УДК 517.55

В. Н. ЛОГВИНЕНКО

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА, МЕДЛЕННО РАСТУЩИХ ВДОЛЬ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ГИПЕРПЛОСКОСТИ

Через $\boldsymbol{C}^n$ обозначается, как обычно, n-мерное линейное комплексное пространство векторов $z=(z_1, \ldots, z_n)$, через $\boldsymbol{R}^n$ — вещественная гиперплоскость в $\boldsymbol{C}^n$. Пространство $\boldsymbol{C}^n$ наделяется метриками, порожденными нормами: $|z|_p=\{|z_1|^p+\cdots+|z_n|^p\}^{1/p}$, $1\leqslant p<\infty$; $|z|_\infty=\max\{|z_j|: j=1, \ldots, n\}$. Через $K(x, h)$, $x\in\boldsymbol{R}^n$, $h>0$ обозначается гиперкуб $\{y\in\boldsymbol{R}^n: |y-x|_\infty\leqslant h\}$, через $B(x, h)$ — гипершар $\{y\in\boldsymbol{R}^n: |y-x|_2\leqslant h\}$. Измеримое множество $E\subset\boldsymbol{R}^n$ называется плотным относительно $F\subset\boldsymbol{R}^n$, если для некоторых постоянных $L<\infty$ и $\delta>0$ $\inf\{|E\cap K(x, L)|: x\in F\}=\delta$. Здесь под $|A|$ понимается лебегова мера множества A. При $F=\boldsymbol{R}^n$ множество E называется относительно плотным. Множество $E\subset\boldsymbol{R}^n$ называется ε-сетью для $F\subset\boldsymbol{R}^n$, если $\sup\{\inf\{|y-x|_1: x\in E\}: y\in F\}=\varepsilon\,(<\infty)$.

Говорят, что целая функция $f(z)$, $z\in\boldsymbol{C}^n$, имеет экспоненциальный тип не выше σ, если величина $\sup\{|f(z)|\exp(-A|z|_1): z\in\boldsymbol{C}^n\}$ конечна при любом $A>\sigma$. Если, кроме того, эта величина бесконечна при любом $A<\sigma$, то экспоненциальный тип $f(z)$ равен σ. Классический результат М. Картрайт [1] описывает важное в приложениях свойство таких функций: для любой целой функции $f(z)$, $z \in \boldsymbol{C}$, экспоненциального типа $\sigma < \pi$ справедлива оценка $\sup\{|f(x)| : x \in \boldsymbol{R}\} \leqslant C \sup\{|f(n)| : n \in \boldsymbol{Z}\}$, где конечная величина $C = C_\sigma$ не зависит от f. Теорема Картрайт неоднократно уточнялась и обобщалась, но при этом до недавнего прошлого речь шла о функциях одного комплексного переменного. Простой многомерный аналог этой теоремы легко получить редукцией к одному переменному, если множество $E \subset \boldsymbol{R}^n$, на котором целая функция ограничена априори, является прямым произведением подмножеств вещественной оси. В начале семидесятых годов были получены следующие два многомерных аналога результата Картрайт, в которых это дополнительное условие отсутствует.

Теорема А *(Б. Я. Левин* [2]*). Пусть E — относительно плотное подмножество $\boldsymbol{R}^n$. Тогда для любой целой функции $f(z)$, $z \in \boldsymbol{C}^n$, экспоненциального типа не выше σ выполнено неравенство $\sup\{|f(x)| : x \in \boldsymbol{R}^n\} \leqslant \Gamma \sup\{|f(x)| : x \in E\}$* **(1)**, *где конечная величина $\Gamma = \Gamma(\sigma, E)$ не зависит от f.*

В дальнейшем под $\Gamma(\sigma, E)$ понимается наименьшая из величин, для которых неравенство (1) выполнено для всех $f(z)$, удовлетворяющих условию теоремы.

Теорема Б [3]. *Пусть E — ε-сеть в $\boldsymbol{R}^n$, а для числа $\sigma \in (0, \infty)$ справедлива оценка $\sigma\varepsilon < (2([en]+1))^{-1}$. Тогда для любой целой функции $f(z)$, $z \in \boldsymbol{C}^n$, экспоненциального типа не выше σ выполняется неравенство $\sup\{|f(x)| : x \in \boldsymbol{R}^n\} \leqslant (1 - \sigma\varepsilon)^{-1} \sup\{|f(x)| : x \in E\}$.*

Используя аппроксимационный метод, развитый в [3], нетрудно доказать теорему *А* и следующее утверждение, являющееся комбинацией теорем А и Б.

Теорема 1. *Пусть F — относительно плотное подмножество $\boldsymbol{R}^n$, а E — ε — сеть для F, причем $\Gamma(2([en]+1)\sigma, F)\varepsilon < (2([en]+1))^{-1}$. Тогда для любой целой функции $f(z)$, $z \in \boldsymbol{C}^n$, экспоненциального типа не выше σ справедлива оценка $\sup\{|f(x)| : x \in \boldsymbol{R}^n\} \leqslant \Gamma(\sigma, F) \times (1 - \Gamma(\sigma, F)\varepsilon)^{-1} \sup\{|f(x)| : x \in E\}$.*

Тот же самый метод позволяет изучать поведение на вещественной гиперплоскости целых функций экспоненциального типа, ограниченных априори на подмножествах E, близких к плотным, но таковыми не являющихся. Такие функции не обязаны, вообще говоря, быть ограниченными на $\boldsymbol{R}^n$, но, как показывают следующие теоремы, они не могут быстро расти вдоль $\boldsymbol{R}^n$.

Теорема 2. *Пусть измеримое множество $F \subset \boldsymbol{R}^n$ таково, что при некотором $\alpha > 0$*

$$\int\limits_{CF \setminus B(0,e)} (\ln|x|_2)^{-\alpha} dx < \infty, \tag{2}$$

E плотно относительно F. Любой паре положительных чисел σ и η отвечает такая конечная величина $\Delta = \Delta(F, E, \sigma, \eta)$, что для каждой целой функции $f(z)$, $z \in \boldsymbol{C}^n$, экспоненциального типа не выше σ при любом $x \in \boldsymbol{R}^n$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leqslant \Delta \exp\{\eta(\ln(1 + |x|_2))^{\alpha/n}\} \sup\{|f(x)| : x \in E\}. \tag{3}$$

Оценка (3) точна в следующем смысле. Каковы бы ни были положительное число σ *и положительная функция* $\psi(r)$, $r \in \boldsymbol{R}_+$, *для которой при любом* $\eta > 0$

$$\lim_{r \to \infty} \psi(r) \exp\{-\eta (\ln r)^{\alpha/n}\} = 0,$$

найдутся такое измеримое подмножество $F \subset \boldsymbol{R}^n$, *удовлетворяющее условию (2), и такая целая в* $\boldsymbol{C}^n$ *функция* $f(z)$ *экспоненциального типа* σ, *что* $\sup\{|f(x)| : x \in F\} \leqslant 1$, а

$$\limsup_{|x|_2 \to \infty} |f(x)| \{\psi(|x|_2)\}^{-1} = \infty.$$

Теорема 3. *Пусть измеримое множество* $F \subset \boldsymbol{R}^n$ *удовлетворяет условию (2),* E *—* ε*-сеть для* F, *а число* $\sigma \in (0, (4([en]+1)\varepsilon)^{-1})$. *Любому положительному числу* η *отвечает такая конечная величина* $\Delta = \Delta(F, E, \sigma, \varepsilon, \eta)$, *что для каждой целой функции* $f(z)$, $z \in \boldsymbol{C}^n$, *экспоненциального типа не выше* σ *при всех* $x \in \boldsymbol{R}^n$ *выполняется неравенство*

$$|f(x)| \leqslant \Delta \exp\{\eta (\ln(1 + |x|_2))^{\alpha(n+2)/n}\} \sup\{|f(x)| : x \in E\}.$$

Справедливы восходящие к классическим результатам Планшереля—Пойа [4] аналоги теорем 1, 2 и 3, в которых вместо равномерных оценок фигурируют оценки в L^p-метрике (соответствующие аналоги теорем А и Б получены в работах [3, 5]). Ограничимся формулировкой аналога теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть измеримое множество* $F \subset \boldsymbol{R}^n$ *удовлетворяет условию* (2), *а множество* E *плотно относительно* F. *Тогда любым положительным числам* p, σ *и* η *отвечает такая конечная величина* $\Delta = \Delta(F, E, p, \sigma, \eta)$, *что для каждой целой функции* $f(z)$, $z \in \boldsymbol{C}^n$, *экспоненциального типа не выше* σ *при всех* $x \in \boldsymbol{R}^n$ *выполнена оценка*

$$\int_{B(0,\, R)} |f(x)|^p dx \leqslant \Delta \exp\{\eta (\ln(1+R))^{\alpha/n}\} \int_E |f(x)|^p \, dx.$$

Эта оценка точна в том же смысле, что и оценка (3).

Список литературы: 1. *Cartwright M. L.* On certain integral functions of order one // Quart. J. of Math. — 1936. — N7.— P. 36—47. 2. *Левин Б. Я.* Субгармонические мажоранты и их приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории функций комплекс. переменного.— Х., 1971.— С. 111—113. 3. *Логвиненко В. Н.* Об одном многомерном обобщении теоремы М. Картрайт // ДАН СССР. — 1974. — **219**. — С. 546—549. 4. *Plancherel M.*, *Polya G.* Fonctions entieres et intégrales de Fourier multiples // Comm. Math. Helv. — 1937. — P. 224—248. 5. *Логвиненко В. Н.*, *Середа Ю. Ф.* Эквивалентные нормы в пространствах целых функций экспоненциального типа // Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1974.— Вып. 20.— С. 62—78.

Поступила в редколлегию 05.01.87