УДК 517.982

С. Ю. ФАВОРОВ

ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ПЛЮРИПОЛЯРНЫЕ МНОЖЕСТВА В СОПРЯЖЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Плюрисубгармонические (п.-с.-г.) функции и плюриполярные (п.-п.) множества в топологических векторных пространствах рассматривались во многих работах (см., напр., [1—3]). При этом, как правило, использовалось следующее определение:

Функция $P(x)$ называется п.-с.-г. в топологическом векторном пространстве E, если она п.-с.-г. в каждом конечномерном его подпространстве.

Эквивалентное определение состоит в том, что $P(x)$ является субгармонической на каждой комплексной прямой $\{x_1 + wx_2 : w \in C\}$ $x_1, x_2 \in E$, и полунепрерывна сверху в конечномернооткрытой топологии τ на E[1].

В настоящей заметке для случая $E = X^*$, где X — банахово пространство, вводится новое определение п.-с.-г. функции, отличаю-

[1] Т. е. сильнейшей топологии, индуцирующей на всех конечномерных подпространствах топологию эвклидова пространства.

щееся от предыдущего тем, что вместо топологии τ рассматривает слабая* топология в X^*. Это позволяет получить п.-с.-г. функц в X^*, наследующие многие свойства п.-с.-г. функций в конеч мерных пространствах. Так, в заметке приводятся бесконечномерн аналоги теорем о максимуме функции на остове поликруга, о ср нем по остову поликруга, теоремы о связи с классом функц выпуклых относительно логарифмов бесконечного числа переменн П.-п. множества в X^*, которые определяются с помощью п.-с функций тем же способом, что и в конечномерном случае, так близки по своим свойствам к п.-п. множествам в конечномерн пространстве. Так, счетное объединение п.-п. множеств в X^* так является п.-п. множеством. Далее, в заметке доказывается, что плюриполярные множества в X^* массивны в следующем смыс для ограниченности множества $A \subset X$ достаточно, чтобы множест $\{(g, x) : x \in A\}$ были ограничены при каждом g из некоторого п.-п. множества $E \subset X^*$. В частности, в качестве E можно взя множество c-крайних точек единичного шара в X^*. Другие при жения п.-с.-г. функций и п.-п. множеств в X^*, относящиеся к ро ту и распределению значений голоморфных отображений $C^m \to$ можно найти в [4—5].

Пусть X — банахово пространство над полем комплексных чи X^* — его сопряженное.

Определение 1. *Функцию $P : X^* \to [-\infty, \infty)$, $P \not\equiv -\infty$, зовем плюрисубгармонической (п.-с.-г.) в X^*, если ее сужен на любую комплексную прямую $\{g_1 w + g_2 : w \in C\}$, g_1, $g_2 \in X^*$, е субгармоническая функция на этой прямой (или тождестве равна $-\infty$), а сужение P на любой шар в X^* есть полунепре ная сверху функция в слабой* топологии. В случае сепарабельн X такая непрерывность эквивалентна тому, что для любой сла сходящейся к $g \in X^*$ последовательности g_n имеем $\limsup\limits_{n \to \infty} P(g_n) \leqslant P(g)$.*

Определение 2. *Множество $E \subset X^*$ назовем плюриполя ным (п.-п.) в X^*, если существует п.-с.-г. в X^* функция P така что $E \subset \{g \in X^* : P(g) = -\infty\}$.*

Например, функция $P(g) = \log |(g, x) - c|$, где $x \in X$, $c \in C$, п.-с. в X^*; множество $\{g \in X^* : (g, x) = c\}$ — п.-п. множество в X^*.

Из свойств субгармонических функций в C немедленно вытекаю следующие свойства п.-с.-г. функций в X^*:

1. Сумма конечного числа п.-с.-г. функций является п.-с. функцией.

2. Верхняя огибающая конечного числа п.-с.-г.- функций явля ется п.-с.-г. функцией.

3. П.-с.-г. функция, умноженная на положительный скаляр, такж является п.-с.-г. функцией.

4. Предел равномерно сходящейся на каждом шаре в X^* посл довательности п.-с.-г. функций также будет п.-с.-г. функцией.

5. Предел монотонно убывающей последовательности п.-с.-г. фун ций, если он не равен тождественно $-\infty$, является п.-с.-г. функцие

6. Ограниченная сверху в X^* п.-с.-г. функция есть тождественная константа.

Следующее утверждение вытекает из свойств 1 и 5.

Теорема 1. *Пусть члены ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n(g)$ *п.-с.-г. в* X^* *функции, причем в каждом шаре из* X^* *только конечное число из них может принимать положительные значения. Тогда ряд или расходится для всех* $g \in X^*$, *или множество его точек расходимости плюриполярно.*

Используя эту теорему, можно показать, что пространство последовательностей l^p образует п.-п. множество в пространстве l^∞. Действительно, ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log \sum\limits_{n=1}^{N} |\lambda_n|^p - \log(N \log N)}{N \log^2 N}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 1, расходится в любой точке $(\lambda_n) \in l^p$ и сходится в точке $(1, 1, \ldots) \in l^\infty$.

Чтобы сформулировать следующую теорему, напомним, что c-крайней точкой выпуклого множества $E \subset X^*$ называется такая его точка g_0, что для всех $g \in X^*$ и всех $\varepsilon > 0$ найдется число $w \in \boldsymbol{C}$, $|w| < \varepsilon$, такое, что $g_0 + wg \notin E$ (см. [6]).

Теорема 2. *Пусть* $P(g)$ — *п.-с.-г. функция в* X^*, K — *выпуклое ограниченное слабо* замкнутое множество в* X^*. *Тогда существует* c*-крайняя точка* $g_0 \in K$ *такая, что* $\sup\limits_K P(g) = P(g_0)$.

Доказательство. Так как K — слабо* компактное множество в X^*, то в каких-то точках K полунепрерывная сверху функция $P(g)$ достигает своего максимума. Множество E таких точек образует компакт в X^*. Пусть g_0 — крайняя точка множества E. Предположим, что для каких-то $g' \in X^*$, $\varepsilon > 0$ множество $F = \{g_0 + \lambda g' : \lambda \in \boldsymbol{C}, |\lambda| < \varepsilon\}$ лежит в K. Применяя принцип максимума к субгармонической функции $\varphi(\lambda) = P(g_0 + \lambda g')$, заключаем, что $F \subset E$, что противоречит выбору точки g_0. Таким образом, g_0 — c-крайняя точка K, что доказывает теорему.

Следствие. *Множество c-крайних точек единичного шара в* X^* *не плюриполярно.*

П.-с.-г. функции в $\boldsymbol{C}^m$ тесно связаны с функциями в $\boldsymbol{R}^m_+$, выпуклыми относительно логарифмов переменных (см. [7], с. 134). Чтобы сформулировать подобные утверждения для п.-с.-г. функций в X^*, введем следующие обозначения.

Через l^∞_+ (соответственно $\bar{l}^\infty_+$) обозначим множество последовательностей из l^∞, все элементы которых положительны (соответственно неотрицательны). Так, $I = (1, 1, \ldots) \in l^\infty_+$. Для $r, r' \in \bar{l}^\infty_+$ запись $r \leqslant r'$ означает, что $r' - r \in \bar{l}^\infty_+$. Пусть $\{g_n\}$ — такая последовательность линейно независимых элементов из X^*, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |(g_n, x)|$ сходится при всех $x \in X$. Положим для $r = (r_n) \in l_+^{\infty}$

$$\Pi(r) = \{ \sum_n \lambda_n g_n, \quad |\lambda_n| < r_n \},$$

$$\Gamma(r) = \{ \sum_n \lambda_n g_n, \quad |\lambda_n| = r_n \},$$

где суммы понимаются в смысле слабой* сходимости. Далее, для п.-с.-г. функции $P(g)$ в X^* обозначим

$$m(r, P) = \sup \{ P(g) : g \in \Pi(r) \},$$

$$L(r, P) = \int P\Big(\sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{i\varphi_n} g_n \Big) d\mu,$$

где мера μ есть прямое произведение мер $(1/2\pi)\, d\varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ на $[0, 2\pi)$.

Отметим, что последний интеграл имеет смысл, так как функция $P(g)$ на $\Gamma(r)$ есть предел монотонно убывающей последовательности полунепрерывных сверху функций $\tilde{P}_N(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = $

$$= \sup \Big\{ P\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n \Big) : |\lambda_n| = r_n \text{ при } n > N \Big\}.$$

Теорема 3. *а)* $\tilde{P}(\lambda) = P\Big(\sum_n \lambda_n g_n \Big)$ *в п.-с.-г. функция в* l^{∞}.

б) Если $P(g) \not\equiv \mathrm{const}$ *в* $\Pi(r)$, *то* $P(g) < m(r, P)$ *в* $\Pi(r)$, *причем для некоторого* $g' \in \Gamma(r)$ *имеем* $P(g') = m(r, P)$.

в) Для любого $r \in \bar{l}_+^{\infty}$ *имеем* $P(0) \leqslant L(r, P)$.

г) Функции $m(r, P)$ *и* $L(r, P)$ *выпуклы относительно* $\log r$ *в* l_+^{∞}, *т. е. для любых* $r' = (r_n')$, $r'' = (r_n'')$ *и* $\alpha \in (0, 1)$ *выполняются неравенства*

$$m(r, P) \leqslant \alpha m(r', P) + (1 - \alpha) m(r'', P), \qquad (2)$$
$$L(r, P) \leqslant \alpha L(r', P) + (1 - \alpha) L(r'', P),$$

где $r = (r_n'^{\alpha} \cdot r_n''^{1-\alpha})$.

д) Функции $m(r, P)$ *и* $L(r, P)$ *монотонны по* r *относительно введенного частичного порядка в* $\bar{l}_+^{\infty}$.

е) Функции $m(r, P)$ *и* $L(r, P)$ *слабо* полунепрерывны сверху в* $\bar{l}_+^{\infty}$.

ж) Если $\psi(r)$ — *слабо* полунепрерывна сверху, монотонная по* r *и выпуклая относительно* $\log r$ *функция в* $\bar{l}_+^{\infty}$ *(последнее свойство должно также выполняться на всех подмножествах вида* $\{ r \in \bar{l}_+^{\infty} : r_n = 0$ *при* $n \in A \}$ *по ненулевым переменным), то функция* $\psi((|\lambda_n|))$ *п.-с.-г. в* l^{∞}.

Доказательство. Утверждение а) очевидно, б) вытекает из теоремы 2. Далее, так как функция $\tilde{P}(\lambda)$ п.-с.-г. по первым N переменным, то

$$P(0) \leqslant \int P\Big(\sum_{n=1}^{N} r_n e^{i\varphi_n} g_n\Big) d\mu.$$

Для доказательства в) осталось перейти к пределу при $N \to \infty$, пользуясь слабой* полунепрерывностью сверху функции $P(g)$ и леммой Фату. Пусть теперь r', r'', r те же, что и в (2). Выберем, пользуясь свойством б), точку $g = \sum_n \tilde{\lambda}_n g_n \in \Gamma(r)$ так, что $m(r, P) = P(g)$. Функция $\tilde{P}(\lambda)$ п.-с.-г. по переменным $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, поэтому, согласно ([7], с. 134), функция $u(r_1, \ldots, r_N) = \max\{\tilde{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N, \tilde{\lambda}_{N+1}, \ldots) : |\lambda_1| = r_1, \ldots, |\lambda_N| = r_N\}$ выпукла по совокупности переменных $\log r_1, \ldots, \log r_N$, так что $m(r, P) \leqslant \alpha u(r'_1, \ldots, r'_N) + (1-\alpha) \times u(r''_1, \ldots, r''_N)$. Поэтому найдутся точки $\lambda'^{(N)}$ и $\lambda''^{(N)}$ из l^∞, у которых модули первых N координат равны соответственно $r'_1, \ldots, r'_N$ и $r''_1, \ldots, r''_N$, а остальные координаты совпадают с соответствующими координатами точки $\tilde{\lambda}$ так, что $m(r, P) \leqslant \alpha \tilde{P}(\lambda'^{(N)}) + (1-\alpha)\tilde{P}(\lambda''^{(N)})$. Переходя, если это необходимо, к подпоследовательностям, считаем, что $\lambda'^{(N)} \to \lambda'$ и $\lambda''^{(N)} \to \lambda''$ в смысле слабой* сходимости. Пользуясь полунепрерывностью сверху функции $\tilde{P}(\lambda)$, приходим к неравенству (2). Доказательство остальных утверждений теоремы 3 проводится приблизительно по той же схеме. □

Следствие 1. *Пусть $P(g)$ — такая п.-с.-г. функция в X^*, что $P(e^{i\theta}g) = P(g)$ для всех $\theta \in [0, 2\pi)$, $g \in X^*$. Тогда*

$$\int P\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\varphi_n} g_n\Big) d\mu \geqslant P(g_N), \quad N = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Для любого N ввиду свойств меры μ

$$\int P\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\varphi_n} g_n\Big) d\mu = \int P\Big(g_N + \sum_{n \neq N} e^{i\varphi_n} g_n\Big) d\mu.$$

Согласно утверждению в) теоремы, правая часть этого неравенства не меньше, чем $P(g_N)$. □

Следствие 2. *Пространство Банаха c_0 — не плюриполярное множество в l^∞.*

Доказательство. Пусть $P(g)$ — такая п.-с.-г. функция в l^∞, что $P(g) = -\infty$ на c_0. Построим последовательность натуральных чисел $n(k) \to \infty$ и точек $r^{(k)} = (r_n^{(k)}) \in l_+^\infty$ так, что $r^{(0)} = I$, $r_n^{(k)} = r_n^{(k-1)}$ при $n \leqslant n(k)$, $r_n^{(k)} = r_n^{(k-1)} + 1$ при $n > n(k)$, и так, чтобы при всех k выполнялось неравенство $m(r^{(k)}, P) \leqslant m(r^{(k-1)}, P) + 2^{-k}$. Точки $s^{(k)} = (1/r_n^{(k)}) \in l_+^\infty$ сходятся к точке $s^{(0)} \in c_0$. Из утверждения д) теоремы 3 следует, что $m(s^{(k)}, P) \to -\infty$ при $k \to \infty$, а из утверждения г) той же теоремы имеем $m(I, P) \leqslant [m(r^{(k)}, P) + m(s^{(k)}, P)]/2$. Поэтому $m(l, P) = -\infty$; ясно также, что l можно заменить на tl для любого $t > 0$, т. е. $P(g) \equiv -\infty$ в l^∞, что невозможно. □

Отметим, что в отличие от конечномерного случая п.-п. множество может пересекаться с $\Gamma(r)$ по множеству полной меры μ. Это показывает следующий пример.

Положим для $\lambda = (\lambda_n) \in l^\infty$

$$P(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \{\log \left| \sum_{j=1}^{N(n)} \lambda_j \right| - \log n N(n)\}, \tag{3}$$

где $N(n) = [ne^{2n^2}] + 1$. Нетрудно видеть, что ряд (3) удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и при этом $P(l) \neq -\infty$. С другой стороны, из неравенства $\mu\{\varphi : |e^{i\varphi_1} + \dots + e^{i\varphi_N}| > \alpha\} \leqslant \alpha^{-2} \int |e^{i\varphi_1} + \dots + e^{i\varphi_N}|^2 d\mu = N\alpha^{-2}$ следует, что множество $E_n = \{\varphi : |e^{i\varphi_1} + \dots + e^{i\varphi_N}| > Ne^{-n^2}\}$ удовлетворяет ус овию $\mu(E_n) < 1/n$, и поэтому мера множества $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} E_n$ равна нулю. При этом для точек $\lambda = (e^{i\varphi_n})$ таких, что $\varphi' = (\varphi'_n) \notin E$, ряд (3) расходится. □

Теорема 4. *Пусть $E_1, \dots, E_n, \dots$ — последовательность п.-п. множеств в X^*. Тогда их объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ также является п.-п. множеством.*

Доказательство. Пусть $P_n(g)$ — последовательность п.-с.-г. функций, таких, что $E_n \subset \{g : P_n(g) = -\infty\}$. Построим такую последовательность точек $g_n \in X^*$, что

а) $\| g_n - g_{n-1} \| < 2^{-n}$, $n = 2, 3, \dots$

б) $P_j(g_n) \geqslant P_j(g_{n-1}) - 2^{-n}$, $j < n$, $n = 2, 3, \dots$

в) $P_n(g_n) \neq -\infty$, $n = 1, 2, \dots$

Для этого выберем g_1 так, чтобы выполнялось в) при $n = 1$. Предполагая, что подходящие g_j для $j = 1, \dots, n-1$ уже выбраны, выберем $\tilde{g}$ так, что $P_n(\tilde{g}) \neq -\infty$, и проведем комплексную прямую L через точки $\tilde{g}$, g_{n-1}. Так как $P_j(g)$, $j = 1, \dots, n$, субгармонические функции на L, не равные тождественно $-\infty$, можно выбрать точку g_n, удовлетворяющую условиям а), б), в). Для точки $g' = \lim_{n\to\infty} g_n$ имеем

$$P_j(g') \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} P_j(g_n) \geqslant P_j(g_j) - 1 \neq -\infty, \quad j = 1, 2, \dots$$

Выберем теперь последовательность чисел $\alpha_n > 0$, такую, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n [P_n(g) - \max_{\|g\| < n} P_n(g)]$$

сходился в точке g'. Утверждение теоремы 4 вытекает теперь из теоремы 1. □

Теорема 5. *Пусть A — такое подмножество X, что для каждого $g \in E$, где E неплюриполярное множество в X^*, множества $\{(g, x) : x \in A\}$ ограничены в $\mathbf{C}$. Тогда A ограничено по норме в X.*

Доказательство. Если A — неограниченное множество, то найдется последовательность точек $x_n \in A$ такая, что $\|x_n\| \geqslant \exp n$ и точки $g_n \in X^*$ такие, что $\|g_n\| = n^{-2}$ и $(g_n, x_n) = \|g_n\| \|x_n\|$. Ряд

$$P(g) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} [\log |(g, x_n)| - \log \|x_n\| - \log n] \tag{4}$$

удовлетворяет условию теоремы 1 и расходится для каждого $g \in E$. С другой стороны, так как ряд $\sum_n g_n$ сходится, то согласно следствию теоремы 3

$$\int P\Big(\sum_{N=1}^{\infty} e^{i\varphi_N} g_N\Big) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \Big\{ \int \log \Big| \Big(\sum_{N=1}^{\infty} e^{i\varphi_N} g_N, x_n \Big) \Big| d\mu -$$

$$- \log (n \|x_n\|\Big\} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \{\log |(g_n, x_n)| - \log (n \|x_n\|)\} > -\infty.$$

Поэтому ряд (4) не может расходиться для всех $g \in X^*$, и E п.-п. множество, что противоречит условию. □

Отсюда и из следствия теоремы 2 вытекает следующий результат.

Теорема 6. *Если A такое множество в X, что множества $\{(g, x) \mid x \in A\}$ ограничены для каждой c-крайней точки единичного шара в X^*, то A ограничено в X.*[1] □

Тем же способом, каким из теоремы Банаха—Штейнгауза выводится теорема Данфорда о голоморфном отображении, из теоремы 5 можно получить следующий результат.

Теорема 7. *Пусть D — область в $\mathbf{C}^m$, а f — такое отображение из D в X, что для всех $g \in E$, где E — неплюриполярное подмножество в X^*, функция $(g, f)(z)$ голоморфна в D. Тогда $f(z)$ — голоморфное отображение из D в X.* □

В случае $X = l^1$, $X^* = l^\infty$ имеем

Следствие. *Если $f_n(z)$ — последовательность комплекснозначных функций в области D такая, что ряд $\sum_n |f_n(z)|$ сходится для каждого $z \in D$, а сумма*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z) \tag{5}$$

голоморфна для каждой последовательности (λ_n) из некоторого неплюриполярного подмножества в l^∞, то ряд (5) — голоморфная функция в D для всех $(\lambda_n) \in l^\infty$. □

Список литературы: 1. *Lelong P.* Fonctions plurisousharmoniques et ensembles polaires sur une algebre de fonctions holomorphes//Lecture Notes. 1969. № 116. P. 1—20. 2. *Lelong P.* Plurisubharmonic functions in topological vector spaces. Polar sets and problems of measure//Lecture Notes. 1973. № 364. P. 58—69. 3. *Kiselman O.* Croissance des fonctions plurisousharmoniques dimension in finie// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1984. 34. P. 155—183. 4. *Фаворов С. Ю.* Распре-

[1] Заменить c-крайние точки на крайние в общем случае нельзя, точное описание пространств X, где такая замена возможна (см. [8]).

деление значений голоморфных отображений C^m в банахово пространство//Функцион. анализ и его прил. 1987. 21, вып. 3. С. 91—92. 5. *Фаворов С. Ю.* Рост и распределение значений голоморфных отображений конечномерного пространства в банахово//Сиб. мат. журн. 1990. 31, № 1. С. 101—112. 6. *Globevnik I.* On complex strict and uniform convexity//Proc. Amer. Math. Soc. 1975. **48.** P. 61—69. 7. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М., 1971. 430 с. 8. *Фонф В. П.* Слабо экстремальные свойства банаховых пространств//Мат. заметки. 1989. **45**, вып. 6. С. 83—92.

Поступила в редколлегию 30.11.90