] = 0. \tag{11}$$

Продолжим функционал F на пространство C_φ^0 всех непрерывных функций; тогда из (11) имеем

$$F\left[\frac{P(t)}{t - z}\right] = P(z) F\left[\frac{1}{t - z}\right]. \tag{12}$$

Обозначим $F\left[\frac{1}{t - z}\right] = F(z)$. Тогда $F(z)$ — голоморфная функция в верхней и нижней полуплоскостях. Далее, из общего вида линейного функционала в C_φ^0

$$F\left[\frac{P(t)}{t - z}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{(t - z)\varphi(t)} d\sigma(t), \tag{13}$$

где $\sigma(t)$ имеет ограниченную вариацию на оси $(-\infty, \infty)$, получим неравенство

$$\left|F\left[\frac{P(t)}{t - z}\right]\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{P(t)}{(t - z)\varphi(t)}\right| |d\sigma(t)|.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем N настолько большим, что

$$\int_{|t| > N} |d\sigma(t)| < \varepsilon.$$

Тогда для любого полинома $P(t) \in \mathfrak{M}$

$$\left|F\left[\frac{P(t)}{t - z}\right]\right| \leqslant \int_{-N}^{N} \left|\frac{P(t)}{(t - z)\varphi(t)}\right| |d\sigma(t)| + \int_{|t| > N} \left|\frac{P(t)}{(t - z)\varphi(t)}\right| |d\sigma(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|t| < N} \left|\frac{P(t)}{(t - i)\varphi(t)} \frac{t - i}{t - z}\right| \cdot |\mathrm{var}\, \sigma(t)| + \varepsilon \left\|\frac{P(t)}{t - z}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|t| < N} \left|\frac{t - i}{t - z}\right| + \varepsilon \left\|\frac{P(t)}{t - z}\right\|.$$

При $\operatorname{Im} z \to \infty$ первое слагаемое правой части последнего неравенства стремится к нулю и при $\operatorname{Im} z \to \infty$ мы получим

$$\left|F\left(\frac{P(t)}{t - z}\right)\right| = o(1)$$

для любого полинома $P(t) \in \mathfrak{M}$. Отсюда и из (13) следует

$$|F(z)| \cdot |P(z)| = o(1) \text{ для любого } P(t) \in \mathfrak{M}$$

при $\operatorname{Im} z \to \infty$. Отсюда

$$|F(z)| \leqslant \frac{o(1)}{\sup\limits_{P \in \mathfrak{M}} |P(z)|} = \frac{o(1)}{\psi(z)}. \tag{14}$$

Пусть $f(t)$ — целая функция нулевой степени, такая, что

$$\left\| \frac{f(t)}{t-i} \right\| \leqslant 1, \quad \left| \frac{f(t)}{(t-i)\varphi(t)} \right| \to 0 \text{ при } |t| \to \infty.$$

Тогда частное

$$\frac{f(t)-f(z)}{t-z} \in C_\varphi^* \tag{15}$$

при любом z. Обозначим

$$\Phi(z) \equiv F\left[\frac{f(t)-f(z)}{t-z}\right] = F\left[\frac{f(t)}{t-z}\right] - f(z)F(z). \tag{16}$$

Из условия (15) вытекает

$$F\left[\frac{f(t)}{t-iy}\right] = o(1) \text{ при } |y| \to \infty.$$

Тогда из (16) и (14) следует

$$|\Phi(iy)| \leqslant o(1) + |f(iy)|\,|F(iy)| \leqslant o(1) + \frac{o(1)}{\psi(iy)} \cdot \sup |f(iy)|.$$

Верхняя грань в последнем неравенстве берется в классе целых функций нулевой степени, удовлетворяющих условию (15). Следовательно,

$$|\Phi(iy)| \leqslant o(1) + o(1) \cdot \frac{\psi_1(iy)}{\psi(iy)} \text{ при } |y| \to \infty. \tag{17}$$

Так как, по предположению, $\psi(z) \equiv \psi_1(z)$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$, то из (17) следует что

$$|\Phi(iy)| = o(1) \quad \text{при } |y| \to \infty. \tag{18}$$

Докажем, что целая функция $\Phi(z)$ имеет нулевую степень. Имеем

$$|\Phi(z)| \leqslant \left| F\left[\frac{f(t)}{t-z}\right] \right| + |f(z)| \cdot |F(z)| \tag{19}$$

$$\left| F\left[\frac{f(t)}{t-z}\right] \right| \leqslant \|F\| \left\| \frac{f(t)}{t-z} \right\| = \|F\| \cdot \left\| \frac{f(t)}{t-i} \cdot \frac{t-i}{t-z} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|F\| \cdot \left\| \frac{f(t)}{t-i} \right\| \cdot \sup_t \left| \frac{t-i}{t-z} \right| \leqslant c \sup_t \left| 1 + \frac{z-i}{t-z} \right| \leqslant$$

$$\leqslant c\left(1 + \frac{|z|+1}{|y|}\right) \leqslant c_1 \frac{|z|}{|y|}, \ (z = x+iy). \tag{20}$$

Далее,

$$\left| F\left[\frac{1}{t-z}\right] \right| \leqslant \|F\| \cdot \left\| \frac{1}{t-z} \right\| \leqslant \|F\| \cdot \frac{1}{|y|}. \tag{21}$$

Из (19), (20) и (21) получаем

$$|\Phi(z)| \leqslant c_1 \frac{|z|}{|y|} + |f(z)| \frac{c_2}{|y|}$$

или

$$|y\Phi(z)| \leqslant c[|f(z)+|z|], \quad z = x+iy.$$

Далее,

$$y = |z| \sin\alpha = |z| \cdot \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = \frac{|z|}{2i} e^{-i\alpha}(e^{2i\alpha} - 1)$$

или

$$y = \frac{1}{2i|z|}(z^2 - |z|^2), \quad z = |z| e^{i\alpha} = re^{i\alpha}.$$

Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r}\frac{\Phi(z)(z^2-|z|^2)}{z-w}dz=\Phi(w)(w^2-|z|^2),$$

$$|\Phi(w)(w^2-|z|^2)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\Phi(z)(z^2-|z|^2)}{z-w}\right|rd\alpha.$$

Но

$$|\Phi(z)(z^2-|z|^2)|\leqslant 2c|z|[|f(z)|+|z|].$$

Если w лежит на окружности $|w|=\frac{1}{2}r$, то

$$\frac{3}{4}r^2|\Phi(w)|\leqslant|\Phi(w)(w^2-|z|^2)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2cr^2(r+|f(z)|)}{\frac{1}{2}r}d\alpha\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot c_1\cdot r\cdot 2\pi(r+\max_{|z|=r}|f(z)|).$$

Окончательно

$$\left|\Phi\left(\frac{r}{2}e^{i\theta}\right)\right|\leqslant c'\frac{r+\max\limits_{|z|=r}|f(z)|}{r}$$

и так как $f(z)$ — нулевой степени, то и $\Phi(z)$ такова.

Но тогда из (18) следует, что $\Phi(z)\equiv 0$, то есть

$$F\left[\frac{f(t)-f(z)}{t-z}\right]=0$$

для всех целых функций, удовлетворяющих условию (15). В частности,

$$F\left[\frac{f(t)}{t-z_0}\right]=0,$$

где z_0 — корень функции $f(z)$.

Пусть теперь $f(t)$ из C_φ^*. Возьмем функцию

$$F(t)=\frac{1}{\|f\|}(t-i)f(t).$$

Она удовлетворяет условию (15) и $F(i)=0$, следовательно,

$$0=F\left[\frac{F(t)}{t-i}\right]=F\left[\frac{1}{\|f\|}f(t)\right]=\frac{1}{\|f\|}F[f(t)],$$

то есть функционал F равен нулю на всех целых функциях нулевой степени $f(t)\in C_\varphi^*$, а значит, и на всех функциях пространства C_φ^*.

Теорема 2. Если $\varphi(t)$ — целая четная функция с неотрицательными коэффициентами

$$\varphi(t)=\sum_0^\infty a_k t^{2k},\quad a_0\geqslant 1,\quad a_k\geqslant 0,\quad k=1,2,\ldots,$$

то полиномы всюду плотны в C_φ^*.

Доказательство. Для данного отрезка $(-a, a)$ и данного $\varepsilon>0$ можно указать такой полином $P_{2n}(t)=\sum\limits_0^{2n}a_k t^{2k}$, что

$$|\varphi(t)-P_{2n}(t)|<\varepsilon \text{ при } |t|\leqslant a. \tag{22}$$

Целую функцию $\varphi(z)$ и полином $P_{2n}(z)$ можно представить соответственно в видах

$$\varphi(z)=\omega(z)\bar{\omega}(z),\quad P_{2n}(z)=Q_n(z)\bar{Q}_n(z),$$

где все нули функций $\omega(z)$ и $Q_n(z)$ расположены в нижней полуплоскости.

Из (22), учитывая условие $\varphi(t) \geqslant 1$, имеем

$$P_{2n}(t) = |Q_n(t)\bar{Q}_n(t)| = |Q_n^2(t)| \geqslant (1-\varepsilon)\varphi(t) = (1-\varepsilon)|\omega(t)|^2 \text{ при } |t| < a$$

Так как $|Q_n^2(t)| \geqslant 1$, при $\operatorname{Im} z > 0$ получаем

$$\ln|Q_n^2(z)| = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|Q_n^2(t)|}{(t-x)^2+y^2}dt \geqslant \frac{y}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\ln|Q_n^2(t)|}{(t-x)^2+y^2}dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{y}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\ln[(1-\varepsilon)|\omega(t)|^2]}{(t-x)^2+y^2}dt,$$

откуда, беря верхнюю грань в классе $\mathfrak{M}$, получим

$$\sup_{\|P(t)\| \leqslant 1} \ln|P(z)| \geqslant \frac{2y}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\ln[\sqrt{1-\varepsilon}\,|\omega(t)|]}{(t-x)^2+y^2}dt.$$

Устремляя $a \to \infty$, будем иметь

$$\sup_{\|P(t)\| < 1} \ln|P(z)| \geqslant \ln(1-\varepsilon) + \frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\omega(t)|}{(t-x)^2+y^2}dt,$$

$$\sup_{\|P\| \leqslant 1} \ln|P(z)| \geqslant \ln(1-\varepsilon) + \ln|\omega(z)|^2, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

и в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим

$$\sup_{\|P\| \leqslant 1} |P(z)| \geqslant |\omega(z)|^2, \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{23}$$

Далее, если $\|f(t)\| \leqslant 1$, $P \in C_\varphi^*$, то при $y > 0$

$$\ln|f(z)| \leqslant \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|f(t)|}{(t-x)^2+y^2}dt \leqslant \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\varphi(t)}{(t-x)^2+y^2}dt = \ln|\omega(z)|^2,$$

то есть $|f(z)| \leqslant |\omega(z)|^2$, и, следовательно,

$$\sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(z)| = |\omega(z)|^2,$$

откуда, с учетом (23), вытекает, что при $\operatorname{Im} z > 0$

$$\sup_{\|P\| \leqslant 1} |P(z)| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(z)|. \tag{24}$$

Равенство (24) аналогично доказывается и для $\operatorname{Im} z < 0$.

Обозначим $\mathrm{H}(t) = \dfrac{\varphi(t)}{|t-i|}$. Равенство (24) можно переписать в виде

$$\sup_{\left|\frac{P(t)}{(t-i)\mathrm{H}(t)}\right| \leqslant 1} |P(z)| = \sup_{\left|\frac{f(t)}{(t-i)\mathrm{H}(t)}\right| \leqslant 1} |f(z)|,$$

что по теореме I означает полноту полиномов в C_H^*, то есть возможность аппроксимации любой целой функции нулевой степени $f_1(t)$, $\dfrac{f_1(t)}{\mathrm{H}(t)} \to 0$, при $|t| \to \infty$ полиномами:

$$\left|\frac{f_1(t) - P_\varepsilon(t)}{\mathrm{H}(t)}\right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \left|\frac{f_1(t) - P_\varepsilon(t)}{\varphi(t)}\right| < \frac{\varepsilon}{|t-i|}.$$

Пусть теперь $f(t) \in C_\varphi^*$ — любая функция и пусть z_0 — один из ее корней. Тогда $\dfrac{f(t)}{t-z_0} \in C_\mathrm{H}^*$ и, следовательно, для данного $\varepsilon > 0$ можно найти полином $P(t)$, так чтобы

$$|f(t)(t-z_0)^{-1} - P(t)|\varphi^{-1}(t) < \varepsilon \cdot |t-i|^{-1} \cdot \left\{\max_t\left|\frac{t-z_0}{t-i}\right|\right\}^{-1},$$

откуда

$$|f(t)-(t-z_0)P(t)|\,\varphi^{-1}(t)<\varepsilon\left|\frac{t-z_0}{t-i}\right|\cdot\left\{\max_t\left|\frac{t-z_0}{t-i}\right|\right\}^{-1}\leqslant\varepsilon.$$

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Если $M(t)=\max\limits_{|z|=t}|\chi(z)|$, где $\chi(z)$ — целая функция, то полиномы всюду плотны в C_M^*.

В самом деле, по теореме Эрдёша и Кёвари [9], существует целая четная функция $\varphi(z)$ с неотрицательными коэффициентами, такая, что

$$c_1\varphi(t)<M(t)<c_2\varphi(t),\ c_1,\ c_2>0,\ -\infty<t<\infty,$$

откуда следует совпадение пространств C_M^* и C_φ^*.

Следствие 2. Если весовая функция $h(t)$ допускает представление

$$h(t)=h(0)\exp\left\{\int\limits_0^{|t|}\frac{\omega(t)}{t}\,dt\right\},$$

в котором $0\leqslant\omega(t)<\infty$, $\omega(t)$ монотонно возрастает, то для любого заданного $\varepsilon>0$ и данной функции $f(t)\in C_h^*$ найдется полином $P_f(t)$, такой, что

$$\frac{|f(t)-P_f(t)|}{(t^2+1)\,h(t)}<\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $f(t)\in C_h^*$ и $\varepsilon>0$ — заданное число. По теореме В. С. Виденского [10] для функции $h(t)$ существует целая функция $\varphi(t)$:

$\varphi(t)=\sum\limits_0^\infty a_kt^{2k},\ a_0\geqslant1,\ a_k\geqslant0$ такая, что

$$C_1\varphi(t)\leqslant h(t)\leqslant C_2(t^2+1)\,\varphi(t).$$

Тогда $f(t)\in C^*_{(t^2+1)\varphi(t)}$, и по теореме 2 найдется полином $P_f(t)$, такой, что

$$\left|\frac{f(t)-P_f(t)}{(t^2+1)\,\varphi(t)}\right|<\varepsilon,$$

откуда и следует наше утверждение.

В заключение приведем примеры функций, не являющихся весовыми функциями в C_φ^*.

Пусть

$$\varphi(t)=\begin{cases}|t-i|^{-1}\exp t^{\rho_1} & \text{при } t\geqslant0,\ 0<\rho_1<1/2\\ |t-i|^{-1}\exp t^{\rho_2} & \text{при } t<0,\ 1/2<\rho_2<1.\end{cases}$$

Ясно, что $\varphi(t)$ не является весовой функцией в $C_\varphi^0\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\varphi(t)|\,t-i\,|^{-2}dt<+\infty\right)$.

Пусть многочлен $P(t)\in\mathfrak{M}$, то есть

$$|P(t)|\leqslant|t-i|\,\varphi(t).$$

Рассмотрим функцию

$$f(z)=P(z)\,e^{-z^{\rho_1}}.$$

Она регулярна на разрезанной вдоль положительной полуоси плоскости z, имеет порядок $\rho_1<1/2$ и при $t>0$ $|f(t)|\leqslant|P(t)|\,e^{-t^{\rho_1}}\leqslant c$, где c не зависит от $P\in\mathfrak{M}$.

Рассматривая полуось как стороны угла раствора 2π и применяя принцип Фрагмена-Линделефа, получим

$$|P(z)\,e^{-z^{\rho_1}}|\leqslant c$$

и, в частности,

$$|P(iy)| \leqslant ce^{|y|^{\rho_1}}$$

для любого многочлена $P \in \mathfrak{M}$. Следовательно,

$$\psi(iy) = \sup_{P \in \mathfrak{M}} |P(iy)| \leqslant ce^{|y|^{\rho_1}}.$$

Рассмотрим целую функцию порядка $^1/_2$

$$f_0(z) = c_1 \cos \sqrt{z}.$$

Имеем $|f_0(t)| \leqslant c_1$ при $t \geqslant 0$, $|f_0(t)| \leqslant c_1 \exp|t|^{1/2}$ при $t < 0$. c_1 можно выбрать так, чтобы $f_0(t) \in \mathfrak{M}_1$. Тогда

$$\psi_1(z) = \sup_{f \in \mathfrak{M}_1} |f(z)| \geqslant |f_0(z)|.$$

Далее,

$$\lim_{y \to \infty} \frac{\psi(iy)}{\psi_1(iy)} \leqslant \lim_{y \to \infty} \frac{e^{y^{\rho_1}}}{|f_0(iy)|} = 0,$$

то есть $\psi(z) \not\equiv \psi_1(z)$ и, значит, множество полиномов не составляет плотного множества в C_φ^*.

Этот пример основан на том, что выбран несимметричный вес, то есть имеющий различный рост по положительному и отрицательному лучам. В связи с этим представляет интерес пример четного веса, при котором также нет полноты полиномов в C_φ^*.

Пусть

$$\varphi(t) = \begin{cases} |t-i|^{-1} \exp|t|^{\rho}, & t \neq \pm n^4, \; n = 0, 1, 2, \ldots, \; \frac{1}{2} < \rho < 1 \\ |t-i|^{-1} \exp|t|^{1/8}, & t = \pm n^4, \; n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Любой полином $P(z)$ можно представить интерполяционным рядом [9]

$$P(z) = \Phi(z) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{P(n^4)}{\Phi^1(n^4)(z-n^4)},$$

где

$$\Phi(z) = \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^8}\right).$$

$\Phi(z)$ — целая функция порядка $\rho = {}^1/_4$. Функция плотности $\Delta\psi$ ее нулей имеет скачки только в точках $\psi = 0, \pi$, и, следовательно, [9]

$$\ln|\Phi(re^{i\theta})| \approx \frac{\pi r^{1/4}}{\sin\frac{\pi}{4}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Далее,

$$\ln|\Phi'(\pm n^4)| \approx \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} \cos\frac{\pi}{4} \cdot n = n\pi.$$

Если $P(t) \in \mathfrak{M}$, то

$$\ln|P(iy)| \leqslant \Phi(iy) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp|n|^{1/2}}{\exp|n\pi|\,|iy - n^4|} \leqslant c\Phi(iy),$$

где c не зависит от $P \in \mathfrak{M}$.

Имеем

$$\psi(iy) = \sup_{P \in \mathfrak{M}} |P(iy)| \leqslant c\Phi(iy) \leqslant c_1 \exp|y|^{1/4+\varepsilon}.$$

Рассмотрим целую функцию

$$f_0(z) = c \cdot \cos \sqrt{-z}\, \Phi(z),$$

где c выбрано так, чтобы $f_0(t) \in \mathfrak{M}_1$.
Имеем

$$\psi_1(iy) = \sup_{f \in \mathfrak{M}_1} |f(iy)| \geqslant |f_0(iy)|,$$

откуда

$$\lim_{y \to \infty} \frac{\psi(iy)}{\psi_1(iy)} \leqslant \lim_{y \to \infty} \frac{\exp |y|^{\frac{1}{4}+\xi}}{c\,|f_0(iy)|} = 0,$$

то есть $\psi(z) \not\equiv \psi_1(z)$.
Рассмотрим теперь вопросы аппроксимации с весом на полуоси $(0, \infty)$.

Пусть E — нигде не плотное не ограниченное множество на плоскости z, и пусть на E задана произвольная измеримая функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условию

$$\frac{t^n}{\varphi(t)} \to 0 \text{ при } |t| \to \infty, \ t \in E.$$

Рассмотрим пространство $C^0_\varphi(E)$ непрерывных на E функций $f(t)$, удовлетворяющих условию

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} \to 0 \text{ при } |t| \to \infty, \ t \in E.$$

Нормой элемента f пространства $C^0_\varphi(E)$ называют число

$$\sup_{t \in E} |f(t)\,\varphi^{-1}(t)| = \|f\|.$$

Очевидно, что полиномы входят в $C^0_\varphi(E)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество полиномов, удовлетворяющих условию

$$\|P(t)\,(t-i)^{-1}\| \leqslant 1,$$

а через $\psi(z)$

$$\psi(z) = \sup_{P \in \mathfrak{M}} |P(z)|.$$

Как и в случае действительной оси, справедлив следующий общий критерий полноты полиномов в $C^0_\varphi(E)$, указанный С. Н. Мергеляном [4].

Теорема А. Для того, чтобы полиномы составляли плотное множество в $C^0_\varphi(E)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi(z) \equiv \infty, \ z \bar{\in} E.$$

Для довольно общих классов неограниченных множеств А. Л. Шагиняном и М. М. Джрбашяном были получены интегральные критерия полноты полиномов. Полагая, что функция $\varphi(t) = \varphi(|t|)$ — нормально возрастающая, т. е. представляется в виде

$$\varphi(t) = \exp \int_0^{|t|} \frac{\omega(u)}{u}\, du,$$

где $\omega(u)$ не убывает при $u \to \infty$, М. М. Джрбашян, в частности установил следующую теорему.

Теорема В. Для полноты полиномов на луче достаточно, чтобы

$$\int_1^\infty \ln \varphi(t)\, t^{-3/2}\, dt = \infty.$$

Необходимость этого условия без каких-либо ограничений на вес указана А. Л. Шагиняном.

Здесь мы приведем необходимое и достаточное условие полноты полиномов на луче $(0, \infty)$ без требования нормального роста функции $\varphi(t)$.

Теорема 3. Для того чтобы полиномы составляли плотное множество в $C^0_\varphi(0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_0^\infty \frac{\ln \psi(t)}{1+t^{3/2}}\, dt = \infty. \tag{25}$$

Необходимость. Пусть полиномы составляют плотное множество в $C^0_\varphi(0, \infty)$. Тогда $\psi(z) \equiv \infty$, $z \bar{\in} E$. Из неравенства

$$\ln |P(z)| < \int\limits_0^\infty \frac{\partial G(t;\, z)}{\partial n} \ln |P(t)|\, dt,$$

где $G(z;\, t)$ — функция Грина разрезанной вдоль положительной полуоси плоскости z, получим

$$\ln |P(-1)| < c \int\limits_0^\infty \frac{\ln |P(t)|}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt.$$

Пусть $P(t) \in \mathfrak{M}$. Тогда

$$\ln |P(-1)| \leqslant c \int\limits_0^\infty \frac{\ln \psi(t)}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt + c \int\limits_0^\infty \frac{\ln |t-i|}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt \leqslant c \int\limits_0^\infty \frac{\ln \psi(t)}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt + c_1$$

и, беря верхнюю грань в классе $P \in \mathfrak{M}$, получим

$$\int\limits_0^\infty \frac{\ln \psi(t)}{(1+t)\sqrt{t}}\, dt = \infty,$$

что означает расходимость интеграла (25).

Достаточность. Пусть полиномы не составляют плотного множества в $C^0_\varphi(0, \infty)$. Тогда существует нетривиальный функционал F, обращающийся в нуль на t^n $(n = 0, 1, \ldots)$. Имеем

$$F\left[\frac{P(t) - P(z)}{t - z}\right] = 0$$

или

$$F\left[\frac{P(t)}{t-z}\right] = P(z)\, F\left[\frac{1}{t-z}\right] \equiv P(z)\, F(z).$$

Функция $F(z)$ голоморфна во всей плоскости z, разрезанной вдоль положительной полуоси, и ограничена. Следовательно, по теореме Карлемана

$$\int\limits_0^\infty \frac{\ln |F(t+ic)|}{1+t^{3/2}}\, dt > -\infty.$$

При $P(t) \in \mathfrak{M}$ имеем

$$\left| F\left[\frac{P(t)}{t-z}\right] \right| \leqslant \| F \| \cdot \left\| \frac{P(t)}{t-z} \right\| \leqslant \| F \| \cdot \max_{0 \leqslant t < \infty} \left| \frac{t-i}{t-z} \right| \leqslant c\, \frac{z}{y}.$$

Следовательно,

$$\ln |P(z)| \leqslant c + \ln |z| - \ln |y| - \ln |F(z)|,$$
$$\ln \psi(z) \leqslant c + \ln |z| - \ln |y| - \ln |F(z)|,$$
$$\ln \psi(t+z) \leqslant c + \ln |z+t| - \ln |y| - \ln |F(z+t)|,$$

откуда

$$c_0 \int_0^\infty \frac{\ln \psi(t+z)}{\sqrt{t}(1+t)}\, dt \leqslant c + c_0 \int_0^\infty \frac{\ln|z+t|}{\sqrt{t}(1+t)}\, dt - \ln|y| - \int_0^\infty \frac{c_0 \ln|F(z+t)|}{\sqrt{t}(1+t)}\, dt.$$

Функция

$$u(z) = c_0 \int_0^\infty \frac{\ln \psi(t+z)}{\sqrt{t}(1+t)}\, dt$$

субгармонична. В самом деле,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\varphi})\, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_0 \int_0^\infty \frac{\ln \psi(t + z_0 + \rho e^{i\varphi})}{\sqrt{t}(1+t)}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty c_0 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t + z_0 + \rho e^{i\varphi})\, d\varphi\right] \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} \geqslant c_0 \int_0^\infty \frac{\psi(t+z_0)}{\sqrt{t}(1+t)}\, dt = u(z_0),$$

то есть

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Оценим $u(0)$; пусть $0 < \rho < {}^1/_2$

$$u(0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\varphi})\, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_0 \int_0^\infty \frac{\ln \psi(t + \rho e^{i\varphi})}{\sqrt{t}(1+t)}\, dt\, d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_0 \int_0^\infty [c + \ln|\rho e^{i\varphi} + t| - \ln|y| - \ln|F(\rho e^{i\varphi} + t)|\,] \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}\, d\varphi =$$

$$= c \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{c + \ln|\rho e^{i\varphi} + t| - \ln|\rho \sin\varphi|\,\}\, d\varphi -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty c_0 \frac{\ln|F(\rho e^{i\varphi} + t)|}{\sqrt{t}(1+t)}\, dt\, d\varphi \leqslant c_0 \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} [c + \ln|t+1| + c'] -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|F(\rho e^{i\varphi} - 1)|\, d\varphi < +\infty,$$

то есть

$$u(0) = c_0 \int_0^\infty \frac{\ln \varphi(t)}{\sqrt{t}(1+t)}\, dt < \infty,$$

что эквивалентно сходимости интеграла (25).

Из этой теоремы, в качестве следствия, получается теорема В. В самом деле, если функция $\varphi(t)$ нормально возрастающая, то

$$\frac{d}{d \ln t} [\ln \varphi(t)] = \frac{d}{dt} \ln \varphi(t) \cdot \frac{dt}{d \ln t} = \omega(t) \uparrow,$$

то есть функция $\ln \varphi(t)$ выпукла по отношению к $\ln t$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi^*(t) = \sup_{|c_n t^n| \leqslant \varphi(t)} |c_n t^n|.$$

Имеем

$$\varphi^*(t) \leqslant \psi(t) \leqslant \varphi(t).$$

Наше утверждение вытекает из следующей леммы [4].

Лемма. Интегралы

$$\int^{\infty} \frac{\ln \varphi^*(t)}{t^{3/2}}\, dt, \quad \int^{\infty} \frac{\ln \varphi(t)}{t^{3/2}}\, dt$$

сходятся или расходятся одновременно.

Теорема 4. Пусть полиномы не составляют плотного множества в $C^0_\varphi(0, \infty)$. Тогда замыкание $\overline{P}_\varphi$ множества полиномов принадлежит множеству $C^*_\varphi(0, \infty)$ целых функций половинного порядка и минимального типа.

Доказательство. По условию теоремы имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln \psi(t)}{t^{3/2}}\, dt < \infty \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \psi(t^2)}{1+t^2}\, dt < \infty. \tag{26}$$

Рассматривая произвольный полином $P \in \mathfrak{M}$, будем иметь

$$\ln|P(z)| \leqslant \int_0^{\infty} \frac{\partial G(t;\, z)}{\partial n} \ln|P(t)|\, dt \leqslant \int_0^{\infty} \frac{\partial G(t;\, z)}{\partial n} \ln|t-i|\,\psi(t)\, dt \leqslant \ln|z-i| +$$

$$+ \int_0^{\infty} \frac{\partial G(t;\, z)}{\partial n} \ln \psi(t)\, dt.$$

Далее,

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial G(t;\, z)}{\partial n} \ln \psi(t)\, dt = \int_0^{\infty} \frac{Y}{2\pi\sqrt{t}}\, \frac{1}{(\sqrt{t}-X)^2+Y^2} \ln \psi(t)\, dt =$$

$$= \frac{Y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \psi(t^2)}{(T-X)^2+Y^2}\, dT,$$

где $z = Z^2$, $Z = X + iY$.

Из условия (26) вытекает [4], что

$$\frac{Y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \psi(T^2)}{(T-X)^2+Y^2}\, dT = o(1)\,|Z|,$$

то есть

$$\ln|P(z)| \leqslant \ln|z-i| + o(1)\,|Z| = \ln|z-i| + o(1)\,|z|^{1/2} = o(1)\,|z|^{1/2}$$

или

$$\ln|P(z)| \leqslant A + o(1)\,|z|^{1/2}$$

во всей плоскости z.

Предположим теперь, что функцию $f_0(t)$ можно приблизить полиномами:

$$\| f_0(t) - P_n(t) \| < \varepsilon.$$

Тогда $\| P_n(t) \| \leqslant \varepsilon + \| f_0 \| \leqslant c$ или

$$\left\| \frac{P_n(t)}{c\,(t-i)} \right\| \leqslant 1,$$

следовательно,

$$|P_n(z)| < \mathrm{const} \cdot e^{o(1)|z|^{1/2}}$$

и из последовательности $P_n(z)$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на всей плоскости к целой функции порядка $\frac{1}{2}$ и минимального типа. Теорема доказана.

Теперь можно сформулировать теорему, аналогичную теореме I. Для этого обозначим через $\mathfrak{M}_1$ множество целых функций $f(t)$ порядка $\frac{1}{2}$ и минимального типа, удовлетворяющих условию

$$\left\| \frac{f(t)}{t-i} \right\| \leqslant 1, \quad \frac{f(t)}{(t-i)\varphi(t)} \to 0, \quad t \to \infty,$$

а через $\psi_1(z)$.

$$\psi_1(z) = \sup_{f \in \mathfrak{M}_1} |f(z)|.$$

Теорема 5. Для того, чтобы полиномы составляли всюду плотное множество в $C_\varphi^*(0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi_1(z) \equiv \psi(z), \quad z \overline{\in} (0, \infty).$$

Доказательство почти не отличается от доказательства теоремы 1 поэтому мы его опускаем.

Автор пользуется возможностью выразить искреннюю благодарность проф. Б. Я. Левину за постановку задачи и руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Bernstein. Bull. Soc. Mathem. de France **52**, 399—410 (1924).
2. Н. И. Ахиезер. «Усп. матем. наук», **11**, вып. 4 (70) (1956).
3. Н. И. Ахиезер и С. Н. Бернштейн. «Докл. АН СССР», 92, № 6, 1109—1112 (1953).
4. С. Н. Мергелян. «Усп. матем. наук», **11**, вып. 5 (71) (1956).
5. А. Л. Шагинян. «Изв. АН Арм. ССР», 7, № 4, 1—21 (1954).
6. М. М. Джрбашян. «Матем. сб.», **36** (78) : 3, 353—440.
7. T. Hall. On polynomials bounded at an infinity of points, Uppsala, 1950.
8. H. Pollard. Proc. Amer. Soc. 4, № 6 (1953).
9. P. Erdös and T. Kövari. Acta math. Academiae scientiarum Hungaricae, tomus VII, fasc. 3—4, 1956.
10. В. С. Виденский. «Докл. АН СССР», 92, № 2, 217—220 (1953).
11. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., 1956.