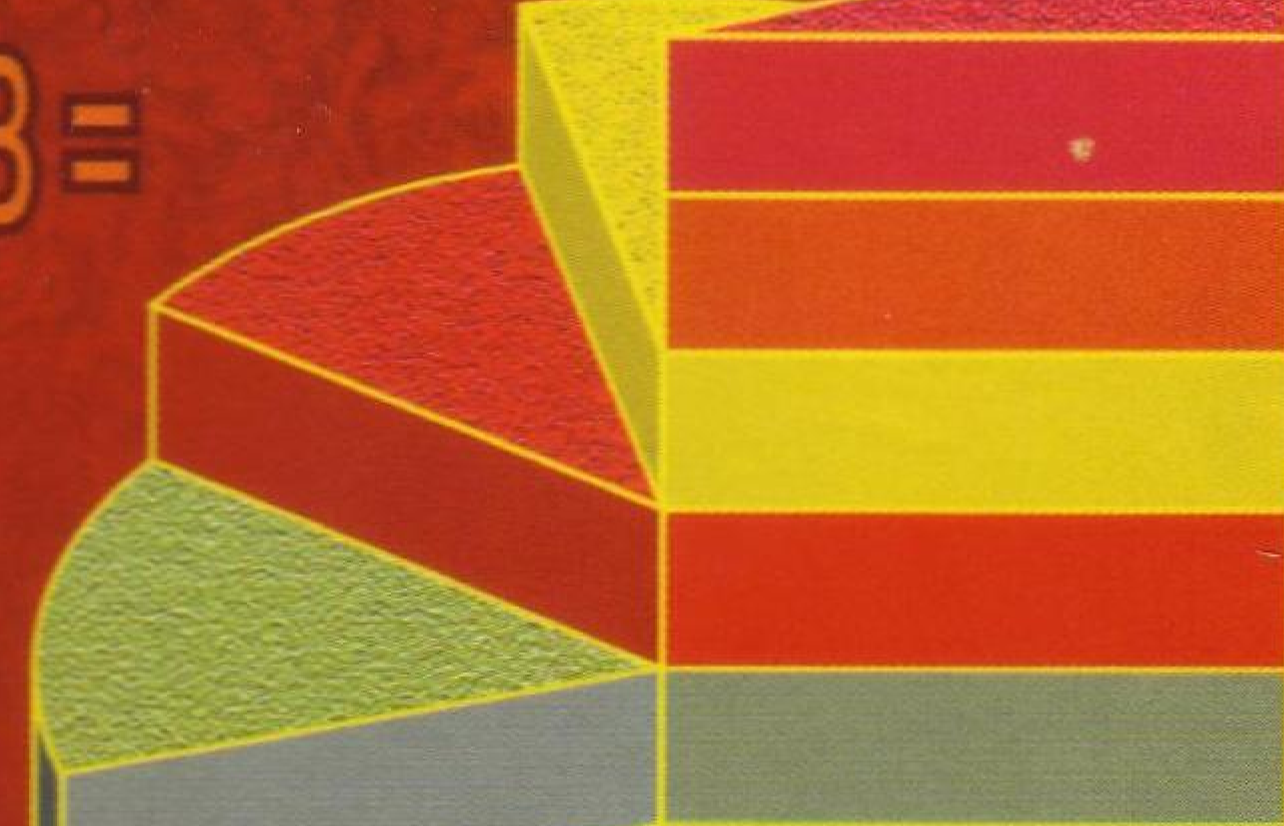
А.П. Голіков

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СВІТО-ГОСПОДАРСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник

$$СЕ = \sum_{1}^{n} НЕ + \sum_{1}^{m} МЕВ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(НЕ + МЕВ)$$



Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

А. П. Голіков

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СВІТОГОСПОДАРСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник

Харків – 2006

УДК 339.9:519.86
ББК 65.012.3 в 6
Г 60

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(лист № 1/11-2183 від 02.06.2003)*

Рецензенти: кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри економічної кібернетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, Михайленко В. Г.;
доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри економіки будівництва Харківської національної академії міського господарства Торкатюк В. І.;
доктор економічних наук, професор кафедри менеджменту на залізничному транспорті Харківської державної академії залізничного транспорту Позднякова Л. О.

Г 60 **Голіков А. П. Економіко-математичне моделювання світогосподарських процесів:** Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. – 2-ге вид. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2006. – 144 с.

ISBN 966-623-165-4 (1-е вид.)
ISBN 966-623-332-0

Викладаються основні методи і прийоми економіко-математичного моделювання, що можуть бути використані для дослідження й планування зовнішньоекономічних операцій у світогосподарських процесах.

Посібник призначений для студентів і викладачів спеціальностей: «Міжнародні економічні відносини», «Країнознавство», «Міжнародна економіка».

ISBN 966-623-165-4 (1-е вид.)
ISBN 966-623-332-0

ЗМІСТ

ВСТУП

«Наука тільки тоді досягає досконалості, коли їй вдається користуватися математикою». Ці слова П. Лафарга щодо розвитку науки, сказані ним майже століття тому, не втратили свого значення і сьогодні, у вік комп'ютерних технологій та ЕОМ. Вони також доречні і стосовно практичної діяльності людини.

Зовнішньоекономічна діяльність – складна і багатогранна. Багато процесів і явищ, перш ніж увійти в практику світогосподарських зв'язків, вимагають наукової експертизи та апробації. Досягти успіху в цьому можливо лише застосовуючи сучасний економіко-математичний апарат дослідження й конструювання. Він – значний за обсягом і різноманітний.

У навчальному посібнику «Економіко-математичне модулювання світогосподарських процесів», розкривається змістовна сутність основних економіко-математичних методів, що можуть бути використані в практиці моделювання міжнародних економічних процесів. Наводяться приклади використання економіко-математичних моделей у вирішенні конкретних задач.

Навчальний курс «Економіко-математичне модулювання світогосподарських процесів» орієнтований на вивчення студентами економіко-математичних засобів дослідницького апарату сучасної економічної науки, отримання ними знань щодо основних економіко-математичних методів, які можуть бути використані при вивченні та конструюванні явищ і процесів, що відбуваються в сучасних міжнародних економічних відносинах.

Метою курсу є ознайомлення студентів з основними економетрічними та балансовими моделями, які можуть бути застосовані для аналізу, вивчення та конструювання процесів, що відбуваються у міжнародних економічних відносинах, для оцінки зв'язків між ними та визначення динамки й тенденцій їхнього розвитку.

Після вивчення курсу студенти повинні знати: види економіко-математичних моделей та рівні їхнього використання, кількісні методи математичної статистики, одномірний (регресивний та кореляційний) аналіз, багатомірний (кластерний та факторний) аналіз, можливості математичних запозичень у точних науках для моделювання функціональних і кореляційних залежностей, які спостерігаються у світогосподарських процесах, лінійне програмування для вирішення логістичних задач.

Студенти повинні вміти: здійснювати кількісну та якісну оцінку явищ і зв'язків у світогосподарських процесах, моделювати їхню динаміку, визначати тенденції та прогнозувати розвиток, складати баланси, будувати міжгалузеву модель «витрати –випуск», вирішувати логістичні задачі міжнародного характеру із застосуванням лінійного програмування.

Навчальний посібник побудований таким чином, щоб від найпростіших задач математичної статистики студент, поступово накопичуючи навички розрахунків, підійшов до більш складних задач економіко-математичного прогнозування й лінійного програмування. Значно підвищиться ефективність застосування економіко-математичного апарату дослідження, якщо при цьому буде використовуватися комп'ютерна техніка.

Проф. А. П. Голіков

РОЗДІЛ 1. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ: СУТНІСТЬ, ПРИЗНАЧЕННЯ, МОЖЛИВОСТІ

Ключові поняття: система, модель, види моделей, економіко-математичне моделювання, формалізація, кількісні показники, зв'язки функціональні, кореляційні, причинні залежності

1.1. Модель як наукова категорія

З метою пізнання явищ і процесів, що відбуваються в процесі господарської діяльності людини та в житті суспільства, наука здавна застосовує один із прийомів, що отримав назву моделювання. В цьому випадку за допомогою штучних або мислених конструкцій, що віддзеркалюють об'єктивну реальність, дослідник прагне одержати додаткову інформацію про об’єкт дослідження, а отже, і виконати на більш високому науковому рівні рішення поставлених задач.

Уявлення про об’єкт або явище, що досліджується, може бути виражено у формі опису, рисунку, схеми, математичної формули, штучно зробленої конструкції і ін. Можуть використовуватися і окремі явища або об'єкти соціально-економічної природи. Наприклад, струмок може розглядатися як модель ріки, окремі виробничі ділянки, населені пункти, регіони й ін., які відбивають властивості всієї сукупності, що вивчається, при певному припущенні можуть розглядатися як ізоморфна модель відповідної виробничої або соціально-економічної системи. Цьому значною мірою сприяє використання деяких цінних властивостей моделювання, що роблять можливим здійснювати ефективніше дослідження й конструювання соціально-економічних явищ та об’єктів різного рангу. Моделювання відкриває широкі можливості для вивчення явищ і закономірностей, що спостерігаються в просторі та часі, і знаходити шляхи для удосконалювання їхніх внутрішніх структур та управління.

При всіх перевагах моделювання слід наголосити на деяких його негативних рисах. Це стосується, насамперед абстрагування ряду чинників, уведення певних обмежень й ін., через що модель лише схематично характеризує той або інший оригінал. Незважаючи на все це, моделювання в наукових та практичних розробках є досить ефективним методом дослідження і сприяє підвищенню його науковості та конструктивності.

Незалежно від того, з якою метою використовується модель, вона завжди має свого «двійника», із яким ніколи не розлучається. Цей «двійник» – об’єкт моделювання, тобто оригінал. У свою чергу він, як і його модель, є видовим поняттям стосовно більш широкого уявлення про навколишній світ – систему.

Є кілька визначень поняття «система». Відповідно до визначення одного із засновників учення про системи – Л. Берталамфі, система – це комплекс елементів, що взаємодіють. Можна також сказати, що ***система*** – це довільний набір елементів, що взаємодіють. При цьому під взаємодією розуміється обмін інформацією, енергією, речовиною.

В основі системного підходу лежить ідея цілісності об'єктів та явищ, що досліджуються, і єдності їхньої внутрішньої динаміки, а також взаємодії з навколишнім середовищем. Тому досить розповсюдженим уявленнями про систему є її розуміння як сукупності компонентів, що мають конкретну структуру і певні зв'язки зі своїм оточенням.

Системи досить різнорідні, однак вони мають ряд загальних рис: повинні представляти цілісний комплекс елементів, що взаємодіють; утворювати особливу єдність із зовнішнім середовищем; бути елементом системи більш високого порядку (суперсистеми). Разом з тим елементи будь-якої системи повинні виступати системами більш низького рангу (субсистеми).

Соціально-економічні системи поділяються на 4 типи:

- морфологічні системи, окремі частини яких пов'язані між собою мережею структурних відносин (регіональні інтеграційні утворення на зразок Євросоюзу й ін.);
- каскадні системи, що є свого роду ланцюгом субсистем, динамічно пов'язаних між собою перепадом маси, енергії, інформації;
- системи на зразок «процес–відгук», що являють собою поєднання морфологічної і каскадної систем таким чином, що процесорна система демонструє спосіб співвідношення форми з процесом (наприклад, відома система міжгалузевого балансу В. Леонтьєва «витрати–випуск»).
- керовані системи, тобто системи на зразок процес–відгук, у яких ключовим елементом є контролювання деякої складової системи з боку людини.

За характером функціональних особливостей системи поділяються на:

- ізольовані, що існують за умов, які не дозволяють надходження та вихід енергії, речовиний інформації; подібні системи існують лише у лабораторних умовах;
- закриті системи, що існують за умов, які перешкоджають надходженню та виходу енергії, речовини та інформації. Щодо аналізу світогосподарських відносин до них частково можна віднести економічні системи деяких країн, які дотримуються певної автаркії у міжнародних відносинах (КНДР, М'янма й ін.);
- відкриті системи, що характеризуються обміном речовини й енергії із зовнішнім середовищем. Саме такими системами у наш час є економічні системи більшості країн світу. Для таких систем притаманна тенденція до саморегулювання, тобто прагнення до збалансування надходження та виходу енергії, речовини, інформації.

Система характеризується наявністю: елементів, структури, наборів станів, поводженням.

Елементи. Будь-яка система складається зі взаємозалежних частин – елементів. Кількість елементів може бути різна, але не менше двох. На вплив інших складових частин системи елемент реагує як щось ціле, і, у свою чергу, будь-який елемент системи, що представляє її частину, складається зі взаємодіючих елементів нижчого рангу. Таким чином, система поділяється на підсистеми. Наприклад, систему світового господарство можна розглядати як набір підсистем, якими виступають національні економіки всіх країн світу. У свою чергу, національні економіки можуть розглядатися як територіальні соціально-економічні системи, у складі яких є території, населення, виробничі фонди й інші компоненти.

Таким чином, у залежності від рівня, на якому здійснюється дослідження, за елементи приймаються підсистеми або більш високого, або більш низького порядку. Це одна з обставин, що визначає, чому набір елементів кожної конкретної системи до певної міри довільний. Господарюючі об'єкти взаємодіють із надзвичайно великим числом інших об'єктів. Для того щоб визначити деяку кінцеву, досяжну для вивчення систему, дослідник змушений штучно розривати частину зв'язків, абстрагуватися від ознак, які для даної конкретної задачі несуттєві. Саме цю місію і виконує моделювання.

Структура. Під структурою розуміють комплекс зв'язків між елементами, що об'єднує їх у систему. Іноді структуру визначають ширше – як сукупність елементів і зв'язків між ними. Виокремлюються зв'язки прямі (первинні) і зворотні (вторинні).

Визначення та оцінка структури зв'язків у соціально-економічній системі – одна з головних задач системного аналізу. Цим визначається успіх або неуспіх результатів дослідження.

Звичайно досліджується пара зв'язків (між двома елементами) або ціла їхня сукупність. У першому випадку використовується кореляційний та регресивний аналіз, у другому – факторний аналіз.

Набір станів. Стан системи визначається станами її елементів. Теоретично можливий набір станів дорівнює числу можливих об'єднань усіх станів елементів. Однак взаємодія складових частин приводить до обмеження числа реалізованих об'єднань.

Зміна стану елемента може відбуватися плавно, безупинно й стрибкоподібно (дискретно). Системи, побудовані з таких елементів, будуть відповідно безперервними й дискретними. Можуть бути системи змішаного типу. Так, географічна структура виробництва ВВП у розрізі країн світу – дискретне, а його динаміка в часі – безперервна.

Поводження. Під поводженням системи розуміється закономірний перехід з одного стану в інший, зумовлений властивостями елементів та структурою. Можна розрізняти залежний або змушений рух системи і саморух (саморозвиток). Усі економічні процеси безупинно змінюють свій стан під впливом дії основних економічних законів у певні періоди людської історії. Вимушений рух економічних систем можливо спостерігати лише після одноразової різкої зміни зовнішніх умов, наприклад, при отриманні тією чи іншою країною політичної та економічної незалежності (коли навколо неї змінюється зовнішнє середовище), при переході країни з однієї стадії соціально-економічного розвитку до іншої (доіндустріальна, індустріальна, постіндустріальна). У теорії систем такий розвиток називається перехідним процесом. При досягненні економічною системою певного рівня розвитку її динаміка набуває стану впорядкованої рівноваги.

Важливою властивістю всіх систем є прагнення зберігати стійкий стан рівноваги.

Взаємодіючи із зовнішнім середовищем (тобто з тим, що оточує даний елемент системи підсистеми і здійснює на них вплив), система і її складові якось змінюються, діють, реагують.

При характеристиці взаємодії системи із зовнішнім середовищем розрізняють «вхід» і «вихід» системи. Входом може бути кожний з елементів, через який здійснюється вплив ззовні. Як вихід соціально-економічної системи можна прийняти елемент або деяку сукупність елементів, досяжних для спостереження, зміни у яких щонайкраще відбивають стан системи.

Системи можуть бути статичними й динамічними. Динамічні, у свою чергу, поділяються на детерміновані та ймовірні. Детермінована система – це система, рух та розвиток якої цілком обумовлені й не піддаються випадковостям. Імовірна система – система, рух і розвиток якої є випадковими і розглядаються як імовірний процес.

При порівнянні двох систем у них часто виявляється спільність. Ця спільність може виразитися в аналогічному наборі елементів, у подібності структур, станів, поводження або деякої комбінації цих характеристик. Розрізняють великий і малий ступінь подібності двох систем. Якщо всі елементи і всі зв’язки якої-небудь системи відповідають елементам і зв'язкам іншої, то такі системи називаються *ізоморфними*. Базуючись на останньому, можна зробити висновок, що модель – це будь-яка система, подібна до іншої системи, що приймається за оригінал. Стосовно слова "будь-яка" є одне обмеження: щоб бути моделлю, система повинна в чомусь служити "замісником” оригіналу (якщо оригінал важкодосяжний для вивчення). Таким чином, ***модель*** *– це сукупність абстрактно створених структур та функцій реально існуючої системи, яка дає можливість розуміти, віддзеркалювати та відтворювати складні процеси, які відбуваються в реальних системах.*

Модель, у спрощеному розумінні, – це уявно або штучно створена конструкція, яка так віддзеркалює структуру й функціонування реально існуючої системи, що дослідник одержує можливість отримати додаткові знання про предмет або явище, які досліджуються.

Найпростішим прикладом моделювання предмета вивчення може служити відомий ще зі шкільної лави географічний глобус. Він наочно моделює нашу планету, даючи загальні уявлення про її кулястість, добове обертання Землі, розміщення на ній полюсів, материків, океанів.

Одержання необхідної інформації при моделюванні досягається завдяки тому, що модель, з одного боку, абстрагує другорядні (з позицій заданої мети) фактори, а з другого – узагальнює основні сторони досліджуваного явища, що досліджуються, дозволяючи сконцентрувати зусилля на вирішенні головних питань.

Існує кілька класифікацій моделей. Найбільш зручна, з погляду навчального процесу, є їхня видова класифікація. Відповідно до цієї класифікації виділяються такі *види моделей:*

- абстрактні (концептуальні);
- матеріальні (фізичні);
- дескриптивні (описові);
- оптимізаційні.

Названі види моделей поділяються, у свою чергу, на складові, які утворюють класифікаційну систему (рис. 1.1).

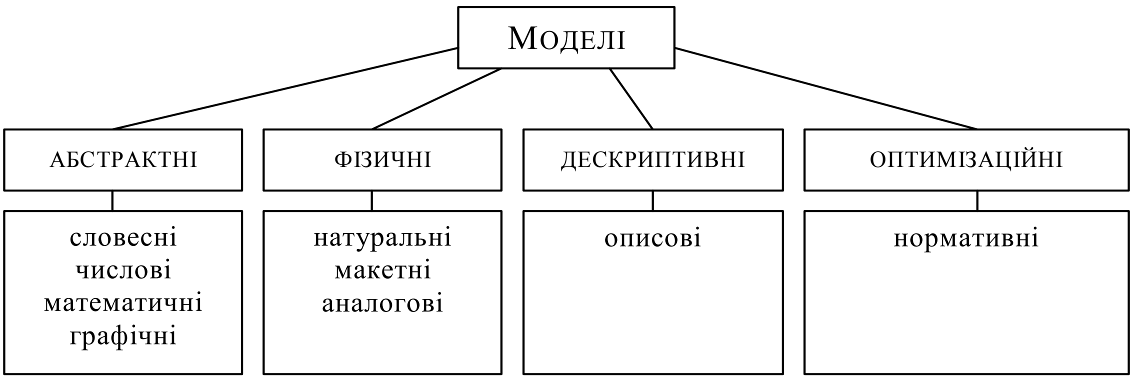


Рис. 1.1. Структурна схема моделювання

Абстрактне (словесне, числове, математичне, графічне) моделювання, як правило, не зберігає в моделях природу явищ і процесів, що існують в оригіналі. Зберігається лише ідентичність співвідношень та масштабність складових компонентів і явищ у досліджуваних об'єктах або процесах.

Серед абстрактних моделей, що використовуються в економічних дослідженнях (включаючи і зовнішньоекономічну діяльність), найбільш розповсюдженими є математичні та графічні.

Математичне і графічне моделювання певною мірою абстрагує явище, що досліджується. Однак воно має ряд позитивних моментів:

1. Перехід від однієї задачі до іншої не вимагає побудови нових моделей.
2. Зміна параметрів досліджуваного явища або процесу, не спричиняє перебудову моделі.
3. Розробка математичних моделей, як і їхнє подальше використання, не вимагає великих витрат коштів і часу.

Фізичне моделювання (натурне, макетне, аналогове) характеризується відносно великою наочністю. За його допомогою можливо моделювати як природні, так і соціально-економічні системи. Струмок і процеси, які в ньому відбуваються, моделюють річку, глобус – зовнішній вигляд та співвідношення материків і океанів Землі, штучна конструкція з трубок та скляних резервуарів, якими циркулює рідина, може віддзеркалити роботу фінансово-банківської системи регіону або цілої країни.

При фізичному моделюванні досягаються три види подібності:

– зв’язку;
– зовнішнього вигляду;
– співвідношення між елементами системи.

Однак фізичні моделі – дорогі та вимагають значних витрат часу і коштів на їхнє конструювання.

Дескриптивні моделі характеризують в описовому вигляді сутність явищ і процесів, що відбуваються; дозволяють на підставі цього здійснювати їхнє порівняння, класифікацію; знаходити позитивні та негативні моменти; робити необхідні рекомендації.

Оптимізаційні моделі на підставі емпіричних операцій і наявного досвіду дозволяють розробляти графіки, нормативні документи (це також модель), які обґрунтовують і визначають хід тих або інших явищ та процесів (митні правила, система мит і тарифів, проекти організації робіт, бізнес-плани тощо).

Усі чотири види моделей у залежності від цілей та задач з прийняття рішень можуть використовуватися в дослідженні й конструюванні міжнародних економічних зв’язків держав і зовнішньоекономічної діяльності окремих підприємств та організацій. Однак аналіз досвіду міжнародних економічних відносин свідчить, що найбільш розповсюдженими видами моделей, що використовуються на практиці, виступають математичні моделі в поєднанні з економічними методами. Разом вони створюють економіко-математичне моделювання.

1.2. Економіко-математичне моделювання, рівні та напрямки його використання

Світогосподарські процеси є складно організованою динамічною підсистемою функціонування світової економіки, що віддзеркалює зовнішньоекономічну діяльність держав і структурних підрозділів їхніх господарств, які базується на міжнародному географічному поділі праці.

Вони характеризуються динамізмом у часі та просторі, мають галузеву і територіальну структуру. Ці сторони зовнішньої економічної діяльності легко піддаються математичній формалізації, яка зберігає ідентичність реальних співвідношень та масштабність складових явищ і процесів, які досліджуються в часовому й просторовому аспектах. На цій основі за допомогою математичних і математико-статистичних методів можлива побудова економіко-математичних моделей, що досліджують і встановлюють конкретні економічні закономірності й взаємозалежності, які спостерігаються у світогосподарських процесах.

Економіко-математичне моделювання є синтезом трьох галузей знання:

- економічної теорії;
- математики;
- статистики.

Основою економіко-математичного моделювання є ***математична модель*** *– схематичне уявлення економічного явища або процесу, яка* *одержується в результаті наукової абстракції характерних рис навколишнього економічного життя й механізму його управління.*

Економіко-математичне моделювання в будь-яких дослідницьких задачах може використовуватися на *3-х рівнях.*

1-й рівень – зводиться до формалізації окремих економічних понять, тобто кількісної оцінки явищ і процесів, що раніше не піддавалися математичним описам. Зокрема, поняття «світова економіка», що є сукупність національних економік і міжнародних економічних відносин, можна віддзеркалити у вигляді такої математичної моделі:

$$ME = \sum_{1}^{n} HE + \sum_{1}^{m} MEB = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(HE + MEB\right), \qquad (1.1)$$

де *HE* – національні економіки;

MEB – міжнародні економічні відносини.

Прикладом аналогічних моделей можуть служити відомі математичні формули, за допомогою яких визначаються середні величини (1.2) – (1.4), індекси відмінності (1.5), конфігурація території (1.6), експортна квота (1.7), індекс товарності (1.8), коефіцієнт народногосподарської спеціалізації (1.9) й ін.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n} \qquad (1.2)$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i m_i}{\sum_{1}^{n} m_i} \qquad (1.3)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n} \left|x - \overline{x}\right|^2}{n-1}} \qquad (1.4)$$

$$I = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\left|x' - y'\right| \qquad (1.5)$$

$$I_d = \sum_{1}^{n}\left|\frac{R_i}{\sum_{1}^{n} R_i} - \frac{1}{n}\right| \cdot 100 \qquad (1.6)$$

$$Q = \frac{E}{ВВП} \times 100\%, \qquad (1.7)$$

де Q — експортна квота;

E — експорт протягом року;

ВВП — валовий внутрішній продукт.

$$T = \frac{E + I}{ВВП} \times 100\% \qquad (1.8)$$

де T — індекс товарності;

E — експорт протягом року;

I — імпорт протягом року.

$$Kc_{\text{пц.}} = \frac{p_i}{P} : \frac{v_i}{V}, \qquad (1.9)$$

де p_i – обсяг виробництва галузі в країні;
P – обсяг виробництва галузі у світі;
v_i – ВВП країни;
V– ВВП світу.

Завдяки економіко-математичним моделям 1-го рівня стає можливим відповісти на запитання – як багато?

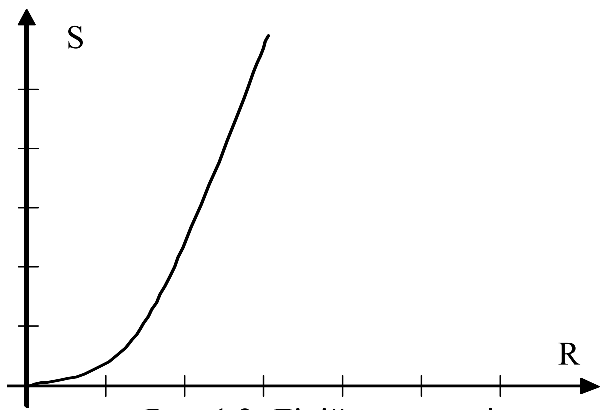
2-й рівень економіко-математичного моделювання дозволяє розкривати існуючі зв'язки і залежності в процесах, що відбуваються, і допомагає відповісти на запитання – які взаємозв'язки?

Зв’язки бувають:

1) функціональні (лінійні залежності);

2) кореляційні.

Функціональні (лінійні) залежності відомі зі шкільної лави. Прикладом їх можуть бути формули 1.10 – 1.11.



$$S = \pi R^2 \,(1.10)$$

Рис. 1.2. Лінійна задежність площі круга від радіуса

$$Y = C + kX \,(1.11)$$

$$y_1 = 100 + 0{,}5 \times 100 = 150$$

$$y_2 = 100 + 0{,}5 \times 150 = 175$$

$$y_3 = 100 + 0{,}5 \times 200 = 200$$

$$y_4 = 100 + 0{,}5 \times 250 = 225$$

$$y_5 = 100 + 0{,}5 \times 300 = 250$$

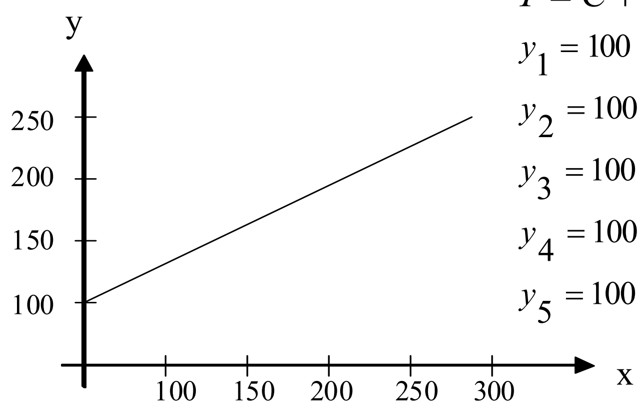


Рис. 1.3. Лінійна залежність регресії

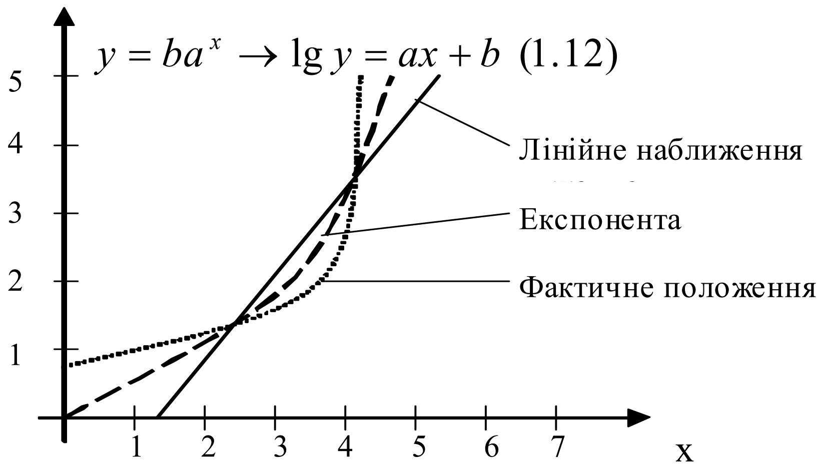


Рис. 1.4. Експоненціальна залежність

Кореляційна залежність (від фр. correlation – зв’язок) характеризує види зв'язків, що не мають функціональної (лінійної) залежності. Наприклад:

- обсяги виробництва ВВП і розміри експорту;
- кількість населення міст і обсяг реалізації якихось видів продукції;
- чисельність населення країн і розміри їхнього ВВП.

Таблиця 1.1

Зв’язок між чисельністю населення і ВВП.

Країни	***Населення***	***ВВП (млрд. дол.)***
Австрія	8,3	216
Бельгія	10,1	250
Данія	5,2	156
Іспанія	39,2	532
Італія	57,2	1088
Великобританія	58,26	1094
Франція	58,15	1451

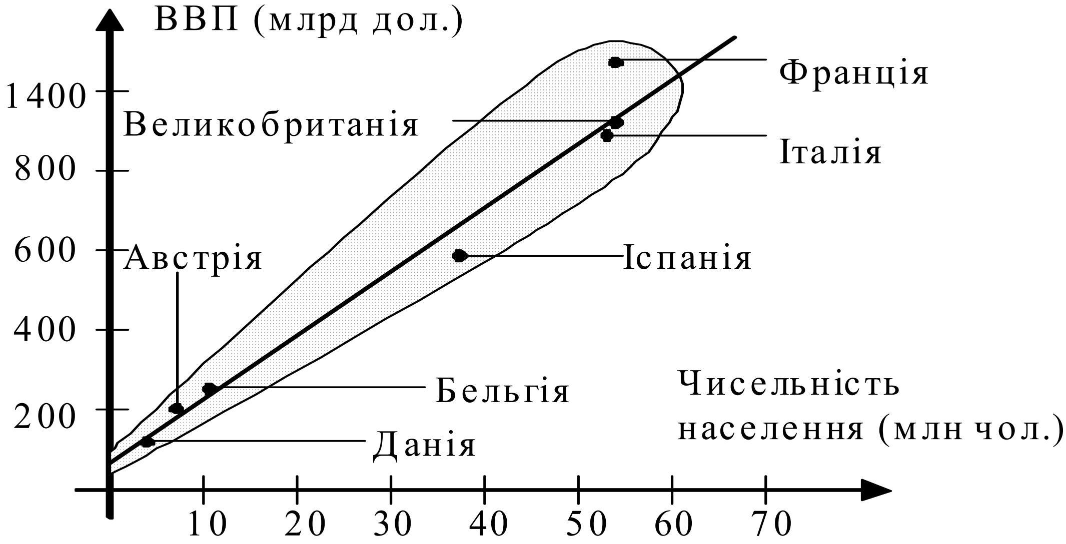


Рис. 1.5. Кореляційна залежність між чисельністю населення та ВВП

3-й рівень економіко-математичного моделювання пов'язаний із дедуктивною (уявною) побудовою моделі, що віддзеркалює сутність явищ і процесів, які відбуваються в тій або іншій досліджуваній системі і дозволяє відповісти на запитання – у чому причина?

Тут досить плідне запозичення математичних формул у точних наук (наприклад, із законів фізики, теорії гравітації – для моделювання просторових економічних взаємодій й ін.).

Можливо, зокрема, уявити взаємодію якихось факторів у вигляді потенційного поля, де поняття потенціалу в кожнім пункті відповідає сумарному впливові в ньому певного фактора, розповсюдженого по всій території. На цій основі американським вченим Ч. Харрисом запропоновано використання гравітаційної моделі, запозиченої у фізичній науці. Згідно з цією моделлю інтенсивність ділових зв'язків між ринковими центрами (включаючи і міжнародні) знаходиться в прямо пропорційній залежності від величини їх ємностей і зворотньо пропорційно відстаням між ними:

$$V_i = P_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j}{d_{ij}}, \qquad (1.13)$$

де V_i – потенціал збуту i-го ринкового центру;

P_j – ємність j-го ринку;

d_{ij} – відстань між i-м та j-м ринками;

n – кількість ринків.

Ієрархію країн за ємністю внутрішнього ринку (залежного від їхньої людності й обсягів ВВП, що виробляються) можливо змоделювати за допомогою рівняння Зіпа–Медведкова:

$$H_j = kH_1 \times j^{-a}, \qquad (1.14)$$

де H_j – ВВП (або обсяг зовнішньої торгівлі) j-ї країни в регіональній міжнародній економічній системі (ЄС, НАФТА, СНД й ін.);

H_1 – ВВП провідної країни регіону (найбільшою за чисельністю населення, ВВП й ін.);

j – порядковий номер країн у спадній залежності населення або розмірів ВВП;

k – коефіцієнт «першості» провідної країни регіону;

a – коефіцієнт «контрастності» у розмірності людності або ВВП країн, що належать до регіонально господарської системи, яка досліджується.

$$K = \frac{H_1}{C}, \qquad (1.15)$$

де C – людність або обсяг ВВП, який теоретично повинен бути теоретично в провідній країні регіону чи інтеграційного угрупування, виходячи з чисельності її населення або факторів виробництва.

За допомогою цієї моделі, виходячи із прогнозованої динаміки зростання ВВП (зовнішньоторговельного обігу) головної країни регіональної системи, стає можливим прогнозування зростання ВВП (або зовнішньоторговельного обігу) будь-якої іншої країни регіону і всієї системи в цілому.

Необхідним доповненням до цієї формули є розрахунок коефіцієнта кореляції R, за абсолютною величиною якого можна оцінити розбіжності між загальною тенденцією в розвитку досліджуваного явищ і його фактичним станом (за ВВП, зовнішньоторговельним обігом й ін.).

Трьом рівням економіко-математичного моделювання відповідає значна кількість математичних методів, які можуть бути використані в практиці дослідження і конструювання зовнішньоекономічних зв'язків. До основних з них належать математико-статистичні методи, моделювання кореляційних і функціональних емпіричних залежностей, матричне моделювання, лінійне програмування.

У цілому моделі, що можуть застосовуватися для дослідження та конструювання зовнішньоекономічної діяльності, умовно можна поділити на дві групи. До першої групи відносяться економетричні моделі, до другої – балансові.

Економетричні моделі за допомогою методів математичної статистики можуть визначати залежність величини імпорту й експорту (або всієї зовнішньої торгівлі товарами та послугами) від основних макроекономічних показників держави (регіону) – ВВП, ВНП (ВНД), від кон'юнктури світового ринку й ін.

Вони дають кількісну характеристику чинників, що впливають на розмір і структуру зовнішньоторговельного обігу. Ці чинники поділяються на два види. Перший утворюють класичні фактори виробництва, другий – нормативно-правові положення, що діють у тій чи іншій країні або групі країн світу.

Перша група визначає можливості експорту й імпорту країни, що мають вигляд пропозицій та попиту товарів і послуг надсвітовому ринку. Вони визначаються природно-ресурсним потенціалом, виробничими можливостями країни, розмірами її ВВП, чисельністю населення, його доходами й іншими чинниками.

Друга група – чинники, що стримують вільний зовнішньоторговельний обмін між країнами, включає транспортні витрати, систему тарифів, квот й інших заходів державного впливу на міжнародну торгівлю.

Уплив окреслених чинників може бути оцінений на основі даних про фактичні розміри товарообігу між країнами за допомогою кореляційного, регресивного та факторного аналізів з використанням методу найменших квадратів, лінійного програмування й ін.

Економетричні моделі, у яких отримані параметри мають еластичний характер, показують, на скільки відсотків може збільшитися або зменшиться товарообіг між країнами, якщо відповідний фактор першої або другої груп збільшиться або зменшиться на 1 % і більше. Такі моделі являють собою рівняння, у якому, наприклад, експорт E_{ij} розглядається як залежна змінна від трьох незалежних змінних: ВВП країни експортера Y_I, ВВП країни-імпортера Y_j і відстані між країнами D_{ij}.

$$E_{Ij} = a_0\, Y_i^{a1}\, Y_j^{a2} D_{ij}^{a3} \qquad (1.16)$$

де a^1, a^2, a^3 – еластичність експорту по незалежних змінних.

Як приклад використання цієї економетричної моделі можна навести розрахунок очікуваних змін у виробництві ВВП в Україні унаслідок збільшення імпорту при її вступі до Світової торговельної організації (СОТ).

Виробництво товарів і послуг у будь-якій країні підкоряється співвідношенню, яке можна виразити математичною моделлю:

$$К = П + Н + Е - I, \qquad (1.17)$$

де $К$ – кінцева продукція (виробництво ВВП);

$П$ – споживання;

$Н$ – накопичення;

$Е$ – експорт;

I – імпорт.

Виходячи із формули (1.16) випливає, що збільшення імпорту, наприклад, на один відсоток призводить до зменшення виробництва на величину, рівну добутковi частки імпорту на відсоток його зростання.

Зокрема, якщо частка імпорту у випуску ВВП дорівнює D, а його збільшення відбувається на Z %, то випуск скорочується на величину, рівну (D*Z) %. Іншими словами, якщо, наприклад, частка імпорту у виробництві ВВП України дорівнює 0,43 і вона збільшується при її вступі до СОТ на 17%, то виробництво вітчизняної кінцевої продукції скорочується на (0,43*17) %, тобто тільки на 7,3 %. Аналогічні явища можуть відбутися (але зі знаком +) і в експорті.

У залежності від статистичної інформації, кількості країн, характеру зовнішньоекономічних відносин між ними й іншими факторами економетричні моделі зовнішньоторговельного обігу можуть включати різні змінні: трансграничну торгівлю країн сусідів, торгівлю країн-членів інтеграційних об'єднань (валютних, митних), різного роду преференції, товарну і географічну структуру зовнішньої торгівлі й ін.

Балансові моделі дозволяють досягати умов збалансованості виробничого й кінцевого споживання, що включає експорт із випуском продукції, який доповнюється імпортом. З включенням зовнішньої торгівлі в балансову модель (як окрему галузь народногосподарської діяльності) вона стає однією з її складових, на основі чого здійснюються розрахунки єдиного збалансованого плану.

Дозволяючи обчислювати повні витрати на виробництво експортної продукції і продукції, що заміщує імпорт, балансова модель тим самим створює можливість для розрахунків показників економічної ефективності зовнішньої торгівлі.

Моделі оптимізації зовнішньої торгівлі дозволяють поєднувати розрахунок економічної ефективності зовнішньої торгівлі з більш повним обліком необхідних народногосподарських пропорцій. Це робить можливим будувати балансові моделі із врахуванням цілого ряду чинників, які при суто балансовому методі планування зовнішньої торгівлі важко визначити й оцінити. До них відносяться:

1) умови виробництва всередині країни (витрати, баланси потужностей, сировини, матеріалів);
2) умови зовнішнього обміну (світові ціни, попит та пропозиції на зовнішніх ринках);
3) стан торговельних і платіжних балансів країни.

Побудова оптимізаційних моделей зовнішньої торгівлі ґрунтується на можливості вибору варіантів міжнародного обміну в напрямках:

- визначення найбільш доцільної географічної структури зовнішньоторговельної діяльності;
- визначення найбільш вигідної структури товарів і послуг у зовнішній торгівлі;

Моделі, за допомогою яких установлюється найбільш сприятливий географічний розподіл зовнішньої торгівлі країни, одержали назву моделей *оптимізації географічної структури зовнішньоторговельного товарообігу*.

Моделі, у яких поряд з перебуванням найбільш вигідної територіальної структури міжнародного обміну товарами й послугами відшукується одночасно і найкраща його товарна структура, умовно називаються моделями оптимізації товарної та географічної структури.

Моделі першого виду охоплюють сферу зовнішнього обігу товарів та послуг і мають на меті досягнення оптимального розподілу по країнах заданих експортних фондів й імпортних потреб для максимізації валютних надходжень у торгівлі з обраним ринком або зоною вільної торгівлі. Відкриваючи можливості для вибору найбільш вигідної територіальної організації зовнішньоекономічної діяльності, ці моделі несуть у собі деякі можливості підвищення ефективності її здійснення. Однак за допомогою локальних моделей не можна досягти оптимального ув'язування зовнішньоекономічної діяльності держави з інтересами національної економіки. Це можливо здійснити лише з одночасним урахуванням заданих експортних й імпортних можливостей країни.

Проблема більш повного ув'язування зовнішньоекономічної діяльності держави з інтересами його народного господарства може бути частково вирішена за допомогою моделей оптимізації товарно-географічної структури міжнародного обміну товарами й послугами. У моделях цього виду, поряд з оптимізацією географічної структури експортно-імпортних операцій, вирішуються питання формування найбільш сприятливої структури внутрішнього виробництва в країні і визначається, які види продукції доцільно виробляти, експортувати, а які імпортувати.

У моделях оптимізації товарної і географічної структури зовнішньої торгівлі відшукуються обсяги власного виробництва різних товарів і послуг, розміри експорту продукції по окремих зовнішніх ринках. У цільовій функції мінімізуються внутрішні витрати країни:

– у моделях поточної оптимізації – це заробітна плата на всіх стадіях виробництва продукту;

– у моделях перспективної оптимізації – повні приведені витрати, розраховані з урахуванням даних про заробітну плату і пряму капіталоємність виробів на основі міжгалузевої матриці коефіцієнтів прямих витрат.

Обмеження цих моделей ураховують виробничі потужності, попит та пропозиція товарів і послуг на світових ринках, сальдо торговельного балансу, задані розміри кінцевого продукту. Особливо плідне їхнє використання може бути при аналізі діяльності та конструюванні промислових кластерів, виробничих альянсів та мереж. Завершальний етап оптимального моделювання зовнішньоекономічних зв'язків – побудова моделі оптимізації народногосподарського комплексу країни, що включає зовнішньоекономічну діяльність як одну зі складових економічної системи держави.

Питання для самоконтролю знань

1. Прокоментуйте сутність співвідношення понять «система» і «модель».
2. Назвіть типи соціально-економічних систем.
3. Яка різниця між закритими та відкритими системами?
4. Назвіть складові ознаки систем.
5. Назвіть види моделей і вкажіть основні відмінності між ними.
6. У чому полягають переваги математичного моделювання?
7. Дайте визначення економіко-математичному моделюванню.
8. Назвіть три основні області знання, на яких базується економіко-математичне моделювання.
9. У чому полягає сутність 1-го рівня економіко-математичного моделювання? Які питання воно вирішує? Наведіть приклади.
10. У чому полягає сутність 2-го рівня економіко-математичного моделювання? Для рішення яких задач воно використовується? Наведіть приклади.
11. У чому полягає сутність 3-го рівня економіко-математичного моделювання? Для яких цілей воно використовується? Наведіть приклади.
12. Розкрийте сутність, призначення та можливості економетричних моделей зовнішньоекономічної діяльності.
13. Розкрийте сутність, призначення та можливості використання в оптимізації зовнішньоекономічної діяльності балансових моделей.
14. Визначтіть зростання ВВП країни при збільшенні в ній виробництва імпортозамісної продукції на 7 %. На сьогодні величина імпорту в структурі ВВП складає 25 %.

РОЗДІЛ 2. КІЛЬКІСНА ІНФОРМАЦІЯ, СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ТА ОБРОБКА ДАНИХ

Ключові поняття: кількісна інформація, вибірка, види вибірки, статистична сукупність, елементи сукупності, угруповання статистичних даних, діаграма, гістограма, полігон розподілу, індекси

Важливу роль в економіко-математичному моделюванні відіграє математична статистика.

Використання методів математичної статистики для аналізу й конструювання світогосподарських процесів є свого роду моделюванням, яке дозволяє в доступній формі вирішувати питання із зовнішньоекономічної діяльності та приймати по них відповідні рішення.

Математична статистика – розділ вищої математики присвячений систематизації, обробці та використанню статистичних даних для дослідження й рішення різного роду наукових і практичних задач. Засоби (методи), які використовуються в математичній статистиці, на сьогодні набули широкого застосування в економіці, астрономії, антропології, медицині, мовознавстві й інших науках. Навряд чи можна уявити зараз науку або галузь науки, що не використовувала би при рішенні певних задач тих або інших методів математичної статистики. Що ж стосується міжнародних відносин, і особливо дослідження світогосподарських зв'язків, то застосування в їхньому моделюванні математико-статистичних методів просто необхідне. Це випливає з усього сучасного напрямку розвитку економічної науки, що характеризується використанням величезного потоку інформації і широким упровадженням у наукові дослідження й розрахунки кількісних методів.

2.1. Вибірка статистичних даних

Як правило, сучасному дослідникові доводиться мати справу з надзвичайно великою кількістю даних, що являють собою різного роду інформаційні сукупності. Тому перед ним завжди виникає питання про повноту їхнього охоплення в процесі вивчення й аналізу.

Є два шляхи рішення цього питання:

– прямий – прискорення темпів збору й обробки даних;
– непрямий – вибірка.

Прямий шлях, що полягає в прискоренні одержання й обробки даних, не завжди залежить від можливостей дослідника. Використання комп'ютерної техніки зараз значною мірою полегшує цю задачу. Однак часто, у силу різних причин, ще не можна йти цим шляхом і доводиться звертатися до непрямого шляху – вибіркового методу.

Вибірковий метод, власне кажучи, є моделюванням якого-небудь явища або процесу, при якому моделлю служить один або кілька компонентів досліджуваного процесу (явища).

Вибірка даних може мати випадковий і навмисний характер.

При навмисній (або спрямованій) вибірці беруться компоненти (елементи), які дослідник уважає типовими для всієї їхньої сукупності. Вивчивши економічні зв'язки між декількома країнами якого-небудь регіону (наприклад, Тунісу й Лівії в Північній Африці), можна судити про внутрішні економічні зв'язки в даному регіоні в цілому. Правильність вибору при цьому цілком залежить від досвіду й мистецтва дослідника.

При випадковій вибірці дані відбираються на основі суворої математичної теорії. Щойно дослідник прийняв певну схему, він відбирає елементи з даної сукупності за відповідними правилами.

Обсяг вибірки. Чим більше вибірка, тим вища ймовірність одержання правильного уявлення про сукупність, яка досліджується. Але залежність між обсягом вибірки і її репрезентативністю (точністю) не має простий лінійний характер. Як свідчить математична статистика, зі збільшенням обсягу вибірки репрезентативність зростає спочатку різко, а потім усе повільніше. Тому в залежності від необхідного ступені репрезентативності результатів досліджень обсяг вибірки може бути великим або малим.

Характер залежності між обсягом вибірки й репрезентативністю при різних видах вибіркового дослідження є відомим. Це дозволяє заздалегідь визначити, який саме обсяг вибірки буде потрібний для обробки інформації, накопиченої під час її добору. Для випадкової вибірки середня помилка отриманої оцінки всієї сукупності приблизно зворотно пропорційна квадратному кореню із числа одиниць у вибірці (отже, збільшення, наприклад, числа спостережень у 4 рази підвищить репрезентативність дослідження лише в 2 рази).

*Побудова вибірки (вибіркової моделі)***.** Який саме вид вибірки використати під час аналізу економічної діяльності (або інших дослідженнях) значною мірою залежить від того, яке явище або процес вивчається.

Вибіркове обстеження, наприклад, транспортних потоків зажадає зовсім іншого підходу, ніж таке ж обстеження попиту та пропозиції яких-небудь товарів у тій або іншій країні.

У міжнародних дослідженнях ефективним є застосування таких видів вибірки:

1) проста (випадкова та систематична);
2) районована;
3) гніздова (багатоступенева).

При *простій випадковій вибірці* беруться *n* пунктів чи ознак дослідження з економічного явища чи простору. Їм відповідають довільні координати простору або номери з таблиці випадкових чисел. У першому випадку для кількісних характеристик досліджуваного явища, що досліджується, будуються дві осі координат з лінійною числовою шкалою, а одиниця вибору визначається парою випадкових координат. Так, наприклад, випадкові числа 98 і 26 визначають місце, що відстоїть на 98 поділок до півночі і на 26 поділок до сходу від початку координат. За стандартною системою позначень цьому місцю привласнюється номер 9826. У такий же спосіб беруться інші пункти чи ознаки з досліджуваного економічного явища або простору. У другому випадку складається таблиця чисел (у залежності від обсягу вибірки) і беруться випадкові числа, яким відповідають певні ознаки явища чи простору, що вивчаються.

При *простій систематичній вибірці* у випадку вивчення економічного простору на карті досліджуваної території, кресляться ґрати рівномірно розподілених точок, що відповідають територіальним одиницям (контрольним пунктам), що залучаються у вибірку. Якщо досліджується сукупність даних, які характеризують те чи інше явище, здійснюється їхня вибірка через певний інтервал.

У першому випадку застосовуються квадратні ґрати і добір здійснюється по місцях перетинання ліній (контрольні пункти), проведених перпендикулярно до сторін досліджуваного економічного простору. Початок ґрат встановлюється шляхом випадкового вибору вихідної точки. При вибірці із сукупності даних, яка моделює їхню динаміку в часі чи в розрізі галузей виробництва, структурі торговельних відносин й ін., складається відповідна таблиця чисел, де через певний інтервал беруться числа, яким відповідають певні ознаки явищ, що вивчаються.

При *районованій вибірці* економічний простір або досліджувана сукупність даних поділяють на певні регіони (наприклад, Північна, Західна, Південна, Східна Європа) або частини (за особливостями інтенсивності дії, динамікою розвитку й ін.). При цьому за такою методикою одиниці вибірки беруться по кожному регіону (або частині сукупності) незалежно від інших. Положення точок у межах кожного регіону або частини досліджуваної сукупності даних встановлюється тим же методом, що і при простій випадковій вибірці. У цьому випадку число одиниць, що залучаються до вибірки у кожнім регіоні чи частині сукупності, приймається пропорційним їхній вазі (площі, чисельності населення, обсягу ВВП й ін.).

Іноді застосовується так звана *районована неврівноважена систематична вибірка*, що становить синтез трьох попередніх видів вибірок.

Якщо досліджується економічний простір, він спочатку ділиться на окремі частини (за певною ознакою) і далі із цих частин здійснюється вибірка даних за загальними правилами. Якщо досліджується сукупність даних, які характеризують те чи інше явище, здійснюється їх розбивка на частини за певною ознакою і потім, в залежності від обсягів і значень цих частин, із них відбираються дані. При цьому теоретичні переваги, властиві випадковим і районованим вибіркам, будуть поєднуватися в даному разі з корисними властивостями систематичної вибірки.

Гніздова (багатоступенева) вибірка дозволяє розв'язати проблеми місцевих і регіональних відмінностей, що виключає потребу в повній інформації для всього досліджуваного економічного простору. Вона особливо підходить у тих випадках, коли потрібно вивчити яке-небудь явище на економічному просторі дуже великих розмірів (регіони планети за класифікацією ООН, Європейський Союз, СНД й ін.), не упускаючи з точки зору місцеві відмінності (окремих країн і їхніх регіонів). В основі багатоступеневої вибірки (іноді її називають гніздовою) лежить членування досліджуваного економічного простору або глобального явища на кілька частин однакового розміру. Потім деякі частини, відібрані методом випадкової вибірки, у свою чергу розбиваються на ще менші частини. Процес випадкової вибірки і дроблення продовжується аж до виокремлення зовсім дрібної частини, для якої необхідні статистичні дані.

Крім розглянутих видів вибірки є ще низка інших (випадкова повторна, механічна, серійна й ін.), що також використовуються при роботі зі статистичними даними.

На практиці різні види вибірок можуть використовуватися в поєднанні один з одним. При цьому варто завжди враховувати, що частина, як і будь-яка модель, ніколи не може абсолютно точно характеризувати ціле, тому генеральна сукупність буде відрізнятися від відповідних характеристик, отриманих за вибірковими даними. Виходячи з цього, обсяг вибірки і її метод здійснення повинні відповідати в кожному випадку конкретним умовам і репрезентативності, яку вимагає дане дослідження.

Приклад використання вибірки

Потрібно визначити тенденцію (позитивну або негативну) у динаміці світового товарного експорту. Це можна зробити, проаналізувавши його динаміку по кожній країні окремо (якщо є відповідні дані, на зразок наведених у табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Світовий товарний експорт, млрд. дол. США

Країна	***1960***	***1970***	***1980***	***1990***	***2000***
США	390,0	530,0	580,0	777,5	1070,0
Канада	33,0	71,5	133,6	195,5	375,0
Австралія	18,0	31,5	45,0	65,0	100,0
Японія	35,3	114,0	200,0	430,0	550,0
Німеччина	87,5	185,0	385,0	600,0	710,0
Франція	62,5	140,0	235,0	330,0	420,0
Великобританія	105,0	160,0	235,0	320,0	400,0
Італія	43,5	105,0	205,0	270,0	365,0
Австрія	11,9	27,0	56,0	79,0	100,0
Бельгія	27,5	63,0	112,0	176,0	214,0
Нідерланди	40,0	84,0	135,0	190,0	230,0
Швеція	16,5	31,0	43,0	72,0	107,5
Швейцарія	23,5	44,5	61,0	80,0	94,0
Данія	12,0	22,5	32,5	42,5	53,5
Фінляндія	7,5	16,5	26,0	38,0	50,0
Норвегія	10,5	23,5	30,0	40,0	60,0
Бразилія	18,0	31,0	70,0	85,5	110,0
Мексика	16,5	25,0	67,0	100,0	260,0
Аргентина	13,2	20,5	28,5	25,5	37,0
Чилі	6,2	11,0	20,0	40,0	70,0

Країна	***1960***	***1970***	***1980***	***1990***	***2000***
Колумбія	6,8	13,0	27,0	46,0	65,0
Перу	6,6	11,0	15,5	16,0	27,0
Китай	32,0	47,0	87,5	270,0	700,0
Індія	22,5	34,0	54,0	100,0	240,0
Пакистан	4,6	7,8	13,8	27,5	55,0
Бангладеш	2,7	5,1	8,2	15,2	32,0
Індонезія	12,7	29,0	100,0	190,0	300,0
Корея	7,7	21,5	56,0	147,0	300,0
Таїланд	7,5	18,0	42,0	158,0	252,0
Тайвань	3,0	11,5	50,0	153,0	300,0
Філіппіни	5,5	12,5	30,0	49,0	77,0
Півн. Африка, Бл. і Сер. Схід	38,0	100,0	220,0	285,0	470,0
Африка південніше Сахари	13,0	18,0	22,0	30,0	36,0
Сх. Європа	36,0	60,0	86,5	125,0	85,0
Країни колишнього СРСР	40,0	85,0	160,0	185,0	95,0

Якщо по всіх країнах одержати інформацію складно (або неможливо), варто звернутися до вибіркового методу. У нашому прикладі для цього можна взяти дані по 2-3 країнах із групи високо розвинутих країн (наприклад, Австралії, Великобританії, Бельгії); країнах, що розвиваються (наприклад, Мексики, Індії, Філіппін); постсоціалістичних країнах (Східна Європа), країнах колишнього СРСР. Динаміка товарного експорту цих країн з певним припущенням буде «моделювати» тенденцію у світовій динаміці експорту.

На рис. 2.1 показані результати розрахунку динаміки світового експорту всіма країнами світу (за даними табл. 2.1) і динаміки експорту країн вибірки (Австралія, Великобританія, Бельгія, Мексика, Італія, Філіппіни, країни Східної Європи та колишнього СРСР). Лінійні наближення динаміки експорту в обох випадках вказують на стійку тенденцію його зростання. Проте через малу кількість країн, що ввійшли до вибірки (8 країн із 35, тобто 22 %), вона недостатньо репрезентативна і потребує збільшення вибірки.

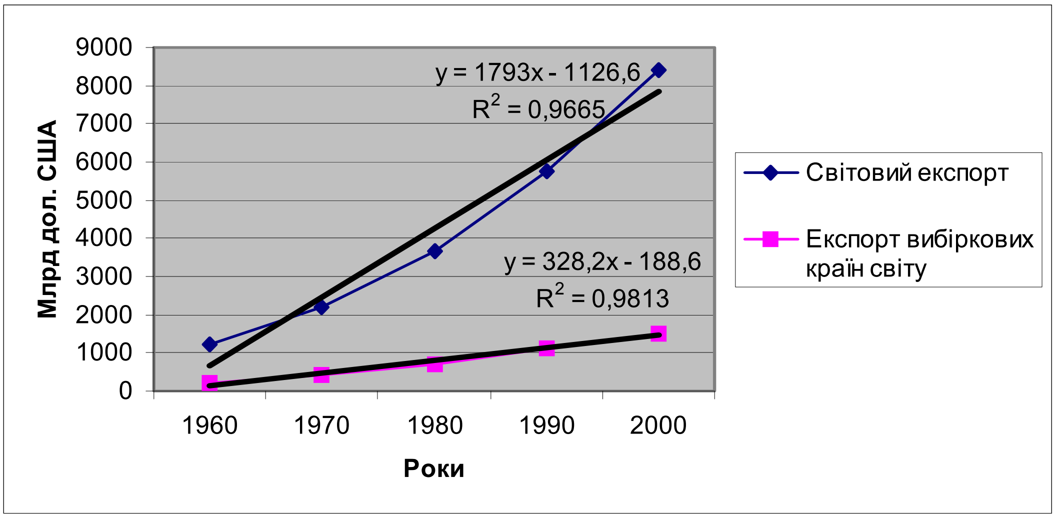


Рис. 2.1. Динаміка світового експорту та експорту країн, що ввійшли до вибірки

2.2. Групування статистичних даних

Одержавши дані, що характеризують яке-небудь масове явище, дослідник насамперед повинен подумати про систематизацію цих даних і приведення їх до якогось порядку, що дозволяє надалі спростити роботу з ними.

Для того щоб визначити, які закономірності закладені в розподілі даних, біля якої величини групується більшість показників, що мають відхилення від цієї величини в той або інший бік, яка загальна картина розподілу і т. д., необхідне певне ранжування (тобто групування у визначеному порядку всього ряду досліджуваних даних).

Математико-статистична обробка даних звичайно здійснюється після *групування*, під чим розуміють розчленовування статистичної сукупності на групи, однорідні за якою-небудь ознакою. Так, наприклад, вивчаючи ринки міст країни, з якими передбачається укласти контракт про постачання певних видів продукції, їх доцільно підрозділити на великі, середні, малі міста та селища. Підприємства якого-небудь промислового центру можна розглядати не всі відразу, а за окремими галузями, за кількістю зайнятих робітників, за вартістю продукції, що виробляється, й ін. Відносно дослідження міжнародних економічних відносин доцільна сегментація світового ринку за товарною і географічною структурами.

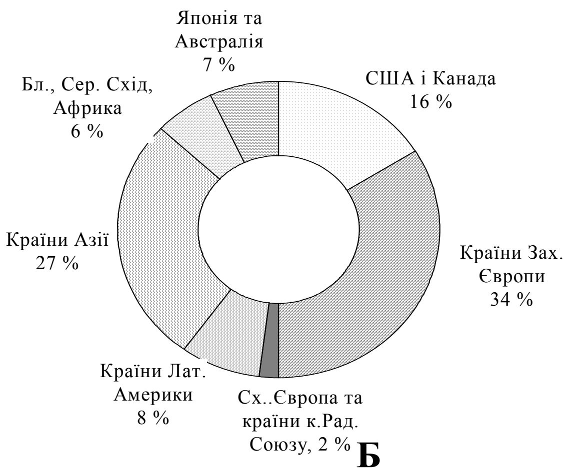
Наведені в табл. 2.1. дані про товарний експорт що характеризують його динаміку в часовому вимірі по різних країнах світу. Однак за ними важко скласти уявлення про географічну структуру експорту. Її моделювання можна здійснити при відповідному статистичному групуванні даних (за територіальною ознакою або за належністю країн до того або іншого типу, залежно від рівня їхнього соціально-економічного розвитку). Для цього користуються діаграмами, гістограмами й іншими розрахунково-графічними засобами.

Діаграма (від грец. – графічне зображення, малюнок, креслення) наочно моделює співвідношення кількісних величин у досліджуваних процесах і явищах. Вони можуть бути квадратними, стовпчастими, круговими й ін.

За допомогою діаграм можна наочно проілюструвати товарну й географічну структуру експортно-імпортних операцій, експортну квоту й інші параметри світогосподарських зв'язків.

У нашому прикладі (табл. 2.2) за допомогою кругової діаграми зручно віддзеркалити структуру світового товарного експорту в розрізі груп країн за територіальною ознакою (рис. 2.2-А) або за їхньою належністю до країн різних рівнів соціально-економічного розвитку (рис. 2.2-Б).

А



Б

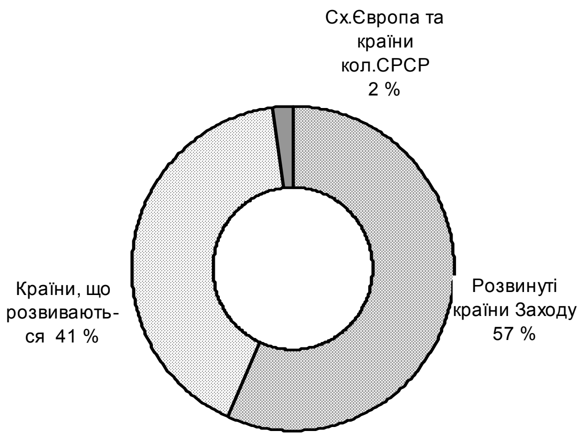


Рис. 2.2. Географічна структура світового товарного експорту

Перед математико-статистичними розрахунками звичайно використовується групування за кількісними ознаками. Розберемо приклад такого групування.

У табл. 2.2 наведена чисельність населення 14 країн Західної Африки.

Таблиця 2.2

Чисельність населення країн Західної Африки (млн чол.).

№	*Країни*	*Населення*	*№*	*Країни*	*Населення*
1	Бенін	5,56	8	Ліберія	2,76
2	Буркіна-Фасо	4,83	9	Мавританія	2,28
3	Гана	17,45	10	Малі	10,80
4	Гамбія	1,12	11	Нігерія	111,70
5	Гвінея	6,70	12	Сенегал	8,35
6	Гвінея-Бісау	1,0	13	Сьєрра-Леоне	4,51
7	Кот-д'Івуар	14,23	14	Того	4,14

З табл. 2.2 видно, що найбільше значення досліджуваної ознаки, – 111,7 млн чол., а найменше – 1,0 млн чол. (цими двома числами визначається проміжок варіації ознаки). Ділення проміжку на певні інтервали (за кількістю жителів) і підрахунки частот дозволяє скласти таблицю, яка полегшує подальший процес обробки математико-статистичних даних (табл. 2.3).

Таблиця 2.3.

Інтервали чисельності населення	*Частоти*
1-5	6
5-10	4
10-15	3
15-20	1
Понад 20	1

Поряд з табличною формою розподілу величин по групах можлива і більш наочна графічна форма – гістограма (стовпчаста діаграма), полігон розподілу, крива розподілу.

Розглянемо техніку побудови найбільш простої з них – *гістограми.*

Будується прямокутна система координат. На осі абсцис відкладаються межі інтервалів людності міст, по осі ординат – відповідні частоти. Висоти стовпчиків, що спираються на масштаб інтервалів, обмежуються величинами частот. Отримана фігура – гістограма (рис. 2.2).

Якщо із середини кожного інтервалу провести ординату до перетинання з частотою, а вершини перпендикулярів з'єднати прямими лініями, то отримаємо полігон розподілу (пунктирна ламана лінія на рис. 2.3.).

Рис. 2.3. Групування країн Західної Африки за чисельністю населення

Більш точне уявлення про закономірності розподілу статистичного матеріалу дає спосіб зображення інтервальних рядів у вигляді плавної кривої розподілу. Однак побудова таких кривих вимагає складних математичних розрахунків.

Аналіз графіків розподілу (вивчення їх максимумів і мінімумів, положистих і крутих ділянок) становить іноді значний інтерес для дослідника. З гістограми і полігона розподілу (рис. 2.3) можна бачити перевагу в Західній Африці малих країн (до 5 млн чол.). За допомогою графіків розподілу можна визначити як загальну чисельність населення всього регіону, так і кількість жителів, що проживають по певних категоріях країн.

В експериментальних дослідженнях широко розповсюджений порівняльний аналіз кривих розподілу. Порівнюючи криві, що характеризують ті самі явища для різних територій або яких-небудь явищ, можна судити про їхню ідентичність або розходження, що особливо важливо при здійсненні наукових класифікацій.

2.3. Середня величина явища, показники розмаїтості, індекси

Дослідникові часто доводиться виводити та використовувати кількісну інформацію. Як приклад такої кількісної інформації можна навести величини ВВП на душу населення, показники середніх величин промислового виробництва, врожайність сільськогосподарських культур, середньорічні темпи приросту експорту й ін. При цьому відкидається випадкове і розкривається типове, найбільш істотне, характерне для всієї статистичної сукупності в цілому.

Найпоширенішою середньою величиною є *середня арифметична*, що обчислюється за формулою:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}, \qquad (2.1)$$

де $\overline{X}$ – середня арифметична;

$\sum_{1}^{n}$ – знак підсумовування;

x_i – окреме значення ознаки;

n – число спостережень.

При великій кількості досліджуваних показників середню величину простіше обчислювати за формулою *середньо зваженої арифметичної:*

$$\overline{X} = \frac{\sum(x \cdot m)}{\sum m} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + ... + x_n m_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}, \quad (2.2)$$

де x – центральні значення інтервалів;

m – частоти.

Роль середніх величин при вивченні різного роду закономірностей винятково велика. Вони дозволяють:

1. Визначати загальну тенденцію розвитку явищ у часі та просторі.
2. Оцінювати значення окремої величини шляхом порівняння її із середньою.
3. Визначати наявність двох або декількох провідних ознак у досліджуваних явищах або процесах.

Як приклад розглянемо розрахунок середньої величини вартості природного газу за певний період часу для визначення цінової тенденції (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

Ціни на природний газ на NYMEX за 1998–2000 рр., дол. США/ млн БТО[1]

Рік	**Січень**	**Лютий**	**Березень**	**Квітень**	**Травень**	**Червень**	**Липень**	**Серпень**	**Вересень**	**Жовтень**	**Листопад**	**Грудень**	**Середня**
1998	2,02	2,02	2,11	2,30	2,07	1,99	2,13	1,79	1,78	1,85	1,95	1,64	1,96
1999	1,75	1,77	1,64	1,93	2,14	2,16	2,12	2,62	2,50	2,53	2,41	2,21	2,16
2000	2,26	2,50	2,62	2,87	3,26	4,16	3,97	4,13	4,82	4,95	5,20	8,12	4,09

З наведених в таблиці даних вартості природного газу в розрізі місяців за 1998–2000 рр. важко визначити тенденцію в динаміці цін. Але розрахунок середнього значення ціни (останній стовпчик) чітко вказує на зростаючу цінову тенденцію у його вартості на регіональному ринку Північної Америки (рис. 2.4).

[1] БТО – британська теплова одиниця. В 1куб м газу 35-40 тис. БТО.

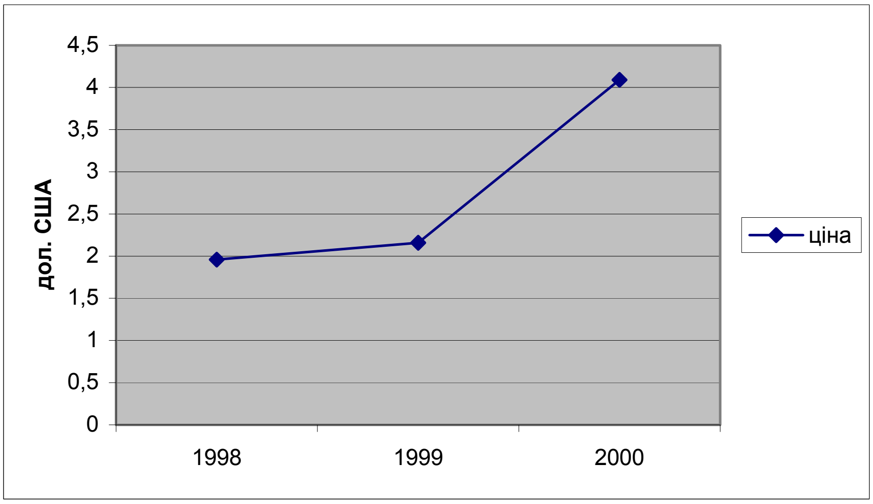


Рис. 2.4. Динаміка ціни на природний газ

Рівняння середньої зваженої арифметичної має широке використання в практичних розрахунках, насамперед у міжнародних кредитно-фінансових відносинах.

Припустимо, що необхідно визначити ціну іноземного товарного кредиту. Термін виплати кредиту – 5 років, кредитна ставка – 15 % річних, сума кредиту – 40 млн євро, 10 % товарного кредиту сплачується відразу ж готівкою. Ціна кредиту визначається за формулою:

$$K = \sum_{1}^{n} K_i \cdot \bar{t} \cdot P_k, \qquad (2.3)$$

де K_i – частки кредиту, що підлягають щорічним виплатам;

$\bar{t}$ – середньозважений термін виплати кредиту;

P_k – річна кредитна ставка.

У даному рівнянні фігурує середньозважене значення $\bar{t}$, що знаходиться за формулою:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{1}^{n} t_i \cdot K_i}{\sum_{1}^{n} K_i}, \qquad (2.4)$$

Не важко переконатися в тотожності формули (2.4) з формулою середньозваженої (2.2). Підставивши у формулу (2.4) значення t = 1, 2, 3, 4, 5 і K_i, знаходимо:

$$t_i = \frac{7{,}2 \cdot 1 + 7{,}2 \cdot 2 + 7{,}2 \cdot 3 + 7{,}2 \cdot 4 + 7{,}5 \cdot 5}{7{,}2 \cdot 5} = \frac{108}{36} = 3{,}0,$$

звідки:

$$K = (7{,}2 \cdot 3 \cdot 0{,}15) \cdot 5 = 16{,}2.$$

Таким чином, ціна 5 річного товарного кредиту на суму 40 млн євро при ставці 15 % річних складе 16,2 млн євро.

Ліміти* і *розмах. За середніми арифметичними значеннями можна судити лише про масовий рівень досліджуваної ознаки. Відобразити ж усі характерні риси статистичної сукупності та здійснити розподіл її елементів за величиною ознаки – за допомогою тільки показників середніх значень – не можливо. На практиці можливі випадки збігу середніх арифметичних за різного характеру розподілу елементів сукупностей за величиною досліджуваної ознаки. Так, порівнюючи діяльність двох зовнішньоторговельних фірм, можна виявити, що вони зазнали в звітний період однакових збитків. Але в одній з фірм є підприємства з дуже великим збитком, а в другій – майже всі підприємства групуються біля середньої величини.

Припустимо, що в одній статистичній сукупності досліджувана ознака приймає такі значення: 1, 3, 5, 7, 9, в другій – 3, 4, 5, 6, 7. В обох випадках середня арифметична дорівнює 5, однак розкид величин не однаковий. У першій сукупності він від 1 до 9, у другій – тільки від 3 до 7, тобто у 2 рази менший.

Для оцінки коливання значень досліджуваної ознаки вводяться особливі показники його мінливості у середині статистичної сукупності – *ліміти (lim)*.

Вони є найпростішим показником розмаїтості й характеризують максимальне і мінімальне значення кількісних ознак статистичної сукупності.

Різниця між максимальним і мінімальним значеннями ознаки називають *розмахом*. Він часто приписується до лімітів у дужках. У наших прикладах ліміт і розмах будуть характеризуватися такими величинами:

$$\lim = 9–1\ (8);$$
$$\lim = 7–3\ (4).$$

Слід зазначити, що і ліміти, і розмах дуже часто використовуються в зовнішньоекономічних дослідженнях і звітах. Це й амплітуда коливань цін на світовому ринку, і розходження у врожайності сільськогосподарських культур по окремих країнах за певні роки, сезонність попиту й ін.

Середнє квадратичне відхилення. Ступінь ознаки більш точно виражається за допомогою інших показників. Розберемо деякі з них.

У розглянутих вище статистичних сукупностях 1, 3, 5, 7, 9 і 3, 4, 5, 6, 7 знайдемо центральні відхилення середньої арифметичної (табл. 2.5).

Таблиця 2.5

X	$X-\overline{X}$	X	$X-\overline{X}$
1	-4	3	-2
3	-2	4	-1
5	0	5	0
7	2	6	1
9	4	7	2

Середня арифметична абсолютних значень центральних відхилень дає *середнє абсолютне відхилення*. Воно позначається грецькою буквою Q і знаходиться за формулою:

$$Q = \frac{\sum\left|X-\overline{X}\right|}{n} \qquad (2.5)$$

У нашому прикладі:

$$Q_1 = \frac{4+2+0+2+4}{5} = 2{,}4; \qquad Q_2 = \frac{2+1+0+1+2}{5} = 1{,}2.$$

Але частіше, при аналітичних дослідженнях, віддають перевагу іншому показникові ступеня розмаїтості – *середньому квадратичному відхиленню*. У цьому випадку кожне центральне відхилення зводиться в квадрат, знаходиться середнє арифметичне цих квадратів і вже з нього вилучається квадратний корінь. Таким чином, формула середнього квадратичного відхилення буде мати вигляд:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(X - \overline{X}\right)^2}{n}}, \qquad (2.6)$$

де σ – знак середнього квадратичного відхилення.

(Більш правильно в знаменнику підкореневого виразу ставити не n, а n – 1. Однак при досить великій кількості спостережень збільшення знаменника на 1 практично не позначиться на величині).

У наших прикладах середні квадратичні відхилення будуть дорівнювати:

$$\sigma = \sqrt{\frac{16+4+4+16}{5-1}} = 3{,}16$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{4+1+1+4}{5-1}} = 1{,}58,$$

Результати обчислень звичайно записуються в такий спосіб:

$$5 \pm 3{,}16$$
$$5 \pm 1{,}58$$

Якби мова йшла про збитки зовнішньоторговельних фірм, то це б могло, наприклад, означати, що середня їхня величина на підприємствах обох фірм – 5000 $. Але в одній фірмі межа середнього коливання збитку 3,16, а в другій – тільки 1,58. Припустима величина відхилення не повинна перевищувати 2,0. Тоді при σ= 1,58 можна вважати, що стан діяльності фірми хоча і збитковий, але не загрозливий, при σ= 3,16 – становище загрозливе і фірма повинна знайти на збитковому підприємстві причини й вжити термінових заходів з їхньої ліквідації.

Обчислення середнього квадратичного відхилення при згрупованих даних здійснюється за формулою середньої зваженої:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(X - \overline{X}\right)^2 \cdot m}{\sum m}}, \qquad (2.7)$$

де m – вага (частота).

У теоретичних формулах σ часто виступає зведеною в квадрат. Ця величина σ^2 називається *дисперсією*. Вона також є мірою коливання ознаки.

Середні квадратичні відхилення цінових, виробничих й інших економічних показників суворо закономірні в межах визначених країн, регіонів і відрізків часу. Тому їхнє обчислення й аналіз мають суттєву практичну значущість.

Коефіцієнт варіації. Середнє квадратичне відхилення є розмірним показником коливання ознаки. Але воно служить безпосереднім показником розмаїтості тільки тоді, коли порівнюються ті ж самі кількісні ознаки по території або проміжках часу. Припустимо, маємо дані про величини середніх квадратичних відхилень наступних умов по регіонах якоїсь країни (табл. 2.6).

Таблиця 2.6

№	*Ознаки*	σ
1	ВВП на душу населення	1000 євро
2	Темпи зростання проміжного продукту	2 %
3	Річні показники чисельності робітників	50 000 чол.

З наведених величин неможливо встановити, яка із зазначених ознак більш різноманітна, бо не можна порівнювати відсотки з євро або людьми. Тому для порівняння різнорідних ознак вводиться особливий показник – *коефіцієнт варіації* (V), як відношення σ до $\overline{X}$. Зазвичай коефіцієнт варіації виражається у відсотках і його формула має вигляд:

$$V = \frac{\sigma}{\overline{X}} \cdot 100\% \qquad (2.8)$$

Знаючи середні арифметичні ознак, зазначених у вищенаведеному прикладі, за формулою (2.8) можна обчислити коефіцієнт варіації (табл. 2.7).

Таблиця 2.7

№ п/п	*Ознаки*	$\overline{X}$	σ	$V = \frac{\sigma}{\overline{X}}$
1	ВВП на душу населення	2000	1000	50 %
2	Темпи зростання проміжного продукту	8 %	2 %	25 %
3	Річні показники чисельності робітників	500 тис.	50 тис.	10 %

Таким чином, у даній країні найбільш мінливою ознакою є ВВП ($V_1 = 50\%$), а найбільш рівномірно розподіленою – річна чисельність робітників ($V_3 = 10\%$).

Арифметична і геометрична прогресії. Дослідникові нерідко доводиться мати справу з необхідністю визначення обсягів виробництва або торгівлі на розрахунковий період, користуючись лише даними про їхні сучасні обсяги і темпи приросту.

Наприклад, обсяг експорту України в 2004 році склав 32672 млн дол. США, імпорту – 28996 млн дол. США. Середньорічні темпи їхнього зростання із вступом України до СОТ повинні скласти близько 6 %. Потрібно визначити їхні абсолютні значення до 2010 року.

Розрахунок обсягів експорту й імпорту для будь-якого року найближчих 6-ти років може бути зроблений за допомогою формул арифметичної або геометричної прогресій:

$$a_n = a_1 + d\,(n-1), \qquad (2.9)$$

де a_n – величина, що відшуковується на розрахунковий період;

a_1 – вихідне значення;

d – щорічний приріст в абсолютних значеннях;

n – кількість років.

$$U_n = U_1 \cdot q^{n-1}, \qquad (2.10.)$$

де U_n – величина, що відшуковується на розрахунковий період;

U_1 – вихідне значення;

q – темпи приросту у відносних значеннях;

n – кількість років.

Оскільки середньорічні темпи приросту звичайно задаються у відносних значеннях, у цих розрахунках обсягів експорту й імпорту краще скористатися формулою геометричної прогресії (2.10).

Експорт: $32672 \cdot 1{,}06^5 = 46345{,}86$ млн дол. США

Імпорт: $28996 \cdot 1{,}06^5 = 41131{,}38$ млн дол. США.

Кількісна характеристика міри неподібності (індекс відмінності). Дуже часто в дослідженнях світогосподарських процесів треба робити оцінки розходжень у порівнюваних явищах і процесах. Їх математичне вираження дає можливість чіткого визначення міри подібності або відмінності між ними. Кількісним показником у цьому випадку може бути індекс відмінності (дисперсії), що обчислюється за формулою:

$$I = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\left[X' - Y'\right], \qquad (2.11)$$

де X' – частка у відсотках по фактору (ознаці) X;

Y' – частка у відсотках по фактору (ознаці) Y.

Для визначення граничних значень I розглянемо два протилежні випадки:

1. Виробництво у трьох умовних країнах промислової і сільськогосподарської продукції абсолютно рівномірне (табл. 2.8).

Таблиця 2.8

Країни	***Частка пром. виробництва***	***Частка с.-г. виробництва***	***X` -Y`***
А	33,33	33,33	0
Б	33,33	33,33	0
В	33,33	33,33	0

$\sum = 0$

Підставивши отриманий результат розрахунку ($\sum = 0$) у формулу 2.11, одержуємо перше граничне значення $I = 0$.

2. Виробництво у трьох умовних країнах промислової і сільськогосподарської продукції протилежне першому випадку (табл. 2.9).

Таблиця 2.9

Країни	**Частка пром. виробництва**	**Частка с.-г. виробництв-ва**	**X` -Y`**
А	100	0	100
Б	0	0	0
В	0	100	100

$\sum = 200$

Підставивши отриманий результат розрахунку ($\sum$ =200) у формулу 2.11, одержуємо перше граничне значення I = 100.

Таким чином, можна констатувати, що індекс міри відмінності (дисперсії) знаходиться в межах від 0 до 100 ($0 \le I \le 100$).

Визначивши граничні значення індексу відмінності (міри неподібності), розрахуємо його кількісну оцінку стану зовнішньої торгівлі України з країнами (табл. 2.10).

Таблиця 2.10

Зовнішня торгівля України з країнами СНД і Балтії (млн дол. США)

Країни	***Експорт***	***Імпорт***	X'	Y'	$\lvert X'-Y' \rvert$
Азербайджан	87,6	47,0	1,5	0,5	1,0
Білорусь	825,5	391,4	14,2	3,8	10,4
Вірменія	10,7	8,1	0,2	0,1	0,1
Грузія	49,4	7,7	0,8	0,1	0,7
Казахстан	93,7	403,6	1,6	3,9	2,3
Киргизстан	4,3	8,7	0,1	0,1	0,0
Молдова	294,4	73,8	5,1	0,7	4,4
РФ	3723,0	7837,9	64,1	76,3	12,2
Таджикистан	84,5	2,5	1,5	0,0	1,5
Туркменістан	270,2	972,3	4,6	9,5	4,9
Узбекистан	114,1	126,4	1,9	1,3	0,6
Латвія	63,9	82,9	1,1	0,8	0,3
Литва	127,3	242,4	2,2	2,4	0,2
Естонія	36,0	72,8	0,7	0,7	0,0
Усього	**5810**	**10277**	**100,0**	**100,0**	**55,6**

За розрахунками, індекс міри відмінності зовнішньої торгівлі України з країнами СНД і Балтією виявився рівним приблизно 28 одиницям. Показник відносно близький до 0. Це вказує на відносно рівномірний розподіл обсягів експортно-імпортних операцій України з країнами «близького зарубіжжя». «Вибиває» лише торгівля з Росією, що і природно, бо вона була і залишається головним постачальником енергоносіїв для нашої країни.

Здійснивши аналіз динаміки індексу відмінності в зовнішньоекономічній діяльності України з країнами СНД і Балтії по роках, можна встановити тенденцію, що спостерігається в цьому процесі, а отже, і побудувати модель, яка буде віддзеркалювати стратегію міжнародних економічних відносин із цими країнами на майбутнє.

Питання для самоконтролю знань

1. Чи можна вважати вибірку моделлю досліджуваного явища або процесу?

2. Назвіть види вибірок і розкрийте їхній зміст. Наведіть можливі приклади їхнього використання.

3. Побудуйте діаграму світового товарного експорту в розрізі таких груп країн:

- розвинуті країни Заходу;
- країни Латинської Америки, що розвиваються;
- країни Азії, що розвиваються;
- країни Африки;
- країни Східної Європи, СНД і Балтія[2] .

4. Побудуйте гістограму забезпеченості країн світу факторами виробництва[3] .

5. За формулою геометричної прогресії розрахуйте обсяги експорту й імпорту України у взаєминах з Росією до 2010 року, якщо середньорічні темпи приросту експорту складуть 7 %, а імпорту – 2 %. Вихідна величина експорту – 3723 млн у.о., імпорту – 7837 млн у.о.

6. За діаграмою (рис. 2.5) визначить, які країни мають можливість експортувати вугілля. Яка з них займає в цьому відношенні 1-ше місце?

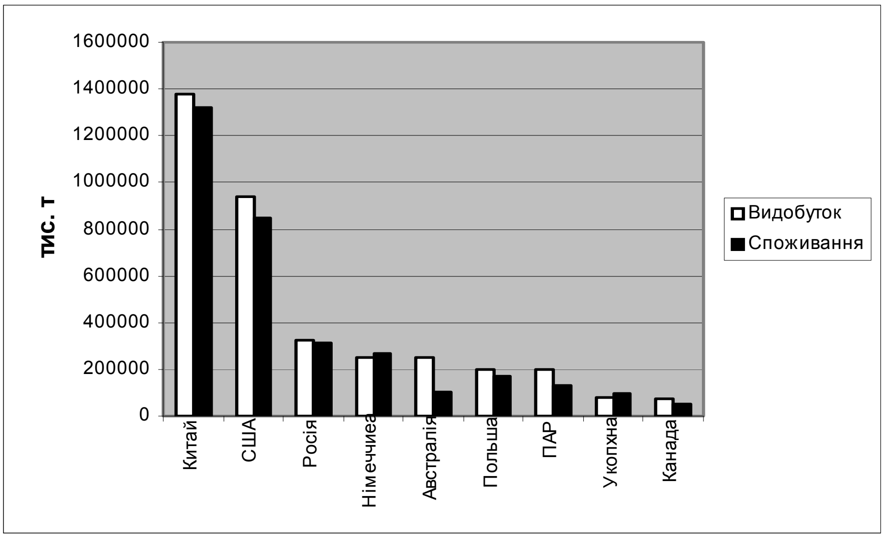


Рис. 2.5. Провідні країни світу за видобутком і споживанням вугілля

7. Користуючись показниками табл. 2.1 цього навчального посібника, визначить середньорічні темпи зростання експорту по 5-7 країнах світу за останні 10 років (вибір країн – за бажанням студента). Визначивши

---

[2]Див.: Голиков А. П., Казакова Н. А. Мировое хозяйство: отраслевая структура, география, современные тенденции. – Х.: ХНУ, 2002.– Приложение 2.

[3] Линдерт П. Х. Экономика мирохозяйственных связей. – М.: Прогресс-Универс, 1992. – С. 36; *или* Голиков А. П., Казакова Н. А. Мировое хозяйство: отраслевая структура, география, современные тенденции. – Х.: ХНУ, 2002.– С. 31).

середньорічні темпи, розрахуйте можливу абсолютну величину їхнього експорту до 2010 року.

8. За допомогою формули $I = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}[X' - Y']$, визначить, до якого соціально-економічного типу країн Україна ближче за структурою свого ВВП (за вартістю та зайнятістю населення).

Таблиця 2.11

Структура вартості й зайнятості при виробництві ВВП підрозділами економіки, у % (у чисельнику – структура вартості, у знаменнику – структура зайнятості)

Соціально-економічні типи країн	***Промисловість***	***Сільське господарство***	***Торгівля, транспорт, послуги***
Економічно розвинуті країни	35/35	5/5	60/60
Середньо розвинуті країни	35/40	15/10	50/50
Країни, що розвиваються, з низьким доходом	35/20	20/60	45/20
Україна	40/20	15/22	45/58

РОЗДІЛ 3. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ СВІТОГОСПОДАРСЬКИХ ЯВИЩ І ПРОЦЕСІВ

Ключові поняття: тіснота зв'язку, коефіцієнт кореляції, рівняння регресії, лінія регресії, нелінійна регресія, регресивний аналіз, факторний аналіз, кластерний аналіз

3.1. Методи одномірного аналізу

3.1.1. Кореляційний аналіз

Система світогосподарських зв’язків залежить від багатьох, часто маловідомих і мінливих факторів. Визначити і вивчити такі фактори допомагає *теорія кореляції* – центральний розділ математичної статистики, який присвячений аналізу зв’язків між різноманітними явищами та процесами, що відбуваються в природних і соціально-економічних системах.

У природі і господарській діяльності зв'язки відіграють надзвичайно важливу роль. Вони можуть мати функціональну та кореляційну залежність.

Функціональна залежність, як відомо з курсу математичного аналізу, припускає однозначну відповідність між величинами, коли одній величині, яка називається аргументом, точно відповідає визначене значення іншої величини – функції. При графічному зображенні функціонального зв'язку в прямокутній системі координат (X, Y), якщо по осі абсцис відкладати значення однієї ознаки, а по осі ординат – другої, усі точки розташуються на одній лінії (прямій або кривій). Такі зв’язки зустрічаються в абстрактних математичних узагальненнях. Наприклад, залежність площі кола (S) від радіуса (R) виразиться на графіку у вигляді кривої, побудованої за формулою $S = \pi R^2$, тобто параболою (рис. 1.2).

У практиці зовнішньоекономічної діяльності дослідник здебільшого доводиться матє справу не з функціональними зв'язками, а з *кореляційними*, для яких характерний певний розкид точок (рис. 2.2). Причина коливання полягає в тім, що в даному випадку функція (досліджуване явище) залежить не від одного, а від декількох факторів, що можуть діяти у різновекторних напрямках.

В основі теорії кореляції лежить уявлення про тісноту зв’язку між досліджуваними явищами, (великий або малий зв’язок).

Найбільш розповсюдженим показником тісноти зв'язку двох ознак (X, Y) вважається *коефіцієнт кореляції* (r). Абсолютна величина (r) знаходиться в межах від 0 до 1. Чим тісний зв’язок, тим більша абсолютна величина кореляції. Якщо r = 0, то зв’язку немає. Якщо він дорівнює +1 або -1, то зв’язок функціональний (точки в кореляційному полі в системі координат розташуються суворо по лінії). Знак "+" указує на пряму (позитивну) залежність, "-" – на зворотну (негативну). Граничні значення коефіцієнтів кореляції (r = +1, 0 і -1) у практиці світогосподарських зв’язків не зустрічаються; звичайно їхні величини знаходяться між нулем і позитивною або негативною одиницею.

Існує кілька схем обчислення коефіцієнтів кореляції. Розглянемо одну з них (яка звичайно застосовується при малому числі спостережень). В цьому разі використовується формула:

$$r = \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum \left| X - \overline{X} \right| \cdot \left| Y - \overline{Y} \right|}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}, \qquad (3.1)$$

де $\left| X - \overline{X} \right| \cdot \left| Y - \overline{Y} \right|$ – сума центральних відхилень;

n – число спостережень;

σ_X і σ_Y – середньоквадратичні відхилення X та Y, що обчислюються за формулою (2.6).

Припустимо, що необхідно знайти тісноту зв'язку між експортом й імпортом товарів України з країнами СНД.

Можна припустити, що експорт товарів пропорційний їхньому імпортові. Але яка ця пропорція, чи завжди вона однакова? Яка величина зв'язку між ними?

Запишемо статистичні дані про експорт (X) у 1-й стовпчик, а дані про імпорт (Y) – у 2-й стовпчик табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Розрахунок коефіцієнта кореляції між експортом й імпортом України в торгівлі товарами з країнами СНД

Країни	***Експорт, млн дол. (X)***	***Імпорт, млн дол. (Y)***	$\left\lvert X_i - \overline{X} \right\rvert$	$\left\lvert Y_i - \overline{Y} \right\rvert$	$\left\lvert X_i - \overline{X} \right\rvert \times \left\lvert Y_i - \overline{Y} \right\rvert$	$\left\lvert X_i - \overline{X} \right\rvert^2$	$\left\lvert Y_i - \overline{Y} \right\rvert^2$
Азербайджан	87,6	47,0	417,7	851,1	355504,5	174724	724201
Бєларусь	825,5	391,4	320,2	506,7	162245,3	102400	257049
Вірменія	10,7	8,1	494,6	890,0	440550	244036	792100
Грузія	49,4	7,7	455,9	890,4	405840	207936	792100
Казахстан	93,7	403,6	411,6	494,5	203536	168921	244036
Киргизстан	4,3	8,7	501,0	889,4	445389	251001	790321
Молдова	294,4	73,8	210,9	824,3	173864	44521	678976
Росія	3723,0	783,8	3217,7	6939,3	22330838	10355524	98163100
Таджикистан	84,5	2,5	420,8	895,6	376868,5	177241	802816
Туркменістан	270,2	972,3	235,1	74,2	17390	55225	5476
Узбекистан	114,1	126,4	391,2	771,7	301852	152881	595675
					25213878	11934410	53845250

Обчислюємо середні арифметичні $\overline{X}$ і $\overline{Y}$:

$$\overline{X} = \frac{5557,4}{11} = 505,29, \qquad \overline{Y} = \frac{9879,5}{11} = 898,14.$$

Потім знаходимо різниці між значеннями величин $\overline{X}$ і $\overline{Y}$. Результати заносимо в стовпчики 4 і 5 таблиці. Обчислення чисел у стовпчиках 6, 7 і 8 зрозуміло з написів над відповідними стовпчика. Під кожним стовпцем вираховуємо суми. Далі розраховуються середньоквадратичні відхилення:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{11934410}{10}} = 1092{,}4; \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{5384525}{10}} = 2320{,}5.$$

Коефіцієнт кореляції, тобто величина тісноти зв'язку між двома рядами чисел, що характеризують у нашому випадку експорт й імпорт, знаходимо за формулою (3.1):

$$r = \frac{\frac{1}{n} \cdot 25213878}{1092{,}4 \cdot 2320{,}5} = 0{,}9.$$

Отримана величина – 0,9. Це говорить про те, що зв'язок між двома розглянутими ознаками істотний. Тобто зовнішньоекономічні зв'язки України з країнами СНД у вигляді експортно-імпортних операцій – відносно збалансовані.

При великій кількості спостережень обчислення коефіцієнту кореляції можливе більш спрощеним методом за формулою:

$$r = \frac{\frac{\sum XY}{n} - \overline{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}, \qquad (3.2)$$

де $\overline{X} = \frac{\sum X}{n}, \overline{Y} = \frac{\sum Y}{n}$;

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - \overline{X}^2}; \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum Y^2}{n} - \overline{Y}^2}.$$

З теорії кореляції відомо, що якщо всі спостереження якої-небудь ознаки помножити або розділити на те саме число, то величина тісноти зв'язку не зміниться. Крім того, при обчисленні коефіцієнту кореляції не обов'язково оперувати з точними числами: вихідні дані можуть братися округлено до цілих, десятків, сотень і т. д., однак за неодмінної умови, що розмах коливання отриманих простих цілих чисел був би не менше 7-8 одиниць. Зазначені властивості кореляції можуть значно полегшити обчислення тісноти зв'язку між статистичними сукупностями, що досліджуються при заміні абсолютних значень їхніх елементів рангами (порядковими номерами).

Рангова кореляція. В зовнішньоекономічних дослідженнях, коли потрібно швидко обробити статистичні дані і відсутня обчислювальна техніка, розрахунок коефіцієнта кореляції значно прискорюється і спрощується, якщо дійсні величини ознак замінити їхніми рангами, тобто послідовним рядом простих чисел, починаючи з одиниці, у порядку зростання ознаки.

Наприклад, є дані про світові ціни на вугілля (*Y*) та ціни на природний газ (*X*) (табл. 3.2, стовпчики 2 і 3). Потрібно визначити, чи впливають світові ціни вугілля на ціни природного газу, тобто визначити тісноту зв'язку між цими явищами.

Заміняємо величини ознак їхніми рангами X’ і Y’ (стовпчики 4 і 5). Знаходимо різниці рангів (стовпчик 6), потім квадрати цих різниць (стовпчик 7).

Таблиця 3.2

Рік	***Ціна 1т вугілля*** (x)	***Ціна 1млн БТО газу*** (y)	x'	y'	$x'-y'$	$\lvert x'-y'\rvert^2$
1998	47,58	1,96	1	5	4	16
1999	35,74	2,16	4	4	0	0
2000	34,58	4,09	5	2	3	9
2001	37,96	4,11	3	1	2	4
2002	40,09	3,74	2	3	1	1

Ранговий коефіцієнт кореляції обчислюється за формулою:

$$r = 1 - \frac{6 \cdot \sum \lvert X'-Y'\rvert^2}{n^3 - n}\ , \qquad (3.3)$$

$$r = 1 - \frac{6 \cdot 30}{125 - 5} = 1 - \frac{180}{120} = -0{,}5\,.$$

Отримане значення коефіцієнту кореляції r= -0,5 дещо не збігається з його більш точним розрахунком (здійсненим, наприклад, за допомогою комп’ютерної програми – 0,53), але погрішність не дуже значна.

Висновок: значення коефіцієнта кореляції r= -0,5 вказує на те, що тіснота зв’язку між цінами на вугілля і природний газ на сучасному світовому ринку енергоносіїв практично відсутня. Мабуть, ціна на природний газ зумовлюється іншими факторами.

Економічні явища характеризуються наявністю галузевої та географічної структур. Через це нерідко за допомогою коефіцієнтів кореляції доводиться розраховувати тісноту зв’язків між ними не тільки в галузевому, але й у географічному, тобто просторовому, відношенні.

Припустимо, треба визначити тісноту зв’язку між унесенням у грунт мікроелементів і середньою врожайністю деякої ефірно-масляною культури на території якоїсь країни (рис. 3.1).

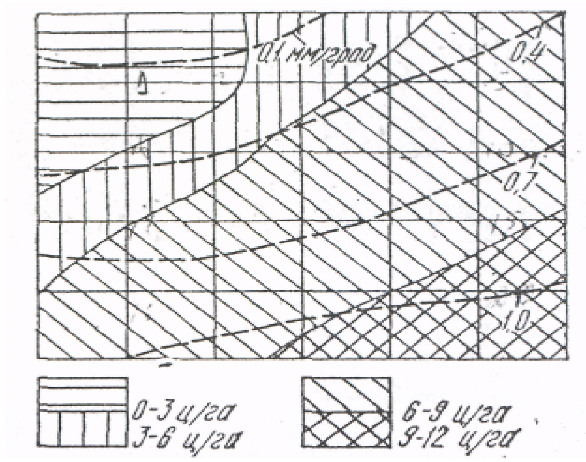


Рис. 3.1. Зв’язок між використанням мікроелементів (ізолінії) і врожайністю (фонова штриховка)

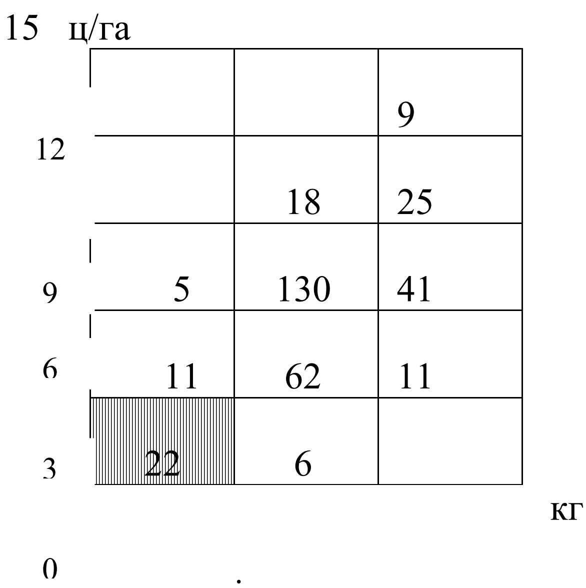
За допомогою фонового забарвлення (або нанесення штрихівки) через інтервал в 3 ц/га будуємо картограму врожайності сільськогосподарської культури. На неї ж через інтервал в 0,3 кг/град наносимо ізолінії унесенням у грунт мікроелементів.

Дослідження виконуємо з використанням систематичної вибірки, для чого накладаємо на карту країни дослідження мережу квадратів, у перетині ліній якої отримаємо контрольні точки. Контрольні точки в перетинах ліній умовно нумеруються. Перший номер належить найлівішій контрольній точці верхньої лінії мережі квадратів. Номери зростають зліва направо по умовних горизонтальних лініях і зверху вниз – по вертикальних.

Викреслюємо координатну мережу (кореляційні грати). Для цього будуємо вісі координат: відзначаємо на осі абсцис інтервали обсягів мікроелементів 0,1 - 0,4; 0,4 - 0,7; 0,7–1,0, а на осі ординат – інтервали врожайності 0–3; 3–6; 6–9; 9–12; 12–15. Одержуємо мережу клітинок, яку заповнюємо величинами *x* і *y*, визначеними в кожній контрольній точці в порядку зростання їхньої нумерації.

Припустимо, що в контрольній точці «1» кількісний показник врожайності входить в інтервал угрупування врожайності – 3 ц/га, а кількісний показник обсягів мікроелементів – в інтервал 0,1–0,4 кг/град. Знаходимо по осях координат потрібну клітину кореляційних грат (він для наочності заштрихований) і підраховуємо по карті у межах визначених інтервалів загальну кількість контрольних точок, наприклад 22. Таким же чином досліджується решта території району. Потім в кожній клітинці точки підраховуються, і записується їхнє загальне число.

Тепер на підставі даних координатних грат будуємо кореляційну таблицю.



Щоб полегшити розрахунки, інтервали угруповань по x і y підписуються в таблиці послідовним 0.1 м п] 0.4 х 0,7 (x_i 1.0 ком “+”, “-“ та з 0 для середнього інтервалу (табл. 3.3).

Таблиця 3.3

	x, мм/град	**–1**	**0**	**1**	**№ стовпчика**		
y, ц/га		**0,1-0,4**	**0,4-0,7**	**0,7-0,1**	l'	ly'	ly^{2}
2	12–15			18 9	9	18	36
1	9–12		18 18	25 25	43	43	43
0	6–9	0 5	0 130	0 41	176	0	0
–1	3–6	–11 11	–162 62	–11 11	84	–84	+84
–2	0–3	–44 22	–12 6		28	–56	112
№ рядка	1 h	38	216	86	340	–79	275
	2 hx'	–38	0	86	48		
	3 hx'^2	38	0	86	124		
	4 $\sum m\ y'$	–55	–56	32	–79		
	5 $x'\sum my'$	55	0	32	87		

У нашому прикладі – спрощені значення x_i : -1, 0, +1; y_j : -2, -1, 0 +1 +2.

Уводимо три графи обчислень по стовпчикам (l, ly', ly'^2) і п'ять – по рядках (h, hx', hx'^2, $\sum my'$, $x'\sum my'$). Далі за однією із формул розрахунку коефіцієнта кореляції находимо його значення.

$$r = \frac{n\sum_1^n x'y' - \sum_1^n x' \times \sum_1^n y'}{\sqrt{n \times \sum_1^n x'^2 - \left|\sum_1^n x'\right|^2} \times \sqrt{n\sum_1^n y'^2 - \left|\sum_1^n y'\right|^2}} \qquad (3.4),$$

де $\sum_1^n x'y'$ – сума по рядку 5;

$\sum_1^n x'$ – сума по рядку 2;

$\sum_1^n y'$ – сума по стовпчику 2;

$\sum_1^n x'^2$ – сума по рядку 3;

$\sum_1^n y'^2$ – сума по стовпчику 3;

n – число спостережень.

У нашому прикладі:

$$r = \frac{340 \times 87 - 48 \times (-79)}{\sqrt{340 \times 124 - 48^2} \times \sqrt{340 \times 275 - 79^2}} = 0{,}57\ .$$

Таким чином, за допомогою використання систематичної вибірки та безпосередньо картограми досліджуваних явищ нами за вищерозглянутою методикою розрахований коефіцієнт кореляції між парою явищ (між кількістю мікроелементів, що вноситься в грунт та врожайністю сільськогосподарської культури). Ця методика дозволяє встановити вплив того чи іншого чинника (економічного, політичного, соціального) на явища і процеси, що вивчаються у просторовому відношенні. У нашому прикладі величина коефіцієнту кореляції не значна. Відтак уплив мікроелементів на врожайність – незначний.

Слід зазначити, що при вибірковому методі розрахунок коефіцієнта кореляції може мати певні погрішності. Для визначення його надійності застосовується формула:

$$\sigma = (1-r^2) / \sqrt{n}\ .$$

Припустимі відхилення вибіркового r від істинного r_0 (тобто всієї сукупності чинників дослідження) визначається нерівністю:

$$r - 3\sigma < r_0 < r + 3\sigma\ .$$

Перевірка надійності r здійснюється шляхом розрахунку відхилення відношення $r/\sigma r$.

Якщо відношення $r/\sigma r > 3$, то коефіцієнт кореляції достовірно віддзеркалює залежності досліджуваних ознак. Якщо $r/\sigma r < 3$, то його значення має низьку репрезентативність.

У нашому випадку:

$$\sigma = (1-0{,}8^2) / \sqrt{5} = 0{,}16$$

$$r / \sigma = 0{,}8/0{,}16 > 4$$

Отже, отриманий нами коефіцієнт кореляції і зв'язок між досліджуваними ознаками достовірні.

Множинна кореляція. Як правило, у світогосподарських процесах дослідник повинен вивчати не одне-два явища, а значно більше. Тому постає проблема визначення ступеня сукупного впливу кількох чинників на досліджуване явище, тобто визначати множинну кореляцію.

У цьому випадку кореляційний аналіз звичайно починається з обчислення парних коефіцієнтів кореляції (R_{xy}), що виражають ступінь залежності досліджуваного явища (Y) від якого-небудь чинника (X) (наприклад, між експортом якихось товарів, з одного боку, і дією певних соціальних або економічних чинників – з другого). Наступний ступінь кореляційного аналізу полягає в обчисленні коефіцієнту множинної кореляції (R), що показує ступінь сукупного впливу найважливіших чинників (X_1, X_2,..., X_n) на явище (Y), що досліджується.

Розглянемо найпростіший приклад – обчислення ступеня сукупного впливу на споживання енергоресурсів (Y) – динаміки чисельності населення (X_1) і динаміки світового ВВП (X_2). Для цього спочатку визначимо коефіцієнти кореляції між трьома ознаками (Y, X_1 і X_2) попарно (табл. 3.4).

Таблиця 3.4

Показники	**1900**	**1950**	**1980**	**1990**	**2000**
Населення, млрд чол.	1,6	2,5	4,5	5,8	6,0
Світовий ВВП, млрд. дол.	2590	7555	27105	34575	48575
Річне споживання енергоресурсів, млрд. т у.п.	0,95	2,85	12,5	12,4	14,1

Припустимо, що в результаті виконаних розрахунків ми одержимо такі дані:

1. Коефіцієнт кореляції між динамікою світового споживання енергоресурсів (Y) і зростанням чисельності населення: (X_1) $R_{YX_1} = 0{,}97$.

2. Коефіцієнт кореляції між динамікою світового споживання енергоресурсів (Y) і зростанням світового ВВП (X_2): $R_{YX_2} = 0{,}95$.

3. Коефіцієнт кореляції між зростанням чисельності населення (X_1) і зростанням світового ВВП (X_2): $R_{X_1X_2} = 0{,}97$.

4. Коефіцієнт множинної кореляції, що виражає залежність досліджуваного явища, (споживання енергоресурсів) від сукупного впливу двох чинників (динаміки зростання чисельності населення та світового ВВП), обчислюється за формулою:

$$R = \sqrt{\frac{R^2YX_1 + R^2YX_2 - 2RYX_1 \cdot RYX_2 \cdot RX_1X_2}{1 - R^2X_1X_2}}. \quad (3.5)$$

У нашому випадку:

$$R = \sqrt{\frac{0{,}97^2 + 0{,}95^2 - 2 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}97}{1 - 0{,}97^2}} = \sqrt{0{,}9} = 0{,}95 .$$

Квадрат коефіцієнта множинної кореляції $R^2 = 0{,}9$ означає, що сукупний вплив двох факторів – динаміки чисельності населення та зростання обсягів світового ВВП – визначальний у збільшенні споживання енергоресурсів (90 %). На всі інші фактори, що можуть впливати на збільшення споживання енергоресурсів, припадає лише 10 %.

Коефіцієнт кореляції характеризує тісноту зв’язку між явищами, які зіставляються, але він не завжди дає відповіді про те, яке з них є фактором (тобто незалежною змінною, аргументом), а яке – результатом, тобто залежною змінною). Для відповіді на це питання застосовується регресивний аналіз.

3.1.2. Регресивний аналіз[4]

У математичному розумінні ***регресивний аналіз*** – метод, що дозволяє визначати форму відносин між випадковими величинами, а також установлювати закон розподілу значень однієї змінної від змін іншої (наприклад, попиту та пропозиції).

Форма відносин може бути змодельована у вигляді рівняння або лінії регресії.

Моделювання явищ зовнішньоекономічної діяльності за допомогою засобів регресивного аналізу дозволяє наочно демонструвати причинно-наслідкові зв’язки, які впливають на світогосподарські процеси. Як приклад можна розглянути явище в міжнародній торгівлі, що ґрунтується на законі порівняльних перевагах Д. Рікардо.

Завдяки сприятливим природно-кліматичним умовам Україна може вирощувати зерно, собівартість якого майже в 2 рази нижча його середньосвітової ціни (80 і 150 дол. США відповідно). У той же час собівартість нафти, що добувається, в Україні, приблизно на 14-15 % вища її ціни на світовому ринку.

За допомогою графіків цю ситуацію можна промоделювати таким чином (рис. 3.2-а, 3.2-б).

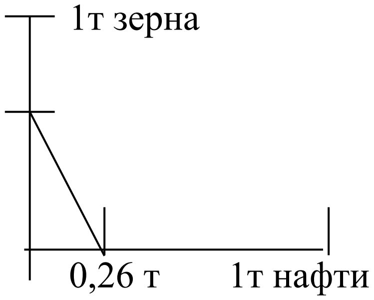


Рис. 3.2-а. Виробництво нафти та зерна на 100 дол. США в Україні

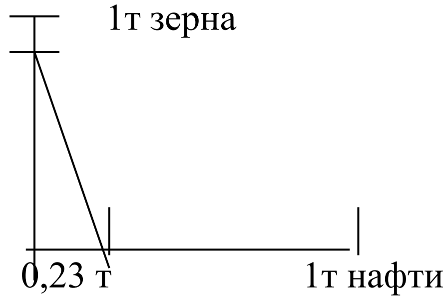


Рис. 3.2-б. Виробництво нафти та зерна на 100 дол. США у світі

4 Розділ укладений з використанням [9, с. 30-35].

Порівняльний аналіз наведених графіків свідчить про те, що Україна має певні переваги у виробництві зерна у розрахунку на 100 дол. США у порівняні з його світовими можливостями.

Якщо припустити, що Україна здатна виробляти щорічно 40-45 млн т зерна, з яких – 10 млн т буде експортувати, то вона має можливість одержувати дохід:

150 дол./т * 10 млн т = 1500 млн дол.

На цю суму країна може закупити на світовому ринку нафти:

1500 млн дол.: 380 дол./т = 3,94 млн т.

У випадку видобутку цієї кількості нафти в Україні їй би довелося зазнати витрат, які дорівнюють:

437 дол./т * 3,94 млн т = 1721,78 млн дол. Звідси випливає, що через посилення зернової спеціалізації країна в системі міжнародного поділу праці одержить чистий дохід:

1721,78 млн дол. – 1500 млн дол. = 221,78 млн дол.

Таким чином, завдяки зовнішній торгівлі відбувається своєрідний приріст споживання, який викликається двома чинниками: зміною структури виробництва й економічним ефектом від спеціалізації.

Перший чинник позначається при зміні структури світового попиту, що приводить до встановлення світових цін на новому проміжному рівні. Другий чинник дає виграш завдяки спеціалізації виробництва. Виходячи з дії названих чинників, при існуючому співвідношенні цін на світовому ринку на зерно і нафту випливає, що Україні економічно вигідніше сконцентрувати зусилля на виробництві зерна. На жаль, крім економічних, існують ще й інші фактори – геополітичні, соціальні, фінансові й ін., які змушують зменшувати енергетичну залежність країни від світових ринків і розробляти власні, відносно обмежені поклади нафти.

У залежності від того, який характер зв'язків існує між змінними, розрізняють два види регресій – лінійну і нелінійну.

Лінійна регресія описується класичним рівнянням:

$$У = px + в, \qquad (3.6)$$

де x і y – змінні, p і $в$ – параметри.

Для того щоб результати спостережень (значень) змінних x і y, що мають вірогідний характер розподілу значень, привести до закономірного (невипадковому) розподілу, необхідно підібрати відповідні параметри (їхнє абсолютне значення) p і $в$. При обчисленні параметрів використовується спосіб найменших квадратів. Завдання полягає в тім, щоб

$$\sum(Y_i - y_i) \to 0,$$

де Y_i – величина ординати (значення ординати), визначена за допомогою класичної функції (вираження) і відповідного визначеного значення змінної x;

y_i – спостережувальні (практичні) значення змінної *в*, що відповідають значенню змінної *X*.

Зведення різниці, точніше квадрата різниці теоретичних і практичних даних, до нуля може бути здійснено за допомогою параметрів, що відповідає їхньому підбору.

Таким чином,

$$\sum (Y_i - y_i)^2 = F(p, в).$$

Підставимо в це рівняння значення y_i, тобто класичної функції, й одержимо:

$$F(p, в) = \sum (px + в - y_i)^2. \qquad (3.7)$$

Візьмемо частки похідних по p і $в$, а потім вирішимо систему лінійних рівнянь і одержимо значення параметрів у загальному вигляді:

1. $p = \dfrac{n \cdot \sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n \cdot \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}.$

2. $b = \dfrac{\sum x^2 \cdot \sum y - \sum x \cdot \sum xy}{n \cdot \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}.$

x і y – експериментальні (практичні) дані по відповідних змінних.

Обчислені абсолютні значення параметрів p і $в$ потім підставляються в рівняння:

$$y = px + b.$$

Підставляємо значення змінної x й обчислюємо значення y. На основі отриманих результатів будується лінія регресії. Вона і буде віддзеркалювати форму залежності змінних x і y.

Приклад. У процесі дослідження зони збуту споживчих товарів у якійсь країні встановлено, що зростання збуту в провінційних містах моноцентричної системи залежить від центрального, найбільш великого міста і відстані до нього. Коефіцієнт кореляції між такими величинами, як обсяг споживання продукції у провінційних містах y, заданих у грошовому вимірі (тис. у.о.), і їх відстанню до головного міста (ринкового центру) x, заданих в км, складає $\tau = 0{,}68$.

Необхідно на основі даних з обсягів споживання в провінційних містах країни та їх відстанню до ринкового центру встановити форму відносин між цими величинами, тобто між x і y.

Для цього на основі експериментальних даних слід визначити параметри p і $в$ рівняння (3.6), а потім, підставляючи значення x в рівняння, здійснити розрахунок значення залежної змінної y.

На основі отриманих даних необхідно побудувати графік регресії (лінію регресії). Він і покаже характер відносини між досліджуваними змінними.

Для зручності обчислення параметрів складемо таблицю:

П	x_i	y_i	x_i^2	$x_i{*}y_i$
1	10	12,5	100	125
2	15	14,0	225	210

3	30	15,0	900	450
4	45	17,5	2025	787,5
5	50	22,5	2500	1125
	$\sum 150$	$\sum 81{,}5$	$\sum 5750$	$\sum 2697{,}5$

Отриманий результат підставимо у формули:

$$p = \frac{n \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2},$$

$$p = \frac{5 \cdot 2697{,}5 - 150 \cdot 81{,}5}{5 \cdot 5750 - (150)^2}.$$

Зробимо арифметичні обчислення й одержимо: $p = 1{,}96$. Потім обчислимо $в$ за формулою:

$$b = \frac{\sum x^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i \cdot y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2},$$

$$b = \frac{5750 \cdot 81{,}5 - 150 \cdot 2697{,}5}{5 \cdot 5750 - (150)^2}.$$

після обчислення одержимо $b = 10{,}24$.

Отримані абсолютні значення параметрів підставимо в рівняння:

$$y = 1{,}96x + 10{,}24.$$

Для побудови лінії регресії у вигляді прямої достатньо в рівняння регресії підставити 2 різні значення змінної x й одержати 2 значення змінної y. Нанесені на графік (систему координат) точки з'єднати лінією. Лінія регресії буде мати вигляд (див рис. 3.3).

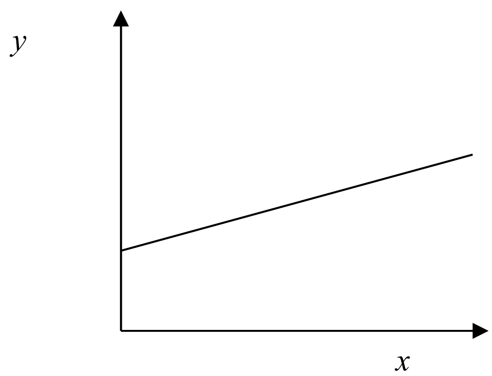


Рис. 3.3. Залежність попиту продукції у провінційних містах від їхньої відстані від ринкового центру

Ця лінія регресії має трохи спотворений вигляд, тому що масштаб y і x прийнятий як $1:8$.

Разом з тим вона правильно відбиває характер відносин – при збільшенні відстані від центрального міста (найбільшого міста в системі) можливості реалізації продукції в інших містах збільшуються.

Як приклад застосування регресивного аналізу з використанням комп'ютерних технологій можна розглянути динаміку міжнародної торгівлі ліцензіями та ноу-хау (табл. 3.5).

Таблиця 3.5

Міжнародна торгівля ліцензіями та ноу-хау (%)

Країна	***1970***	***1980***	***1990***	***2000***
США: – експорт – імпорт	70,8 6,8	66,5 6,4	56,7 6,1	47 8,9
Євросоюз: – експорт – імпорт	– 28,6 40	31 53,6	30,2 53	42,3 55,6
Японія: – експорт – імпорт	0,4 8	1,6 11,8	2,8 10,6	8 21,4
Країни, що розвиваються – експорт – імпорт	0,0 45,7	0,6 21,1	0,3 27,3	1,4 9,0

Задача задається послідовністю величин $y_1, y_2, \ldots, y_T$, де y_i – величина обсягів торгівлі (експорту й імпорту) ліцензіями і ноу-хау у відсотках у році *i*, при $i = 1, \ldots, T$. Рівняння регресії приймає виглд:

$$y = f(t) + \varepsilon, \qquad (3.8)$$

де $f(t)$ є функцією регресії (у нашому випадку трендом);

ε – випадкова величина з деяким законом розподілу.

Звичайно в розпорядженні дослідника є лише один набір величин $y_1, y_2, \ldots, y_T$... Тому треба розглядати не функцію регресії $f(t)$, а її оцінку – $f^{\circ}(t)$. У найпростішому випадку вона може бути лінійною і мати такий вигляд:

$$y = m \times t + b + e, \qquad (3.9)$$

де m, b – параметри лінійної регресії, e – помилка. Складову $m \times t + b$ називають лінійним трендом. Якщо підставити спостереження $y_1, y_2, \ldots, y_T$ у рівняння лінійної регресії, то одержимо систему виглду

$$y_i = m \times i + b + e_i,\ i = 1, 2, \ldots, T.... \qquad (3.10)$$

У цьому рівнянні оцінка m, b припускає таку інтерпретацію. Якщо t змінити на одиницю (рік), то величина y зміниться на m, тобто вона виступає як одиничний приріст (темп приросту).

Задача побудови лінійного тренда, таким чином, зводиться до пошуку параметрів m і b відповідно. Для рішення задачі можна використати метод найменших квадратів. Його сутність полягає в побудові таких оцінок параметрів m і b, при яких досягається мінімум суми квадратів помилок рівняння регресії:

$$\sum_{i=1}^{T} e_i^2 = \sum_{i=1}^{T} (y_i - i)^2 \to \min . \qquad (3.11)$$

Рішення можна одержати із системи нормальних рівнянь

$$\begin{cases} m \times T + b \times \sum_{i=1}^{T} i = \sum_{i=1}^{T} y_i \\ m \times \sum_{i=1}^{T} i + b \times \sum_{i=1}^{T} i^2 = \sum_{i=1}^{T} y_i \times i \end{cases} \qquad (3.12)$$

Застосування для рішення вищенаведених рівнянь стандартної комп'ютерної програми дозволяє отримати прямі лінійних регресій у вигляді їхніх трендів, які характеризують динаміку міжнародної торгівлі ліцензіями і ноу-хау з 1970 до 2000 року (рис. 3.4, 3.5, 3.6, 3.7).

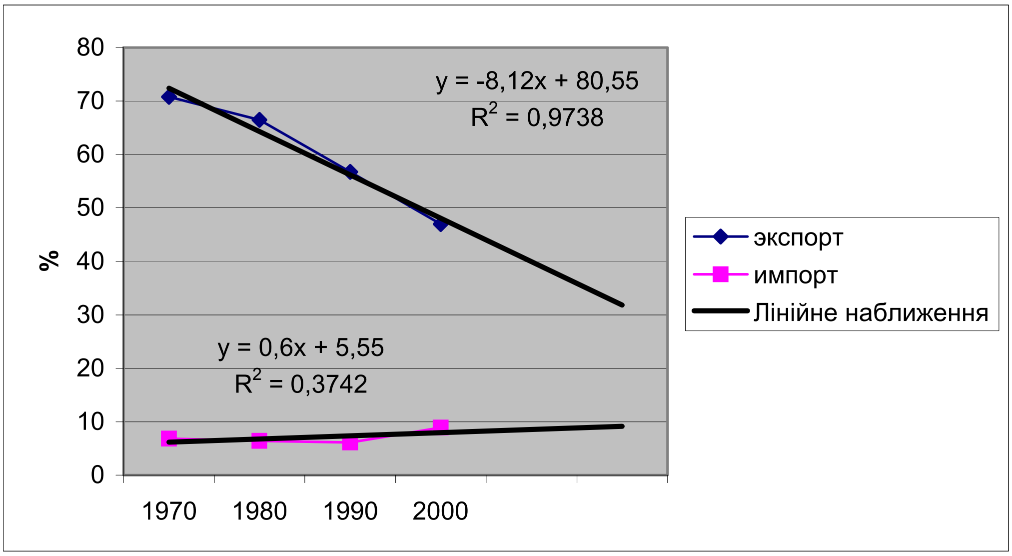


Рис. 3.4. Динаміка торгівлі ліцензіями та ноу-хау США (% від світової)

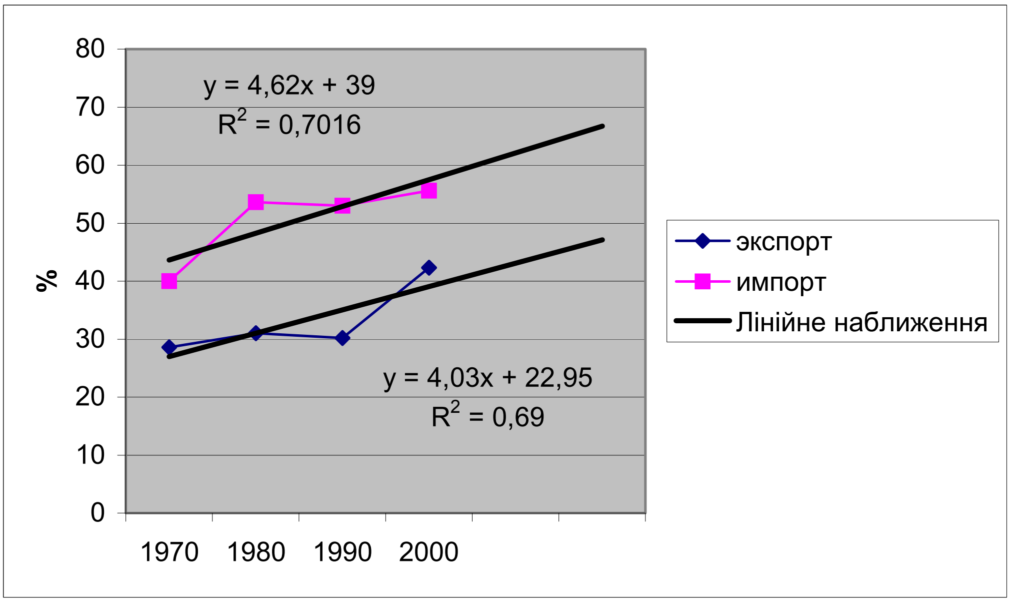


Рис. 3.5. Динаміка торгівлі ліцензіями та ноу-хау країнами ЄС (% від світової)

Результати здійсненого тренд-аналізу дозволяє з математичною точністю зіставляти тенденції в динаміці міжнародної торгівлі ліцензіями та ноу-хау різних країн світу. Їх аналіз дає можливість зробити такі висновки:

1. Експортна спрямованість ліцензійної торгівлі в США має історичний характер і віддзеркалює науково-технічний потенціал країни. (Сумарні витрати на НДДКР у США перевищують аналогічні витрати у Великобританії, Німеччині, Японії, Франції й Італії разом узятих. Держава бере на себе переважну частину витрат на проведення фундаментальних наукових досліджень.) Завдяки цьому експорт ліцензій та ноу-хау у неї перевищує імпорт. Однак регресивний аналіз вказує на поступове зниження частки експорту цієї країни в торгівлі ліцензіями і ноу-хау та зростання частки імпорту (рис. 3.4).

2. Країни Європейського Союзу характеризуються стійкою динамікою імпорту та експорту ліцензій і ноу-хау. Лінії регресії експорту та імпорту цієї продукції у країнах Євросоюзу майже паралельні. Але в останні роки намічається тенденція до зростання питомої ваги їхнього експорту (рис. 3.5).

3. Японія багато в чому в торгівлі ліцензіями та ноу-хау нагадує ЄС. Але динаміка імпорту в неї ще випереджає експорт. Слід зауважити, що ефективне використання країною іноземних патентів і ліцензій, їхнє негайне впровадження й освоєння мали дуже велике значення в створенні «японського економічного чуда». Сьогодні Японія є лідером у багатьох напрямках науково-технічного прогресу, однак вона все ще більше платить за іноземну технологію, ніж одержує за експорт своєї (рис. 3.6).

4. Регресивний аналіз тенденцій, які спостерігаються в торгівлі ліцензіями та ноу-хау країн, що розвиваються, указує на досить незадовільний стан в торгівлі даним видом продукції цими країнами. Відносно ноу-хау і прогресивних технологій вони значною мірою залежать від країн «центру» (США, Європейського Союзу, Японії). При цьому через відсутність коштів стрімко падає імпорт ліцензій і ноу-хау (рис. 3.7).

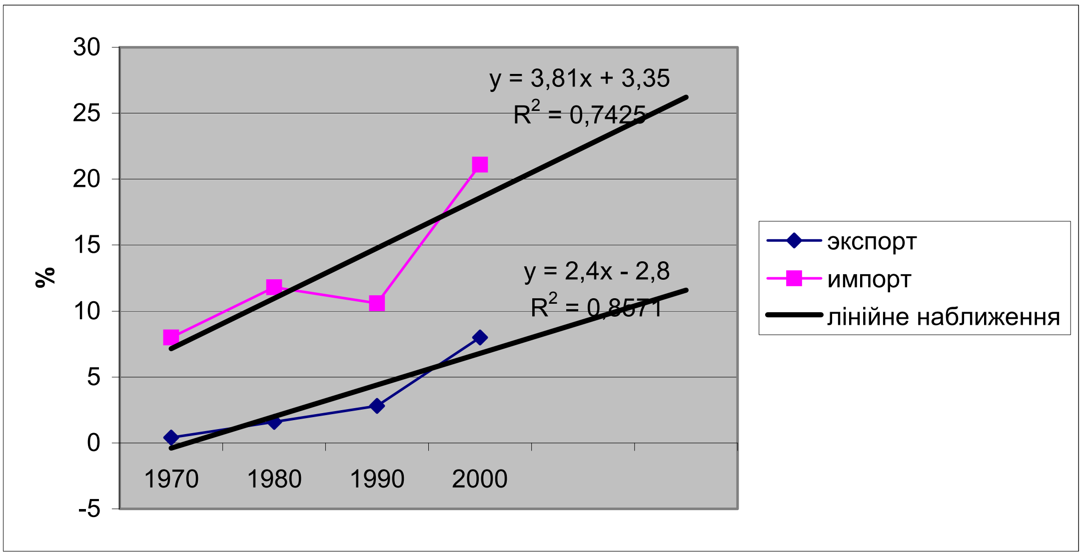


Рис. 3.6. Динаміка торгівлі ліцензіями та ноу-хау Японією (%)

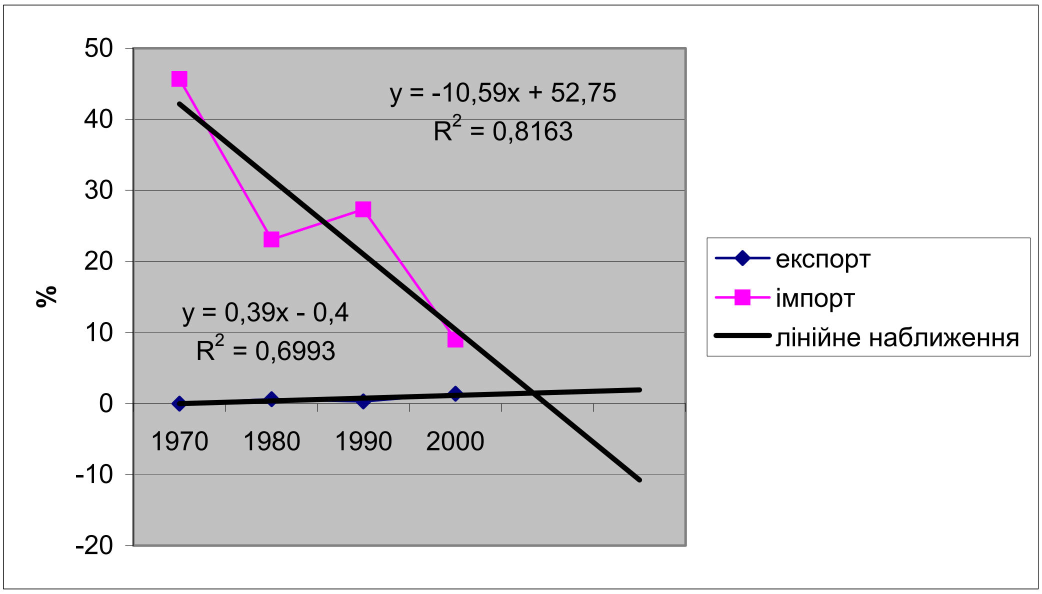


Рис. 3.7 Динаміка торгівлі ліцензіями та ноу-хау країн, що розвиваються (%)

У цілому на світовому ринку ліценцій та ноу-хау спостерігається зниження ролі провідної країни – США. На цьому тлі в географічній структурі торгівлі даним видом продукції зростає роль і значення питомої ваги країн Європейського Союзу та Японії. Стійку тенденцію до зниження питомої ваги у світовій торгівлі ліцензіями в умовах глобалізації мають країни, що розвиваються (рис. 3.8).

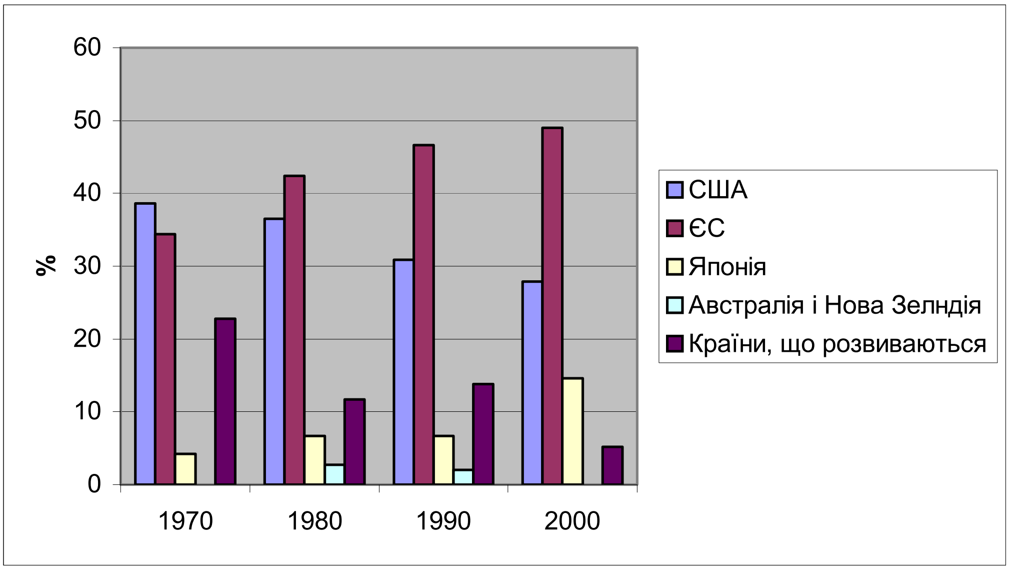


Рис.3.8. Географічна структура світової торгівлі ліцензіями та ноу-хау

Нелінійна регресія. Уже сама назва свідчить про те, що графік залежностей, які будуть досліджуватись, матиме нелінійну форму. Метод визначення форми відносин між двома змінними аналогічний попередньому. Однак для того, щоб його здійснити, спочатку необхідно визначити вид класичної функції, що відповідає дійсному характерові відносин досліджуваних змінних. Для цього на основі дослідних даних (інформації) необхідно побудувати графік. За його загальними обрисами розкиду точок можна встановити вид класичної функції.

Припустимо, що класична лінія регресії описується рівнянням:

$$У = Ax^2 + Bx + C. \qquad (3.13)$$

Задача полягає в тім, щоб обчислити абсолютні значення параметрів A, B і C. Для цього використовується спосіб найменших квадратів, і функція прийме вигляд:

$$F(A,B,C) = \sum \left(Ax^2 + Bx + C - y_i\right)^2. \qquad (3.14)$$

Диференціація рівняння по змінним (частки похідні) A, B, C дає систему лінійних рівнянь:

1. $\left(\sum x^4\right)\cdot A + \left(\sum x^3\right)\cdot B + \left(\sum x^2\right)\cdot C = \sum x^2 \cdot y$.
2. $\left(\sum x^3\right)\cdot A + \left(\sum x^2\right)\cdot B + \left(\sum x\right)\cdot C = \sum x \cdot y$.
3. $\left(\sum x^2\right)\cdot A + \left(\sum x\right)\cdot B + n \cdot C = \sum y$.

Вирішивши систему лінійних рівнянь будь-яким способом, одержимо невідомі A, B, C у загальному вигляді, тобто параметри, які шукали. Підставимо отримані дані в систему рівнянь й одержимо їхнє абсолютне значення. Останні підставимо в рівняння:

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Підставляючи значення змінної x, обчислимо значення змінної y. На основі отриманої інформації будуємо лінію регресії, що буде графічним відображенням форми відносин між змінними величинами.

3.2. Методи багатомірного аналізу

Кореляційний і регресивний аналіз моделюють залежності парних явищ. Але міжнародні відносини, особливо економічні, залежать від багатьох явищ та чинників. Їхнє моделювання можливе з використанням багатомірного аналізу.

Методичний апарат багатомірного аналізу – один із найкращих кількісних інструментів дослідження соціально-економічних процесів, які описуються великим числом характеристик. До них відносяться факторний аналіз, таксономія, розпізнавання образів, кластерний аналіз. Для моделювання і дослідження явищ, які відбуваються у світогосподарських процесах, особливо ефективним є використання факторного та кластерного аналізу.

Факторний аналіз найбільш яскраво віддзеркалює риси багатомірного аналізу в дослідженні зв'язків, кластерний – у класифікації.

3.2.1. Факторний аналіз

Задача факторного аналізу зводиться до визначення головних факторів, що впливають на певну кількість змінних, і оцінення сили впливу кожного з них на кожну змінну (факторне навантаження).

Рівняння факторного аналізу має вигляд:

$$a^n_p = \sum_{r=1} l_{pr} f_n + e_p,$$

де a_p – вихідні показники;

f_r – виокремлені головні фактора, які дають синтетичну оцінку досліджуваному явищу;

l_{pr} – вага кожному фактору в синтетичній оцінці;

e_p – залишок, що характеризує невраховані відхилення.

Факторний аналіз припускає існування таких зовнішніх причин (факторів), що одночасно впливають на множину змінних величин і тим самим створюють видимість наявності кореляційного зв'язку між ними. Зовнішні фактори стосовно сукупності змінних у світогосподарських процесах існують повсюдно. Тому як засіб пізнання факторний аналіз може широко використовуватися в аналізі зовнішньоекономічної діяльності.

Задача факторного аналізу полягає в тому, щоб визначити фактори, що впливають на певну кількість змінних, і визначити силу впливу кожного фактора на кожну змінну (факторне навантаження). Існують різні засоби рішення цієї задачі, але найбільш надійним є *центроїдний метод*.

Вихідними даними (інформацією) для рішення задачі центроїдним методом є парні коефіцієнти лінійної кореляції між змінними. Кількість коефіцієнтів кореляції визначається за формулою:

$$m = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad (3.15)$$

де m – кількість коефіцієнтів кореляції,

n – кількість змінних.

Множину коефіцієнтів кореляції необхідно представити у вигляді квадратної матриці. Тоді кількість елементів у матриці збільшиться на таке ж число коефіцієнтів, дзеркально зображених у матриці. До цього варто додати кількість коефіцієнтів кореляції змінних самих із собою. Загальна кількість елементів у матриці буде дорівнювати:

$$m = n(n-1) + n .$$

Матриця коефіцієнтів кореляції (кореляційна матриця), отримана за допомогою розрахунку на основі вірогідної інформації при чотирьох змінних, буде мати вигляд:

Змінні	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	$\sum r$
Z_1	I	r_{12}	r_{13}	r_{14}	
Z_2	r_{21}	I	r_{23}	r_{24}	
Z_3	r_{31}	r_{32}	I	r_{34}	
Z_4	r_{41}	r_{42}	r_{43}	I	

$\sum r$	$\sum Z_1$	$\sum Z_2$	$\sum Z_3$	$\sum Z_4$	$\sum\sum r_{zn} = T$
C_1	C_1Z_1	C_1Z_2	C_1Z_3	C_1Z_4	

Це повна кореляційна матриця. Однак використовувати її для обчислення факторних навантажень поки що не можна. Причиною цього є елементи головної діагоналі. Вони являють собою одиниці, а це значить, що при визначенні кореляції змінних самих із собою не виключена характерна дисперсія, тобто дисперсія, пов'язана з помилками і своїми власними факторами. Від них необхідно позбутися, залишивши при цьому тільки загальну дисперсію (спільність).

Існують різні способи здійснення цієї операції. Найбільш простий з них полягає в тому, що в кожнім стовпчику кореляційної матриці вибирається найбільший коефіцієнт кореляції і незалежно від знака ставиться замість одиниці (на головній діагоналі) зі знаком плюс. Після цього можна почати обчислення першого фактора і його навантажень на змінні, якщо всі знаки при r позитивні.

Для цього сумуються коефіцієнти кореляції по стовпчиках матриці і записуються в останньому рядку $\sum r$. Потім ці суми складаються і записуються в останньому стовпці $T = \sum\sum r_{zn}$.

Розрахунок факторних навантажень здійснюється за формулою:

$$C_1 Z_n = \frac{\sum r_{zn}}{\sqrt{T}}, \qquad (3.16)$$

де $C_1 Z_n$ – навантаження першого фактора на змінну Z_n. Це можуть бути змінні Z_1, Z_2,... Z_n і т. д.;

r_{Z_n} – сума коефіцієнтів кореляції по стовпчиках;

T – як уже зазначалося, це сума сум по стовпчиках, тобто сума всіх коефіцієнтів кореляції.

Обчислені навантаження першого фактора на всі змінні записуються в останньому рядку, позначеному C_1, відповідно під кожним стовпчиком.

Правильність виконаних розрахунків перевіряється за допомогою критеріїв:

1. $\sum C_1 = \sqrt{T}$.

2. $T \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} = \sqrt{T}$.

Визначаючи навантаження першого фактора на всі змінні, виділимо лише частину загальної дисперсії з коефіцієнтів кореляції, а саме ту частину, що пов'язана з впливом першого фактора на змінні. Однак цим (як правило) ще не вичерпується вся величина кореляцій. Якщо на змінні впливає не один, а кілька факторів, то будуть залишки кореляції. Їх необхідно визначити.

Для визначення факторних навантажень другого загального фактора необхідно обчислити матрицю первинних залишків кореляцій. Для цього обчислюються кореляції, пов'язані з першим загальним фактором, і отриману величину віднімають від коефіцієнтів кореляції вихідної кореляційної матриці. Обчислення здійснюється за формулою:

$$r_{ост} = r_{12} - \left(C_1 Z_1 \cdot C_1 Z_2\right), \qquad (3.17)$$

де r_{12} – коефіцієнт кореляції між змінними Z_1 і Z_2;

$C_1 Z_1$ – навантаження першого фактора на змінну Z_1;

$C_1 Z_2$ – навантаження першого фактора на змінну Z_2;

$r_{ост}$ – кореляція, тобто та величина, що залишається після виділення кореляції, пов'язаної з першим фактором.

Аналогічно обчислюються всі інші кореляції і записуються в матриці перших залишків відповідно до тих місць, що займали коефіцієнти кореляції вихідної матриці.

Тепер можна почати розрахунок навантажень другого загального фактора. Для цього сумуються залишки кореляцій по стовпчиках і записуються результати в останній рядок, позначений $\sum 0(\alpha, \beta, \gamma)$. Виявляється, що суми всіх залишків близькі до нуля, причому багато сум негативні.

Для розрахунку навантаження другого фактора необхідно мати позитивні суми, причому не нульові або близькі до них, а досить великі. Потрібно одержати такі суми по стовпчиках, що відповідали би сумі модулів залишкових кореляцій за коефіцієнтами. Тут необхідно використати процедуру звертання алгебраїчних знаків у матриці залишків.

Звертання знаків – трудомісткий процес, що вимагає великої уваги:

1. Розраховуються алгебраїчні суми елементів (залишкових кореляцій) по стовпчиках, опускаючи елементи головної діагоналі, і результат записується в рядок, що випливає за рядком $\sum 0$. Суму позначають $\sum r_o$. У нашому прикладі суми по стовпчиках позначені A, B, C.

Зміна знаків у матриці перших залишків

Змінні	Z_1`	$Z_2^Ж$	$Z_3^Ж$	$\sum 0$
Z_1`	r_{11}	r_{12}	r_{13}	
$Z_2^Ж$	r_{21}	r_{22}	r_{23}	
$Z_3^Ж$	r_{31}	r_{32}	r_{33}	
$\sum 0$	α	β	γ	
$\sum r_o$	*A*	*B*	*-C*	$\sum\sum r_0$
Стовпчик 3	$A+2*r_{31}$	$B+2*r_{32}$	*C*	*N*
Стовпчик 2	$(A+2*r_{31})$ $+2r_{21}$	$B+2*r_{32}$	$C+2*r_{23}$	
$\sum r$				

Складаються суми стовпчиків і їхній результат записується в останній клітинці рядка, позначеної $\sum\sum r_o$.

2. Береться стовпчик із найбільшою від'ємною сумою, і ця сума переноситься до наступного рядка з позитивним знаком. Припустимо, що в

нашому прикладі це буде стовпчик Z_3, сума якого позначена С. Цей рядок позначаємо номером стовпчика (стовпчик 3), а знаки його елементів змінюємо на протилежні. Одночасно відзначаємо зірочкою стовпчик і рядок, знаки яких змінюють на протилежні.

3. Усі елементи нового рядка (стовпчик 3) за, винятком уже визначеного (С в стовпчику 3) відшукуються в такий спосіб: до суми відповідного стовпчика (у нашому прикладі позначені А і В, а С уже визначений) додається з протилежним знаком подвоєне значення елемента того ж стовпчика, що знаходиться на перетині з рядком, що "трансформується" (у нашому прикладі $Z_3^Ж$ рядка). Остаточний результат записується в рядку "стовпчик 3". Формально це виглядає так: для визначення значення елемента, що знаходиться в рядку "стовпчик 3" і стовпчик Z_1, необхідно: $A+2*r_{31}$.

Розрахувавши всі елементи рядка «стовпчик 3», визначаємо їхню суму (у нашому прикладі позначеної через N) і записуємо в останній клітинці рядка. Це дає критерій для визначення правильності розрахунку. Сума повинна дорівнювати сумі попереднього рядка плюс чотириразова сума стовпчика, елементи якого змінили знак на протилежний.

$$N= \sum\sum r_o + 4C.$$

4. Далі відшукується наступний стовпчик з найбільшою від'ємною сумою. Це може бути рядок «стовпчик 2». Процес обчислення аналогічний попередньому, але при цьому використовуються підсумки стовпчиків, записаних у попередньому рядку.

У стовпчиках, елементи яких уже поміняли знаки (відзначені зірочкою), перед додаванням подвоєної величини знаки не міняються. Якщо процедура трансформації вимагає зміни знаків елементів якого-небудь стовпчика і відповідного рядка більше ніж один раз, то в цьому випадку при першому і всіх подальших непарних змінах знаків, знак подвоєного значення повинен мінятися. А при парних змінах – не міняється. Процес зміни знаків повторюється доти, поки всі суми не будуть позитивними (або нульовими).

Після визначення елементів кожного рядка необхідно перевірити правильність розрахунків зазначеним методом. Для цього міняються алгебраїчні знаки в матриці залишків. Це робиться так:

1) змінюються на протилежні знаки всіх коефіцієнтів у рядках, що трансформуються, за винятком тих, які знаходяться на перетині зі стовпчика, що трансформуються;

2) змінюються знаки в стовпчиках, що трансформуються, за винятком тих елементів, які стоять на перетині з рядками, що трансформуються.

Щоб розпочати розрахунки навантажень другого фактора, необхідно врахувати елементи головної діагоналі. Виключені при підсумовуванні залишків кореляції по стовпчиках ці елементи були розраховані шляхом множення факторних навантажень і вирахування результатів з елементів вихідної матриці.

Тепер їх потрібно замінити коефіцієнтами з максимальною для даного стовпчиках абсолютною величиною, приписуючи їм позитивний знак. Після цього нові значення елементів головної діагоналі додаються до підсумків стовпчик, і результат записується в рядку, позначеному $\sum r$.

Далі всі дії з розрахунків навантажень другого фактора аналогічні розрахункам навантажень першого фактора, включаючи і перевірки правильності розрахунків.

Після цього визначаються алгебраїчні знаки навантажень другого фактора за такими правилами:

1. Змінна, яка трансформувалась непарне число раз,в даній матриці залишків кореляції буде мати знак, протилежний її знаку при попередньому факторі.

2. Знак змінної, яка не трансформувалася або трансформувалася парне число раз, буде таким же, як і знак при попередньому факторі.

Потім розраховуються кореляції, що залишаються після виділення другого фактора. Процедура аналогічна, але потрібно звернути увагу на алгебраїчні знаки. Елементи першої матриці залишкових кореляцій зберігають ті знаки, які вони одержали по закінченні процедури зміни знаків.

При обчисленні добутків факторних навантажень знаки всіх факторних навантажень приймаються позитивними, що дає позитивні добутки. Ці позитивні добутки віднімаються із залишків кореляції, які були отримані після виділення першого фактора.

Розраховані величини записуються в матрицю других залишків кореляції. Після цього можна почати до розрахунок навантажень третього фактора. Процедура аналогічна попередньої. Припинити виділення факторів можна тоді, коли залишки кореляцій будуть досить малі (менше 0,01), тобто тоді, коли весь запас кореляцій буде вичерпаний.

Кінцевим результатом повинна стати матриця (факторна), складена за формою:

Змінні	***Фактори***		
	I	***II***	***III***
1	C_{11}	C_{12}	C_{13}
2	C_{21}	C_{22}	C_{23}
3	C_{31}	C_{32}	C_{33}
4	C_{41}	C_{42}	C_{43}
5	C_{51}	C_{52}	C_{53}
6	C_{61}	C_{62}	C_{63}

Перший набір факторних навантажень у факторному аналізі вважається вихідним або «сирим». Це зумовлено тим, що між факторною і кореляційною матрицями не існує твердого, визначального зв’язку. Зв’язок перемінної з фактором визначається як середній арифметичний зв’язок цієї змінної з іншими змінними. У свою чергу, коефіцієнти кореляції між змінними визначаються як суми добутків факторних навантажень на ці змінні одного або декількох факторів. Формула має вигляд:

$$r_{ав} = r_a C_1 \cdot r_в C_1 + r_a C_2 r_в C_2 + ... r_a C_n r_в C_n, \qquad (3.18)$$

де $r_{ав}$ – коефіцієнт кореляції між змінними *а* й *у*;

$r_a C_1$ – навантаження першого фактора на змінну *а*;

$r_в C_1$ – навантаження першого фактора на змінну *в*.

Із цього рівняння видно, що співмножники можуть пропорційно змінювати своє абсолютне значення в протилежні сторони *п* кількість разів і при цьому сума добутків залишається та ж. Отже, при тих самих коефіцієнтах кореляції між змінними можна одержати безліч значень факторних навантажень. Але насправді є тільки одне визначене значення факторних навантажень на змінну або змінні. Задача і полягає в тім, щоб виявити ці єдині значення.

Для цього застосовують *геометричну інтерпретацію даного явища* (рис. 3.9).

Фактори зображують як ортогональну систему координат, де кількість осей дорівнює кількості факторів. Довжину осей координат приймають за одиницю.

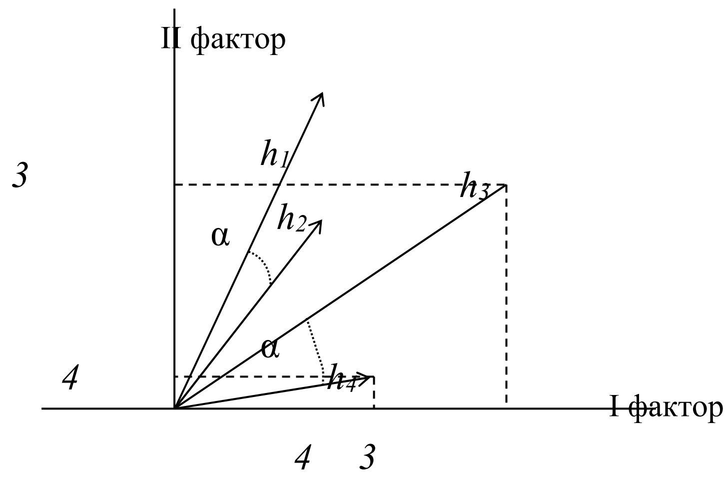


Рис. 3.9. Геометрична інтерпретація значень факторних навантажень

Змінні зображують векторами, з'єднаними між собою та системою координат у початковій точці відліку. Змінні між собою розташовуються під визначеним кутом α. Таке об'єднання векторів називають конфігурацією векторів. Довжина векторів змінних визначається величиною тієї загальної дисперсії або спільністю (h), що обумовлена зв'язком даної змінної з іншими. З'єднання системи координат і конфігурації векторів називається факторною структурою.

Коефіцієнти кореляції між змінними (h) можуть бути розраховані як:

$$r_{3,4} = h_3 \cdot h_4 \cdot \cos\alpha_{3,4},$$

тобто як скалярний добуток змінних на косинус кута між ними.

Факторні навантаження визначаються і розраховуються як проекції змінних (h_1, h_2, h_3, h_4) на осі координат, що являють собою загальні фактори.

Однак при геометричній інтерпретації факторної структури видно, що осі координат і конфігурація векторів не мають твердого й визначеного зв'язку. Тому можливі різні повороти координат навколо конфігурації векторів, а отже, можливий безліч наборів факторних навантажень, що являють собою проекції векторів на осі координат. При цьому, при будь-якому наборі факторних навантажень коефіцієнти кореляції залишаться тими самими.

Разом з тим, у першому наборі здійснюється головне – визнається кількість факторів і обчислюються факторні навантаження. Першого набору факторних навантажень досить часто буває достатньо для факторного аналізу. Однак для того, щоб переконатися в достатності, необхідно здійснити дуже ретельний аналіз кореляційної матриці.

Якщо коефіцієнти кореляції по абсолютній величині несуттєво відрізняються між собою (на соті частки), то це значить, що вплив факторів рівномірно розподілений на всі змінні і немає переважного впливу якихось певних факторів на ту або іншу групу змінних. У такому випадку достатньо першого набору факторних навантажень. Вони об’єктивно відбивають ситуацію. Але якщо виявиться, що між змінними або групами змінних існує слабкий кореляційний зв’язок, те це значить, що на різні групи впливають різні фактори.

У геометричній інтерпретації слабкий зв’язок між змінними або групами змінних свідчить про те, що кут або кути між змінними, вираженими векторами, досить великі. Тому коефіцієнти кореляції, виражені як скалярні добутки змінних на косинус кута, дають невеликий за значенням коефіцієнт кореляції.

$$r_{1,4} = h_1 \cdot h_4 \cdot \cos\alpha_{1,4}\,.$$

Графічно така конфігурація векторів у факторній структурі може мати вигляд:

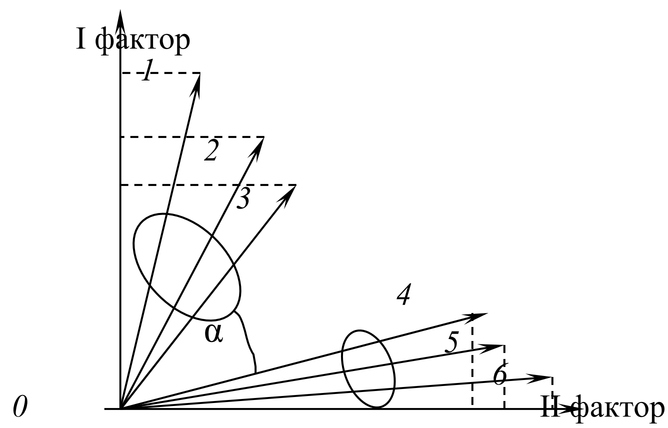


Рис. 3.10. Конфігурація векторів у факторній структурі

З рис. 3.10. видно, що на змінні 1, 2 і 3 впливає в основному перший фактор, а факторні навантаження другого фактора близькі до нуля, про що свідчать і проекції векторів на осі координат. На змінні 5, 4 і 6 впливає в основному другий фактор, а навантаження першого фактора близькі до нульового.

Графічний приклад свідчить про те, що не можна зупинятися на першому наборі факторів, тому що він може виявитися випадковим і не відповідає дійсності. Разом з тим існує якесь одне визначене положення системи координат щодо конфігурації векторів, що дає точний набір факторних навантажень. Для того, щоб визначити це положення, необхідно застосовувати процедуру обертання системи координат навколо конфігурації векторів. У принципі байдуже – розглядати обертання системи координат навколо конфігурації векторів або конфігурації векторів щодо системи координат, тому що вони закріплені в одному центрі і центр не можна зміщати. Тільки геометрична інтерпретація дає можливість визначити це єдине положення системи координат щодо конфігурації векторів і обчислити проекції векторів на осі координат, що і являє собою факторні навантаження.

Найбільш прийнятним способом визначення найкращого положення системи координат щодо конфігурації векторів є прагнення до простої структури.

Проста структура – це таке взаємне розміщення системи координат і конфігурації векторів, при якому досягається: з одного боку, максимальне число великих факторних навантажень, а другого – найбільше число нульових (або близьких до них) навантажень, що можливі для даної системи змінних. Протиріч у цьому немає. Якщо вектор наближається до однієї осі координат, то природно він віддаляється від другої осі. Це значить, що проекція (навантаження) одного фактора буде зростати (при наближенні до осі), а друга – зменшуватися.

Приступаючи до обертання системи координат навколо конфігурації векторів, переслідуємо дві задачі:

1. Визначити найкраще положення осей координат, що дає найбільш явну просту структуру.

2. Розрахувати нові проекції або факторні навантаження векторів на нові осі координат.

Рішення цих задач здійснюється двома послідовними методами (прийомами):

- геометрично інтерпретується факторна структура (ситуація);
- виконуються відповідні обчислення, що приводять до визначення нового положення системи і нових проекцій.

За допомогою геометричної інтерпретації графіка видні переміщення векторів – змінних щодо осей координат при їхньому обертанні, а це полегшує пошук простої структури. Однак точне визначення нових проекцій на пересуненні осі системи координат можна здійснити за допомогою алгебраїчних і тригонометричних обчислень.

Вихідною основою для виконання процедури обертання й обчислення навантажень є матриця перших факторних навантажень, яку позначають V_o.

Якщо вихідна факторна матриця представлена двома факторами, то в геометричній інтерпретації конфігурація векторів розміститься в двомірному просторі. Якщо матриця представлена трьома або n-кількістю факторів, то конфігурація векторів буде розташована в три- або n -мірному просторі.

Для здійснення обертання необхідно *n*-мірний простір розкласти на двомірні простори, відповідно до закону сполучення, і тільки після цього здійснювати почергове обертання системи координат навколо конфігурації векторів. Припустимо, що в результаті обчислення перших навантажень кореляційна матриця (кореляції) вичерпала себе при двох факторах і утворилась факторна матриця:

Фактори ***Змінні***	***I***	***II***
1	C_{11}	$-C_{12}$
2	C_{21}	$-C_{22}$
3	C_{31}	C_{32}
4	C_{41}	C_{42}

Отже, на чотири змінні впливають два фактори. Геометрична інтерпретація факторної структури одержала такий вигляд (див. рис. 3.11).

На графіку змінні зображені точками (їхні кінці), координати – суцільною лінією – вихідне положення, пунктирною – положення координат після повороту на 45° проти годинникової стрілки.

Уже при першому погляді на вихідну факторну структуру видно, що конфігурація векторів виражена двома пучками векторів. До одного віднесені змінні 3 і 4, розташовані в першій чверті, а до другого – 1 і 2, розташовані в другій чверті.

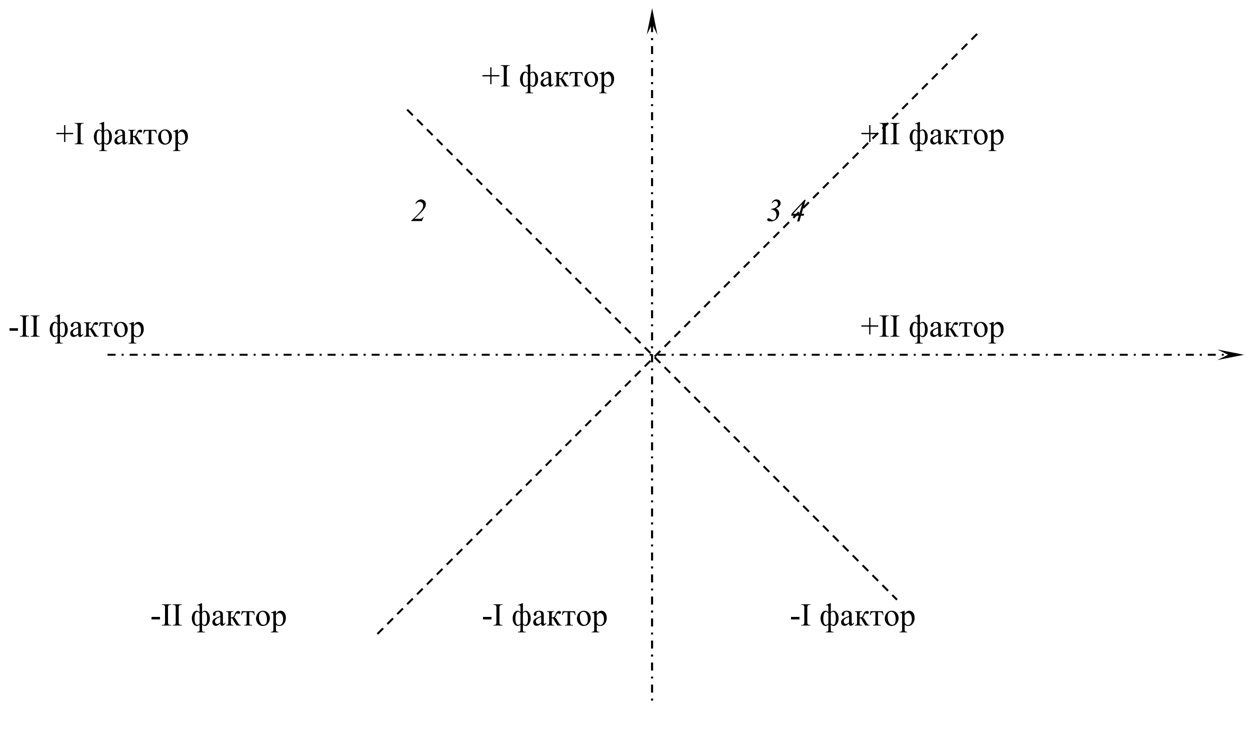


Рис. 3.11. Геометрична інтерпритація факторної структури

Кут між двома пучками приблизно дорівнює 90°, отже, вони дуже слабко пов’язані між собою. Видно, що на ці два пучки впливають в основному по одному фактору. Отже, для того, щоб одержати дійсні факторні навантаження, необхідно повернути систему координат так, щоб осі координат відповідно наблизилися до цих пучків векторів.

Найкраще положення, що відповідає простій структурі, досягається при обертанні системи координат на 45° проти годинникової стрілки.

При новому положенні системи координат видно, що на змінні 1 і 2 впливає перший фактор, а на 3 і 4 – другий.

Тепер необхідно розрахувати нові факторні навантаження. Вони і будуть тими, які вишукуються. Їх можна розрахувати шляхом визначення проекцій на відповідні осі координат. Однак точність буде наближеною. Але в три- і більшемірному просторі це зробити неможливо. Тому їх необхідно розраховувати алгебраїчно і тригонометрично.

Аналітичні розрахунки зводяться до наступного: збільшується матриця вихідних факторних навантажень V_o на матрицю трансформації. Отже, задача полягає в тім, щоб після повороту системи координат і знаючи кут повороту, визначити матрицю трансформації λ.

Матриця трансформації являє собою матрицю направляючих косинусів нових осей координат щодо їхнього вихідного положення. Стовпчики і рядки такої матриці будуть нормалізовані, тобто суми квадратів направляючих косинусів по рядках і стовпчиках будуть дорівнюють одиниці.

Якщо розглядати осі координат, що обертаються відносно свого вихідного положення як вектори, то відповідно до аналітичної геометрії їхнє положення в тривимірному просторі може бути визначено трьома кутами кожного, у двомірному – двома кутами. Кути можуть бути представлені їхніми косинусами, які визначають положення осей координат щодо свого вихідного положення (звідси їх назва – напрямні). Вони можуть утворити відповідну матрицю.

Якщо вихідні перпендикулярні осі координат позначити через C_1, C_2, а їхні нові положення після обертання – через C_1`, $C_2$`, то матриця направляючих косинусів λ буде мати загальний вигляд:

Змінні	***C₁`***	***C₂`***
C_1	C_1*C_1\`*x	C_1*C_2\`*x
C_2	C_2*C_1\`*x	C_2*C_2\`*x

де x – направляючі косинуси;

C_1*C_2` й інші – не добуток, а тільки вказівка, між якими векторами (змінними) визначається косинус.

Як уже зазначалося, для того щоб визначити нові факторні навантаження, точніше обчислити їх після повороту, необхідно помножити вихідну матрицю ($V_o x \lambda$) на матрицю трансформації, тобто:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & -C_{12} \\ C_{21} & -C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \\ C_{41} & C_{42} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \cdot C_1 \cdot C_1' & x \cdot C_1 \cdot C_2' \\ x \cdot C_2 \cdot C_1' & x \cdot C_1 \cdot C_2' \end{bmatrix}$$

Процедура розрахунку нових проекцій (фактор їхніх навантажень) відносно проста, складність – у визначенні направляючих косинусів.

Після виконання графічних процедур і визначення кута повороту необхідно розрахувати матрицю трансформації λ.

Починаючи обертання, потрібно насамперед скласти матрицю трансформації λ для вихідного положення системи координат. По суті, перша матриця λ ще не є тією, що трансформує, бо відтворює вихідне положення факторів особлива форма матриці λ. Вона будується з урахуванням таких міркувань: направляючий косинус для C_1 відносно C_1 дорівнює 1, тому що вісь C_1 сама із собою утворить кут, який дорівнює 0^0; направляючий косинус для C_1 відносно C_2 також складає 0^0, тому що кут між ними дорівнює 90^o. Також визначаються косинуси і при *n*-мірному просторі (кількість координат). Тоді матриця буде мати вигляд:

Перша матриця трансформації λ:

Змінні	***C_1***	***C_2***
C_1	*1,0*	*0*
C_2	*0*	*1,0*

Це матриця λ системи перпендикулярних осей координат щодо неї самої.

Якщо помножити цю матрицю на таку ж матрицю, то одержимо ту ж матрицю V_o, тому що обертання координат не здійснювалося.

Тепер розпочнемо до обчислення матриці після повороту, а поворот був виконаний на 45^o проти годинникової стрілки. Розрахунок нових направляючих косинусів здійснюється за формулою:

$$\left(C_1'\right) = \left(C_1\right) - \left(tg45^o\right) \cdot \left(C_2\right), \qquad (3.19)$$

де $\left(C_1'\right)$ – стовпчик направляючих косинусів для C_1 (дивися матрицю λ);

C_1 – величина факторного навантаження другого фактора;

$tg45^o$ або $tg\alpha$ – тангенс кута, на який повернули систему координат щодо її вихідного положення.

Аналогічно діють і при обчисленні направляючих косинусів кутів змінної C_1 з іншими осями. Але при цьому необхідно знати, що тангенс буде зі знаком «-», якщо змінна віддаляється при обертанні від іншої змінної, і буде зі знаком «+», якщо змінні зближаються в процесі повороту. Так, косинус для C_1 (див. матрицю λ) між змінними C_2 буде мати вигляд:

$$\left(C_2'\right) = \left(C_2\right) + \left(tg45^o\right) \cdot \left(C_1\right).$$

Отже, обчислюємо направляючі косинуси для першої осі, тобто для осі C_1 після її переміщення, а потім для другої *(C_2)*.

Для цього виконуються такі операції:

1. Переписуємо по горизонталі стовпчик косинусів для C_1 у першій матриці трансформації λ поруч з аналогічним стовпчиком для C_2.

2. Стовпчик C_2 множимо на $\left(-tg45^o\right)$, що складає –1, і результат додаємо до C_1.

$\left(C_2\right)=0$	1,0	$C_1=1{,}0$	0	0
$\left(-tg45^o\right)\cdot\left(C_2\right)=0$	-1,0	$\rightarrow\left(-tg45^o\right)\cdot\left(C_2\right)=0$	-1,0	0
		$-\left(tg45^o\right)\cdot\left(C_2\right)=$	-1,0	0

3. Нормалізуємо отримані направляючі косинуси з урахуванням того, що довжини осей дорівнюють 1, і тому квадрати направляючих косинусів повинні в сумі давати одиницю.

Нормалізація сукупності чисел полягає в зведенні кожного числа в квадрат, а також у розрахунку цих квадратів і діленні кожного числа на корінь квадратний із цієї суми. У випадку двох чисел *a* і *b* нормалізовані величини складуть:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

На конкретному прикладі:

$$-\frac{1}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}};\ \frac{-1}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}.$$

У нашому прикладі нормалізовані направляючі косинуси для C_1 складуть: 0,71 і –0,71.

4. Аналогічно обчислюються направляючі косинуси для осі C_2 з тією різницею, що тепер додаємо $\left(tg45^o\right)\cdot\left(C_1\right)$ до *(C_2)*, тому що вісь *(C_2)* рухається до осі (C_1). Як уже зазначалося, формула буде мати вигляд:

$$\left(C_1\right)=\left(C_2\right)+\left(tg45^o\right)\cdot\left(C_1\right).$$

Зробивши підстановку, одержимо:

$\left(C_2\right)=0$	1,0	0
$\left(tg45^o\right)\cdot\left(C_1\right)=1$	0	0
$C_2+\left(tg45^o\right)\cdot\left(C_1\right)=1{,}0$	1,0	0

5. Після нормалізації обчислених косинусів одержимо: 0,71; 0,71.

6. Складаємо з розрахованих стовпчик нову матрицю трансформації λ_1. Одержимо матрицю повернених факторів V_o. Тоді процедура перемножування буде мати вигляд:

	C_1	C_2			C_1	C_2			C_1	C_2
1	0,500	0,365	*	C_1	0,71	0,71	=	1	0,096	0,614
2	0,733	-0,118		C_2	-0,71	0,71		2	0,604	0,436
3	0,726	-0,095						3	0,582	0,448

4	0,717	-0,220		4	0,665	0,3533

Як бачимо, факторні навантаження трохи змінилися, але є підстава вважати, що вони відбивають дійсне відношення змінних і факторів.

Приклад. У процесі дослідження зовнішньоекономічної діяльності країни встановлено, що між такими величинами, як чисельність населення (Z_1), площа території (Z_2), ВВП (Z_3) і обсяг зовнішньої торгівлі (Z_4) існує певний зв'язок, про що свідчать дані кореляційної матриці.

Повна кореляційна матриця:

Змінні	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
Z_1	1	0,83	0,84	0,82
Z_2	0,83	1	0,85	0,86
Z_3	0,84	0,85	1	0,81
Z_4	0,82	0,86	0,81	1

Однак логічний аналіз показує, що ці величини не можуть впливати одна на одну. Отже, існує зовнішній фактор (або фактори цього ми поки не знаємо), що впливає на ці змінні. Причому впливає (або впливають) досить інтенсивно і, судячи з величини коефіцієнтів кореляції, досить рівномірно.

У зв’язку з цим виникне необхідність виявити ці фактори і визначити силу їхнього впливу на змінні, тобто виявити факторні навантаження.

Повна кореляційна матриця не може бути використана для обчислення факторних навантажень, тому що на її головній діагоналі знаходяться 1. Іншими словами, у коефіцієнтах кореляції змінних самих із собою не виключена характерна дисперсія.

Повну кореляційну матрицю необхідно редукувати. Редукування виконаємо в такий спосіб: замість одиниць підставимо найбільші коефіцієнти кореляції даного стовпчика, у якому розташована конкретна одиниця. Виконавши цю процедуру, одержимо скорочену кореляційну матрицю.

Скорочена кореляційна матриця:

Змінні	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	$\sum r$
Z_1	0,84	0,83	0,84	0,82	3,33
Z_2	0,83	0,86	0,85	0,86	3,40
Z_3	0,84	0,85	0,85	0,81	3,35
Z_4	0,82	0,86	0,81	0,86	3,35
$\sum r$	3,33	3,40	3,35	3,35	T=13,43
C_1	0,90	0,92	0,91	0,91	

Підсумовуємо коефіцієнти кореляції по стовпчиках скороченої матриці і результати записуємо в передостанньому рядку за назвою $\sum r$. Для контролю підсумовуємо коефіцієнти і по рядках. Потім підсумовуємо ці суми і записуємо в останній клітинці передостаннього рядка за назвою T. У нашому прикладі сума сум, тобто $T = 13,43$.

Для того щоб обчислити факторні навантаження, необхідно суми по стовпчиках розділити на $\sqrt{T}$. У нашому прикладі $\sqrt{T}$=3 ,67. Отже, навантаження фактора на Змінну Z_1 буде дорівнювати 3,33:3,67=0,90, на Z_2 – 3,40:3,67 = 0,92, на Z_3 - 3,35:3,67 = 0,91, на Z_4 – 3,35:3 ,67 = 0,91. Ці дані записуємо в останньому рядку скороченої кореляційної матриці за назвою C_1.

Далі необхідно перевірити правильність розрахунків. Розрахунок буде правильним, якщо $\sum C_1 = \sqrt{T}$. У нашому прикладі $\sqrt{T}$ = 3,67, а $\sum C_1$ = 3,64. Відхилення на 0,03 викликано тим, що обчислення факторних навантажень виконувалося з точністю до 0,01. Отже, помилок в обчисленні немає.

Таким чином, із сукупності кореляцій виділений один центроїдний фактор, загальний для всіх чотирьох змінних. Але визначаючи навантаження першого фактора, ми виділили із сукупності коефіцієнтів кореляції деяку частину загальної дисперсії, що може бути приписана впливові першого фактора. Тому далі повинен бути виконаний розрахунок нових коефіцієнтів кореляції, що виражають ту частину загальної дисперсії, що залишається і може бути віднесена на рахунок інших факторів, тобто розрахунок залишків кореляції.

Розрахунок залишків кореляції спирається на теорему, відповідно до якої кореляція двох змінних, викликана загальним для них фактором, дорівнює добуткові факторних навантажень. Отже, кореляція між змінними (до приклада) Z_1 і Z_2, обумовлена фактором C_1 і буде дорівнювати:

$r_{1Z2}=r_1C_1*r_2C_1,$

де r_{1Z2} – коефіцієнт кореляції між змінними Z_1 і Z_2 ,
r_1C_1 і r_2C_1, – факторні навантаження змінних Z_1 і Z_2.

Однак нас цікавлять залишкові кореляції, які ми може одержати, віднімаючи нові (або обчислені) коефіцієнти кореляції з коефіцієнтів кореляції вихідної скороченої кореляційної матриці. Виконаємо цей розрахунок.

Залишкові кореляції

2 r_{Z1Z1} = 0,84–(0,90*0,90) = 0,03
2 r_{Z1Z2} = 0,83–(0,92*0,90) = 0,00
2 r_{Z1Z3} = 0,84–(0,91*0,90) = 0,02
2 r_{Z1Z4} = 0,82–(0,91*0,90) = 0,00
2 r_{Z2Z2} = 0,86–(0,92*0,92) = 0,01
2 r_{Z2Z3} = 0,85–(0,92*0,91) = 0,01
2 r_{Z2Z4} = 0,85–(0,92*0,91) = 0,02
2 r_{Z3Z3} = 0,85–(0,91*0,91) = 0,02
2 r_{Z3Z4} = 0,81–(0,91*0,91) = -0,02
2 r_{4Z4} = 0,86–(0,91*0,91) = 0,03

Отримані розрахунки запишемо у вигляді матриці.

Матриця перших залишків кореляції

Змінні	**Z_1**	**Z_2**	**Z_3**	**Z_4**
Z_1	0,03	0,00	0,02	0,00
Z_2	0,00	0,01	0,01	0,02
Z_3	0,02	0,01	0,02	-0,02
Z_4	0,00	0,02	-0,02	0,03

Як видно, залишкові кореляції не перевищують 0,03. Причому і ця досить мала величина виникла через те, що розрахунок факторних навантажень виконувався з наближенням до 0,01. Отже, кореляції вичерпані. Таким чином, на досліджувану сукупність змінних впливає один фактор. Він і створює видимість зв'язку між ними, вираженому у вигляді коефіцієнтів кореляції.

Матриця факторних навантажень буде мати вигляд:

Змінні	**Фактори**
	1
Z_1	0,90
Z_2	0,92
Z_3	0,91
Z_4	0,91

Те, що на змінні впливає один фактор, виключає сумнів у точності або в дійсності визначених факторних навантажень. Разом з тим слід мати на увазі що: по-перш, саме на таке, а не на інше поєднання змінних впливає один фактор, а по-друге, не слід думати, що на ці змінні діє тільки він один. В іншому поєднаний або окремо на кожну змінну можуть впливати й інші фактори.

Аналізуючи логічним шляхом сукупність змінних, дійдемо висновку, що саме на таке поєднання може одночасно впливати тільки один загальний для них фактор і це є не що інше, як населення.

Отриманий результат може бути використаний для подальших заглиблених досліджень або висновків.

3.2.2. Кластерний аналіз

При аналізі та прогнозуванні соціально-економічних явищ, особливо при їхній класифікації, дослідник досить часто має справу з багатомірністю їхнього опису. Це відбувається, наприклад, при рішенні задач із сегментації ринку, при побудові типологічної схеми країн за умов необхідності використання досить великої кількості показників, при прогнозуванні кон'юнктури ринку окремих товарів, при вивченні й прогнозуванні економічної депресії і багатьох інших явищ.

Назва „кластерний аналіз” походить від англ. cluster – „гроно, об’єднання, скупчення”. Головне призначення кластерного аналізу – розбивка множини досліджуваних об'єктів і ознак на однорідні (у відповідному розумінні) групи або кластери. Це означає, що вирішується задача класифікації даних і визначення у неї відповідної структури. Методи кластерного аналізу можна застосовувати у всіляких випадках, навіть у тих, коли мова йде про просте групування, при якому все зводиться до утворення груп за кількісною ознакою (подібністю).

Перевага кластерного аналізу в тім, що він дозволяє робити розбивку об’єктів не за одним параметром, а відразу за цілим набором ознак. Крім того, кластерний аналіз на відміну від більшості математико-статистичних методів не накладає ніяких обмежень на вигляд об’єктів і дозволяє розглядати безліч вихідних даних практично довільної природи. Це має велике значення, наприклад, для прогнозування кон'юнктури, коли показники мають різноманітний вигляд, що утруднює застосування традиційних економетричних підходів.

Кластерний аналіз дозволяє розглядати досить великий обсяг інформації і різко скорочувати, стискати великі масиви соціально-економічної інформації, робити їх компактними і наочними.

Суттєве значення кластерний аналіз має для вивчення сукупностей часових рядів, що характеризують економічний розвиток (наприклад, загальногосподарської і товарної кон’юнктури). Тут можна виділяти періоди, коли значення відповідних показників були досить близькими, а також визначати групи часових рядів, динаміка яких найбільш схожа.

Кластерний аналіз можна використовувати циклічно. У цьому випадку дослідження здійснюються доти, поки не будуть досягнуті необхідні результати. При цьому кожен цикл тут може подавати інформацію, що здатна сильно змінити спрямованість і підходи подальшого застосування кластерного аналізу. Цей процес можна представити системою зі зворотним зв'язком.

У задачах соціально-економічного прогнозування досить перспективне поєднання кластерного аналізу з іншими кількісними методами (наприклад, з регресивним аналізом).

Як і будь-який інший метод, кластерний аналіз має певні недоліки й обмеження. Зокрема, склад та кількість кластерів залежить від вибраних критеріїв розбивки. При зведенні вихідного масиву даних до більш компактного вигляду можуть виникати певні перекручування, а також можуть губитися індивідуальні риси окремих об'єктів за рахунок заміни їхніми характеристиками узагальнених значень параметрів кластера. При проведенні класифікації об’єктів дуже часто ігнорується можливість відсутності в розглянутій сукупності яких-небудь значень кластерів.

У кластерному аналізі вважається, що:

а) вибрані характеристики у принципі допускають бажану розбивку на кластери;

б) одиниці виміру (масштаб) вибрані правильно.

Вибір масштабу відіграє велику роль. Як правило, дані нормалізують вирахуванням їх середнього значення і діленням на стандартне відхилення, так щоб дисперсія дорівнювала одиниці.

Задачі кластерного аналізу. Задача кластерного аналізу полягає в тім, щоб на підставі даних, наявних у множині X, розбити множину об'єктів G на m (m – ціле) кластерів (підмножин) Q1, Q2, …, Qm так, щоб кожен об’єкт Gj належав тільки одній підмножині розбивки і щоб об’єкти, що належать тому самому кластерові, були подібними, у той час як об’єкти, що належать різним кластерам, були різнорідними.

Наприклад, нехай G включає n країн, кожна з яких характеризується ВНП на душу населення (F_1), числом M автомашин на 1 тисячу чоловік (F_2), душовим споживанням електроенергії (F_3), душовим споживанням сталі (F_4) і т. д. Тоді X_1 (вектор вимірів) являє собою набір зазначених характеристик для першої країни, X_2 – для другої, X_3 для третьої і т. д. Задача зводиться до того, щоб розбити країни за рівнем розвитку.

Рішенням задачі кластерного аналізу є розбивки, що задовольняють деякому критерієві оптимальності. Цей критерій може бути деяким функціоналом, який виражає рівні бажаності різних розбивок і угруповань, що називають цільовою функцією. Як цільова функція може бути взята внутрішньогрупова сума квадратів відхилення:

$$W = \sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2,$$

де x_j –є виміром *j-го* об’єкта.

Для рішення задачі кластерного аналізу необхідно визначити поняття подібності й різнорідності.

Зрозуміло те, що об’єкти *ι-й* і *j-й* потрапляли б в один кластер, коли відстань (віддаленість) між точками $X_ι$ і X_j була б досить маленькою, і попадали б у різні кластери, коли ця відстань була б досить великою. Таким чином, залучення в один або різні кластери об'єктів визначається поняттям відстані між $X_ι$ і X_j з Ep, де Ep – p-мірний евклідів простір. Ненегативна функція $d(X_ι, X_j)$ називається функцією відстані (метрикою), якщо:

а) $d(X_i , X_j) \geq 0$ для всіх $X_ι$ і X_j з Ер;

б) $d(X_i, X_j) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $X_ι = X_j$;

в) $d(X_i, X_j) = d(X_j, X_ι)$;

г) $d(X_i, X_j) \leq d(X_i, X_k) + d(X_k, X_j)$, *де* X_j; X_i *і* X_k – будь-які три вектори з *Ер.*

Значення $d(X_i, X_j)$ для X_i і X_j називається відстанню між X_i і X_j і еквівалентно відстані між G_i і G_j відповідно обраним характеристикам $(F_1, F_2, F_3, ..., F_p)$.

Найчастіше часто вживаються такі функції відстаней:

1. Евклідова відстань $\quad d_2(X_i , X_j) = \left[\sum_{k=1}^{p}\left(x_{ki} - x_{kj}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

2. l_1-Норма $\quad d_1(X_i , X_j) = \left[\sum_{k=1}^{p}\left|x_{ki} - x_{kj}\right|\right]$

3. Сюпремум-норма $\quad d_\infty(X_i , X_j) = sup\left\{\left|x_{ki} - x_{kj}\right|\right\}$

$k = 1, 2, ..., p$

4. l_p-норма $\quad d_p(X_i , X_j) = \left[\sum_{k=1}^{p}\left|x_{ki} - x_{kj}\right|^p\right]^{1/p}$

Евклідова метрика є найбільш популярною. Метрика l_1 найбільш легка для обчислень. Сюпремум-норма легко розраховується і містить у собі процедуру упорядкування, *а* l_p-норма охоплює функції відстаней 1, 2, 3.

Нехай n вимірів $X_1, X_2,..., X_n$ представлені у вигляді матриці даних розміром $p \times n$:

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots x_{2n} \\ x_{p1} & x_{p2} & \ldots x_{pn} \end{pmatrix} = (X_1, X_2, ..., X_n)$$

Тоді відстань між парами векторів $d(X_\iota , X_j)$ може бути представлена у вигляді симетричної матриці відстаней:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & \ldots d_{1n} \\ d_{21} & 0 & \ldots d_{n} \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots 0 \end{pmatrix}$$

Поняттям, протилежним відстані, є поняття подібності між об'єктами G_ι. і G_j. Ненегативна речовинна функція $S(X_\iota ; X_j) = S_{\iota j}$ називається мірою подібності, якщо:

1) $0 \leq S(X_i , X_j) < 1$ для $X_\iota \neq X_j$;

2) $S(X_i , X_i) = 1$;

3) $S(X_i , X_j) = S(X_j , X_\iota)$.

Пари значень мір подібності можна об'єднати в матрицю подібності:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ s_{21} & 1 & \ldots & s_{2n} \\ s_{n1} & s_{n2} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Величину S_{ij} називають коефіцієнтом подібності.

Методи кластерного аналізу. Існує досить багато методів кластерного аналізу. Зупинимося на деяких з них (методи, наведені нижче, прийнято називати методами мінімальної дисперсії).

Нехай X – матриця спостережень: $X = (X_1, X_2,..., X_u)$, і квадрат евклідової відстані між X_ι і X_j визначається за формулою:

$$d_{ij}^2 = (X_i - X_j)^T (X_i - X_j).$$

1) Метод повних зв'язків. Суть методу в тім, що два об'єкти, які належать до однієї і тієї же групи (кластеру), мають коефіцієнт подібності, що менший деякого граничного значення S. У термінах евклідової відстані d це означає, що відстань між двома точками (об'єктами) кластера не повинна перевищувати деякого граничного значення h. Таким чином, h визначає максимально припустимий діаметр підмножини, яку утворить кластер.

2) Метод максимальної локальної відстані. Кожен об'єкт розглядається як одноточковий кластер. Об'єкти групуються за таким правилом: два кластери поєднуються, якщо максимальна відстань між точками одного кластера і точками другого мінімальна. Процедура складається з n-1 кроків і результатом є розбивки, що збігаються з усілякими розбивками в попередньому методі для будь-яких граничних значень.

3) Метод Ворда. У цьому методі як цільову функцію застосовують внутрішньогрупову суму квадратів відхилень, що є ні що інше, як сума квадратів відстаней між кожною точкою (об'єктом) і середньою по кластеру, що містить цей об'єкт. На кожнім кроці поєднуються такі два кластери, що приводять до мінімального збільшення цільової функції, тобто внутрішньо-групової суми квадратів. Цей метод спрямований на об'єднання близько розташованих кластерів.

4) Центроїдний метод. Відстань між двома кластерами визначається як евклідова відстань між центрами (середніми) цих кластерів:

$d^2_{ij} = (\bar{X} - \bar{Y})^T(\bar{X} - \bar{Y})$.

Кластеризація здійснюється поетапно. На кожнім з $n-1$ кроків поєднують два кластери G і π, що мають мінімальне значення d^2_{ij}. Якщо n_1 набагато більше n_2, то центри об'єднання двох кластерів є близькими один до одного і характеристики другого кластера при об'єднанні кластерів практично ігноруються. Іноді цей метод називають ще методом зважених груп.

Алгоритм послідовної кластеризації. Розглянемо $I = (I_1, I_2, \ldots I_n)$ як множину кластерів $\{I_1\}, \{I_2\}, \ldots \{I_n\}$.... Виберемо два з них, наприклад, I_ι і I_j, що в деякому значенні більш близькі один до одного, й об'єднаємо їх в один кластер. Нова множина кластерів, що складає вже з n-1 кластерів, буде:

$$\{I_1\}, \{I_2\} \ldots, \{I_\iota, I_j\}, \ldots, \{I_n\} \ldots$$

Повторюючи процес, одержимо послідовні множини кластерів, що складаються з $(n-2)$, $(n-3)$, $(n-4)$ і т. д. кластерів. Наприкінці процедури можна одержати кластер, що складається з n об'єктів і збігається з первісною множиною $I = (I_1, I_2, \ldots I_n)$....

Як міру відстані візьмемо квадрат евклідової метрики $d_{\iota j}^2$. і обчислимо матрицю

$$D = \{d_{ij}^2\},$$

де d_{ij}^2 – квадрат відстані між I_ι *і* I_j.

	I_1	I_2	I_3	….	I_n
I_1	0	d_{12}^2	d_{13}^2	….	d_{1n}^2
I_2		0	d_{23}^2	….	d_{2n}^2
I_3			0	….	d_{3n}^2
….				….	….
I_n					0

Нехай відстань між I_i і I_j буде мінімальною:

$$d_{\iota j}^2 = min\ \{d_{ij}^2,\ i \neq j\}.$$

Утворимо за допомогою I_i і I_j новий кластер $\{I_i, I_j\}$.

Побудуємо нову $((n-1), (n-1))$ матрицю відстані $(n-2)$ рядка для останньої матриці взяті з попередньої, а перший рядок обчислений заново. Обчислення можуть бути зведені до мінімуму, якщо вдасться виразити $d_{ij}^2{}_k, k = 1, 2, \ldots, n;$ $(k \neq i \neq j)$ через елементи первісної матриці.

	$\{I_i, I_j\}$	I_1	I_2	I_3	….	I_n
$\{I_i; I_j\}$	0	$d_{ij}^2{}_1$	$d_{ij}^2{}_2$	$d_{ij}^2{}_3$	….	$d_{ij}^2{}_n$
I_1		0	d_{12}^2	d_{13}	….	$d_1^2{}_n$

I_2	0	$d_{i\,j}{}^{2}{}_{1}$	….	d_{2n}
I_3		0	….	d_{3n}
I_n				0

Початково визначена відстань лише між одноелементними кластерами, але треба визначати відстані і між кластерами, що містять більше одного елемента. Це можна зробити різними способами, і в залежності від обраного способу ми одержуємо алгоритми кластер-аналізу з різними властивостями. Можна, наприклад, покласти відстань між кластером $i + j$ і деяким іншим кластером k, що дорівнює середньому арифметичному з відстаней між кластерами i та k і кластерами j та k:

$$d_{i+j,k} = ½\,(d_{i\,k} + d_{j\,k}).$$

Але можна також визначити $d_{i+j,k}$ як мінімальне із цих двох відстаней:

$$d_{i+j,k} = min\,(d_{i\,k} + d_{j\,k}).$$

Таким чином, описано перший крок роботи агломеративного ієрархічного алгоритму. Наступні кроки аналогічні.

Досить широкий клас алгоритмів може бути отриманий, якщо для перерахунку відстаней використовувати нтаку загальну формулу:

$$d_{i+j,k} = A(w)\,min(d_{ik}\,d_{jk}) + B(w)\,max(d_{ik}\,d_{jk}),\ \text{де}$$

$$A(w) = \frac{wn_i}{wn_i + n_j},\ якщо\ d_{ik} \le d_{jk};$$

$$A(w) = \frac{wn_j}{n_j + wn_i},\ якщо\ d_{ik} > d_{jk};$$

$$B(w) = \frac{n_i}{wn_i + n_j},\ якщо\ d_{\imath k} \le d_{jk};$$

$$B(w) = \frac{n_j}{wn_j + n_i},\ якщо\ d_{ik} > d_{jk}.$$

де n_i і n_j – число елементів у кластерах i та j, а w – вільний параметр, вибір якого визначає конкретний алгоритм. Наприклад, при $w = 1$ ми одержуємо так званий алгоритм «середнього зв'язку», для якого формула перерахунку відстаней приймає вигляд:

$$d_{i+j,k} = \frac{n_i}{n_i + n_j} d_{ik} + \frac{n_j}{n_i + n_j} d_{jk}\,.$$

У даному випадку відстань між двома кластерами на кожнім кроці роботи алгоритму визначається рівним середньому арифметичному з відстаней між усіма такими парами елементів. При цьому один елемент пари буде належати до одного кластера, а другий – до іншого.

Наочний зміст параметра w стає зрозумілим, якщо покласти $w \to \infty$. Формула перерахування відстаней приймає вигляд:

$$d_{i+j,k} = min\,(d_{\imath,k}\,d_{jk})$$

Це буде так званий алгоритм «найближчого сусіда», що дозволяє виділяти кластери будь-якої складної форми за умови, що різні частини таких кластерів з'єднані ланцюжками близьких один до одного елементів. У цьому випадку відстань між двома кластерами на кожнім кроці роботи алгоритму виявляється рівною відстані між двома найближчими елементами, що належать до цих двох кластерів.

Досить часто припускають, що первісні відстані (розходження) між групованими елементами задані. У деяких задачах це дійсно так. Однак задаються тільки об'єкти та їхні характеристики, і матрицю відстаней будують, виходячи із цих даних. У залежності від того, чи обчислюються відстані між об'єктами або між характеристиками об'єктів, використовуються різні способи.

У випадку кластер-аналізу об’єктів найчастіше часто мірою розходження служить або квадрат евклідової відстані

$$d_{ij}^2 = \sum_{h=1}^{m} \left(x_{ih} - x_{jh}\right)^2$$

(де x_{ih}, x_{jh} – значення *h-ї* ознаки для *i-го* та *j-го* об'єктів, а m - число характеристик), або сама евклідова відстань. Якщо ознакам приписується різна вага, то цю вагу можна врахувати при обчисленні відстані

$$\delta_{ij}^2 = \sum_{h=1}^{m} w_h \left(x_{ih} - x_{jh}\right)^2 .$$

Іноді як міру розходження використовують відстань, що обчислюється за формулою:

$$\Delta_{ij} = \sum_{h=1}^{m} \left| x_{ih} - x_{jh} \right| ,$$

яку називають "хеммінговою", "манхеттенською" або "сіті-блок" – відстанню.

Природною мірою подібності характеристик об’єктів у багатьох задачах є коефіцієнт кореляції між ними:

$$r_{ij} = 1/n \frac{\sum_{h=1}^{N} \left(x_{hi} - m_i\right)\left(x_{hj} - m_j\right)}{\delta_i \delta_j} ,$$

де m_i, m_j, δ_i, δ_j – відповідно середні і середньоквадратичні відхилення для характеристик i і j, n – кількість спостережень. Мірою розходження між характеристиками може служити величина $-r$. У деяких задачах знак коефіцієнта кореляції несуттєвий і залежить лише від вибору одиниці виміру. У цьому випадку як міру розходження між характеристиками використовується $| 1 - r_{ij} |$.

Число кластерів. Дуже важливим питанням є проблема вибору необхідного числа кластерів. Іноді можна m число кластерів вибирати апріорно. Однак у загальному випадку це число визначається в процесі розбивки множини на кластери.

Дослідженнями Фортьєра та Соломона встановлено, що число кластерів повинно бути прийняте для досягнення ймовірності α того, що знайдено найкращу розбивку. Таким чином, оптимальне число розбивок є функцією заданої частки β найкращих або в деякому змісті припустимих розбивок у множині всіх можливих. Загальне розсіювання буде тим більше, чим вища частка β припустимих розбивок. Фортьєр і Соломон розробили таблицю, за якою можна знайти число необхідних розбивок. $S(\alpha, \beta)$ у залежності від α і β (де α – ймовірність того, що знайдено найкращу розбивку, β – частка найкращих розбивок у загальному числі розбивок). Причому як міра різнорідності використовується не міра розсіювання, а міра приналежності, уведена Хользенгером і Харманом (табл. 3.6).

Таблиця 3.6

Значення $S(\alpha, \beta)$ за Хользенгером і Харманом

β \ α	0,20	0,10	0,05	0,01	0,001	0,0001
0,20	8	11	14	21	31	42
0,10	16	22	29	44	66	88
0,05	32	45	59	90	135	180
0,01	161	230	299	459	689	918
0,001	1626	2326	3026	4652	6977	9303
0,0001	17475	25000	32526	55000	75000	100000

Досить часто критерієм об'єднання (числа кластерів) стає зміна відповідної функції. Наприклад, суми квадратів відхилень:

$$E_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} r_{ij}\right)^2$$

Процесу групування тут повинно відповідати послідовне мінімальне зростання значення критерію E. Наявність різкого стрибка в значенні E можна інтерпретувати як характеристику числа кластерів, що об'єктивно існують у досліджуваній сукупності.

Отже, другий спосіб визначення найкращого числа кластерів зводиться до виявлення стрибків, обумовлених фазовим переходом від сильно зв'язаного до слабко зв'язаного стану об'єктів.

Дендрограми. Найбільш відомий метод представлення матриці відстаней або подібності заснований на ідеї дендрограми або діаграми дерева. Дендрограму можна визначити як графічне зображення результатів процесу послідовної кластеризації, що здійснюється в матриці відстаней. За допомогою дендрограми можна графічно або геометрично зобразити процедуру кластеризації за умови, що ця процедура оперує тільки з елементами матриці відстаней або подібності.

Існує багато способів побудови дендрограм. У дендрограмі об'єкти розташовуються вертикально ліворуч, результати кластеризації – праворуч. Значення відстаней або подібності, що відповідають будові нових кластерів, зображуються по горизонтальній прямій поверх дендрограм (рис. 3.13).

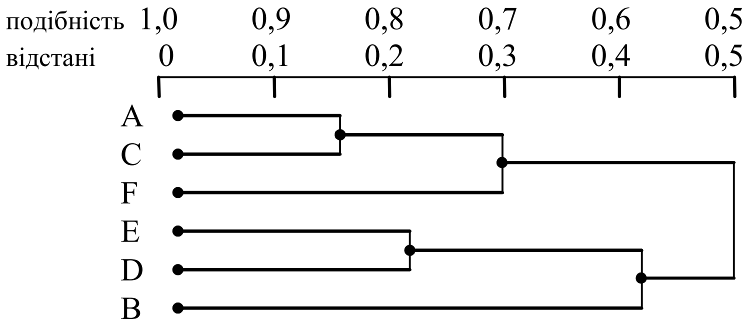


Рис. 3.13. Дендрограма

На рис. 3.11. показаний один із прикладів дендрограми. Він відповідає випадку шести об’єктів *(n=6)* і *k* характеристик (ознак). Об'єкти *A* та *C* найбільш близькі і тому об’єднуються в один кластер на рівні близькості, що дорівнює 0,9. Об'єкти *D* і *E* поєднуються на рівні 0,8. Тепер маємо 4 кластери:

(A, C), (F), (D, E), (B).

Далі утворяться кластери *(A, C, F*) і *(E, D, B)*, що відповідають рівневі близькості, що дорівнюють 0,7 і 0,6. Остаточно всі об'єкти групуються в один кластер за значення подібності 0,5.

Вид дендрограми залежить від вибору міри подібності або відстані між об’єктом і кластером та методу кластеризації. Найбільш важливим моментом є вибір міри подібності або міри відстані між об’єктом і кластером.

Число алгоритмів кластерного аналізу занадто велике. Усі їх можна поділити на ієрархічні та неієрархічні.

Ієрархічні алгоритми пов’язані з побудовою дендрограм і поділяються на:

а) агломеративні, що характеризуються послідовним об’єднанням вихідних елементів і відповідним зменшенням числа кластерів;

б) ділені, у яких число кластерів зростає, починаючи з одного, у результаті чого утвориться послідовність груп, які розщеплюють.

Алгоритми кластерного аналізу мають гарну програмну реалізацію для використання комп’ютерних технологій, що дозволяє вирішувати задачі з надвеликими розмірностями.

Розглянемо деякі приклади здійснення кластерного аналізу.

1. *Розподіл країн на групи за рівнем соціально-економічного розвитку*.

Припустимо, що вивчаються 65 країн за 31-м показником (національний доход на душу населення, частка населення зайнятого в промисловості в %, накопичення на душу населення, частка населення, зайнятого в сільському господарстві в %, середня тривалість життя, число автомашин на 1 тис. жителів, чисельність збройних сил на 1 млн. жителів, частка ВВП промисловості в %, частка ВВП сільського господарства в % і т. ін.).

Кожна з країн виступає в даному розгляді як об'єкт, що характеризується певними значеннями 31 показника. Відповідно вони можуть бути представлені як крапки в 31-мірному просторі. Такий простір звичайно називається простором властивостей досліджуваних об’єктів. Порівняння відстані між цими точками буде відбивати ступінь близькості розглянутих країн, їхню подібність один з одним. Соціально-економічний зміст подібного розуміння подібності означає, що країни вважаються тим більше схожими, чим менше розходження між однойменними показниками, за допомогою яких вони описуються.

Перший крок подібного аналізу полягає у визначенні пари національних господарств, урахованих у матриці подібності, відстань між якиминайменша. Це, мабуть, будуть країни, які найбільш подібні за показниками національних економік. У наступному розгляді обидві ці країни вважаються єдиною групою, єдиним кластером. Відповідно вихідна матриця перетвориться так, що її елементами стають відстані між усіма можливими парами вже не 65, а з 64 об’єктами (кластер + 63 національні економіки). Аналогічним чином здійснюється кластеризація інших країн. З вихідної матриці подібності викидаються рядки і стовпчики, що відповідають відстаням від пари країн, що ввійшли в об’єднання, до всіх інших, проте додаються рядок і стовпчик, що містять відстань між кластером, отриманим при об'єднанні й інших країнах.

Відстань між знову отриманим кластером і країнами покладається рівною середньому з відстаней між останніми і двома країнами, що складають новий кластер. Іншими словами, об’єднана група країн розглядається як ціле з характеристиками, що приблизно дорівнюють середнім показникам національних економік країн, які до неї входять.

Другий крок аналізу полягає в розгляді перетвореної таким шляхом матриці з 64 рядками і стовпчиками. Знову визначається пара економік, відстань між якими має найменше значення, і вони, так само як у першому випадку, зводяться воєдино. При цьому найменша відстань може виявитися як між парою країн, так і між якою-небудь країною та об’єднанням країн, отриманим на попередньому етапі.

Подальші процедури аналогічні описаними вище: на кожнім етапі матриця перетворюється так, що з неї виключаються два стовпчики і два рядки, що містять відстань до об’єктів (пара країн або об’єднань – кластерів), зведених воєдино на попередній стадії; виключені рядки і стовпчики заміняються стовпчиком і рядком, що містять відстані від нових об’єднань до інших об’єктів; далі в зміненій матриці визначається нова пара найбільш близьких об’єктів. Аналіз продовжується до повного вичерпання матриці (тобто доти, поки всі країни не виявляться зведеними в одне ціле). Узагальнені результати аналізу матриці можна представити у вигляді дерева подібності (дендрограми), подібно до описаного вище, з тією лише різницею, що дерево подібності, яке відбиває відносну близькість усіх розглянутих нами 65 країн, багато складніше схеми, у якій фігурує тільки п’ять народних господарств. Це дерево відповідно до числа зіставлюваних об’єктів включає 65 рівнів. Перший (нижній) рівень містить точки, що відповідають кожній країні окремо. З’єднання двох цих точок на другому рівні показує пари країн, найбільш близьких за загальними рисами національних господарств. На третьому рівні відзначається наступне за подібністю парне співвідношення країн (як уже згадувалося, у такому співвідношенні може перебувати або нова пара країн, або нова країна і уже виявлена пара подібних країн). І так далі до останнього рівня, на якому всі досліджувані країни виступають як єдина сукупність.

У результаті застосування кластерного аналізу були отримані таких п'ять груп країн:

- афро-азійська група;
- латино-азійська група;
- латино-середземноморська група;
- група розвинутих капіталістичних країн (без США);
- США.

Уведення додаткових показників (індикаторів) або заміна їх іншими, природно, призводять до зміни результатів класифікації країн.

2. *Розподіл країн за критерієм близькості культури*.

Як відомо, міжнародний маркетинг, що відіграє значну роль у торговельно-економічних зв'язках, повиннен ураховувати не тільки соціально-економічні рівні розвитку країн, але і їхню культуру (звичаї, традиції і т. ін.).

За допомогою кластеризації були отримані такі групи країн:

- арабські;
- близькосхідні;
- скандинавські;
- германомовні;
- англомовні;
- романські європейські;
- латиноамериканські;
- далекосхідні.

3. *Розробка прогнозу кон'юнктури ринку цинку.*

Кластерний аналіз відіграє важливу роль на етапі редукції економіко-математичної моделі товарної кон'юнктури, що полегшує і спрощує здійснення обчислювальних процедур, сприяє забезпеченню більшої компактності результатів, які отримуються при одночасному збереженні необхідної точності. Його застосування дає можливість розбити всю вихідну сукупність показників ринкової кон'юнктури на групи (кластери) за відповідними критеріями, полегшуючи тим самим вибір найбільш репрезентативних показників при її моделюванні та прогнозуванні.

Наприклад, поставлена задача з розробки прогнозу кон'юнктури ринку цинку.

Відібрано 30 основних показників світового ринку цинку:

X_1 – час

Показники виробництва:

X_2 – у світі;

X_3 – у США;

X_4 – у Європі;

X_5 – у Канаді;

X_6 – в Японії;

X_7 – в Австралії;

Показники споживання:

X_8 – у світі;

X_9 – у США;

X_{10} – в Європі;

X_{11} – у Канаді;

X_{12} – в Японії;

X_{13} – в Австралії;

Запаси цинку у виробників:

X_{14} – у світі;

X_{15} – у США;

X_{16} – в Європі;

X_{17} – інших країнах

Запаси цинку в споживачів:

X_{18} – у США;

X_{19} – в Англії;

X_{10} – у Японії;

Імпорт цинкових руд і концентратів (тис. т)

X_{21} – у США;

X_{22} – у Японії;

X_{23} – у ФРН;

Експорт цинкових руд і концентратів (тис. т)

X_{24} – з Канади;

X_{25} – з Австралі.ї

Імпорт цинку (тис. т)

X_{26} – у США

X_{27} – в Англію

X_{28} – у ФРН

Експорт цинку (тис. т)

X_{29} – з Канади

X_{30} – з Австралії

Для визначення конкретних залежностей використаний апарат кореляційно-регресивного аналізу. Аналіз зв'язків здійснювався на основі матриці парних коефіцієнтів кореляції. Тут приймалася гіпотеза про нормальний розподіл показників кон’юнктури, які аналізувалися. Ясно, що r_{ij} є не єдино можливим показником зв’язку показників, які використовувалися. Необхідність використання кластерного аналізу пов’язана в цій задачі з тим, що число показників, що впливають на ціну цинку, дуже, велике. Виникає необхідність їх скоротити з цілого ряду причин:

а) відсутність повних статистичних даних по всіх змінних;

б) різке ускладнення обчислювальних процедур при введенні в модель великого числа змінних;

в) оптимальне використання методів регресивного аналізу вимагає перевищення числа значень, що спостерігаються, над числом змінних не менше, ніж у 6-8 разів;

г) прагнення до використання в моделі статистично незалежних змінних й ін.

Проводити такий аналіз безпосередньо на порівняно громіздкій матриці коефіцієнтів кореляції досить важко. За допомогою кластерного аналізу всю сукупність кон'юнктурних змінних можна розбити на групи таким чином, щоб елементи кожного кластера значно корелювали між собою, а представники різних груп, навпаки, характеризувалися слабкою кореляцією.

Для рішення цієї задачі був застосований один з агломеративних ієрархічних алгоритмів кластерного аналізу. На кожнім кроці число кластерів зменшується на одиницю за рахунок оптимального. Критерієм об'єднання є зміна відповідної функції. Як таку функцюї використані значення сум квадратів відхилень, що обчислюються за формулами:

$$\mathrm{E}_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} r_{ij}\right)^2$$

(j = 1, 2, ..., m),

де j – номер кластера,

n – число елементів у кластері,

r_{ij} – коефіцієнт парної кореляції.

Таким чином, процесу групування повинне відповідати послідовне мінімальне зростання значення критерію *E*.

На першому етапі первісний масив даних представляється у вигляді множини, що складається з кластерів, які включають у себе по одному елементу. Процес групування починається з об'єднання такої пари кластерів, що приводить до мінімального зростання суми квадратів відхилень. Це вимагає оцінки значень суми квадратів відхилень для кожного з можливих $\frac{n(n-1)}{2}$ об'єднань кластерів.

На наступному етапі розглядаються значення сум квадратів відхилень уже для $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ кластерів і т. д. Цей процес буде зупинений на деякому кроці. Для цього потрібно стежити за величиною суми квадратів відхилень. Розглядаючи послідовність зростаючих величин, можна впіймати стрибок (один або декількох) у її динаміці, який можна інтерпретувати як характеристику числа груп «об'єктивно» існуючих у досліджуваній сукупності. У наведеному прикладі стрибки мали місце при числі кластерів, рівному 7 і 5. Далі зменшувати число груп не має сенсу, тому що це призводить до зниження якості моделі. Після одержання кластерів відбувається вибір змінних найбільш важливих в економічному змісті і найтісніше пов'язаних з обраним критерієм кон'юнктури – у даному випадку з котируваннями Лондонської біржі металів на цинк. Цей підхід дозволяє зберегти значну частину інформації, що утримується в первісному наборі вихідних показників кон'юнктури.

Питання для самоконтролю знань

1. За формулою $R = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{1}^{n} \left| x^{1} - y^{1} \right|^{2}}{n^{3} - n}$ визначить тісноту зв’язку між експортом та імпортом України. Яка перевага цього способу розрахунку і в чому його недолік?

2. За формулою (3.5) розрахуйте коефіцієнт множинної кореляції між тривалістю життя, відсотком населення, охопленого навчанням і душовим ВВП (табл. 3.7).

Таблиця 3.7

Країни	**Тривалість життя (роки)**	**Частка населення, охопленого навчанням, %**	**Душовий ВВП, дол. США**
Норвегія	74,8	87	28433
Австралія	78,8	96	24574
Канада	78,7	97	26251
США	76,8	95	31872
Словаччина	73,1	76	10591
Угорщина	71,1	81	11430
Польща	73,1	84	8450
Бєларусь	68,5	77	6876
Росія	66,1	78	7473

3. Дайте визначення регресивному аналізу. Які явища у світогосподарських процесах можна досліджувати за його допомогою? Побудуйте графік лінійного тренду, що віддзеркалює динаміку товарного експорту та імпорту України за 1996–2004 рр. (табл. 3.8).

Таблиця 3.8

Динаміка експорту та імпорту (млн грн.)

Роки	**Експорт**	**Імпорт**
1996	14000,8	17603,4
2000	14572,5	13956
2001	16264,7	15775,1
2002	17957,1	16976,8
2003	20679,4	20344
2004	32672,3	28996

4. Розкрийте сутність факторного аналізу. Для яких цілей він використовується? Наведіть приклад.

5. Розкрийте сутність кластерного аналізу. Для яких цілей він використовується? Наведіть приклад.

РОЗДІЛ 4. МОДЕЛЮВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ І КОРЕЛЯЦІЙНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ

Ключові поняття: структурно-логічна модель, ринковий центр, ієрархічна залежність, потенціал ринку збуту, лінійна модель динаміки процесів, експонента, прогноз

Соціально-економічні явища і процеси в багатьох випадках схожі на процеси і явища, що спостерігаються у фізиці, хімії та інших точних науках. Це дало підставу для запозичення у них математичних формул для модулювання процесів та явищ соціально-економічного характеру (зокрема при пошуку просторових закономірностей у розвитку і розміщенні продуктивних сил та ін.). Їхній аналіз дозволяє більш глибоко досліджувати кількісні взаємозв'язки явищ і процесів. При цьому функції можуть бути задані аналітично (формулою) або графічно.

Одним із прикладів, отриманих на підставі використання таких моделей, можна назвати відкриту американським ученим Зіпфом закономірність у розміреності міст, залежність між числом жителів досліджуваного населеного пункту і його функції як ринкового центру та ін.

Кількісні закономірності, що розкриваються за допомогою моделювання аналізу функціональних і кореляційних залежностей, можуть бути виведені емпірично й дедуктивно, виходячи зі знання природи соціально-економічного явища і логічного аналізу механізму дії причинно-наслідкових зв'язків. (Однак потім вони вимагають перевірки та підтвердження на фактичних матеріалах).

Підхід до вивчення і виявлення яких-небудь залежностей у міжнародних економічних відносинах може бути найрізноманітнішим. Він залежить від об'єктів вивчення, цілей дослідження, вимог до ступеня точності виконуваних робіт та ін. Тому тут неможливо запропонувати яку-небудь певну систему моделей і розрахунків. Їх повинен вибрати і визначити в кожному конкретному випадку сам експериментатор.

4.1. Структурно-логічна модель розрахунку ВВП

Найважливішим макроекономічним показником соціально-економічного розвитку будь-якої країни є душове виробництво валового внутрішнього продукту (ВВП). Його розрахунок може бути здійснений за обсягами виробництв, споживання, накопичення, доходами.

Приймаючи до уваги істотну кореляційну залежність між доходами населення і ВВП, величину останнього можливо розрахувати, використавши до побудову структурно-логічної моделі, яка повинна враховувати: заробітну плату, середню чисельність членів родини, співвідношення між споживанням та накопиченням у державі, втрати продукції виробництва, яка через ті чи інші причини не реалізується (рис. 4.1).

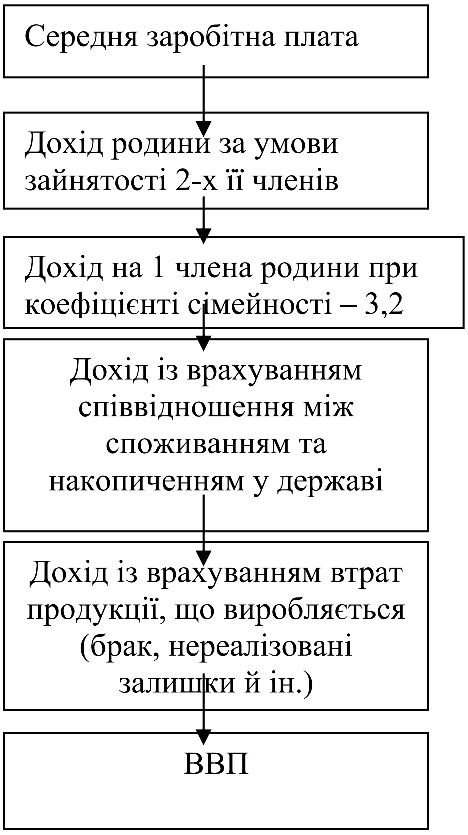


Рис. 4.1. Структурно-логічна схема розрахунку ВВП

Якщо прийняти, що: X – середня заробітна плата;

N – кількість працюючих у родині;

C – кількість членів родини (коефіцієнт сімейності);

D – коефіцієнт споживання;

M – коефіцієнт використання виробленої продукції, то дану структурно-логічну модель, побудовану дедуктивним методом, можливо трансформувати в математичну модель виду:

$$ВВП = \frac{X * N}{C * D * M} * 12 . \qquad (4.1)$$

Припустимо:

- середня заробітна плата в Україні дорівнює 700 грн. (2005 р.);
- кількість працюючих членів родини – 2;
- коефіцієнт сімейності – 3,2;
- коефіцієнт споживання – 0,8;
- коефіцієнт використання (реалізації) виробленої продукції – 0,7.

Підставивши у формулу (4.1) кількісні показники, одержимо:

$$ВВП = \frac{700 * 2}{3{,}2 * 0{,}8 * 0{,}7} * 12 = 9375 \text{ грн.}$$

Розділивши отримане значення на співвідношення гривні до долара (5,1:1), одержимо – 1838,23 дол. США. Отже, величина душового ВВП складає 1838,23 дол. США (якщо при цьому прийняти до уваги, що близько 50 % ВВП виробляється ще у тіньовому секторі, то фактично ВВП в країні дорівнює 3676,46 дол. США на одну людину).

4.2. Моделювання розміреності ринкових центрів емпіричними рівняннями

Міста, особливо великі, належать до найважливіших об'єктів маркетингових досліджень як ринкові центри. Пояснюється це їхньою значною роллю в господарському, політичному та культурному житті країн та районів.

Виходячи, згідно з теорією вірогідності, з припущення, що споживча ємність ринків пропорційна кількості жителів, можна, ґрунтуючись на динаміці чисельності населення міст, прогнозувати обсяги продаж. Тобто для прогнозування обсягів продаж потрібно знати перспективну людність міст тієї чи іншої країни, яка вивчається, з точки зору реалізації в ній певної продукції. Питання полягає у тому – як визначити перспективну людність міст, тобто ринкових центрів країни?

Відповідь на це питання намагався дати американський учений Зіпф. Він висунув гіпотезу, яка стверджує, що для певних міських систем (тобто міст країни або району) існує специфічна залежність між чисельністю населення міста і його порядковим номером за ступенем убування (або зростання) чисельності жителів у містах. У математичному відношенні гіпотеза має вигляд рівняння:

$$H_j = H_1 \cdot j^{-a}, \qquad (4.2)$$

де H_j – людність j-го міста;

H_1 – людність 1-го за чисельністю жителів міста;

a – коефіцієнт контрастності, характерний для певної системи міст.

Наприклад, для міст США, де коефіцієнт контрастності був прийнятий Зіпфом рівним 1, а людність 1-го за чисельністю населення міста – *Нью-Йорка* – 15 млн чол., людність наступних міст дорівнює:

2-го – *Чикаго* $= 15 \cdot 2^{-1} = \frac{15}{2} = 7.5$;

3-го – *Лос-Анджелеса* $= 15 \cdot 3^{-1} = \frac{15}{3} = 5$ і т. д.

Це приблизно відповідає і дійсності для першої десятки міст країни. Але на практиці такий збіг буває не завжди.

Як правило, на існування розкритої Зіпфом закономірності нашаровується цілий ряд факторів, сильно спотворюючи її, унаслідок чого в ряді випадків, на перший погляд, вона не простежується. Однак така закономірність реальна. Її об'єктивне існування підтверджується численними роботами радянського (а потім американського) ученого – Ю. В. Медвєдкова, який здійснив відповідне дослідження для систем міст 85 держав світу, узятих методом випадкової вибірки при обсязі вибірки рівної 14 %.

Рівняння Ю. В. Медвєдкова. Гіпотезу Зіпфа про закономірність у розмірності міст, що має вигляд математичної моделі $H_j = H_1 \cdot j^{-a}$, можна представити графічно в прямокутній системі координат, у якій на осі x будуть відкладатися порядкові номери міст (j), а на осі y – їхні показники людності (H_j).

Візьмемо як приклад систему міст Італії і спробуємо розподілити їх у порядку убування людності в зазначеній системі координат. Тоді ми одержимо вид графіка, зображеного на рис. 4.2.

На жаль, при усій своїй наочності і простоті цей графік має дуже серйозні недоліки. Лінійна шкала на осі y добре передає розходження в людності тільки першої десятки (найбільших міст). Інші значення H_j порівняти майже неможливо, тому що їхні точки на графіку зливаються. Та й сама крива $H_1 \ldots H_j$, маючи складний вигляд, не дає можливості дослідити математичну залежність між величинами j і H_j.

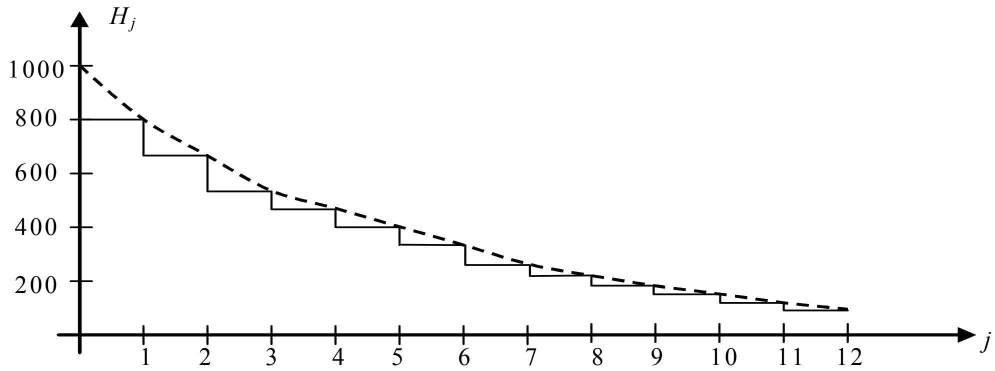


Рис. 4.2. Людність міст Італії

Краще трансформувати цей графік, замінивши лінійну шкалу на його осях логарифмічною. Це, по-перше, звільняє від необхідності побудови гігантського за розмірами графіка і, по-друге, дає можливість (що ще більш важливо) представити залежність величин j і H_j у лінійному вигляді, як це показано на нижченаведеному графіку (рис. 4.3).

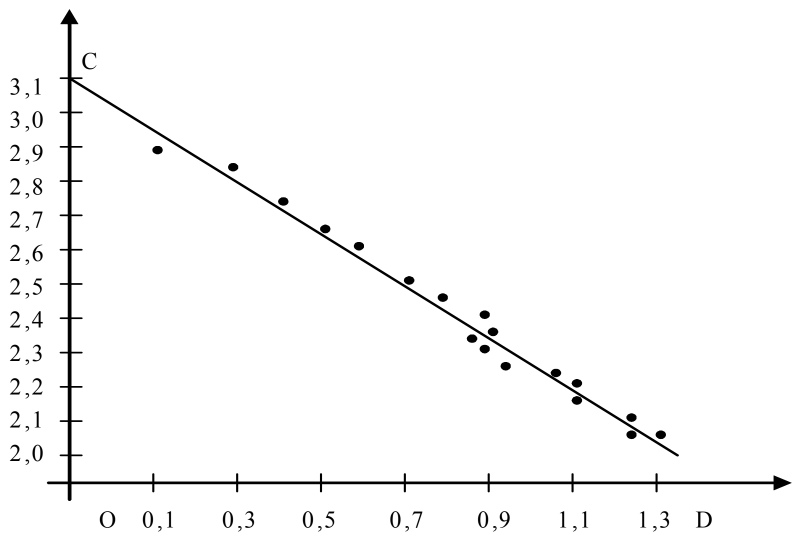


Рис. 4.3. Людність міст Італії в логарифмічній шкалі координат

З графіка видно, що ланцюжок H_j витягається в логарифмічному полі майже в правильну пряму. У прямокутній системі координат положення такої прямої (що апроксимує значення H_j) характеризується рівнянням $Y = C - KX$ (убутна залежність).

Величина “3,1” відповідає на графіку відрізкові осі ординат, що відтинається даною прямою, тобто відрізком *OC*. Кутовий коефіцієнт *DO* виражається тангенсом кута нахилу прямої до осі абсцис.

У зв’язку з тим, що обидві осі мають логарифмічну шкалу, можна, підставивши в рівняння прямої замість *X, Y* і “3,1” рівнозначні логарифмічні величини, одержати:

$$\lg H_j = \lg C - K \lg j \cdot \qquad (4.3)$$

Шляхом потенціювання (дії, зворотного логарифмуванню) перетворимо це рівняння в таку статечну функцію:

$$H_j = C \cdot j^{-k}. \qquad (4.4)$$

Не важко помітити, що рівняння (4.4) близьке за виглядом до рівняння (4.2) $H_j = H_1 \cdot j^{-a}$, яке вивів Зіпф, прийнявши $C = H_j$, $K = a = 1$.

З рис. 4.2. видно, що зв'язок між людністю міст і їхнім порядковим номером має кореляційний характер. Крім цього, як правило, $C \neq H_1$ і $K \neq 1$. Зокрема, у вивчених Ю. В. Медвєдковим системах міст 12 країн у жодному випадку не було співвідношень, прийнятих Зіпфом. Наприклад, для Італії величина “3,1” (людність Рима) на той час була на 1/3 менше H_1, для Чилі – у 2,7 рази більше, та й показник, ступеня *a* змінювався від – 1,629 (Австрія) до 0,788 (КНР).

Щоб ці особливості зробити більш наочними, Ю. В. Медвєдков рівняння Зіпфа перетворив в таке співвідношення:

$$H_j = K \cdot H_1 \cdot j^{-a}, \qquad (4.5)$$

де H_j – людність *j-го* міста розглянутої системи;

H_1 – людність найбільшого за величиною міста системи;

j – порядковий номер міста за ступенем убування людності;

a – коефіцієнт міри контрастності в розмірах міст;

K – «коефіцієнт першості» головного міста, являє собою співвідношення $\frac{C}{H_1}$, де *C* – людність головного міста (найважливішого ринкового центру країни). Саме такою теоретично повинна була б бути людність головного міста України при дотриманні тенденції в розподілі людності міст відповідно до гіпотези Зіпфа.

Необхідним доповненням до рівняння (4.5) служить коефіцієнт кореляції (*R*), за абсолютною величиною якого можна оцінювати розбіжності між загальною тенденцією системи і фактичними розмірами окремих центрів.

Рівняння Ю. В. Медвєдкова разом з коефіцієнтом кореляції є математичною моделлю структурної ієрархії системи міст, тобто не усякої випадкової сукупності населених пунктів, а тільки тих населених пунктів, що тісно пов'язані між собою й утворюють опорний каркас країни або її окремих економічних районів.

Для всіх країн, де існує товарне виробництво, ринкові відносини базуються на територіальному поділі праці. Міста впливають один на одного як ринкові центри. Містоутворюючі та торгово-розподільчі функції розподіляються між ними таким чином, що висування вперед одного з них неминуче відбивається на інших. У цьому відношенні розрахунок математичної моделі (4.5) з наступним аналізом отриманих результатів має практичний інтерес для дослідження торговельної діяльності, включаючи і зовнішню торгівлю. Крім того, ця модель може використовуватися при складанні наукових прогнозів попиту-пропозиції окремих видів товарів і послуг по містах і регіонах окремих краї.

Приклад розрахунку рівняння Ю. В. Медвєдкова

Задача розрахунку рівняння (4.5) зводиться до визначення параметрів значень *a, C*, а також коефіцієнта кореляції *r*.

Як приклад для такого роду розрахунків візьмемо систему торговельних центрів Польщі (найбільших населених пунктів з населенням понад 100 тис. жителів – табл. 4.1).

Таблиця 4.1

$\lg j$	$(\lg j)^2$	$\lg j \times \lg H_j$	j	H_j	$\lg H_j$	$\Delta \lg H_j$	$(\Delta \lg H_j)^2$	$\Delta \lg j$	$\Delta \lg j \times \Delta \lg H_j$	$(\Delta \lg j)^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,000	0,000	0,000	1	1,388	3,142	+0,736	0,547	-0,990	-0,732	0,980
0,301	0,091	0,869	2	761	2,892	+0,486	0,230	-0,691	-0,331	0,490
0,477	0,227	1,328	3	657	2,817	+0,411	0,168	-0,513	-0,209	0,260
0,602	0,362	1,646	4	560	2,748	+0,342	0,116	-0,388	-0,129	0,152
0,699	0,489	1,878	5	499	2,698	+0,292	0,084	-0,291	-0,084	0,085
0,778	0,605	2,005	6	398	2,600	+0,194	0,036	-0,212	-0,040	0,044
0,845	0,714	2,149	7	358	2,554	+0,148	0,023	-0,145	-0,023	0,022
0,903	0,815	2,248	8	319	2,504	+0,098	0,008	-0,087	-0,007	0,010
0,954	0,910	2,327	9	308	2,488	+0,082	0,006	-0,036	-0,003	0,001
1,000	1,000	2,408	10	256	2,408	+0,002	0,000	+0,010	0,000	0,000

lg j	*(lg j)²*	*lg j × lg H_j*	*j*	*H_j*	*lg H_j*	*Δ lg H_j*	*(Δ lg H_j)²*	*Δ lg j*	*Δ lg j × Δ lg H_j*	*(Δ lg j)²*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,041	1,084	2,412	11	209	2,320	-0,086	0,008	+0,051	-0,004	0,003
1,079	1,886	2,484	12	201	2,308	-0,103	0,010	+0,089	-0,010	0,008
1,119	1,254	2,553	13	194	2,287	-0,119	0,014	+0,129	-0,022	0,016
1,146	1,323	2,622	14	193	2,285	-0,121	0,014	+0,156	-0,018	0,026
1,176	1,392	2,644	15	185	2,267	-0,139	0,019	+0,186	-0,025	0,036
1,204	1,450	2,700	16	178	2,250	-0,156	0,025	+0,214	-0,031	0,044
1,230	1,512	2,730	17	167	2,222	-0,184	0,032	+0,240	-0,043	0,057
1,255	1,587	2,770	18	154	2,187	-0,219	0,048	+0,265	-0,054	0,067
1,278	1,612	2,768	19	148	2,170	-0,236	0,057	+0,288	-0,067	0,078
1,301	1,690	2,821	20	147	2,167	-0,239	0,057	+0,311	-0,074	0,096
1,322	1,742	2,824	21	140	2,146	-0,260	0,067	+0,332	-0,085	0,109
1,342	1,795	2,867	22	140	2,146	-0,260	0,067	+0,352	-0,091	0,122
1,361	1,849	2,856	23	127	2,103	-0,303	0,090	+0,371	-0,110	0,137
1,380	1,904	2,842	24	115	2,060	-0,340	0,115	+0,390	-0,132	0,152
23,803	27,293	54,751			57,764	+2,791 -2,765	1,841	+3,384 -3,353	-2,324	2,956

lg $\bar{j}$ = 0,99 lg H_j = 2,41

Порядок виконання розрахунків

1. Складання розрахункової таблиці.
2. Заповнення граф 4 і 5 вихідними даними (нумерацією *j* і людністю міст H_j).
3. Визначення за допомогою математичних таблиць Брадіса значень логарифмів *j* і H_j (стовпчики 1 і 6).
4. Розрахунок добутків lg *j* × lg H_j (стовпчик 3); підсумовування отриманих значень по кожній із чотирьох заповнених стовпців.

5. Знаходження за допомогою "способу найменших квадратів" формули, що виражає кореляційний зв'язок параметрів a і C.

$$\begin{cases} n\lg C + a\sum_{1}^{n}\lg j = \sum_{1}^{n}\lg H_j \\ \lg C\cdot\sum_{1}^{n}\lg j + a\sum_{1}^{n}(\lg j)^2 = \sum_{1}^{n}\lg j\cdot\lg H_j \end{cases}$$

Система вирішується за звичайними правилами: підстановкою із взаємним додаванням і вирахуванням після приведення членів до однакового вигляду. Найпростіший шлях рішення – розрахунок визначників (детермінантів). У даної системи три визначники.

$$D = n\sum_{1}^{n}(\lg j)^2 - (\sum_{1}^{n}\lg j)^2 = 24*27{,}3 - 566{,}44 = 88{,}8$$

$$B = n\sum_{1}^{n}\lg j*\lg H_j - \sum_{1}^{n}\lg j * \sum_{1}^{n}\lg j*\sum_{1}^{n}\lg H_j = 24*\ 54{,}7 - 23{,}8 - 57{,}7 = -60{,}6$$

$$A = \sum_{1}^{n}\lg H_j * \sum_{1}^{n}(\lg j)^2 - \sum_{1}^{n}\lg j*\sum_{1}^{n}\lg j*\lg H_j = 57{,}7*27{,}3\text{- }23{,}8*54{,}7 = 274{,}4$$

6. Визначення значень $(\lg j)^2$ і заповнення стовпчика 2.

7. Розрахунок по трьох визначниках параметрів a і C.

$$a = \frac{B}{D} = \frac{-60.6}{88.8} = -0.7 \qquad a = -0.7$$

$$\lg C = \frac{A}{D} = \frac{274.4}{88.8} = 3.08 \qquad \lg C = 3.08$$

Потенціюючи значення lg C, одержимо його абсолютне значення: $C = 1{,}202$. Таку людність повинно було б мати найбільше місто місто системи, відповідно до моделі ієрархічної системи міст за гіпотезою Зіпфа – Медвєдкова. Ця величина небагато відхиляється від фактичної (1,388 тис. чол.), що обумовлено певними соціально-історичними причинами.

Для розрахунку коефіцієнта кореляції потрібно визначити середньоарифметичні значення $\lg\bar{j}$ і $\lg\overline{H_j}$:

$$\lg\bar{j} = \frac{23{,}803}{24} = 0{,}99;\ \lg\overline{H_j} = \frac{57{,}764}{24} = 2{,}41.$$

У 7-му стовпчику укажемо всі відхилення $\Delta\lg H_j(\lg H_j - \lg\overline{H_j})$, а у 8-му – квадрати цих величин. Так само заповнимо 9-й і 11-й стовпчикиі щодо значень lg$j$.

8. Помноживши по рядках цифри 7-го і 9-го стовпчиків, одержимо значення $\sum_{1}^{n}\Delta\lg j\cdot\Delta\lg H_j$, що заносимо в 10-й стовпчик. Отримана сума значень, розділена на кількість міст (24), дасть змішаний перший центральний момент:

$$M_{1/1} = \frac{\sum_{1}^{n}\Delta\lg j\cdot\Delta\lg H_j}{n} = \frac{+2{,}324}{24} = 0{,}096.$$

9. По сумах цифр 8-го і 11-го стовпчиків розраховуємо стандартні квадратичні відхилення для рядів:

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\Delta \lg j)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2,956}{23}} = 0,358;$$

$$\sigma_{Hj} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\Delta \lg H_j)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1,841}{23}} = 0,283.$$

10. Знаючи $M_{1/1}$, σ_j, σ_{Hj}, визначаємо коефіцієнт кореляції:

$$R = \frac{M_{1/1}}{\sigma_j \cdot \sigma_{Hj}} = \frac{0,096}{0,358 \cdot 0,283} = 0,950.$$

Отримане значення R = 0,950 близьке до 1, що говорить про значну тісноту зв'язку між рядами j і Hj, а отже, підтверджує наявність для Польщі ієрархічної залежності людності міст від їхнього рангу.

Узявши з генерального плану розвитку головного міста системи (країни чи регіону) його очікувану людність на розрахунковий період (наприклад, 2010-й або інший рік) і підставивши її в рівняння (4.5), з використанням значень параметрів a і k, можна розрахувати перспективну людність інших міст системи (у нашому прикладі 23 великі міста Польщі). На цій підставі – спрогнозувати у них перспективний попит на ті або інші види товарів та послуг.

4.3. Моделювання зовнішньоекономічної діяльності за допомогою математичних запозичень точних наук[5]

Одним із найбільш плідних запозичень, зроблених економістами з точних наук, є, мабуть, теорія гравітації. Моделі просторової взаємодії, побудовані на її основі, дають можливість дослідження широкого кола питань, пов'язаних з особливостями розміщення і взаємного впливу цілого ряду соціально-економічних факторів.

Зокрема, якщо припустити, що загальний обсяг переміщення товарів між двома центрами пропорційний обсягам споживання їхнього населення і зворотно пропорційний квадратові відстані між ними, то за аналогією до закону Ньютона ступінь взаємодії між цими центрами можна записати у вигляді рівняння:

$$M_{ij} = \frac{P_i \cdot P_j}{d_{ij}^2}, \qquad (4.6)$$

де M_{ij} – взаємодія між i-м і j-м центрами;
P_i і P_j – міри маси (людність) центрів;
d_{ij} – відстань між центрами.

За аналогією до явища абсорбції у хімічних процесах можна, наприклад, розрахувати падіння інтенсивності переміщень у міжнародній міграції (між

[5] Використовуються матеріали кандидатської дисертації П. О. Чорномаза «Маркетингова географія: теоретико-методологічні основи». – К., 2000.

світовими ринками праці і країнами-донорами робочої сили). Для цього можливо скористатися формулою:

$$M_x = kx^{-1} \cdot e^{-ax}, \qquad (4.7)$$

де M_x – частка міграції, спрямована до даного ринкового центра із зони країн-донорів, що знаходиться від нього на відстані x;

k – постійна;

a – коефіцієнт поглинання.

Застосування математичного моделювання можливе не тільки для аналізу процесів і явищ в міжнародних економічних відносин, але й у маркетингових дослідженнях, зокрема для моделювання просторової організації ринків збуту.

Математичні співвідношення у взаємодії між ринковими центрами, із врахуванням обсягів їхнього споживання і відстаней, можна змоделювати у вигляді такої залежності:

$$ТЗ_i = P_i + \sum_{1}^{m} P_j d_{ij}, \qquad (4.8)$$

де $ТЗ_i$ – сумарні транспортні витрати i-го ринкового центру;

P_i, P_j – обсяги споживання ринкових центрів;

D_{ij} – відстані між ринковими центрами;

n – кількість ринкових центрів.

Розглянемо приклад. Потрібно визначити пункт для розміщення торговельної бази дистриб'ютора продукції компанії X-ltd для поширення її товарів у групі європейських країн (табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Ємність ринків

	Країни	**Ємність ринку (млн дол. США)**
1	Голландія	15
2	Греція	10
3	Югославія	10
4	Німеччина	82
5	Словаччина	5
6	Бельгія	10
7	Румунія	22

Дано відстані (км) між торгівельними центрами цих країн (умовно приймемо за них столиці) (табл. 4.3).

Таблиця 4.3

Відстань між ринковими центрами

Ринкові центри	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1. Амстердам	-						
2. Афіни	2821	-					

3. Белград	1764	1040	-				
4. Берлін	659	2316	1276	-			
5. Братислава	1231	1632	692	689	-		
6. Брюссель	206	2714	1674	763	1185	-	
7. Бухарест	2204	1106	612	1677	993	2158	-

Розрахунок за формулою (4.8) сумарних транспортних витрат у розрізі 7-ми ринкових центрів дав такі результати:

Амстердам = 156606;
Афіни = 876269
Белград = 175 166;
Берлін = 93856;
Братислава = 131904;
Брюссель = 162947;
Бухарест = 214321.

З отриманих даних виявляється, що мінімальні транспортні витрати припадають на Берлін. Отже, тут доцільне створення товарної бази фірми, яка зможе обслуговувати з найменшими транспортними витратами всі інші торговельні центри регіону дослідження.

Американський учений Ч. Харріс запропонував для спрощення аналізу й конструювання просторової організації ринків збуту використання гравітаційної моделі вигляду:

$$V_i = P_i + \sum_{j=1,i=1}^{n} \frac{P_j}{d_{ij}}, \qquad (4.9)$$

де V_i – потенціал ринку збуту;

P – ємність ринків;

d_{ij} – відстань між *i-м* і *j-м* ринками;

n – кількість ринків (підрозділів загального ринку).

Скористаємося моделлю (4.9) для аналізу просторової організації ринку збуту України в розрізі її 24-х областей і Автономної Республіки Крим. За ринкову ємність адміністративно-територіальних одиниць приймається їхній роздрібний товарообіг, що умовно концентрується в головних ринкових центрах – обласних містах. Для спрощення розрахунків відстані між обласними центрами визначаються їхніми координатами в декартовій системі.

Координати відраховуються від західної і південної рамок картографічного джерела (оглядової карти України). Відповідно до цього формула розрахунку потенціалу збуту приймає вигляд:

$$V_i = P + \sum_{j=1,i=1}^{n} \frac{P_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}}, \qquad (4.10)$$

де xj – абсциса j-го ринку;
yj – ордината j-го ринку.

У розрахунку потенціалу збуту, що утвориться в центрі адміністративно-територіальних одиниць власним товарообігом, відстань між торгівельними центрами приймається рівним 1, а не 0 (цю умовність обґрунтував американський учений Дж. Стюарт при визначенні демографічного потенціалу, тому що в протилежному випадку в усіх розрахункових точках потенціал складав би нескінченну величину).

Ця ж умовність з метою подальшого зіставлення результатів збережена і при розрахунках сумарних транспортних витрат за умови обслуговування національного ринку України з обласних центрів, що здійснюється за формулою:

$$T3_i = P_i + \sum_{j=1, i \neq j}^{n} P_j \sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2} \quad . \quad (4.11)$$

Отримані абсолютні значення потенціалу збуту і сумарних транспортних витрат з метою підвищення наочності й порівнянності краще перевести у відносні.

Спираючись на отримані результати можна стверджувати, що найбільші значення потенціалу збуту в Україні притаманні Києву і Донецьку (останній поступається Києву лише на 6,8 %). Це ті ринкові центри країни, де за рівних інших умов забезпечується найбільший продаж товарів і послуг. Протилежність їм складають Чернівці, Луцьк, Івано-Франківськ, Ужгород і Кіровоград, потенціал збуту яких не перевищує 1/5 показника для Києва.

Найменші транспортні витрати характерні для центральної частини країни, насамперед для Черкас і Кіровограда. Це – національний транспортний оптимум, місце, відкіля найбільш зручно й економічно вигідно здійснювати транспортно-розподільні функції для всієї території країни.

Розбіжність пунктів з найбільшим потенціалом збуту з національними транспортними оптимумами викликає необхідність розрахунку синтетичного показника, що об'єднав би в собі потенціал збуту і транспортних витрат. Таким показником може бути індекс розміщення ринкових центрів.

Для визначення індексу розміщення спочатку розраховуються зважені транспортні витрати (як добуток потенціалу збуту і сумарних транспортних витрат). Базис їхнього розрахунку принесений до Києва, зважені транспортні витрати якого прийняті за 100 %. Виходячи з припущення, що 1 % падіння потенціалу буде врівноважуватися 1 % зниження транспортних витрат, можна розрахувати значення індексів розміщення (різниця між потенціалом збуту і відповідним зниженням транспортних витрат).

Найбільше значення індексу розміщення характерне для Дніпропетровська (0 %). Тут найкращі умови для розміщення підприємств, що орієнтуються на збут своєї продукції на внутрішньому ринку. Індекси розміщення інших центрів мають негативні значення, які вказують, наскільки їхнє розміщення гірше в порівнянні з Дніпропетровськом (табл. 4.4).

Таблиця 4.4

Розрахунок потенціалів збуту, транспортних витрат й індексів розміщення для національного ринку України

Центр регіону	Місткість ринку, млн грн.	Координати, км		Потенціал збуту, %	Сумарні транспортні витрати, %	Індекс розміщення, %
		Абсциса	Ордината			
Сімферополь	2 134	1 054	131	42,59	59,47	-22,25
Вінниця	1 330	626	503	27,73	25,04	-7,08
Луцьк	736	411	784	16,27	71,52	-12,41
Дніпропетровськ	3 106	1 103	520	62,58	4,54	0,00
Донецьк	4 746	1 317	482	93,22	36,85	-25,52
Житомир	1 145	642	716	24,56	24,66	-6,57
Ужгород	912	171	568	18,92	121,14	-22,36
Запорожжя	1 997	1 121	453	41,42	10,42	-3,38
Івано-Франківськ	871	350	583	18,82	74,71	-14,36
Київ	5 096	774	733	100,00	10,67	-3,47
Кіровоград	843	902	520	18,99	0,28	-1,69
Луганськ	2 531	1 422	558	50,66	60,29	-26,18
Львів	1 961	311	688	39,45	85,70	-30,21
Миколаїв	1 123	885	348	24,24	15,98	-6,63
Одеса	2 043	788	293	41,26	29,70	-10,56
Полтава	1 489	1 065	645	31,53	4,83	-1,80
Рівне	940	473	764	20,28	56,95	-11,95
Суми	1 196	1 076	792	25,34	23,26	-6,35
Тернопіль	851	420	650	18,72	59,43	-11,72
Харків	3 017	1 184	696	60,30	21,16	-9,19
Херсон	1 143	932	315	24,52	20,15	-5,57
Хмельницький	1 142	519	633	24,28	39,68	-9,84
Черкаси	1 237	885	620	26,58	0,00	-0,91
Чернівці	683	434	509	15,16	58,92	-10,08
Чернігів	1 063	829	851	22,79	27,39	-6,91

Більш простий спосіб вибору пункту для розміщення того або іншого об'єкта виробничого або торгово-розподільного призначення за формулою (4.9) можна здійснити з використанням розрахункової матриці.

Припустимо, що є можливість створення сервісного центру в пунктах чотирьох країн: А (у Люксембурзі), Б (у Франції), Д (у Бельгії), Г (у Голландії). Обсяг сервісних послуг в центрі А складає 300 тис. євро на місяць, у Б – 280, в Д – 400, у Г – 350. Відомі відстані між ними, виражені в годинах їх подолання (рис. 4.4).

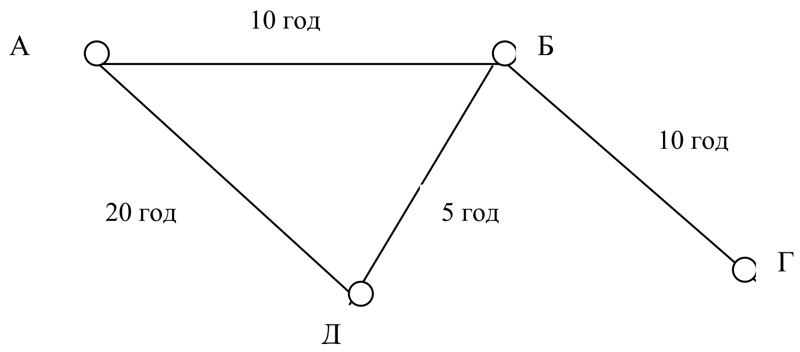


Рис. 4.4. Система сервісних центрів

Треба визначити – у якому з пунктів доцільне створення сервісного центру. На перший погляд здається, що в розглянутій системі пунктів зручним для створення торгово-розподільної бази є пункт Б (Франція), тому що він характеризується центральним місцем розташування.

Для підтвердження або спростування цього припущення скористаємося розрахунком транспортно-географічного потенціалу кожного з пунктів за допомогою математичної моделі (4.9). Для цього будується розрахункова матриця (табл. 4.5).

Таблиця 4.5

	А	Б	Д	Г	$V_i = P_i + \sum\limits_{j=1, i=1}^{n} \frac{P_j}{d_{ij}}$
А	300	280/10	400/20	350/20	365,5
Б	300/10	280	400/5	350/10	425
Д	300/20	280/5	400	350/15	490
Г	300/20	280/10	400/15	350	419,7

З табл. 4.5 видно, що найбільшим потенціалом характеризується пункт Д (Бельгія). Отже, він є більш зручним для створення в ньому сервісного центру в порівнянні з іншими пунктами системи. (До такого висновку можна прийти і суто логічним шляхом, приймаючи до уваги, що в пункті В – найбільший обсяг сервісних послуг, для яких транспортні витрати дорівнюють 0).

4.4. Лінійна й експонентна моделі динаміки та прогнозування економічних явищ

Важливою складовою економіко-математичного моделювання є прогнозування розвитку явищ у світогосподарських процесів. Для цього використовуються методи аналогій, індикацій, експертних оцінок, регресивного аналізу. Стосовно дослідження світогосподарських процесів можливі три види прогнозів:

- прогноз у часі, що базується на екстраполяції динамічних тенденцій;
- прогноз у просторі, який базується на вивченні зв'язків між окремими явищами та їхній взаємодії у просторовому відношенні;
- просторово-часовий прогноз, який поєднує два попередні види прогнозування і дозволяє передбачити тенденції розвитку соціально-економічного явища одночасно в просторі та часі.

Для прогнозування динаміки соціально-економічних явищ у часі можливе використання можливостей регресивного аналізу, для просторового та просторово-часового прогнозування – балансових моделей типу «витрати–випуск» (леонтьєвська матриця) та лінійного програмування.

Прогнозування торговельно-економічних відносин між країнами є однією з найважливіших задач сучасної науки з міжнародних економічних відносин. Воно дає уявлення про тенденції, що можуть мати місце у світогосподарських процесах, про перспективи економічного співробітництва між країнами, динаміку їх соціально-економічного розвитку й ін., без чого неможливе ефективне планування та управління зовнішньоекономічною діяльністю. Використання економіко-математичних методів, адекватних задачам дослідження, робить можливим прогнозування практично з усіх форм міжнародних економічних відносин.

Для економіко-математичного прогнозування в ряді випадків корисне використання можливостей розглянутого раніше, регресивного аналізу.

Зазвичай регресивний аналіз застосовується в короткостроковому та середньостроковому прогнозуванні, які дають можливість підказки змін у зовнішньому середовищі. У цьому випадку плідним є використання рівняння тренду (1.10).

Прогнозування із застосування рівняння тренду пов'язане з одержанням інформації про очікуване значення величини досліджуваного явища (експорту, імпорту й ін.) y для майбутніх моментів часу T+1, T+2, …T+N.

Теорія лінійного прогнозування доводить, що точковий прогноз для y у цьому разі може бути отриманий підстановкою величин T+1, T+2, …T+N у рівняння тренду (1.10) і розрахунком на його основі прогнозних значень явища (y_{+1}, y_{+2}, …y+n).

Сутність прогнозування з використанням тренд-аналізу полягає у побудові в системі координат прямої, яка б щонайкраще відбивала достовірні дані. Незважаючи на грубість наближення, дана модель гарна тим, що залежність, яка досліджується у динаміці того або іншого явища, надійно екстраполюється за наявності належної інформаційної бази.

При побудові лінійної залежності за фактичними даними, коли точки не лежать на одній прямій, лінія тренду може проводиться на око або аналітично, за допомогою методу найменших квадратів.

З використанням методу найменших квадратів вирішується система нормальних рівнянь

$$M_{xx} \cdot a + M_x \cdot b = M_{xy};$$

$$M_x \cdot a + b = M_y,$$

де $M_x = \frac{1}{4}\sum_{K=1}^{n} X \cdot K$ $\qquad M_y = \frac{1}{4}\sum_{K=1}^{n} Y \cdot K$

$$M_{xx} = \frac{1}{4}\sum_{K=1}^{n} X^2 \cdot K \qquad M_{xy} = \frac{1}{4}\sum_{K=1}^{n} (X_K \cdot Y_K)$$

Аргумент X – період, на який визначається функція;

Y – значення досліджуваного явища (ознаки);

K – порядковий номер спостережу вального явища.

Як приклад використання лінійної регресії для прогнозування розвитку економічного процесу або явища можна розглянути графік тренду зростання іноземних інвестицій в економіку України до 2010 року, що базується на даних з їхньої динаміки за 2000–2004 роки (рис. 4.5).

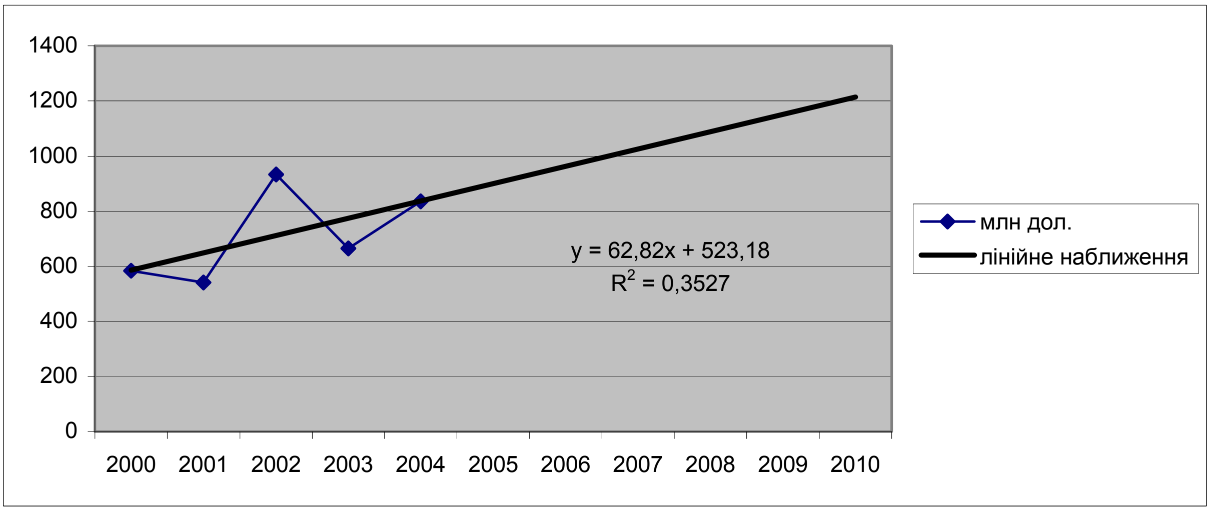


Рис. 4.5. Динаміка іноземних інвестицій в економіку України

Не дивлячись на відносно короткий термін спостережень, лінія тренду, яка побудована на базі даних за 2000–2004 роки, наглядно ілюструє можливу екстраполяцію явища на перспективу. Безумовно, ступінь репрезентативності даної екстраполяції відносно малий (бо базується лише на 4-х роках спостережень), але вона все ж дає певне уявлення про можливий характер розвитку іноземного інвестування в Україну.

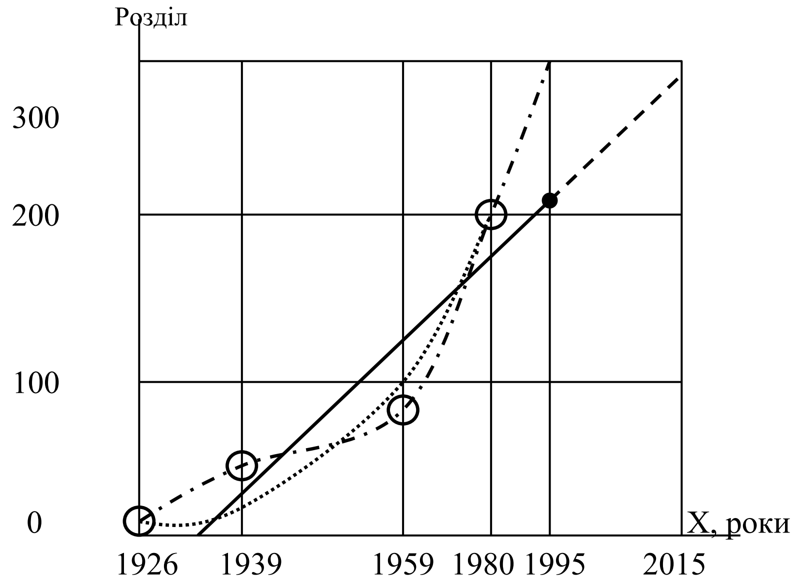
Більш репрезентативне прогнозування дає розрахунок експоненти.

Припустимо, потрібно визначити динаміку зростання ВВП країни на 10 річний період за даними попередніх років:

1926 р. – 2 млн. у.о.
1939 р. – 36 млн. у.о.
1959 р. – 77 млн. у.о.
1980 р. – 196 млн. у.о.
1995 р. – 201 млн. у.о.

Аргумент x – період, на який визначається функція;

Функція y – значення явища (динаміки ВВП). У системі прямокутних координат динаміка ВВП буде мати вигляд кривої, що показана на рис. 4.6;



-·-·- Фактична крива динаміки ВВП
Лінейне наближення залежності С = 3,35Х – 11,25
...... Експоненційне наближення виду С = 0,039Х + 0,0143
○ Точки за фактичними даними динаміки ВВП
● Контрольная точка
------ Прогнозна частина графіку

Рис. 4.5. Прогноз динаміки ВВП

к – порядковий номер явища, що спостерігається.

Лінійне наближення, розраховане за допомогою способу найменших квадратів, характеризується залежністю С = 3,35–11,25 і на графіку віддзеркалиться у вигляді прямої. Її продовження на перспективний період дозволяє одержати наближені дані з прогнозу зростання ВВП на розрахунковий період (табл. 4.6).

Таблиця 4.6

Розрахунок лінійної моделі та прогноз виробництва ВВП країни, млн у.о.

Змінні	*Терміни спостереження*					*Прогноз*
	1926	***1939***	***1959***	***1980***	***1995***	***2015***
x	0	13	33	44	49	64
y фактич.	2	36	77	196	201	-
y прогн.	-49	16	117	173	197	274

Примітка: значення аргументу *x* узяті від умовного нуля, за який прийнятий термін першого спостереження (1926 р.).

Більш точний результат можна отримати за допомогою розрахунку експонентної моделі.

Експонента у вигляді $Y = b\ e^{x}$ (4.7) є аналітичним законом, що віддзеркалює розвиток системи в умовах, коли відсутні обмеження.

Для розрахунку і побудови експоненти за методом найменших квадратів рекомендується перетворити її рівняння до вигляду:

$$\lg Y = aX + b$$

Це досягається шляхом логарифмування значень по осі *y*. На графіку в напівлогарифмічному масштабі отримується пряма лінія, що відповідає рішенню $\lg Y = 0{,}039X + 0{,}6143$ (рис. 4.6, табл. 4.7).

Таблиця 4.7

Розрахунок експонентної моделі динаміки ВВП, млн у.о.

Змінні	*Терміни спостереження*					*Прогноз*
	1926	***1939***	***1959***	***1980***	***1995***	***2010***
x	0	13	33	44	49	64
y фактич.	2	36	77	196	201	-
y розр.	4	13	80	214	401	1289

Експонентна модель добре передає значення, що спостерігаються для перших років (5-6), і відповідає загальній тенденції в динаміці досліджуваного явища. Однак на значні за часом періоди (більше 10 років) вона дає суттєві погрішності.

Для забезпечення більш точного прогнозування використовується метод «експонентного згладжування».

Процедура експонентного згладжування запропонована Ч. Хольтом і базується на припущенні того, що прогноз може бути отриманий на основі розрахунку рівняння вигляду:

$$\hat{x}_{\tau}(t) = \hat{a}_{1,t} + \tau \hat{a}_{2,t}, \qquad (4.12)$$

де $\hat{a}_{1,t}$, $\hat{a}_{2,t}$ – поточні оцінки коефіцієнтів адаптивного полінома першого порядку. Вони оцінюються в такий спосіб:

$$\hat{a}_{1,t} = \alpha_1 x_t + (1-\alpha_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1});$$

$$\hat{a}_{2,t} = \alpha_2 (\hat{a}_{1,t-1} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1-\alpha_2)\hat{a}_{2,t-1}.$$

Метод Ч. Хольта дозволяє прогнозувати на k періодів часу наперед. Значення параметрів α і β знаходяться в межах від 0 до 1. Змінна L_t указує на довгостроковий рівень значень або базове значення даних тимчасового ряду. Змінна T_t вказує на можливе зростання або зменшення значень за один період.

У цілому, використовуючи економіко-математичне модулювання для прогнозування явищ та тенденцій у світогосподарських процесах, слід мати на увазі те, що результати прогнозування в зовнішньоекономічній діяльності, які здійснюються за його допомогою, є приблизними. На процеси в зовнішньоекономічній діяльності впливають дуже багато факторів – зміна курсу національної валюти, рівень діяльності тіньової економіки, політична ситуація в країні й інші обставини. Передбачити все це і врахувати при економіко-математичному моделюванні дуже важко. Однак, не дивлячись на певне абстрагування, воно дає нам первинне уявлення про тенденції розвитку того чи іншого процесу, яке можна в подальшому коригувати доповнювати необхідними даними.

Питання для самоконтролю знань

1. Визначіть душовий ВВП країни, якщо дохід її громадян складає 3000 у.о. на місяць.
2. Напишіть відомі Вам формули математичних моделей, запозичених у точних наук, які можуть застосовуватися при аналізі й конструюванні просторової організації ринків збуту.
3. За допомогою формули $ТЗ_i = P_i + \sum_{1}^{m} P_j d_{ij}$, визначіть центр з мінімальними транспортними витратами для розміщення в ньому торговельного підприємства. Обсяги продаж: А = 34 тис. у.о.; Б = 43 тис. у о.; В = 55 тис. у.о.; Г = 29 тис. у.о.; Е = 71 тис. у.о. Відстані між ринковими центрами наведені у матриці.

Ринкові центри	1.А	2.Б	3.В	4.Г	5.Д	6.Е
1.А	-					
2.Б	282	-				
3.В	176	104	-			
4.Г	659	231	127	-		
5.Д	123	163	692	689	-	
6.Е	206	271	167	763	118	-

4. Розрахуйте параметри «*k*» *і «а»* рівняння $H_j = kH_1 \cdot j^{-a}$, а також коефіцієнт кореляції *R* між порядковими номерами ринкових центрів і їхнім купівельним попитом:
   1. 196,2 млн у.о.
   2. 96,8 млн у.о.
   3. 81,3 млн у.о.
   4. 25,8 млн у.о.
   5. 20,1 млн у.о.
   6. 11,9 млн у.о.
   7. 11,7 млн у.о.
   8. 10,8 млн у.о.
   9. 9,3 млн у.о.
   10. 5,1 млн у.о.

Користуючись розрахованими параметрами, визначіть перспективний купівельний попит у ринкових центрах 2-10, якщо його величина в головному ринковому центрі (1) збільшиться до 250 млн у.о.

5. Визначити потенціал попиту на товарну продукцію системи торгових центрів країн за формулою $V_i = P_i + \sum_{j=1, i=1}^{n} \frac{P_j}{d_{ij}}$ А, Б, В, Г, Д, якщо кількість жителів у них дорівнює відповідно 200, 250, 300, 150 і 300. Відстань між пунктами наведена на рис. 4.7.

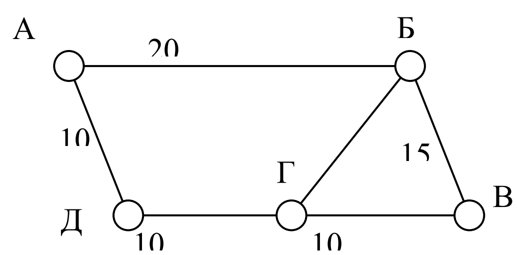


Рис. 4.7

6. За допомогою лінійного наближення побудуйте тренд зростання світового експорту на період до 2010 року.

	1960	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**	**2010**
Світовий експорт, млрд дол. США	1280	2345	3935	5985	9040	?

РОЗДІЛ 5. МАТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Ключові поняття: матриця, елементи, вектори, діагональ матриці, леонтьєвська матриця, міжгалузеві потоки, кінцевий продукт, коефіцієнти прямих витрат

Зовнішня торгівля, як і всі світогосподарські процеси в цілому, характеризується наявністю товарної і територіальної структур. Ці два боки її діяльності добре віддзеркалюються за допомогою матричних моделей.

Матриця являє собою прямокутну таблицю з m рядків і n стовпців, що несуть у собі певну інформацію.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij}, що утворюють матрицю, називаються її елементами. Матриця береться в круглі або прямі вертикальні дужки.

Найбільш розповсюдженими типами матричних моделей, які використовуються у зовнішньоекономічних дослідженнях, є:

- матриця виробництва, споживання, забезпеченості ресурсами;
- матриця транспортно-економічних, торговельних, виробничих й інших зв'язків.

У цих випадках математичне моделювання структурних співвідношень і зв'язків господарства становить упорядковану систему величин (векторів) довільної природи, які розташовані у певній послідовності у формі прямокутної таблиці, що містить n стовпців і m рядків:

$$P_{ij} = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & m_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & m_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots & m_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & m_n \end{Vmatrix}.$$

Кожен стовпець такої матриці є однією (із загального числа m) територією (країною, регіоном, торговий центром і ін.) з номером k, $k = 1, 2, 3, ..., m$**;** кожен рядок – певний (із загального числа n) вид товарного ресурсу або послуг з номером $i = a, b, c, ..., m$.

На перетині *i-го* рядка і *k-го* стовпця (тобто, в клітинці *i, k*) вказується той або інший економічний факт, що характеризує *k-ю* територію в аспекті *i-го* компонента її діяльності. Будь-який фіксований рядок при цьому показує, як змінюється в просторі (від місця до місця) той або інший виділений компонент. Довільно фіксований стовпчик характеризує, як сполучаються один з одним компоненти економічної діяльності країн, регіонів, торговельних центрів.

Цілком закономірні угруповання як по рядках (компонентів), так і по стовпцях (територій).

Остання умова дозволяє виділяти країни (регіони, торговельні центри) певної виробничої або торговельної спеціалізації, а також моделює розходження в напряму господарської діяльності, що здійснюється на досліджуваному економічному просторі. Крім того, шляхом зіставлення даних матриць, складених для різних років того або іншого економічного простору (або господарської сукупності), можна простежити динаміку її соціально-економічного розвитку або будь-яких інших сторін її життя.

Як вихідні територіальні одиниці (суб'єкти) зовнішньоекономічної діяльності при матричному моделюванні можуть виступати як країни, так і їхні окремі райони, міста, провінції, господарські об'єднання і т. п.

Вище був наведений приклад прямокутної матриці ||P||, що моделює виробництво різних видів товарів і послуг у розрізі територій (країн, районів, торговельних центрів). Кожен рядок такої матриці – вектор, що характеризує обсяг і склад виробленої продукції суб'єктами виробничої діяльності (тобто територіями або іншими господарськими суб'єктами). Кожен стовпчик – вектор, що характеризує обсяг виробництва якогось виду продукції в розрізі територій (або інших суб'єктів господарської діяльності). У такій матриці число стовпчиків n, як правило, не дорівнює числу рядків m.

На відміну від розглянутої матриці інша матриця, що моделює транспортно-економічні, виробничо-технологічні й торговельні зв'язки між країнами, регіонами та центрами, повинна мати число рядків, яке дорівнює числу стовпчиків ($m = n$). Тому вона має вигляд квадратної матриці:

$$Q_{ij} = \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2m} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \cdots & q_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & \cdots & q_{nm} \end{Vmatrix}$$

Елемент матриці, що знаходиться поза діагоналлю, наприклад q_{23}, характеризує обсяг споживання в 3-й країні якогось виду продукції (товару або послуг), який виробляється 2-ю країною. Як видно з матриці, головна її діагональ у кожнім своєму елементі має пари однакових індексів ($q_{11}, q_{22}, q_{33}, \ldots, q_{mn}$, де $m = n$). Це означає, що якась частина обсягу виробленої продукції в даній країні тут же, на місці, і споживається.

Кожна симетрична (розташована симетрично щодо головної діагоналі) пара елементів матриці (наприклад, q_{31} і q_{13}) характеризує двосторонні транспортно-економічні (виробничо-технологічні, торговельні) зв'язки між країнами (або іншими суб'єктами діяльності).

Так званий «слід» матриці – сума елементів, що лежать на головній діагоналі, – показує загальний обсяг виробництва у всіх країнах (суб'єктах діяльності) для місцевих потреб. Сума інших елементів матриці дорівнює загальному обсягові продукції, які беруть участь у товарообігу.

Кожен рядок матриці ($q_{11}, q_{12}, q_{13}, ..., q_{mn}$) – вектор, що характеризує розмір виробництва продукції (товарів і послуг) в певній країні (регіоні, центрі) і географічну структуру її експорту (розподілу по інших суб'єктах економічної діяльності).

Кожен стовпчик матриці $\begin{Bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \\ \dots \\ q_{n1} \end{Bmatrix}$ являє собою вектор, що характеризує розміри споживання продукції (товарів і послуг) у певній країні (регіоні, центрі) та географічну структуру її імпорту (з інших країн, регіонів, центрів).

Матриці дозволяють наочно моделювати міжгалузеві та міждержавні виробничо-технологічні й економічні зв'язки, спрощують їхній аналіз і дають можливість вирішувати задачі з раціоналізації зовнішньоекономічної діяльності. Їхнє використання дозволяє будувати балансові моделі й здійснювати практично всі математичні дії.

Складання і віднімання. Складання і віднімання матриць здійснюється в разі їхньої однієї розмірності:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{A+B-C} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+5 \\ 3-3 & 0+2 \\ 2+3 & 1-1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки віднімання – дія, зворотна складанню, порядок його виконання при роботі з матрицями аналогічний складанню, міняються лише знаки.

Множення і ділення. При множенні (діленні) матриці на яке-небудь число всі елементи матриці множаться (діляться) на це число і набуті значення записуються в нову матрицю

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} x3 = \begin{pmatrix} 03 & 23 & 13 \\ 13 & 03 & 03 \\ 23 & 33 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Аналогічно здійснюється ділення матриць на яке-небудь число.

Множення (ділення) матриці на матрицю робиться як множення (ділення) вектора рядка однієї матриці на вектор стовпчика іншої матриці (або навпаки).

$$\text{Хай } A = (1240), \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тоді,

$$A * B = \begin{pmatrix} 1*1 & 2*1 & 4*1 & 0*1 \\ 2*1 & 2*3 & 4*3 & 0*3 \\ -1*1 & -1*2 & -1*4 & -1*0 \\ 1*0 & 2*0 & 4*0 & 0*0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 12 & 0 \\ -1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

При перемножуванні квадратних матриць елементи і-го рядка лівого співмножника на відповідні елементи j-го стовпця правого співмножника

$$\text{Дано } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \text{ x } B = C; \; C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ x } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_{11} = 0*1\ 2*2\ 1*1 = 5$ $\qquad$ $C_{21} = 0*2\ 2*1\ 1*3 = 5$
$C_{12} = 1*1\ 3*2\ 1*1 = 8$ $\qquad$ $C_{22} = 1*2\ 3*2\ 1*3 = 11$
$C_{13} = 2*1\ 1*2\ 1*3 = 7$ $\qquad$ $C_{23} = 2*2\ 1*1\ 1*3 = 8$

$C_{31} = -1*0\ 2*0\ 1*1 =1$
$C_{32} = -1*1\ 3*0\ 1*0 = -1$
$C_{33} = -1*2\ 1*0\ 1*1 = 0$

Результатом перемноження наведених у прикладі матриць є нова матриця, елементи якої дорівнюють алгебраїчній сумі добутків двох матриць, що знаходяться на одному місці

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 5 & 11 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Виконання арифметичних дій з матрицями відкриває можливості для спрощення обробки соціально-економічної інформації та здійснення розрахунків безпосередньо за згрупованими даними, істотно полегшуючи працю дослідника.

Матриці успішно використовуються в практиці побудови міждержавних і міжгалузевих балансових моделей виробничо-технологічних зв’язків, балансової моделі співвідношення населення і трудових ресурсів, балансової моделі зовнішньоекономічних відносин й ін.

Не дивлячись на певні відмінності в матричних моделях, що складаються для різних цілей народного господарства, вони характеризуються єдністю схеми побудови, системою розрахунків й економічних показників. Це дозволяє розглянути їхній зміст, структуру та основні залежності на прикладі однієї з моделей. Як приклад розглянемо так звану «леонтьєвську матрицю» – «витрати–випуск», яка може бути використана для дослідження й конструювання як міжгалузевих, так і міжнародних (міжрайонних) економічних зв'язків (табл. 5.1).

Дана матриця являє собою емпіричну модель рівноваги. Її особливістю є відповідність підсумків за витратами і випуску. Якщо такий баланс не дотримується – вводиться графа «неузгодженостей», аналізуються причини їхнього виникнення і намічаються шляхи до усунення.

Таблиця 5.1

Модель «витрати–випуск»

Країни-імпортери	***1***	***2***	***...***	***n***	***Разом***	***Кінцевий продукт***			$\sum_{1}^{n}$
Країни-експортери						***Експорт***	***Споживання***	***Накопичення***	
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1n}	$\sum_{1}^{n} x_{1j}$	C_1	K_1	e_1	X_1
2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2n}	$\sum_{1}^{n} x_{2j}$	C_2	K_2	e_2	X_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	X_{n1}	X_{n2}	...	X_{nn}	$\sum_{1}^{n} x_{nj}$	C_n	K_n	e_n	X_n
Разом	$\sum_{1}^{n} x_{i1}$	$\sum_{1}^{n} x_{i2}$	...	$\sum_{1}^{n} x_{in}$	$\sum_{1}^{n}\sum_{1}^{n} x_{ij}$	$\sum_{1}^{n} C_i$	$\sum_{1}^{n} K_i$	$\sum_{1}^{n} e_i$	$\sum_{1}^{n} X_{ij}$
Імпорт	U_1	U_2	...	U_n	$\sum_{1}^{n} U_i$				
Оплата праці	V_1	V_2	...	V_n	$\sum_{1}^{n} V_i$				
Прибуток	P_i	P_2	...	P_n	$\sum_{1}^{n} P_i$				
$\sum_{1}^{n}$	X_1	X_2	...	X_n					

У таблиці 4 квадранти:

1	2
3	4

У 1-му наводяться потоки проміжних продуктів. Його економічний зміст полягає в характеристиці матеріальних цінностей, що споживаються в технологічному процесі виробничого циклу і ніби там «згоряють».

У 2-й заносяться дані про накопичення матеріальних цінностей для використання їх у наступному виробничому циклі, тобто це кінцевий продукт (валова додана вартість у матеріальному вираженні).

У 3-му наводяться дані про витрати й матеріальні цінності, які запозичені з попередніх виробничих циклів. По суті, це та ж додана вартість у грошовому вимірі.

У 4-му характеризується перерозподіл фінансових коштів і матеріально-технічних ресурсів між попереднім і наступним виробничо-технологічним або торгово-розподільчими циклами.

Матриця дає наочне уявлення (фотографію) про зв’язки міжнародного торгово-економічного (або виробничо-технологічного) комплексу. Крім цього, вона має ще й інші корисні якості. Зокрема, за нею можна визначити коефіцієнти прямих і повних витрат, а за ними – кінцевий продукт і ВВП країни (або будь-якого іншого суб'єкта господарської діяльності) та його зовнішньоекономічну складову.

Коефіцієнти прямих витрат – це питомі витрати матеріальних цінностей для виробництва одиниці валової продукції. Вони знаходяться за формулою:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{Xj}, \qquad (5.1)$$

де a_{ij} – коефіцієнт прямих витрат;

x_{ij} – витрати виробництва;

X_j – валовий продукт;

i, j – номери рядка і стовпчика матриці.

Як приклад розглянемо матрицю міждержавних зв'язків типу «витрата–випуск» (табл. 5.2).

Таблиця 5.2

Матриця міждержавних зв’язків типу «витрати–випуск»

Країни-постачальники	***Країни-споживачі***			***Кінцевий продукт***		$\sum_{1}^{n}$
	1	***2***	***3***	***Вивіз***	***Особисте споживання і накопичення***	
1	100	6	1	370	1	478,0
2	215	0,7	0,3	53,6	0,4	270,0
3	29	0,3	1,4	25	87	142,7
Ввіз	10	160	98	–	–	–
Оплата праці і прибуток	124	103	42	–	–	–
$\sum$	478,0	270,0	142,7	–	–	890,7

Відповідно до формули (5.1) коефіцієнти прямих витрат визначаються в таких значеннях:

$a_{11} = \frac{100}{478} = 0.21$ $a_{21} = \frac{215}{478} = 0.45$ $a_{31} = \frac{29}{478} = 0.06$

$a_{12} = \frac{6}{270} = 0.02$ $a_{22} = \frac{0.7}{270} = 0.003$ $a_{32} = \frac{0.3}{270} = 0.001$

$a_{13} = \frac{1}{142.7} = 0.008$ $a_{23} = \frac{0.3}{142.7} = 0.002$ $a_{13} = \frac{1.4}{142.7} = 0.001$

Умовно уявимо, що побудована нами модель – це міждержавні виробничі зв'язки в галузі тракторобудування (наприклад, між Україною, Росією і Білоруссю). Треба скоригувати дану модель, бо зросла потреба на продукцію галузі. Це відносно легко зробити за допомогою рівняння:

$$\sum_{1}^{n} a_{ij} X_j + K_i = X_i\ , \qquad (5.2)$$

де a_{ij} – коефіцієнт прямих витрат;

X_i – новий обсяг виробництва;

K_i – кінцевий продукт.

Нехай нові обсяги по країнах в галузі тракторобудування умовно складуть:

$$X_1^{'} = 500, \qquad X_2^{'} = 300, \qquad X_3^{'} = 150.$$

Тоді, відповідно до формули, обсяги міждержавних виробничих зв'язків складуть:

$$0{,}2X_1^{'} + 0{,}02X_2^{'} + 0{,}008X_3^{'} + K_1 = 500$$

$$0{,}45X_1^{'} + 0{,}03X_2^{'} + 0{,}002X_3^{'} + K_2 = 300$$

$$0{,}05X_1^{'} + 0{,}01X_2^{'} + 0{,}01X_3^{'} + K_3 = 150$$

Із формули (5.1) випливає, що обсяги міждержавних виробничих потоків x_{ij} дорівнюють:

$$x_{ij} = a_{ij} X_1^{'}. \qquad (5.3)$$

Будується така система рівнянь:

$$0{,}21 \cdot 500 + 0{,}02 \cdot 300 + 0{,}008 \cdot 150 + K_1 = 500$$

$$0{,}45 \cdot 500 + 0{,}003 \cdot 300 + 0{,}002 \cdot 150 + K_2 = 300$$

$$0{,}06 \cdot 500 + 0{,}001 \cdot 300 + 0{,}01 \cdot 150 + K_3 = 150$$

$105 + 15 + 1{,}2 + K_1 = 500$, де $K_1 = 378{,}8$

$225 + 0{,}9 + 0{,}3 + K_2 = 300$, де $K_2 = 73{,}8$

$30 + 0{,}3 + 1{,}5 + K_3 = 150$, де $K_3 = 118{,}2$

Таким чином виникає нова матриця міждержавних виробничих зв'язків (табл. 5.3).

Таблиця 5.3

Країни-постачальники	*Країни-споживачі*			*Кінцевий продукт(K)*	$\sum_{1}^{n}$
	1	*2*	*3*		
1	105	15	1,2	378,8	500
2	225	0,9	0,3	73,8	300
3	30	0,3	1,5	118,2	150
Додана вартість (L)	140	283,8	147	570,8	–
$\sum_{1}^{n}$	500	300	150	–	950

Розрахунок за валовими обсягами виробництва й коефіцієнтами прямих витрат міжгалузевих (міждержавних) потоків дає лише приблизне уявлення про кінцевий результат планування (планування «по валу» практикувалося при адміністративно-командній системі управління розвитком господарства). У наш час у світі всі розрахунки по в'язані з показниками випуску кінцевої продукції, тобто ВВП.

Розглянемо приклад рішення подібної задачі по заданих обсягах виробництва кінцевої продукції.

Припустимо, що на розрахунковий період задана матриця коефіцієнтів прямих витрат *а* і вектор обсягів виробництва кінцевої продукції *У:*

$$a = \begin{vmatrix} 0{,}30 & 0{,}25 & 0{,}20 \\ 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}03 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}08 \end{vmatrix}; \quad У = \begin{vmatrix} 56 \\ 20 \\ 12 \end{vmatrix}$$

Для розрахунку валової продукції складемо систему рівнянь:

$$X_1 = 0{,}30X_1 + 0{,}25X_2 + 0{,}20X_3 + 56$$

$$X_2 = 0{,}15X_1 + 0{,}12X_2 + 0{,}03X_3 + 20$$

$$X_3 = 0{,}10X_1 + 0{,}05X_2 + 0{,}08X_3 + 12$$

Перенесемо всі доданки, що містять невідомі величини, у ліву частину рівнянь. Одержимо:

$$0{,}70X_1 – 0{,}25X_2 – 0{,}2X_3 = 56$$

$$–0{,}15X_1 + 0{,}88X_2 – 0{,}03X_3 = 20$$

$$–0{,}10X_1 – 0{,}05X_2 + 0{,}92X_3 = 12$$

Для рішення системи можна застосувати метод послідовного виключення Гаусса. При цьому методі спочатку одне з рівнянь треба перетворити так, щоб коефіцієнт при X_1 дорівнював одиниці, а з інших рівнянь X_1 виключається взагалі. На наступному кроці домагаються одиничного коефіцієнту при X_2 у другому рівнянні й виключають X_2 із усіх наступних рівнянь. Продовжуючи обчислення, в кінцевому підсумку одержуємо систему, у якій останнє рівняння містить лише одну невідому величину, а кожне попереднє на одну більше. Потім шляхом зворотної підстановки, переходячи крок за кроком від останнього рівняння до першого, можна знайти значення всіх невідомих величин.

У розглянутому прикладі зручніше трохи змінити послідовність рівнянь і третє рівняння поставити на перше місце. Перша дія буде полягати в такому: третє рівняння (переставлене на перше місце) ділимо на – 0,1, потім отримане рівняння множимо на 0,7 і окремо на 0,15 (і віднімаємо відповідно з другого і третього рівнянь). У результаті одержимо таку систему:

$$X_1 + 0{,}5X_2 - 9{,}2X_3 = -120$$
$$-0{,}6X_2 + 6{,}24X_3 = 140$$
$$0{,}955X_2 - 1{,}41X_3 = 2$$

У наступній дії ділимо друге рівняння на -0,6 для того, щоб коефіцієнт при X_2 став рівним одиниці. Отримане рівняння множимо на 0,955 і віднімаємо з третього рівняння. У підсумку одержуємо систему:

$$X_1+0{,}5X_2-9{,}2X_3=-120$$
$$X_2-10{,}4X_3=-233{,}333$$
$$8{,}522X_3=224{,}832$$

З останнього рівняння знаходимо:

$$X_3 = 26{,}38.$$

Підставляючи це значення в друге рівняння, отримаємо:

$$X_2 = 41{,}02.$$

Нарешті, з першого рівняння маємо:

$$X_1 = 102{,}22.$$

Таким чином, ми одержали планові обсяги валового виробництва продукції трьох країн за заданим значенням кінцевої продукції і відомих коефіцієнтів прямих матеріальних витрат.

Користуючись рівнянням $X_{ij} = a_{ij} X_j$, тепер маємо можливість визначити величини міждержавних потоків продукції:

$$X_{11} = 0{,}3*102{,}2 = 30{,}6$$
$$X_{12} = 0{,}25*41{,}0 = 10{,}3$$
$$X_{13} = 0{,}20*26{,}4 = 5{,}3$$

Аналогічним шляхом розраховуються інші значення міждержавних потоків.

Отримані значення заносимо в леотьєвську матрицю.

Віднімаючи по стовпцях таблиці від обсягів валової продукції сумарні значення міжгалузевих потоків, знаходимо величину чистої продукції (табл. 5.4).

Таблиця 5.4

Країни-споживачі / Країни-виробники	**A**	**B**	**C**	**Кінцева продукція**	**Валова продукція**
A	30,6	10,3	5,3	56	102,2
B	15,3	4,9	0,8	20	41,0
C	10,2	2,1	2,1	12	26,4
Чиста продукція	46,1	23,7	18,2	-	-
Валова продукція	102,2	41,0	26,4	-	169

Розглянутий приклад розрахунків ілюструє можливості використання математичної моделі «леонтьєвської матриці» для побудови збалансованих планів міжнародних економічних зв’язків. Розрахунки міжгалузевих балансів у регіональному аспекті (по регіонах або їхніх більш дрібних таксономічних підрозділах) дозволяють складати й аналізувати господарські зв'язки у просторовому відношенні.

Питання для самоконтролю знань

1. Який вид матриці може бути використаний для аналізу і конструювання міжнародних торговельно-економічних зв’язків? Що віддзеркалюють у такій матриці її елементи, рядки, стовпці, діагональ?
2. Скориставшись даними табл. 5.3, розрахуйте коефіцієнти прямих витрат для даної матриці міжнародних виробничо-технологічних зв'язків. Визначіть нові значення міжнародних виробничо-технологічних потоків при збільшенні валових випусків ($\sum_{1}^{n}$) до 600, 400, 200 млн у.о.
3. По заданих обсягах кінцевого продукту k

$$k = \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

   і коефіцієнтові прямих витрат a_{ij}

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

   розрахуйте міжгалузеві потоки і валовий обсяг трьох країн у спільному виробництві та реалізації i-ї продукції.

РОЗДІЛ 6. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Ключові поняття: математичне програмування, лінійне програмування, транспортні задачі, спосіб «північно-західного кута», симплекс-метод, базисний план, оптимальний план

6.1. Загальні положення

Лінійне програмування – один із центральних розділів математичного програмування. Використання методів математичного програмування дозволяє вирішувати складні економічні задачі, де одночасно повинні враховуватися різні вимоги розвитку продуктивних сил, з одного боку, а також умови та чинники їхнього розвитку — з другого. Зазвичай задачі такого роду називаються задачами на оптимальність, а методи їхнього рішення об'єднуються під загальною назвою оптимального програмування.

Оптимальне програмування являє собою сукупність рішення екстремальних задач, у яких потрібно визначити максимальні та мінімальних функції одного або декількох аргументів.

Ідеї розробки рішення задач на оптимальність відносяться ще до початку XIX ст. Зокрема, спроби його застосування до задач визначення та обґрунтування зон сільськогосподарського виробництва мали місце ще в роботах німецького вченого І. Тюнена. Однак розробка самого математичного апарату оптимального програмування почалася тільки наприкінці 30-х років минулого століття. Одним із його засновників був радянський учений Л. В. Канторович, який у 1939 р. уперше у світі запропонував метод рішення екстремальних економічних задач за допомогою лінійного програмування.

У наш час лінійне програмування — один з найбільш досконально розроблених методів математичного програмування, що широко використовується у наукових дослідженнях та в практиці вирішення логістичних задач. Воно поєднує теорію і методи рішення певного класу задач, у яких потрібно знайти сукупність значень змінних величин, що задовольняють задані лінійні обмеження й максимізують (або мінімізують) деяку лінійну функцію цих змінних.

Термін «лінійне програмування» увів у науку американський математик Дж. Данциг. Слово «програмування» розуміється в нього так: «...невідомі змінні, котрі відшукуються в процесі рішення задачі і зазвичай в сукупності визначають програму (план) роботи деякого економічного об'єкта». Від цього – одне із ключових слів – програмування. При цьому задача обов'язково має екстремальний характер, тобто полягає у відшуканні екстремуму (максимуму або мінімуму) цільової функції, яким можуть бути, наприклад, максимум продукції (прибутку) або мінімум витрат і т. ін. Прикметник «лінійне» означає пряму пропорційну залежність між змінними. Наприклад, збільшення на 5 % кількості робочих годин і заготівель підвищує виробництво продукції на стільки ж відсотків. Оскільки тут розглядаються саме такі взаємозв'язки, метод отримав назву «лінійного програмування».

Пояснимо це на конкретному прикладі. Припустимо, що ТНК може виробляти два види продукції – велосипеди й мотоцикли. Воно може виробити велосипедів 100 тис. штук за рік, а мотоциклів – 30 тис. При цьому дві філії ТНК можуть виробляти деталі: в одній країні для 40 тис. мотоциклів або для 120 тис. велосипедів, у другій – відповідно 60 і 80 тис.

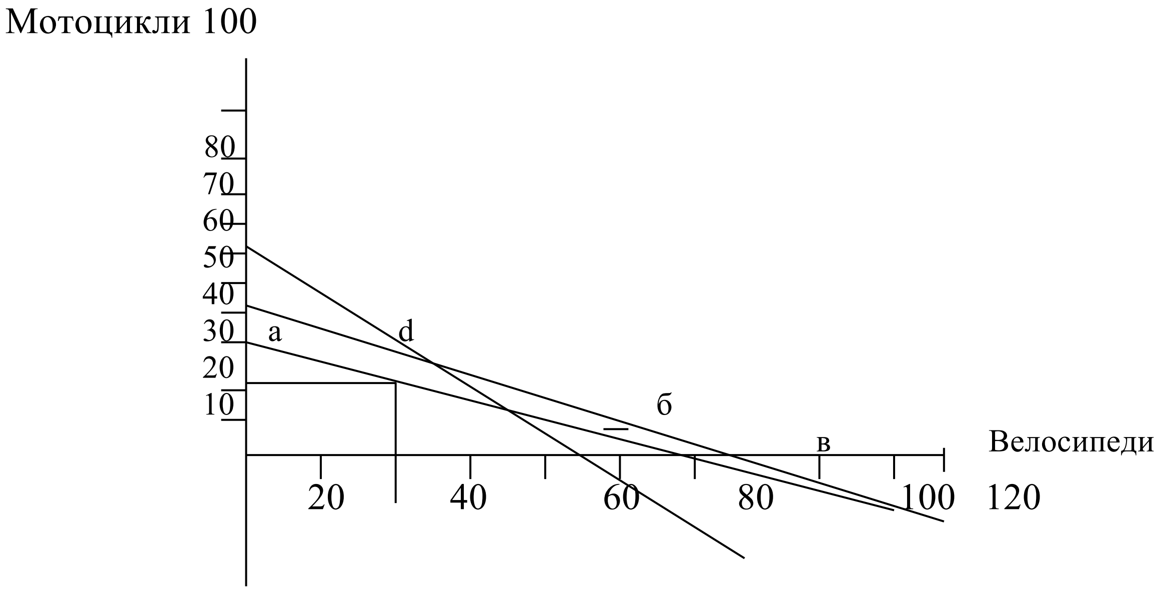


Рис. 6.1. Задача лінійного програмування у графічній постановці

Максимум випуску продукції лежить на площині так званої «свободи рішень», яка знаходиться у межах ламаної лінії а-б-в. Можна, наприклад, виробляти 22 тис. мотоциклів і 30 тис. велосипедів (точка d на графіку рис. 6.1) або вибрати інший варіант – збільшити виробництво велосипедів за рахунок зменшення виробництва мотоциклів. Тут вступає у дію другий елемент економіко-математичного моделювання задачі – прибуток. Припустимо, що кожна тисяча велосипедів дає 3000 у. о. прибутку, а кожна тисяча велосипедів – 2000.

Перейдемо тепер до тривимірного графіку (рис. 6.2) і в кожній точці площини «свободи рішень» установимо перпендикуляри у можливих рішеннях вибору обсягів виробництва продукції. Одержимо нову площину, що починається в точці початку координат і ніби нависає над площиною «свободи рішень». Це буде площина прибутку.

Чим вище буде точка цієї площини над площиною координат *XOY,* тим більше прибуток.

Точкою, яка віддзеркалює оптимальний план, як видно із графіку на рис. 6.2, буде та, що знаходиться під найвище розміщеною точкою на площині прибутку (на межі площини «свободи рішень»). Це – точка 0_2.

Підрахунок показує, що прибуток у зазначеній точці складе 175 тис. у. о. (3000 *25 + 2000 • 50). У будь-якому іншому місці площини він буде менший.

Таким чином, задача лінійного програмування зводиться до знаходження точки, яка відповідає оптимальному плану.

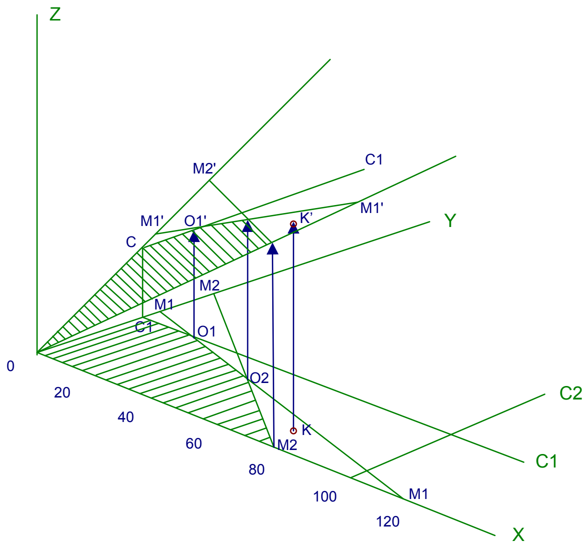


Рис. 6.2. Тривимірний графік геометричної постановки задачі лінійного програмування

(x — велосипеди в тис. шт., y – мотоцикли в тис. шт.)

Нами розглянута проста задача з двома змінними, але реальні задачі включають зазвичай множину змінних, і їх не можна показати на кресленні. Математики для такої постановки економіко-математичної задачі використовують абстрактні багатомірні простори. На цій базі розроблено цілий ряд обчислювальних методів, що дозволяють вирішувати на ЕОМ задачі лінійного програмування, які нараховують сотні й тисячі змінних, нерівностей і рівнянь.

Лінійне програмування у наш час – одна з математичних дисциплін, що вивчає засоби знаходження найменшого або найбільшого значення лінійної функції декількох змінних. В аналізі й розробках зовнішньоекономічної діяльності лінійне програмування може успішно використовуватися для рішення задач із оптимізації розвитку і територіальної організації транспортно-економічних зв'язків. За допомогою цього методу можна знаходити раціональний варіант розподілу заданого обсягу виробництва і споживання окремих товарів між країнами, при якому сума витрат була б найменшою; прикріплення пунктів виробництва до споживачів так, щоб загальний пробіг вантажів у тис. км (або загальний обсяг витрат на перевезення) був би мінімальним.

$$\sum_{1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow Z_{\min}\ , \qquad (6.1)$$

де C_{ij} – приведені витрати на одиницю продукції;

x_{ij} – обсяг переміщення товарів.

Рішення задач лінійного програмування вимагає дотримання певних обмежень. Наприклад, обсяг виробництва експортної продукції в кожній країні не повинен перевищувати визначений максимум або бути нижчим за мінімум, що може допускатися в даній задачі. Крім того, необхідно, щоб показники, які підлягають оптимізації, були виражені рівняннями першого ступеня від незалежних змінних, і всі обмеження, у зв'язку з цим повинні також мати вигляд лінійних нерівностей або рівностей:

$$\sum_{1}^{n} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} \le \sum_{1}^{n} a_i \text{;} \qquad (6.2)$$

$$\sum_{1}^{n} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} \le \sum_{1}^{n} b_j \text{;} \qquad x_{ij} \ge 0 .$$

Рішення задач лінійного програмуваня може здійснюватись у графічній, матричній і мережній постановці.

Задача лінійного програмування у графічній постановці була розглянута вище. Як найпростішу задачу лінійного програмування у матричній постановці можна розглянути такий приклад.

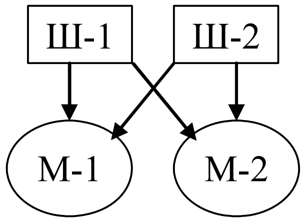


Рис. 6.3. Варіанти постачання

Маємо 2 шахти (Ш-1 і Ш-2), що постачають вугілля 2 містам (М-1 і М-2) (рис. 6.3). Відомий видобуток вугілля на шахтах (a_1 і a_2), потреба міст у вугілі (b_1 і b_2), собівартість перевезення 1т вугілля (c_{ij}).

Потрібно визначити напрямок і обсяг перевезень (x_{ij}).

Для рішення такої задачі скористаємося матричною моделлю, що віддзеркалює структуру транспортних постачань продукції.

	М-1	М-2
Ш-1	X_{11}	X_{12}
Ш-2	X_{21}	X_{22}

(Тут X_{ij} – обсяг постачань продукції.)

Аналогічно виражаємо і собівартість перевезень 1 т продукції:

	М-1	М-2
Ш-1	C_{11}	C_{12}
Ш-2	C_{21}	C_{22}

Оскільки сутність рішення лінійного програмування у даному випадку полягає у знаходженні найменшого значення лінійної функції (6.1), – для визначення оптимального варіанта напрямку й обсягу перевезень необхідно, щоб:

$$C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + C_{21}X_{21} = Z_{\min} ,$$

де $C_{ij}X_{ij}$ – сума витрат.

Виражаємо обмеження даної задачі:

1. Постачання вугілля шахти Ш-1 містам М-1 і М-2 не повинна перевищувати видобутку вугілля на Ш-1:

$$X_{11} + X_{12} \leq \sum a_1 .$$

Аналогічно для Ш-2:

$$X_{22} + X_{21} \leq \sum a_2 .$$

2. Постачання вугілля містам М-1 і М-2 повинно бути не менше за їхню потребу:

$$X_{11} + X_{12} \geq b_1 ,$$
$$X_{22} + X_{21} \geq b_2 .$$

3. Невідомі X_{ij} (обсяг постачань) повинні мати позитивні значення (у протилежному випадку мали би місце зустрічні перевезення).

$$X_{ij} \geq 0.$$

Задачі даного класу об'єднуються зазвичай однією назвою – «транспортні задачі», але більш коректно називати їх транспортно-економічними задачами.

6.2. Способи рішення транспортно-економічних задач у матричній постановці

Існує кілька способів рішення транспортно-економічних задач лінійного програмування в матричній постановці. Розглянемо деякі з них.

Спосіб «північно-західного кута» (П-З кута). За цим способом рішення задачі розпочинається із заповнення крайньої північно-західної клітини матриці. Далі заповнюються інші клітини, і будується початковий план, який шляхом поступових ітерацій (розподільчої схеми) удосконалюється до отримання його оптимального варіанта.

Припустимо, маємо постачальників $A_1 = 20$, $A_2 =2\ 4$, $A_3 = 28$ та споживачів $B_1 = 16$, $B_2 = 34$, $B_3 = 22$. Транспортні витрати:

$$C_{11} = 2,\quad C_{12} = 1,\quad C_{13} = 5$$
$$C_{21} = 3,\quad C_{22} = 4,\quad C_{23} = 3$$
$$C_{31} = 4,\quad C_{32} = 6,\quad C_{33} = 6$$

Таблиця 6.1

А)

	16	34	22
20	2 – 16	1 – 4	5
24	3 +	4 – 24	3
28	4	6 + 6	6 22

а) 1,3; 5 – 6 + 6 – 1= + 4

2,1; 3 – 2 + 1 – 4= –2

Б)

	16	34	22
20	2	1 20	5
24	3 16	4 – 8	3 +
28	4	6 + 6	6 – 22

б) 2,3; 3 – 6 + 6 – 4= – 1

В)

	16	34	22
20	2	1 20	5
24	3 – 16	4	3 + 8
28	4 +	6 14	6 – 14

в) 3,1; 4 – 3 + 3 – 6 = – 2

Г)

	16	34	22
20	2	1 20	5
24	3 – 2	4 +	3 22
28	4 + 14	6 – 14	6

г) 1,1; 2 – 1 + 6 – 4 = + 3
1,3; 5 – 3 + 3 – 4 + 6 – 1 = + 6
2,2; 4 – 3 + 4 – 6 = – 1
3,3; 6 – 4 + 3 – 2 = + 2

Д)

	16	34	22
20	2	1	5
24	3	4 2	3 22
28	4 16	6 12	6

д) 1,1; 2 – 4 + 6 – 1 = 3
1,3; 5 – 3 + 3 – 1 = 4
2,1; 3 – 4 + 6 – 4 = 1
3,3; 6 – 6 + 4 – 3 = 1
(усі характеристики клітинок позитивні, план – оптимальний)

При даному методі велика частка часу йде на оцінку поставок по клітинках. Розрахунки вельми громіздкі. Для скорочення кількості обчислювальних операцій є способи побудови початкового плану, поліпшення якого дозволяє за відносно невелику кількість циклів перерахунку знайти оптимальний варіант рішення задачі. Розглянемо деякі з них.

Спосіб найменшого елемента по стовпчику або рядку матриці.

При даному способі по стовпчиках (або рядках) заповнюються клітинки з найменшими значеннями елементів (відстаней, собівартості та ін.) до повного задоволення споживачів (по стовпчиках, табл. 6.2, А) або постачальників (по рядках, табл. 6.2, Б).

Таблиця 6.2

По стовпчику

А

	6	8	4	10	7	5
10	6	5	0 4	1 6	8	2
12	2	3	2	2 4	2 6	0
4	1 4	4	5	0	6	7
14	8	1 8	0	11	3 1	5 5

По рядку

Б

	6	8	4	10	7	5
10	6	5	0 4	1 6	8	2
12	2	3	2	2	2 7	0 5
4	1	4	5	0 4	6	7
14	8 6	1 8	0	11	3	5

Спосіб найменшого елемента в матриці. При даному методі почергово заповнюються клітинки, починаючи з найменших елементів матриці взагалі (в даному прикладі з 0), аж до побудови плану (табл. 6.3).

Таблиця 6.3

	6	8	4	10	7	5
10	6	5	0 4	1 6	8	2
12	2 6	3	2	2	2 1	0 5
4	1	4	5	0 4	6	7
14	8	1 8	0	11	3 6	5

У кожному конкретному випадку дослідник вибирає сам зручний для нього спосіб. Але, на наш погляд, найбільш зручний із них є метод "найменшого елемента матриці". Для підтвердження цієї тези розглянемо можливість знаходження оптимального плану в раніше наведеній транспортній задачі (табл. 6.4).

Таблиця 6.4

	16	34	22
20	2	1 20	5
24	3 2	4	3 22
28	4 14	6 14	6

Використавши спосіб "найменшого елемента матриці", будуємо базисний план:

1,1; 2 – 4 + 6 – 1 = +3
1,3; 5 – 3 + 3 – 4 + 6 – 1 = +6
2,2; 4 – 3 + 4 – 6 = –1
3,3; 6 – 4 + 3 – 2 = +2

За допомогою розподільного методу покращення початкового (базисного) плану знаходимо оптимальний варіант (табл. 6.5).

Таблиця 6.5

	16	34	22
20	2	1 20	5
24	5	4 2	3 22
28	4 16	6 12	6

Таким чином, у два заходи знайдено рішення задачі, в той час як при побудові вихідного плану за правилом П-З кута (табл. 6.1) на це знадобилось 5 циклів перерахунку.

Метод потенціалів – один з найбільш зручних методів для вирішення екстремальних задач лінійного програмування в транспортній постановці. Він включає в себе такий алгоритм дій:

1. Побудова базисного плану. При цьому треба забезпечити «викреслюваність» клітинок і щоб кількість заповнених клітин не перевищувала співвідношення: m + n – 1, де m – кількість рядків, n – кількість стовпців.
2. Обчислення потенціалів рядків та стовпців (U_i+V_j) як складових елементів заповнених клітинок.
3. Визначення характеристик клітинок за формулою:

E_{ij} = C_{ij} – C_{ij}, при C_{ij} = (U_i + V_j), де E_{ij} – характеристики клітинок, U_i – потенціали стовпчиків, V_j – потенціали рядків.

4. Перерахунок плану по ланцюгу (перерозподіл поставок) при знаходженні клітинок з негативними характеристиками.

Таблиця 6.6

	16	34	22	V_j
20	2	1 20	5	0
24	3 - 2	4 +	3 22	4
28	4	6	6	5

	+ 14	- 14		

1,1; 2 > (–1 + 0)
1,3; 5> (–1 + 0)

2,2; 4< (1 + 4)
3,2; 6 > (–1 + 5)

U_i = –1 1 –1

Клітинка 2.2 має негативну характеристику, оскільки $E_{22} = 4 – (1 + 4) = –1$. Заповняємо її та робимо цикл перерахунку в відповідності до знаків «+» та «–».

Таблиця 6.7

	16	34	22	V_j
20	2	1 20	5	1
24	3	4 2	3 22	4
28	4 16	6 12	6	6
U_i =	–2	0	–1	

В цьому варіанті характеристики всіх клітинок позитивні – задача вирішена.

Ускладнення постановки транспортної задачі

Відсутність балансу в поставках та споживанні. До одних з найпоширеніших ускладнень відноситься наявність диспропорцій в поставках і споживанні – так званий варіант «відкритої задачі», коли

$$\sum_{i+1}^{m} a_i \neq \sum_{i+1}^{n} b_i.$$

Нехай маємо задачу, де $\sum_{i+1}^{m} a_I > \sum_{i+1}^{n} b_I$. У цьому випадку вводиться фіктивний споживач – ФСп, якому віддається надлишок продукції (табл. 6.8).

Таблиця 6.8

а)

	50	50	100	ФСп 50	V_j
60	3 +	4 50	5 – 10	0	2
120	2 – 50	6	3 + 70	0	0
70	4	5	3 20	0 50	0
U_i	2	2	3	0	

1,1; 3 – 4 = –1
1,4; 0 – 2 = –2

б)

	50	50	100	ФСп	V_j
60	3 – 10	4 50	5	0 +	1
120	2 + 40	6	3 – 80	0	0
70	4	5	3 + 20	0 – 50	0
U_i	2	3	3	0	

1,4; 0 – 4 = –1

в)

	50	50	100	ФСп	V_j
60	3	4 50	5	0	2
120	2 50	6	3 70	0	2
70	4	5	3 30	0 40	1
U_i	0	2	1	–2	

Характеристики всіх клітинок позитивні – задача вирішена.

У табл. 6.8 наведений приклад, коли $\sum_{i+1}^{m} a_{\mathrm{I}} > \sum_{i+1}^{n} b_{\mathrm{I}}$. Якщо має місце зворотний випадок, тобто $\sum_{i+1}^{m} a_{\mathrm{I}} < \sum_{i+1}^{n} b_{\mathrm{I}}$, уводиться рядок фіктивного постачальника (ФП), і задача вирішується за вище розглянутою схемою.

Детерміновані поставки. Частина поставок закріплена за деякими постачальниками і споживачами за певною схемою, порушувати яку не можна.

У цьому випадку розв'язується задача тільки про поставки вільних вантажів, по відношенню до яких знаходиться оптимальний варіант їхнього розподілу між споживачами.

Блокування поставок. Варіант, коли яка-небудь поставка від *і-го* постачальника заборонена для подачі *j-му* споживачу (Xij = 0).

У цьому випадку у відповідну клітинку ставиться знак ∞, і задача розв'язується звичайним способом.

Таблиця 6.9

	3	5	3	
5	1 3	4 ∞	8 2	
6	2	5 5	1 1	

Багатоетапна транспортна задача. Є постачальники з об'ємом виробництва a_i, споживачі з попитом b_j, склади $D_{кз}$ місткістю $d_к$. Дані відстані від постачальників до складів і від складів до споживачів. У цьому випадку спочатку будується оптимальний план з перевезення вантажів на склади, а потім зі складів – споживачам (тобто задача вирішується у два етапи).

Обмеження пропускної спроможності. Варіант, коли від постачальника до споживача не можна пропускати вантажів більше за яку-небудь певну величину. Наприклад, від A_3 до B_2 – $X_{3,2} \le 5$. В цьому випадку вводиться додатковий споживач (ДСп), якому віддається надлишок вантажу (табл. 6.10).

Таблиця 6.10

а)

	12	7	2	
A_1 = 5	1	3	2	
A_2 = 7	2	4	5	
A_3 = 8	1	6 X	2	
	B_1	B_2	B_3	

б)

	12	5	2	ДСп = 1
A_1 = 5	1 5	3	2	0
A_2 = 7	2 5	4	5 2	0
A_3 = 8	1 2	6 5	2	0 1
	B_1	B_2	B_3	

При зворотній задачі матриця перевертається і вирішується в такому ж порядку.

г)

	5	7	8	
12	1	2	1	
7	3	4	6	
2	2	5 X	2	

д)

	5	7	5	4
12	1 3	2 2	1 5	0 2
7	3 2	4 5	6	0
2	2	5	2	0 2

У ряді випадків транспортну задачу з обмеженою пропускною здатністю зручно вирішувати в мережній постановці.

6.3. Симплекс-метод

При великій кількості рядків і стовпчиків важко знайти оптимальний план шляхом послідовного підбору всіх базових планів задачі. Тому використовуються спеціальні обчислювальні схеми, що дозволяють здійснити упорядкований перехід від одного базового плану до іншого.

Такою схемою є симплексний метод, що дозволяє, відправляючись від певного опорного базисного плану задачі, за кінцеве число кроків одержати її оптимальний варіант рішення.

Розглянемо найпростішу транспортну задачу з двома постачальниками і двома споживачами. Маємо шахти Ш-1 і Ш-2, які добувають 40 і 60 тис. т вугілля, а також два міста М-1 і М-2, які споживають 50 і 50 тис. т вугілля. Умовні собівартості перевезень вугілля (або відстані) наведені в табл. 6.11.

Таблиця 6.11

Умовні собівартості перевезень (відстані)

	М-1	М-2
Ш-1	2	2
Ш-2	4	5

Будуємо за допомогою «північно-західного кута» базисний план (табл. 6.12).

Таблиця 6.12

	М-1	М-2	$\sum_{1}^{n} a_{ij}$
Ш-1	40		40
Ш-2	10	50	60
$\sum_{1}^{n} b_{ij}$	50	50	100

За допомогою значень собівартостей перевезення вугілля визначимо сумарні транспортні витрати.

$$Z_1 = 2 \cdot 40 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 50 = 370 \cdot$$

Для визначення, – чи є оптимальним план, за формулою $V_j + U_i = \overline{C}ij$ за допомогою матриці собівартостей знаходимо «потенціали»:

Таблиця 6.13

	М-1	М-2	U_j
Ш-1	2		0
Ш-2	4	5	2
V_i	2	3	

$V_1 = 2$; $V_2 = 3$; $U_1 = 0$; $U_2 = 2 \cdot$

Далі за формулою $\overline{C}ij = V_i + U_j$ знаходимо «непрямі собівартості» перевезень для незаповненої клітинки ($\overline{C}12$):

Таблиця 6.14

	$М_1$	$М_2$
$Ш_1$	2	0 + 3 > 2
$Ш_2$	4	5

У клітинці матриці 1.2 «непряма собівартість» вища за фактичну ($\overline{C}_{ij}$ = 3, C_{12} = 2). Це вказує на те, що план не є оптимальним. Його поліпшення – шляхом заповнення даної клітинки матриці в процесі здійснення циклу перерахування.

У клітинку матриці базового плану, у яку $C_{12} < \overline{C}_{ij}$ вноситься величина Q, що дорівнює найменшій величині, з якої вона віднімається, і здійснюється цикл операцій таким чином, щоб сумарне значення обсягів перевезень не змінилося. У нашому випадку $Q = 40$ (табл. 6.15).

Таблиця 6.15

	М-1	М-2	$\sum_1^n a_{ij}$
Ш-1	40-40	40	40
Ш-2	10+40	50-40	60
$\sum_1^n b_{ij}$	50	50	100

Отже, одержуємо новий варіант плану (табл. 6.16).

Таблиця 6.16

	М-1	М-2	$\sum_1^n a_{ij}$
Ш-1	0	40	40
Ш-2	50	10	60
$\sum_1^n b_{ij}$	50	50	100

Перевірка на оптимальність (табл. 6.17) вказує, що в незаповненій клітинці матриці за даним варіантом плану «непряма собівартість» нижча за фактичну. Вимоги умов рішення виконані. План – оптимальний.

Таблиця 6.17

	$М_1$	$М_2$	U_j
$Ш_1$	$0 + 1 < 2$	2	1
$Ш_2$	4	5	4
V_i	0	1	

Сума транспортних витрат дорівнює:

$Z_2 = 2 \cdot 40 + 4 \cdot 50 + 5 \cdot 10 = 330$. У порівнянні з попереднім планом це на 40 тис. у.о. менше.

На жаль, на практиці, особливо у зовнішньоекономічній діяльності, фактично не буває відповідностей між потребами і виробництвом, попитом та пропозицією. Здебільшого існують диспропорції, тобто маємо випадки так званих відкритих задач. Розглянемо можливість їхнього рішення.

Припустимо, що Україна має п’ять великих виробничих потужностей із нафтопереробки. Для їхньої роботи можливі закупівлі нафти в Росії (до 20 млн т у рік), в Азербайджані (10 млл т), на Близькому Сході (10 млн т). Крім того, нафтодобувна промисловість України може поставляти заводам ще до 5 млн т нафти в рік (рис. 6.4).

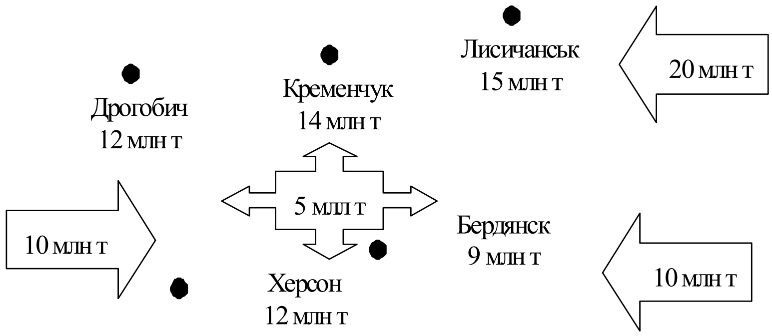


Рис. 6.4. Схема постачання нафти на нафтопереробні заводи

Умовні транспортні витрати на перевезення 1т нафти наведені в табл. 6.18.

Таблиця 6.18

Транспортні витрати на транспортування нафти
(в умовних грошових одиницях)

Постачальники	***Заводи***				
	Лисичанськ	***Кременчук***	***Бердянськ***	***Херсон***	***Дрогобич***
Росія	3	4	5	5	6
Близький Схід	5	4	3	2	7
Закавказзя	4	5	4	5	8
Україна	4	3	5	6	4

Відзначимо, що задача – «відкрита», оскільки $\sum_{1}^{n} a_{ij} \neq \sum_{1}^{n} b_{ij}$.

Поставки нафти складають $\sum_{1}^{n} a_{ij} = 45$, а її споживання $\sum_{1}^{n} b_{ij} = 62$.

Рішення подібних задач здійснюється за таким алгоритмом:

- закриття задачі за допомогою введення фіктивного постачальника (або споживача);

- побудова базисного плану;

- перевірка плану на “виродження”. Суть дії полягає у тому, що сума рядків n і стовпців m за мінусом одиниці повинна дорівнювати числу заповнених клітинок S (базисних клітинок, включаючи і можливі нульові), тобто $m + n - 1 = S$.

- перевірка плану на “викреслення”. Сутність дії полягає у тому, щоб заповнені клітини матриці могли бути пов’язані умовною лінією, що відображає хід ”слона” у шаховій грі (див. табл. 6.12);
- знаходження «потенціалів»;
- визначення «непрямих собівартостей»;
- перевірка плану на оптимальність;
- здійснення циклу перерахунку з метою побудови нового (кращого) плану.

Вибираємо найпростіший спосіб рішення задачі – спосіб «найменшого елемента матриці». Відповідно до прийнятого алгоритму здійснюємо її рішення.

Побудова базисного плану.

Креслимо матричну модель розмірністю 5×5 клітинок, куди за схемою «найменшого елемента матриці» вносимо значення умовних собівартостей перевезень і будуємо базисний план (табл. 6.19).

Таблиця 6.19

	Лисичанськ *15*	*Кременчук* *14*	*Бердянськ* *9*	*Херсон* *12*	*Дрогобич* *12*	U_j
Росія 20	*3* 15	*4* 5	*5*	*5*	*6*	1
Близький Схід 10	*5*	*4*	*3*	*2* 10	*7*	0
Україна 5	*4*	*3* 5	*5*	*6*	*4*	0
Закавказзя 10	*4*	*5* 4	*4* 6	*5*	*8*	2
ФП 17	*0*	*0*	*0* 3	*0* 2	*0* 12	-2
V_i	2	3	2	2	2	

Z_1 = 45 + 20 + 15 + 20 + 24 + 20 = 144. Розрахунок потенціалів і визначення за їхнього допомогою «непрямих собівартостей» вказує, що план – не оптимальний.

Робимо цикл перерахунку і знаходимо оптимальний варіант рішення (табл. 6.20).

Таблиця 6.20

	Лисичанськ *15*	*Кременчук* *14*	*Бердянськ* *9*	*Херсон* *12*	*Дрогобич* *12*	U_j
Росія 20	*3* 15	*4* 5	*5*	*5*	*6*	3

Близький Схід 10	*5*	*4*	*3*	*2* 10	*7*	1
Україна 5	*4*	*3* 5	*5*	*6*	*4*	2
Закавказзя 10	*4*	*5* 1	*4* 9	*5*	*8*	4
ФП 17	*0*	*0* 3	*0*	*0* 2	*0* 12	-1
V_i	0	1	0	1	1	

$$Z_2 = 45 + 20 + 15 + 5 + 36 + 20 = 141.$$

6.4. Транспортні задачі в мережній постановці

У ряді випадків перш насамперед виконанні міжнародних логістичних завдань є доцільним рішення транспортної задачі в мережній постановці. Це також зручно, коли важко виразити задачу в матричному вигляді (при дуже великій кількості постачальників і споживачів, при зонуванні цін, районуванні сфери обігу при обмеженнях пропускної здатності окремих транспортних напрямків й ін.).

Припустимо, що маємо двох постачальників і трьох споживачів, пов'язаних між собою транспортною мережею, як це показано на рис. 6.5 (для зручності постачальники заштриховані).

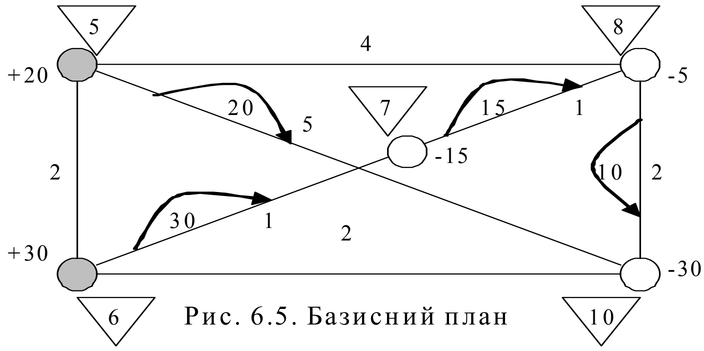


Рис. 6.5. Базисний план

Будуємо базисний план. Для цього в одного з постачальників ставимо «вартість» вантажу. Припустимо, вона дорівнює 5 у.о. Потім, використовуючи найкоротші відстані, направляємо вантажі споживачам і розраховуємо потенціали. Потенціали будуть дорівнювати умовній «вартості» вантажу в початковому пункті плюс відстань до споживача. При цьому по ходу руху вантажу значення «відстаней» додаються, проти – віднімаються.

Після побудови базисного плану і розрахунку потенціалів по лініях руху вантажів визначаємо характеристики наскрізних ліній, які не були задіяні у транспортируванні вантажів. Якщо відстань по лінії перевищує різницю потенціалів на її кінцевих пунктах – характеристика позитивна, якщо менше – негативна.

Із рис. 6.5 видно, що негативну характеристику має лінія від постачальника з 30 одиницями до споживача з 30 одиницями.

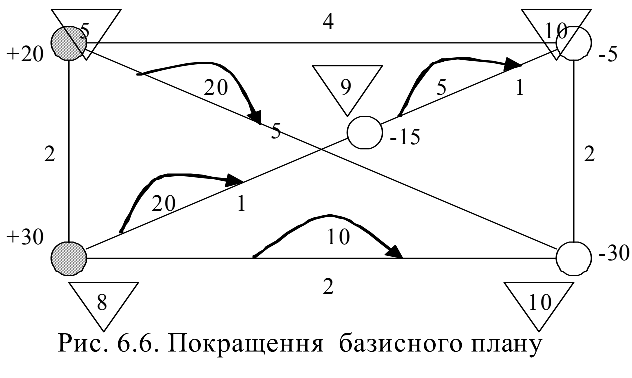


Рис. 6.6. Покращення базисного плану

Будується новий ланцюг, у якій по лінії з негативною характеристикою направляється вантаж, і робиться перерахунок. Цикли перерахунку повторюються аж до одержання оптимального варіанта плану (рис. 6.7).

У випадку відкритої транспортної задачі, заданої в мережній постановці, уводиться фіктивний «постачальник» або «споживач». «Транспортну вартість» до нього варто брати зі значним перевищенням «вартості» вантажу в початковому пункті плану й вирішувати аналогічно до схеми, розглянутої для закритої задачі (рис. 6.8).

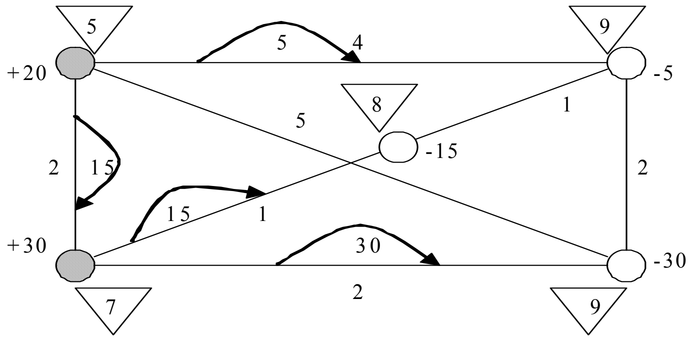


Рис. 6.7. Оптимальний план

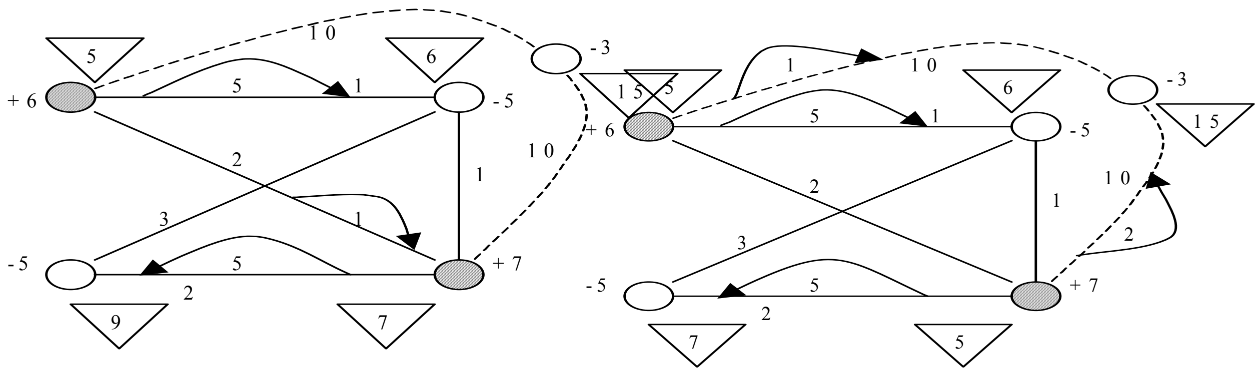


Рис. 6.8. Рішення відкритої транспортної задачі

6.5. Задачі на розміщення зовнішніх замовлень і виробництв

6.5.1. Оптимізація організації виробництва

Транспортні задачі лінійного програмування можуть використовуватися не лише для оптимізації транспортних витрат, але й для оптимізації організаційних схем виробництва, удосконалення його територіальної організації й інших завдань. Для прикладу розглянемо технологію розв'язання задачі з оптимізації організації кількома країнами виробництва комплексних мінеральних добрив.

Припустимо, що виробництво комплексних мінеральних добрив, що містять у відношенні 1:1:1 фосфорні, азотні та калійні добрива, згодні здійснити три країни (1, 2, 3).

Під виробництво в цих країнах кожної складової комплексних добрив береться загальний зовнішній кредит в обсягах 400, 300, 100 тис. у. о. Обсяги виробництва комплексних добрив, витрати на одиницю складової комплексного добрива і прибуток згідно з розрахунковими даними бізнес-плану наведені в табл.. 6.21.

Таблиця 6.21

Країни	*Обсяги виробництва*	*Витрати на одиницю продукції*			*Прибуток на 1 у.о.*
		Фосфорні добрива	*Азотні добрива*	*Калійні добрива*	
1	100000	2	1	1	12
2	150000	1	2	5/4	14
3	200000	1	½	0	10
Товар-кредит		400 000	300 000	100 000	

Позначимо через X_1 обсяг виробництва комплектів комплексного добрива (1 комплект включає 1 од. фосфорного, 1 од. азотного і 1 од. калійного добрива), яке виробляється в 1-й країні, X_2 – у 2-й і X_3 – у 3-й країні, і сформулюємо задачу лінійного програмування, де треба знайти максимум лінійної функції:

$$Z = 12X_1 + 14X_2 + 10X_3, \rightarrow \max, \quad (6.3)$$

при обмеженнях:

$2X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \le \quad 400\,000;$

$X_1 + 2X_2 + 1/2X_3 \le 300\,000;$

$X_1 + 5/4X_2 \le 100\,000;$

$X_2 \le 1\,50\,000;$

$X_3 \le 200\,000;$

$X_{ij} \ge 0, j = 1, 2, 3.$

Для рішення цієї задачі симплексним методом зведемо її до так званого канонічного вигляду:

$$Z = -12X_1 - 14X_2 - 10X_3, \rightarrow \min, \quad (6.4)$$

при обмеженнях:

$2X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 400\,000;$

$X_1 + 2X_2 + 1/2X_3 + X_5 = 300\,000;$

$X_1 + 5/4X_2 + X_6 = 100\,000;$

$X_1 + X_7 = 100\,000;$

$X_2 + X_8 = 150\,000;$

$X_3 + X_9 = 200\,000;$

$X_{ij} \ge 0, j = 1, 2, \ldots, 9$...

У цих рівняннях X_4 , X_5, X_6 – додаткові змінні, чисельно рівні частині невикористаного кредиту відповідно під виробництво фосфорних, азотних і калійних добрив, а X_7, X_8, X_9 – додаткові змінні, чисельно рівні невикористаним потужностям з виробництва комплексних мінеральних добрив у країнах 1, 2, 3. Вихідна система рівнянь має припустиме опорне (базисне) рішення.

$X_0 = (X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0,\ X_4 = 400000,\ X_5 = 300000,\ X_6 = 100000,\ X_7 = 100000,\ X_8 = 150000, X_9 = 200000).$

Ясно, що за цим планом виробництво відсутнє, і, отже, прибуток $Z_0 = Z_{10} = 0.$

Оптимальне рішення (знаходження оптимального плану) знаходиться шляхом ітерацій послідовних переходів до нового опорного плану, за яким прибуток буде більшим, ніж за попереднім. Новий опорний план відрізняється від попереднього однією базисною змінною. Обчислювальна ітерація – перетворення симплексних таблиць – здійснюється за формулами повного виключення невідомих з використанням обраного відповідним чином "ведучого" елемента.

Спочатку складається вихідна симплексна таблиця (табл. 6.22), що містить всю інформацію з даної задачі лінійного програмування в канонічній формі.

Таблиця 6.22

Перша ітерація обчислювального процесу

	Базис	***З базису***	***A_0***	***–12***	***–14***	***–10***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***
				A_1	***A_2***	***A_3***	***A_4***	***A_5***	***A_6***	***A_7***	***A_8***	***A_9***
1	A_4	0	400000	2	1	1	1	0	0	0	0	0
2	A_5	0	300000	1	2	½	0	1	0	0	0	0
3	A_6	0	100000	1	5/4	0	0	0	1	0	0	0
4	A_7	0	100000	1	0	0	0	0	0	1	0	0
5	A_8	0	150000	0	1	0	0	0	0	0	1	0
6	A_9	0	200000	0	0	1	0	0	0	0	0	1
7			0	12	14	10	0	0	0	0	0	0

Серед векторів стовпчиків основної матриці системи A_j, (при $j=\overline{1,9}$) вектори A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9 є базисні, що відповідають базисному рішенню X_0. Відмітимо, що базисні змінні X_0 утворять вектор правих частин – A_0. У сьомому рядку стовпчика A_0 записується значення цільової функції $Z_0 = C_б * A_0$, а в інших стовпцях записуються так звані симплексні різниці $Z_j – C_j = C_Б * A_j$, де C_j – коефіцієнт цільової функції в задачі на min. Вони являють собою помножені на (–1) коефіцієнти при вільних змінних у цільовій функції, після вираження в ній усіх базисних змінних через вільні. При базисних змінних такі коефіцієнти рівні 0, тобто $Z_j – C_j = 0$ для базисних стовпчик.

Тоді у вихідній таблиці отримаємо:

$Z_1 – C_1 = 12$; $Z_2 – C_2 = 14$; $Z_3 – C_3 = 10$.

Умовою оптимального опорного плану є: $Z_j – C_j = \leq 0$ для всіх $j = 1,..., 9$.

У вихідній таблиці перші три симплексні позитивні різниці характеризують не оптимальність плану.

По всіх можливих припустимих планах значення цільової функції визначається за допомогою виразу: $Z = –(12x_1 + 14x_2 + 10x_3)$, тому що $\Delta Z/\Delta X_2 = –14$. Звідси випливає, що перевагу виробництва доцільно віддати другій країні: $X_2 > 0$. З цією метою змінну X_2 уводимо в число базисних (вектор A_2 у базис).

Щоб одержати опорний план, треба вивести з числа базисних змінну X_6 (вектор A_6 вивести з базису). Визначення вектора, виведеного з базису, визначається за мінімальним симплексним відношенням координат вектора A_0 до позитивних координат вектора A_2, що вводиться в базис.

У даному випадку найменше відношення відповідає координаті 5/4 у третьому рядку. Отже, вектор A_6 виводиться з базису і змінна X_6 стає вільною. Перша ітерація – перетворення даної таблиці по формулах повного виключення з ведучим елементом $A_{32} = 5/4$ – приводить до побудови табл. 6.23.

Суть цих перетворень полягає в такому. З третього рівняння обмежень задачі (6.4) визначаємо нову базисну змінну: X_2 = 80000–4/5X_1–4/6X_6 (X_1, X_6 – вільні змінні) і виключаємо X_2 з інших рівнянь і цільової функції. Коефіцієнти нової системи рівнянь заносимо до табл. 6.23.

Таблиця 6.23

Друга ітерація обчислювального процесу

	Базис	*З базису*	A_0	*–12*	*–14*	*–10*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_4	0	320000	6/5	0	1	1	0	4/5	0	0	0
2	A_5	6	140000	–3/5	0	½	0	1	–8/5	0	0	0
3	A_2	-14	80000	4/5	1	0	0	0	4/5	0	0	0
4	A_7	0	100000	1	0	0	0	0	0	1	0	0
5	A_8	0	70000	–4/5	0	0	0	0	–4/5	0	1	0
6	A_9	0	200000	0	0	1	0	0	0	0	0	1
7			–1120000	4/5	0	10	0	0	–56/5	0	0	0

Новий вираз цільової функції через вільні змінні X_1, X_3, X_6 має вигляд:

$Z_1 = -12x_1 - 14\,(80000 - 4/5x_1 - 4/5x_6) - 10x_3 = -1120 - (4/5x_1 + 10x_3 - 56/5x_6)$.

Коефіцієнти цього виразу відображені в 7 рядку.

Таким чином, будуються опорний план

$X^{/} = (x_1 = 0,\ x_2 = 80000,\ x_3 = 0,\ x_4 = 320000,\ x_5 = 140000,\ x_6 = 0,\ x_7 = 100000,$
$x_8 = 70000,$
$x_9 = 200000)$ для повторного $Z\,(x^{/}) < Z\,(x^0)$.

Наявність позитивних коефіцієнтів у 7-му рядку в стовпчика A_1–A_6 означає, що цей план ще не оптимальний. З метою його поліпшення, тобто зменшення значення цільової функції, введемо в базис змінну x_3 і виведемо з базису змінну x_9 (за найменшим симплексним відношенням).

Новий опорний план і нове значення цільової функції відображені в табл. 6.24.

Таблиця 6.24

Третя ітерація обчислювального процесу

	Базис	*З базису*	A_0	*–12*	*–14*	*–10*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_4	0	120000	6/5	0	1	1	0	4/5	0	0	–1
2	A_5	0	400000	–3/5	0	½	0	1	–4/5	0	0	–1/2
3	A_2	–14	80000	4/5	1	0	0	0	4/5	0	0	0
4	A_7	0	100000	1	0	0	0	0	0	1	0	0
5	A_8	0	70000	–4/5	0	0	0	0	–4/5	0	1	0
6	A_3	–10	200000	0	0	1	0	0	0	0	0	1

7			–3120000	4/5	0	10	0	0	–56/5	0	0	–10

$X_2 = (x_1 = 0,\ x_2 = 80000,\ x_3 = 200000,\ x_4 = 120000,\ x_5 = 460000,\ x_6 = 0,\ x_7 = 100000,\ x_8 = 70000,\ x_9 = 0)$.

$$Z(x^2) = –3120; \qquad Z(x^2) < Z(x^/).$$

Відмітимо, що цей план також не є оптимальним, тому що в 7-му рядку стовпчика A_1

$$Z_1 – C_1 = 4/5 > 0.$$

Це означає, що для множини припустимих планів цільова функція має вигляд:

$$Z = –3120 – (4/5x_1 – 56/5x_6 – 10x_9).$$

Відомо, що цільову функцію можна зменшити, якщо ввести в число базисних змінну x_1.

$$Z_1 – C_1 = 4/5 > 0.$$

Виводячи з числа базисних змінну x_7, тобто роблячи заміну $x_1 = 100000 – x_7$, отриману з четвертого рівняння обмеження, одержуємо табл. 6.25.

Таблиця 6.25

Четверта ітерація обчислювального процесу

	Базис	***З базису***	A_0	**–12**	**–14**	**–10**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_4	0	0	0	0	0	0	1	4/5	–6/5	0	–1
2	A_5	6	100000	0	0	0	0	0	-8/5	0	0	-1/2
3	A_2	–14	0	0	1	0	0	0	4/5	0	0	0
4	A_7	6	100000	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	A_8	0	150000	0	0	0	0	0	–4/5	1	1	0
6	A_3	6	200000	0	0	1	0	0	0	0	0	1
7			3200000	0	0	10	0	0	–56/5	0	0	–10

Значення цільової функції для множини припустимих планів приймає вигляд:

$$Z = –3200000 + (56/5X_6 + 10X_9).$$

$$X_6 \geq 0,\ X_9 \geq 0.$$

Отже, максимальне значення, яке може бути досягнуто при рішенні поставленої задачі, дорівнює 3200000.

Умова оптимальності $Z_j – C_j \leq 0$ виконано для опорного плану $X_3 = (x_1 = 100000,\ x_2 = 0,\ x_3 = 200000,\ x_4 = 0,\ x_5 = 100000,\ x_6 = 0,\ x_7 = 0,\ x_8 = 150\,000,\ x_9 = 0)$.

Таким чином, для одержання максимального прибутку в виробництві комплексних мінеральних добрив його доцільно здійснювати лише у 1-й і 3-й країнах.

6.5.2. Обґрунтування місцезнаходження виробництва

Обґрунтування розміщення виробництва в тій чи іншій країні (або регіоні) за допомогою економіко-математичного моделювання базується на використанні економічних, географічних і математичних знань. Воно поєднує у собі аналіз статистичних даних, картографічний метод, методи техніко-економічних розрахунків, районне планування й ін.

Аналіз статистичних матеріалів дозволяє вивчати просторово-економічні явища і процеси в їхньому взаємозв'язку і динаміку, давати їм кількісну оцінку в часі і просторі.

Економічне картографування дозволяє вивчати й використовувати просторові співвідношення в розміщенні й конструюванні взаємодій досліджуваних об’єктів, явищ та процесів.

Техніко-економічні розрахунки включають використання різних прийомів і підходів в оцінці економічної ефективності прийнятих рішень та їхніх наслідків. При цьому використовуються показники капіталомісткості, трудомісткості, фондомісткості, матеріаломісткості, рентабельності, продуктивності праці, собівартості продукції, виробничих витрат, термінів окупності й ін.

Районне планування є комплексним методом, що застосовується при проектуванні розміщення виробництва на регіональному рівні. Він, у свою чергу, використовує математичне моделювання, картографічний й інші методи просторового аналізу території.

Як приклад рішення задачі на визначення економічної ефективності варіантів міжнародного інвестування в об’єкти виробничої або невиробничої сфер за допомогою побудови відповідних математичних моделей ефективності капіталовкладень розглянемо такий випадок.

1. Нехай A, B, C – пункти трьох держав, розташовані вздовж спільної залізниці. Поблизу пункту A однієї з держав добувається залізна руда, у пункті B іншої держави – кам’яне вугілля, а в пункті C третьої держави – машинобудівний завод, що має потребу в металі (рис. 6.9).

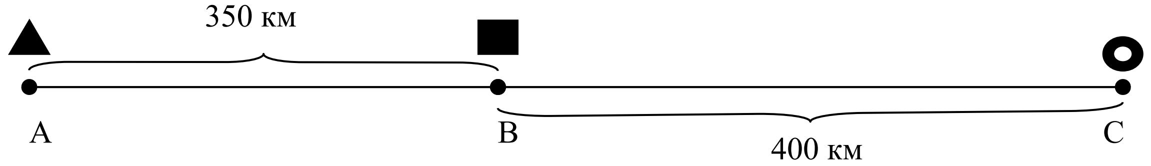


Рис. 6.9. Ситуаційний план розміщення об’єктів

Потрібно визначити пункт для інвестицій у спорудження металургійного підприємства.

Цільова настанова – мінімізація транспортних витрат у тонно-кілометрах:

$$\sum_{1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to Z_{\min} ,$$

де C_{ij} – транспортні відстані, на які переміщується продукція, км;

x_{ij} – обсяг переміщення продукції, т.

Дано:

Питомі витрати на виробництво 1 т металу:

залізної руди – 1,5 т,

коксового вугілля – 0,6 т,

металобрухту, який буде поступати на металургійне виробництво із машинобудівного заводу, – 0,1 т,

витрати металу, який буде направлятися з металургійного заводу на машинобудівний, – 1,1 т на одиницю машинобудівної продукції.

Відстані: АВ – 350 км, ВС – 400 км.

Приймається, що тарифи на перевезення і вантажно-розвантажні роботи однакові.

Складемо математичну модель задачі.

Уявимо, що металургійний завод розміститься в умовному пункті М, який можна переміщати вздовж лінії АС. Позначимо через X відстань від пункту А до пункту М.

Тут можливі два випадки:

М є [АВ], $0 \leq X \leq 3\ 50$;

М є [ВР], $350 \leq X \leq 750$.

У першому випадку АМ = X, МВ =3 50 - X, МС = 750 - X (рис. 6.10)

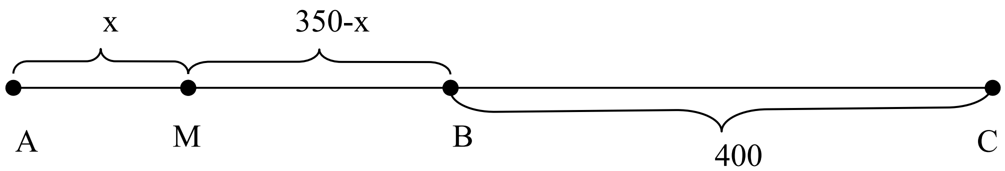


Рис. 6.10. Варіант розміщення металургійного виробництва при $0 \leq X \leq 350$

Обсяги перевезень для виробництва 1 т металу складуть:

по залізній руді – 1,5 X;

по коксовому вугіллю – 0,6 (350–X);

по металобрухту – 0,1 (750–X);

Сумарний обсяг перевезень $У$ дорівнюватиме:

$У$ 1,5 X + 0,6 (350 – X) + 0,1 (750 – X) + 1,1 (750 – X)

або

$У$ = –0,3X+1110 (при $0 \leq X \leq 350$).

У другому випадку: АМ = X, В М = X–350; МС 750 – X (рис. 6.11).

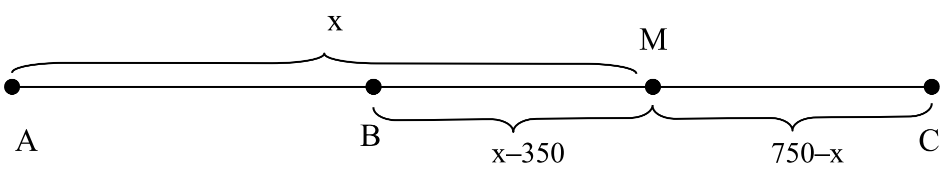


Рис. 6.11. Варіант розміщення металургійного виробництва при $350 \leq X \leq 750$

Обсяги перевезень для виробництва 1 т металу складуть:

по залізній руді – 1,5 X;

по коксовому вугіллю – 0,6 (X–350);

по металобрухту – 0,1 (750–X);

по металу – 1,1 (750–X).

Сумарний обсяг перевезень дорівнюватиме:

$У = 1{,}5\,X + 0{,}6\,(X–350) + 0{,}1\,(750 – X) + 1{,}1\,(750 – X)$

$У = 0{,}9X + 690$ (при $350 \le X \le 750$)

Узагальнивши результати 1-го і 2-го випадків, одержимо систему 2-х рівнянь:

$$y = \begin{cases} –0{,}3x + 1110, \text{ при } 0 \le x \le 350 \\ 0{,}9x + 690, \text{ при } 350 \le x \le 750 \end{cases}$$

Зробимо відповідні розрахунки:

$3У= –0{,}9X + 3330$

$У = 0{,}9X + 690$

$4У = 4020$,   звідки $У = 1005$.

Таким чином, мінімальні транспортні витрати дорівнюють 1005 т/км,

Тобто Zmin = $У(750 – X)$=1005 т/км; при $0 \le X \le 750$.

З графіка даної функції видно, що цим витратам відповідає варіант розміщення металургійного підприємства в пункті В (рис. 6.12).

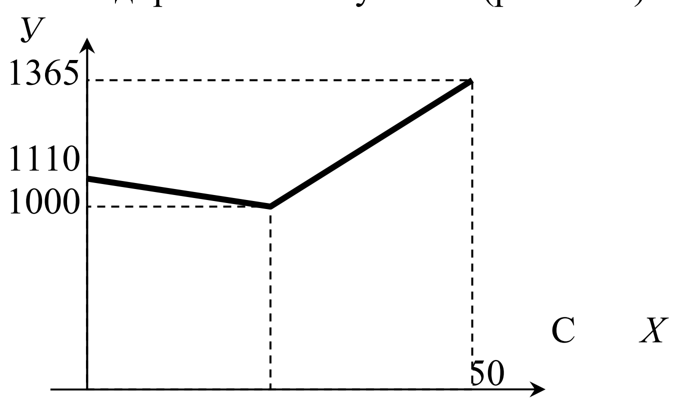


Рис. 6.10. Графік функції $У = kX + C$ для визначення раціонального розміщення металургійного виробництва

Питання для самоконтролю знань

1. Складіть алгоритм (порядок) рішення транспортних задач лінійного програмування в матричній постановці.
2. Що означають поняття «відкрита» і «закрита» задачі, перевірка на «вироджуваність»?
3. Як відшукуються «потенціали» і «непрямі собівартості»?
4. Ви – керівник фірми, що займається постачанням вугілля з Бельгії, Німеччини й Польщі в Австрію й Угорщину. Бельгія відпускає 2 млн т, Німеччина і Польща – по 3 млн т. Австрії треба 4 млн т, Угорщині – 6 млн т. Витрати на постачання 1 т: з Бельгії в Австрію – 2 у. о., в Угорщину – 3 у. о., з Німеччини відповідно 1 і 2 у. о., з Польщі – 4 і 2 у. о. Складіть матрицю транспортної задачі й побудуйте оптимальний план з логістики перевезень вугілля.
5. Вирішіть задачу, дані якої наведені у п. 4, у мережній постановці.

Література

1. Андреева О. Д. Технология бизнеса: маркетинг. Учеб. пособие. – М.: ИНФРА–НОРМА. 1997.- 224 с.
2. Голиков А. П. Экономико-математическое моделирование в международных экономических отношениях. Учеб. пособие. – Харьков: ХНУ, 2000. – 49 с.
3. Голиков А. П. Экономико-математическое моделирование мирохозяйственных процессов. – Харьков: ХНУ, 2003. – 104 с.
4. Єріна А. М. Статистичне моделювання та прогнозування. Навч.посібник. – К.: КНЕУ, 2001. – 170 с.
5. Іващенко П. О. Економетрія. Навчальний посібник. – Харків: ХНУ. 2000. – 70 с.
6. Котова Е. С. Методическое пособие по высшей математике. – М.: МГИМО (У) МИД РФ, 2001.
7. Математика и кибернетика в экономике. Словарь-справочник. - М.: Экономика. 1983. – 697 с.
8. Хазанова Л. Э. Математические методы в экономике – М.: БЕК. 2000. – 357 с.
9. Экономико-математический энциклопедический словарь: / Гл.ред. В. И. Данилов-Данильян. – М.: Большая Российская энциклопедия. ИНФРА-М, 2003. – 688 с.

Для нотаток

Для нотаток

h_1

Навчальне видання

Голіков Артур Павлович

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

СВІТОГОСПОДАРСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

Редактор І. Ю. Агаркова
Коректор О. В. Плахоніна
Макет обкладинки І. М. Дончик

61077, Харків, пл. Свободи, 4, Харківський національний
університет імені В. Н. Каразіна, організаційно-видавничий відділ НМЦ

Підписано до друку 17.03.2006. Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Друк ризографічний.
Обл.-вид. арк. 9,0. Умов.-друк. арк. 8,37. Наклад 100 прим.
Ціна договірна.

Надруковано ФОП «Петрова І. В.»
61144, Харків-144, вул. Гв. Широнінців 79[в], к. 137

Свідоцтво про державну реєстрацію ВОО № 948011 від 03.01.03