

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ЯДЕРНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ В.Н. КАРАЗІНА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Тищенко Маргарита Германівна

УДК 533.9

ДИСЕРТАЦІЯ
«ПОШИРЕННЯ АЛЬФВЕНОВИХ ХВИЛЬ ТА ПЕРЕНЕСЕННЯ
ЕНЕРГІЇ ПОПЕРЕК МАГНІТНИХ ПОВЕРХОНЬ У
ТОРОЇДАЛЬНІЙ ПЛАЗМІ»

Спеціальність 01.04.08 – фізика плазми
(Фізико-математичні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання
ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на
відповідне джерело.

_____ М.Г. Тищенко

Науковий керівник:

Яковенко Юрій Володимирович,
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник

Харків – 2021

АНОТАЦІЯ

Тищенко М. Г. Поширення альфвенових хвиль та перенесення енергії поперек магнітних поверхонь у тороїдальній плазмі. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.08 – фізика плазми (Фізико-математичні науки). – Інститут ядерних досліджень Національної академії наук України; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2021.

Дисертація присвячена актуальним питанням фізики магнітогідродинамічних хвиль у тороїдальних термоядерних пристроях. В ній представлено результати теоретичних досліджень фізики перенесення енергії поперек магнітних поверхонь альфвеновими хвилями та магнітними островами і ефектів просторового каналювання енергії енергійних йонів (включно з альфа-частинками) дестабілізованими альфвеновими власними модами в токамаках. Розвинену теорію застосовано до пояснення експериментальних даних, отриманих на сферичному торі NSTX (США) та токамаку JET (Велика Британія).

Виявлено фізичний механізм передачі енергії поперек магнітного поля ідеальними альфвеновими хвилями в тороїдальній плазмі. Знайдено, що на відміну від класичних альфвенових хвиль у нескінченній плазмі, альфвенові хвилі в тороїдальних системах спричиняють стиснення плазми завдяки зачепленню зі швидкими магнітозвуковими хвилями, що і вможливорює передачу енергії. З практичної точки зору важливо знати групову швидкість в радіальному напрямку, v_g . Вона залежить від групової швидкості біжучих хвиль, які складають моду. Ненульова групову швидкість і поперечне перенесення енергії власними модами має місце лише за наявності локальних джерел та стоків, які порушують баланс біжучих хвиль, що рухаються назовні і всередину плазми. Іншими словами, $v_g \neq 0$, коли області збудження нестійкості не збігаються з областями, де мода загасає. Можна очікувати, що в такому випадку радіальна структура моди зазнаватиме впливу. Наші оцінки показують, що це може мати місце при реалістичних інтенсивностях збудження або загасання мод. Пораховано радіальну групову швидкість для біжучих хвиль, які утворюють GAE-моди (Global Alfvén Eigenmodes –

глобальні альфвенові власні моди) та TAE-моди (Toroidal Alfvén Eigenmodes – альфвенові моди, спричинені тороїдальністю). Показано, що хоча редуковані рівняння для альфвенових власних мод отримуються в тому наближенні, що поле хвилі, направлене вздовж рівноважного магнітного поля, є відсутнім, з цих рівнянь можна правильно відтворити поздовжнє магнітне поле хвилі, тому вони дають правильний поперечний потік енергії. Отримані результати пояснюють, як альфвенові власні моди можуть викликати просторове каналювання енергії – передачу енергії цими модами з нестійкої області плазми в область, де домінує загасання моди.

З'ясовано умови, за яких множинні альфвенові власні моди здатні відібрати значну частку енергії швидких йонів для можливої передачі в іншу область простору. Це може траплятись, якщо резонансні острови нестійкостей перекриваються і утворюють широку стохастичну зону в фазовому просторі швидких йонів. Отримано аналітичний вираз для ширини островів, створених у фазовому просторі швидкого йона сайдбенд-резонансами з альфвеновими власними модами. Це дає змогу оцінити ширину інтервалу енергій швидких йонів, у якому множинні альфвенові моди здатні створити стохастичну зону, і, отже, частку енергії, яку вони можуть відібрати у цих йонів. Зокрема, виявляється, що порядку 10 GAE-мод (така кількість спектральних ліній нестійкостей спостерігалась у експериментах [D. Stutman et al., Phys. Rev. Lett. **102**, 115002 (2009)]) достатньо, щоб відібрати половину енергії швидких йонів у NSTX. Отже, наші оцінки підтверджують результати роботи [Ya.I. Kolesnichenko et al., Phys. Rev. Lett. **104**, 075001 (2010)].

Показано, що просторове каналювання може відігравати важливу роль у покращенні характеристик плазми та зростанні йонної температури в експериментах з нагріванням альфа-частинками у токамаку JET. Аналіз проведено в припущенні, що альфа-частинки, які знаходяться на периферії плазми, збуджують множинні швидкі магнітозвукові моди, що мають глобальну радіальну структуру. Показано, що швидкі магнітозвукові моди з частотами, близькими до циклотронних гармонік альфа-частинок, можуть бути в резонансі з йонами та електронами основної плазми, що знаходяться в центральній області плазми, передаючи енергію альфа-частинок в цю область. Це покращує ефективність нагрівання та загальне утримання плазми. Окрім того, це спричиняє аномальне йонне нагрівання, коли загасання

швидких магнітозвукових мод на йонах переважає над загасанням швидких магнітозвукових мод на електронах. Пораховано декременти загасання розглянутих хвиль. Знайдено умови, що забезпечують загасання швидких магнітозвукових мод переважно на йонах. Показано, що досить малі амплітуди хвиль є достатніми, щоб забезпечити отримання хвилями і передачу ними поперек магнітних поверхонь значної частки термоядерної енергії. Показано, що розвинена теорія доцентрового просторового каналювання енергії може бути поясненням до експериментів на токамаку JET, які проводились під час дейтерій-третієвої кампанії (DTE1), де, ймовірно, мали місце аномальне йонне нагрівання та покращення утримання енергії плазми. Виконано аналіз експериментальних даних токамаку JET, який підтвердив висновки роботи [P.R. Thomas et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 5548–5551 (1998)], що енерговміст дейтерій-третієвих розрядів перевищує енерговміст дейтерієвих розрядів, де нагрівання альфа-частинками було замінене на еквівалентне йонно-циклотронне резонансне нагрівання.

Показано, що тороїдальність (так само як еліптичність та інші відхилення форми магнітних поверхонь від циліндричної) може мати наслідком лінійну трансформацію кінетичної альфвенової хвилі в іншу кінетичну альфвенову хвилю, яка відрізняється від початкової хвилі номером моди. Фізичною причиною цих трансформацій є “явище уникнення перетину” (avoided crossing phenomenon). Відомо, що зачеплення між двома гілками альфвеного континууму, які характеризуються різними модовими номерами утворює щілину в континуумі біля точки, де ці гілки перетинаються, таким чином усуваючи точку перетину і змінюючи топологію кривих континуума так, що різні гілки з’єднуються. Ефект зачеплення гілок дисперсійних кривих кінетичних альфвенових хвиль на площині (k_r, r) (де r – радіальна координата і k_r – радіальне хвильове число) є досить схожим: зачеплення утворює щілину біля точки перетину двох дисперсійних гілок, з’єднуючи гілки з різними модовими номерами. В результаті, хвиля, досягаючи такої щілини вздовж однієї дисперсійної гілки, рухається від неї вздовж іншої гілки, що означає, що відбулась трансформація модового номера. Проте, коли щілина є вузькою, частка енергії хвилі може уникнути трансформації внаслідок тунелювання через щілину. Знайдено залежність коефіцієнта трансформації (який визначається як відношення потоку енергії трансформованої хвилі до

поток енергії падаючою хвилі) від ширини щілини та інших параметрів системи. Показано, що трансформація може бути сильною для хвиль з малими полоїдальними номерами мод, зокрема в таких термоядерних пристроях як NSTX та ITER (Франція). Трансформація може бути важливою для діагностики плазми, оскільки вона може змінювати модові номери, що спостерігаються під час зовнішніх магнітних вимірювань. Крім того, трансформація кінетичних альфвенових хвиль послаблює загасання Ландау, тим самим збільшуючи область поширення хвилі. Останнє може бути важливим, коли хвиля впливає на енергобаланс плазми, переносячи енергію або змінюючи коефіцієнти перенесення плазми. Приклад такої ситуації можна знайти в роботі [Ya.I. Kolesnichenko et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 165004 (2005)].

Вивчено особливості цеберного перенесення (bucket transport) швидких йонів – просторового перемішування цих йонів завдяки просторовому зміщенню їх резонансів зі збуренням – для випадку квазістаціонарних магнітних збурень. Запропоновано гамільтонів формалізм, застосовний для випадку, коли зміщення резонансів є наслідком зіткненнєвого гальмування частинок та часової еволюції коефіцієнту запасу стійкості, q . Знайдено, що гамільтоніан, запропонований в [C.T. Hsu et al., Phys. Rev. Lett. **72**, 2503 (1994)] для вивчення цеберного перенесення, спричиненого чірпінгом частоти, можна використати для вивчення транспорту, пов'язаного зі зіткненнєвим гальмуванням йонів та/або часовою еволюцією профіля q за наявності статичних збурень. Показано, що незалежно від напрямку руху цебра, потік енергії і потік частинок, спричинений цеберним перенесенням, завжди направлений проти градієнтів. Ці зміщення резонансних і нерезонансних частинок в протилежних напрямках призводять до перемішування, а не адвекції частинок та енергії. Показано, що потік енергії, що створюється цеберним перенесенням, є значним у конфігураціях із малим широм, – отже цеберне перенесення може бути важливим для гібридного операційного режиму (режиму з плоским профілем q) і розрядів з оберненим широм. Показано, що цеберні потоки локалізуються на певній відстані від магнітних островів, які спричиняють їх появу.

Ключові слова: токамак, енергійні йони, транспорт, резонансні острови, альфвенові хвилі, власні моди, нестійкості плазми.

ABSTRACT

Margaryta H. Tyshchenko. Propagation of Alfvén waves and energy transfer across magnetic surfaces in toroidal plasmas. – Qualification scientific work is as a manuscript.

Thesis for a Candidate degree in Physics and Mathematics: Speciality 01.04.08 – Plasma Physics (Physical and Mathematical sciences). – Institute for Nuclear Research, the National Academy of Science of Ukraine; V. N. Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2021.

This dissertation is devoted to current problems of the physics of magnetohydrodynamic waves in toroidal fusion devices. It presents results of theoretical investigation of physics of the transverse energy transfer by Alfvén waves and magnetic islands, and of effects of the spatial channelling of the energy of energetic ions/alpha particles by destabilized Alfvén eigenmodes in tokamaks. The developed theory is applied to experimental data from the spherical torus NSTX (USA) and tokamak JET (United Kingdom).

The existence of Alfvén eigenmodes in toroidal plasmas indicates the presence of the energy flux across the magnetic field, which is responsible for the radial structure of the modes. Physics of the transverse energy transfer by ideal Alfvén waves in toroidal plasmas is elucidated. It is found that, in contrast to the classical Alfvén waves in infinite plasmas, the Alfvén waves in toroidal systems produce plasma compression due to coupling with fast magnetoacoustic waves, which provides the energy transfer. From the practical point of view, it is of importance to know the eigenmode group velocity in the radial direction, v_g . It depends on the group velocity of traveling waves constituting the mode. However, non-zero group velocity and the transverse energy transfer by eigenmodes take place only in the presence of local sources and sinks which break the balance of the traveling modes moving outwards and inwards. In other words, $v_g \neq 0$ when the regions driving the instability do not coincide with the regions where the wave is damped. One can expect that in this case the mode radial structure will be affected. Our estimates show that it may take place at reasonable values of growth/damping rates. The radial group velocities of the traveling waves constituting the Global Alfvén Eigenmodes (GAE) and Toroidicity-induced Alfvén Eigenmodes (TAE) are calculated. It is shown that equations for Alfvén eigenmodes derived in the approximation of vanishing wave field along the equilibrium magnetic field reproduce the longitudinal magnetic field

of the wave and lead to correct transverse energy flux. The obtained results explain how Alfvén eigenmodes can provide the spatial energy channeling – the transfer of the energy by these modes from the unstable plasma region to the region where the mode damping dominates.

The conditions are established when multiple Alfvén eigenmodes are able to withdraw a significant part of the energy of fast ions for possible transfer to another spatial region. This can happen when the resonance islands of the instabilities overlap to form an extensive stochastic zone in the fast ion phase space. An analytical expression for the width of a resonance island induced by the side-band resonances with Alfvén eigenmodes in the fast ion phase space is derived. This enables the evaluation of the width of fast ion energy intervals, where multiple Alfvén eigenmodes are able to produce stochastic zone and, therefore, the fraction of the energy that can be extracted from fast ions by destabilized waves. In particular, it turns out, that about 10 GAE modes (spectrograms of instabilities in NSTX show that such a number of unstable modes are observed simultaneously [D. Stutman et al., Phys. Rev. Lett. **102**, 115002 (2009)]) are sufficient to extract a half of the fast ions energy. Thus, our estimates confirm the conclusions of [Ya.I. Kolesnichenko et al., Phys. Rev. Lett. **104**, 075001 (2010)].

It is found that spatial channeling may have played a role in the improved confinement and increased ion temperature in JET experiments with alpha particle heating. Analysis is carried out in the assumption that alpha particles located in the peripheral region of the plasma destabilize multiple fast magnetoacoustic modes having global radial structure. The fast magnetoacoustic modes with the frequencies close to cyclotron harmonics of alpha particles are considered. It is found that these fast magnetoacoustic modes can be in resonance with the bulk plasma ions and electrons located in the central region of the plasma, delivering the alpha energy to this region. This improves the heating efficiency and overall plasma confinement. In addition, it leads to anomalous ion heating when the ion damping of fast magnetoacoustic mode exceeds the electron one. The damping rates of the considered waves are calculated. Conditions providing dominant ion damping are found. Reasonably small amplitude waves can receive and transfer across the flux surfaces as large power density as that required for spatial channeling of a considerable part of fusion energy. The developed theory of the inward spatial channeling is applied to JET experiments carried out during

the deuterium–tritium-experiment campaign (DTE1), where presumably anomalous ion heating and improvement of the plasma confinement took place. An analysis of JET experimental data was carried out, which confirmed the conclusion of [P.R. Thomas et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 5548–5551 (1998)] that the energy content in deuterium–tritium discharges exceeds that in deuterium discharges with alpha power substituted by ion cyclotron resonance heating power.

It is demonstrated that toroidicity (as well as ellipticity and other kinds of deviations of the magnetic configuration from the cylindrical geometry) can result in linear transformations of propagating kinetic Alfvén waves (KAWs) into other KAW branches, which differ by their mode numbers from the initial waves. The physical reason for these transformations is the avoided-crossing phenomenon. It is well known that coupling between two Alfvén continua characterized by different mode numbers produces a frequency gap in the continuum near the point where these branches cross, removing the crossing point and changing the topology of the continuum curves so that the different branches become connected. The effect of coupling on branches of the dispersion curves of KAWs on the plane (k_r, r) (where r is the radial coordinate and k_r is the radial wave number) is quite similar: the coupling produces a gap near the crossing point of two dispersion branches, connecting the branches with different mode numbers. As a result, a wave approaching such a gap along one dispersion branch propagates from it along another one, which means that a transformation of the mode number of the wave occurs. However, when the gap is narrow, a fraction of the wave energy can avoid the transformation due to tunnelling across the gap. The dependence of the transformation coefficient (which is defined as the ratio of the energy flux of the transformed wave to that of the incoming wave) on the gap width and other parameters of the system. The transformation is found to be strong for kinetic Alfvén waves with low poloidal mode numbers in typical tokamaks, NSTX and ITER (France). The transformation may be of importance for diagnostics because it may change the mode numbers observed by external magnetic measurements. In addition, transformation of kinetic Alfvén waves weakens the Landau damping of the waves, thus extending the region of the wave propagation. The latter can be important when the wave affects the plasma energy balance transferring the energy or modifying the plasma transport coefficients. An example of this can be found in [Ya.I. Kolesnichenko et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 165004 (2005)].

The so-called “bucket transport” of energetic ions — the spatial mixing of these ions due to spatial displacement of resonances — is studied with special attention to quasi-steady-state magnetic perturbations. A Hamiltonian formalism suitable to the case when the resonance displacement results from the collisional slowing down of the particles and the temporal evolution of the safety factor profile, q , is suggested. It is found that the Hamiltonian introduced in [C. T. Hsu et al., Phys. Rev. Lett. **72**, 2503–2507 (1994)] for the study of the bucket transport caused by frequency chirping can be used for the study of the transport associated with the collisional slowing down of the ions and/or the temporal evolution of the q -profile in the presence of static perturbations. Regardless of the direction of the bucket motion, the particle and energy fluxes caused by the bucket transport are always directed against the gradients. The reason for this is in the fact that any displacement of the phase volume enclosed by the buckets is always accompanied by a displacement of phase volume in the opposite direction. These opposite displacements of resonant and non-resonant particles result in mixing rather than advection of particles and energy. The energy flux produced due to the bucket transport is shown to be considerable in configurations with low shear. The bucket transport may be of importance in the hybrid operation mode and in reversed-shear discharges. It is shown that the bucket transport flux associated with magnetic islands tends to be localized at some distance from the islands.

Keywords: tokamak, energetic ions, transport, resonance islands, Alfvén waves, eigenmodes, plasma instabilities.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

Наукові праці у наукових фахових виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. М.Н. Tyshchenko and Yu.V. Yakovenko, «Spatial energy channeling and stochastization of fast ion motion by high-frequency plasma instabilities», Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics №1(95), 49-52 (2015). *(Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить отримання аналітичного виразу для ширини резонансного острова, створеного альфвеновою власною модою в фазовому просторі, участь*

у створенні числових кодів та виконанні числових розрахунків, а також написанні частини тексту.) (Видання входить до SCOPUS та Web of Science)

Наукові праці у зарубіжних наукових спеціалізованих виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

2. **М.Н. Tyshchenko** and Yu.V. Yakovenko, «Transformations of kinetic Alfvén waves in toroidal plasmas», Plasma Physics and Controlled Fusion **54**, Vol. 54, P. 065002 (2012). *(Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить виведення аналітичних виразів для амплітуди трансформованої і нетрансформованої хвиль, а також участь у написанні частини тексту.)* (Видання входить до SCOPUS та Web of Science)
3. Yu.V. Yakovenko, O.S. Burdo, Ya.I. Kolesnichenko, and **М.Н. Tyshchenko**, «Bucket transport of energetic ions in tokamaks», Physics Letters A **379**, 2062-2067 (2015). *(Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить отримання виразів для потоків енергії та частинок при цєберному перенесенні.)* (Видання входить до SCOPUS та Web of Science)
4. Ya.I. Kolesnichenko, V.V. Lutsenko, **М.Н. Tyshchenko**, H. Weisen, Yu.V. Yakovenko, and JET Contributors, «Analysis of possible improvement of the plasma performance in JET due to the inward spatial channelling of fast-ion energy», Nuclear Fusion **58**, 076012 (2018). *(Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить обчислення просторового каналювання в однорідинній моделі, а також участь у виведенні рівнянь та числових розрахунках.)* (Видання входить до SCOPUS та Web of Science)
5. Ya.I. Kolesnichenko, Yu.V. Yakovenko, and **М.Н. Tyshchenko**, «Mechanisms of the energy transfer across the magnetic field by Alfvén waves in toroidal plasmas», Physics of Plasmas **25**, 122508 (2018). *(Особистий внесок здобувача: здобувачеві належать розрахунки радіальної групової швидкості для біжучих хвиль, які утворюють GAE-моди, а також участь у виведенні рівнянь, обговоренні результатів та написанні тексту.)* (Видання входить до SCOPUS та Web of Science)

Наукові праці, які засвідчують апробацію результатів дисертації

6. **М.Н. Tyshchenko** and Yu.V. Yakovenko, in: *Proceedings of the 5th ITER International Summer School “MHD and Energetic Particles”*, (Aix en Provence, 2011), P. 64. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить виведення аналітичних виразів для амплітуди трансформованої і нетрансформованої хвиль, участь в обговоренні результатів; доповідач.)
7. **М.Н. Tyshchenko** and Yu.V. Yakovenko, in: *Proceedings of the 5th IAEA Techninal Meeting on the The Theory of Plasma Instabilities*, (IAEA, Vienna, 2011), P. 28. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить виведення аналітичних виразів для амплітуди трансформованої і нетрансформованої хвиль, участь в обговоренні результатів.)
8. **М.Г. Тищенко** та Ю.В. Яковенко, в: *Матеріали Української конференції з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу*, (ІЯД НАНУ та ІТФ НАНУ, Київ, 2011), С.21. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить виведення аналітичних виразів для амплітуди трансформованої і нетрансформованої хвиль, участь в обговоренні результатів; доповідач.)
9. **М.Г. Тищенко** та Ю.В. Яковенко, в: *Матеріали XX щорічної наукової конференції Інституту ядерних досліджень НАН України*, (ІЯД НАНУ, Київ, 2013), С. 143-144. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить отримання аналітичного виразу для ширини резонансного острова, участь у написанні числового коду, числові розрахунки та участь в обговоренні результатів; доповідач.)
10. **М.Г. Тищенко** та Ю.В. Яковенко, в: *Матеріали Української конференції з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу*, (ІЯД НАНУ та ІТФ НАНУ, Київ, 2013), С.17. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить виведення аналітичного виразу для ширини резонансного острова, участь у написанні числового коду, числові розрахунки та участь в обговоренні результатів; доповідач.)
11. **М.Н. Tyshchenko** and Yu.V. Yakovenko, in: *Proceedings of the International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion*, (NSC KIPT, Kharkiv, 2014), P. 42. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить отримання аналітичного виразу для ширини резонансного острова, участь у написанні числового коду, числові розрахунки та участь в обговоренні результатів; доповідач.)

12. **М.Г. Тищенко** та Ю.В. Яковенко, в: *Матеріали XXII щорічної наукової конференції Інституту ядерних досліджень НАН України*, (ІЯД НАНУ, Київ, 2015), С. 152-153. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить отримання аналітичного виразу для ширини резонансного острова, участь у написанні числового коду, числові розрахунки та участь в обговоренні результатів; доповідач.)
13. Ю.В. Яковенко, О.С. Бурдо, Я.І. Колесниченко, **М.Г. Тищенко**, в: *Матеріали XXII щорічної наукової конференції Інституту ядерних досліджень НАН України*, (ІЯД НАНУ, Київ, 2015), С. 160. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить отримання виразів для потоків енергії та частинок при цеберному перенесенні.)
14. Ю.В. Яковенко, О.С. Бурдо, Я.І. Колесниченко, **М.Г. Тищенко**, в: *Матеріали Української конференції з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу*, (ІЯД НАНУ та ІТФ НАНУ, Київ, 2015), С. 5. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить отримання виразів для потоків енергії та частинок при цеберному перенесенні.)
15. **М.Г. Тищенко** та Ю.В. Яковенко, в: *Матеріали Української конференції з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу*, (ІЯД НАНУ та ІТФ НАНУ, Київ, 2015), С. 22. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить участь у створенні числового коду та числові розрахунки; доповідач.)
16. Я.І. Колесниченко, **М.Г. Тищенко**, Ю.В. Яковенко, в: *Матеріали XXIV щорічної наукової конференції Інституту ядерних досліджень НАН України*, (ІЯД НАНУ, Київ, 2017), С. 173-174. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належать розрахунки радіальної групової швидкості для біжучих хвиль, які утворюють GAE-моди; доповідач.)
17. Я.І. Колесниченко, В.В. Луценко, **М.Г. Тищенко**, Г. Вейсен, Ю.В. Яковенко, в: *Матеріали XXV щорічної наукової конференції Інституту ядерних досліджень НАН України*, (ІЯД НАНУ, Київ, 2018), С. 157. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить участь у виведенні рівнянь та частина числових розрахунків.)
18. **М.Н. Tyshchenko**, Ya.I. Kolesnichenko, V.V. Lutsenko , Yu.V. Yakovenko, в: *Матеріали XXV щорічної наукової конференції Інституту ядерних досліджень НАН України*, (ІЯД НАНУ, Київ, 2018), С. 165-166. (Особистий

внесок здобувача: здобувачеві належить обчислення просторового каналювання в однорідній моделі; доповідач.)

19. Ya.I. Kolesnichenko, Yu.V. Yakovenko, **М.Н. Tyshchenko**, in: *Proceedings of the International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion*, (NSC KIPT, Kharkiv, 2018), P. 181. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належать розрахунки радіальної групової швидкості для біжучих хвиль, які утворюють GAE-моди та участь у виведенні рівнянь; доповідач.)
20. **М.Н. Tyshchenko**, Ya.I. Kolesnichenko, Yu.V. Yakovenko, в: *Матеріали XXVI щорічної наукової конференції Інституту ядерних досліджень НАН України*, (ІЯД НАНУ, Київ, 2019), С. 137. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належать розрахунки радіальної групової швидкості для біжучих хвиль, які утворюють GAE-моди та участь у виведенні рівнянь; доповідач.)
21. Я.І. Колесніченко, Ю.В. Яковенко, **М.Г. Тищенко**, в: *Матеріали Української конференції з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу*, (ІЯД НАНУ та ІТФ НАНУ, Київ, 2019), С. 30. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належать розрахунки радіальної групової швидкості для біжучих хвиль, які утворюють GAE-моди та участь у виведенні рівнянь; доповідач.)
22. Ya.I. Kolesnichenko, Yu.V. Yakovenko, **М.Н. Tyshchenko**, in: *Proceedings of the X Conference of Young Scientists "Problems of Theoretical Physics"*, (ВІТР, Київ, 2019), P. 14. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належать розрахунки радіальної групової швидкості для біжучих хвиль, які утворюють GAE-моди та участь у виведенні рівнянь; доповідач.)

ЗМІСТ

ВСТУП	16
РОЗДІЛ 1 ТРАНСФОРМАЦІЯ КІНЕТИЧНИХ АЛЬФВЕНОВИХ ХВИЛЬ В ТОРОЇДАЛЬНІЙ ПЛАЗМІ	23
1.1 Вихідні рівняння для опису двох зачеплених кінетичних альфвенових хвиль	24
1.2 Дисперсійне рівняння для двох зачеплених гармонік кінетичних альфвенових хвиль	27
1.3 Обчислення коефіцієнта трансформації	30
1.4 Розрахунки для існуючих пристроїв	36
Висновки до Розділу 1	37
РОЗДІЛ 2 “ЦЕБЕРНЕ” ПЕРЕНЕСЕННЯ ЕНЕРГІЙНИХ ЙОНІВ В ТОКАМАКАХ	39
2.1 Гамільтонів формалізм	40
2.2 Резонансні острови	43
2.3 Потік швидких йонів	48
Висновки до Розділу 2	51
РОЗДІЛ 3 ПРОСТОРОВЕ КАНАЛЮВАННЯ ЕНЕРГІЇ ШВИДКИХ ЙОНІВ АЛЬФВЕНОВИМИ ХВИЛЯМИ	53
3.1 Механізм перенесення енергії альфвеновими хвилями поперек магнітного поля в тороїдальній плазмі	54
3.1.1 Рівняння альфвенових хвиль у тороїдальній плазмі	54
3.1.2 Поперечний потік енергії в альфвенових хвилях: загальний вираз	61
3.1.3 Виведення потоку енергії в альфвеновій та швидкій магнітозвуковій хвилях з рівнянь ідеальної МГД	63
3.1.4 Власні моди за наявності джерел і стоків енергії	65
3.1.5 Групова швидкість v_g^t в GAE-модах	68
3.1.6 Групова швидкість v_g^t в TAE-модах	73

3.2	Просторове каналювання енергії і стохастизація руху швидких йонів високочастотними нестійкостями плазми	78
3.2.1	Ширина резонансу	78
3.2.2	Числове моделювання	81
	Висновки до Розділу 3	83
РОЗДІЛ 4 ПОКРАЩЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАЗМИ ПРИ ДОЦЕНТРОВОМУ КАНАЛЮВАННІ ЕНЕРГІЇ АЛЬФА-ЧАСТИНОК У ТОКАМАКУ JET		85
4.1	Доцентрове каналювання енергії альфа-частинок швидкими магнітозвуковими модами: основна ідея	86
4.1.1	Резонанси між швидкими магнітозвуковимим модами та частиками	87
4.1.2	Просторове каналювання енергії швидкими магнітозвуковими модами	94
4.1.3	Кількість альфа-частинок з високими енергіями на периферії плазми	95
4.1.4	Загасання високочастотних швидких магнітозвукових хвиль	101
4.2	Доцентрове просторове каналювання в однорідній моделі	105
4.3	Моделювання просторового каналювання в токамаку JET	108
	Висновки до Розділу 4	115
ВИСНОВКИ		118
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ		121
Додаток А СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ		136

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Термоядерна енергія має всі шанси стати екологічно прийнятним і невичерпним джерелом енергії. Наразі дослідження термоядерної енергії успішно ведуться у багатьох країнах світу, зокрема, в Європейському союзі вони здійснюються в рамках програми Євратома, асоційованим членом якої нещодавно стала Україна. У Франції продовжується будівництво реактора-токамака ITER [1], в якому планується отримання самоіндукованої термоядерної реакції. Істотним елементом програми робіт на існуючих токамаках є підготовка до експериментів на ITER [1—4].

Одним з найважливіших показників термоядерного пристрою (токамака або стеларатора), без якого неможливо досягти його функціонування як реактора, є здатність добре утримувати частинки та енергію. Із просуванням експериментів з керованого ядерного синтезу до реакторних параметрів усе більшу роль в енергобалансі плазми відіграють швидкі (надтеплові, енергійні) йони, які з'являються при нагріванні плазми інжекцією пучків швидких нейтральних атомів (Neutral Beam Injection (NBI)) та радіочастотними хвилями (Ion Cyclotron Resonance Heating (ICRH)), а також є продуктами реакцій синтезу. Енергійні йони забезпечують нагрівання плазми в існуючих пристроях та будуть підтримувати термоядерне горіння у майбутніх реакторах. З цієї причини фізика швидких йонів у термоядерній плазмі привертає до себе все більшу увагу, їй присвячені численні огляди [5—10], а здатність добре утримувати такі йони є важливою характеристикою термоядерного пристрою.

Існує багато фізичних механізмів, які ведуть до погіршення утримання швидких йонів, тобто до їх перенесення з центральної частини плазми або до втрат. У токамаках з достатньо сильним струмом “класичні” механізми – миттєві орбітальні втрати та неокласичне перенесення завдяки кулонівським зіткненням – не вважаються небезпечними [5, 7, 8], тому головна небезпека походить від порушень симетрії магнітного поля (у першу чергу, дискретності магнітних котушок) та від різноманітних збурень електромагнітного поля (магнітних островів, пилчастих коливань та інших нестійкостей плазми). У стелараторах класичні механізми можуть відігравати значну роль, але це не применшує роль транспорту, пов'язаного зі збуреннями плазми. Аналіз фізичних механізмів дії збурень на швидкі йони можна знайти,

зокрема, в нещодавній оглядовій публікації [10]; варто відзначити також так зване “цеберне перенесення” (bucket transport) [11, 12] – перенесення йонів, захоплених у резонансі зі збуренням плазми, при зміні розташування резонансу.

Важливим різновидом нестійкостей плазми, які здатні погіршувати утримання швидких йонів, є нестійкості, збуджені цими йонами (фішбон-моди, альфвенові моди, швидкі магнітозвукові моди тощо) [6, 13—16]. Серед цих нестійкостей важливе місце займають альфвенові нестійкості, що виникають через резонансне збудження альфвенових хвиль швидкими йонами. Такі нестійкості було спостережено в усіх типах тороїдальних термоядерних пристроїв [16—19]. Було знайдено, що ці нестійкості можуть викликати перерозподіл збуджуючих йонів або навіть виштовхувати їх з плазми, що може в реакторі призвести до небезпечних навантажень на стінку установки.

З іншого боку, деякі нестійкості, спричинені енергійними йонами, не мають помітного впливу на утримання ані основної плазми, ані енергійних йонів. Проте і тоді вивчення таких нестійкостей становить інтерес, бо вони можуть використовуватись для діагностики плазми (діагностика плазми за допомогою альфвенових нестійкостей отримала назву “МГД-спектроскопії”) [20].

Альфвенові хвилі в токамаках та стелараторах вивчаються також у зв’язку з їх використанням для нагрівання плазми [21—25]. Альфвенівське нагрівання плазми, яке ґрунтується на властивості альфвенової хвилі віддавати свою енергію плазмі в вузькому околі альфвенівського резонансу (магнітної поверхні, де частота хвилі дорівнює частоті альфвенового континууму) [26, 27], використовується зараз у деяких пристроях, зокрема, в Урагані-2М [28].

Існують експериментальні свідчення того, що альфвенові нестійкості здатні впливати на час утримання енергії плазми, зменшуючи його [29, 30], причому цей вплив не можна звести до перерозподілу або втрат швидких йонів. Зокрема, в експериментах на NSTX (США) [30] збільшення потужності NBI-нагрівання плазми з 2 МВт до 6 МВт призводило до зменшення температури плазми в центральній області; автори пов’язують це з появою множинних мод, які вони ідентифікували як GAE-моди (Global Alfvén Eigenmodes – глобальні альфвенові власні моди), локалізовані в центральній частині плазми (у подальших роботах [31, 32] було знайдено, що частина цих мод може бути швидкими магнітозвуковими модами). Одним з можливих

пояснень такого впливу є аномальний транспорт тепла електронами [33—35]. Іншим поясненням згаданих експериментів на NSTX [30] є просторове каналювання енергії інжектованих йонів – перенесення енергії з одної області плазми до іншої області збудженими власними модами [36]. Воно може мати місце, коли просторові області випромінювання хвилі енергійними йонами та поглинання хвилі основною плазмою не збігаються.

Підсумовуючи сказане, можна зробити висновок, що для того, щоб добре утримувати в плазмі швидкі йони (а також енергію, яку вони постачають плазмі), потрібно мати розуміння фізичних механізмів їх перенесення та енергетичних потоків, які створюють нестійкості, збуджені цими йонами. Серед цих нестійкостей важливе місце займають альфвенові нестійкості, які виникають через резонансне збудження альфвенових хвиль швидкими йонами. Ці міркування обумовили вибір теми дисертації, у якій вивчаються процеси поширення альфвенових хвиль, перенесення енергії хвилями поперек магнітного поля та енергетичні потоки, що виникають при взаємодії швидких йонів зі збуреннями електромагнітного поля токамака.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дослідження, що увійшли до дисертаційної роботи, виконувались в рамках тем Національної академії наук України: №0106U011414 “Коллективні явища та транспортні процеси в плазмі тороїдальних систем” (2007-2011 рр.), №0112U003278 “Дослідження фізичних процесів у плазмі з надтепловими йонами у токамаках та стелараторах” (2012-2016 рр.), №0116U002923 “Багаточастинкові процеси в термоядерних системах” (2017-2021 рр.); Проекту цільової комплексної програми НАН України “Перспективні дослідження з фізики плазми, керованого термоядерного синтезу та плазмових технологій” (2017-2019); Проектів Науково-технологічного центру в Україні № 4588 “Йони високих енергій у токамаках та стелараторах: фізичні проблеми, діагностика і нагрівання плазми.” (2008 - 2011 рр.); Спільного проекту Науково-технологічного центру в Україні та НАН України № 6058 “Вплив йонів високих енергій на характеристики плазми в міжнародному реакторі ITER та інших термоядерних пристроях.” (2015-2017 рр.); Спільного проекту Науково-технологічного центру в Україні та НАН України № 6392 “Збільшення потужності термоядерного реактора нерівноважними процесами

в плазмі” (2018-2020 pp.); Пакету робіт JET1 (Analysis and Modelling Campaign) консорціуму EUROfusion (2017-2019 pp.).

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є вивчення поширення альфвенових хвиль поперек магнітного поля, знаходження потоків енергії поперек магнітного поля, які виникають при взаємодії швидких йонів з магнітогідродинамічними хвилями та магнітними островами, та аналіз фізичних механізмів, що викликають такі потоки. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні наукові завдання:

- Проаналізувати зміни модової структури кінетичних альфвенових хвиль при їх поширенні поперек тороїдного магнітного поля;
- Знайти потоки швидких йонів та їх енергії, які виникають при їх гальмуванні за наявності магнітних островів;
- Оцінити максимально можливий енергетичний потік, що виникає при каналюванні енергії швидких йонів множинними альфвеновими нестійкостями;
- Проаналізувати вплив каналювання енергії термоядерних альфа-частинок швидкими магнітозвуковими модами на енергобаланс в експериментах із дейтерій-тритієвою плазмою в токамаку JET (Велика Британія).

Об’єкт дослідження - плазма токамаків та стелараторів, що містить швидкі йони.

Предмет дослідження - альфвенові хвилі в плазмі токамаків та стелараторів і процеси перенесення швидких частинок та енергії.

Методи дослідження У дисертації застосовуються відомі аналітичні та числові методи: лагранжів та гамільтонів формалізми класичної механіки для аналізу руху заряджених частинок у електричному і магнітному полі, метод ВКБ та метод діаграм Стокса для знаходження коефіцієнту трансформації кінетичних альфвенових хвиль, теорія нелінійних резонансів в гамільтонових системах, метод Рунге-Кутти четвертого порядку для знаходження ширини резонансного острова утвореного альфвеновою модою, метод скінченних різниць для розв’язання системи рівнянь балансу частинок та енергії для знаходження температури та густини йонів та електронів, метод Сімпсона для знаходження інкрементів збудження та декрементів загасання альфвенових хвиль.

Наукова новизна отриманих результатів. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

1. Досліджено новий механізм трансформації модової структури кінетичних альфвенових хвиль при проходженні певних раціональних магнітних поверхонь у тороїдному магнітному полі; знайдено ефективність такої трансформації.
2. Вперше показано, що гальмування швидких йонів у токамаку за наявності порушень симетрії (магнітних островів) створює радіальні потоки частинок та енергії; знайдено величину та просторове розташування цих потоків.
3. Вперше пораховано максимальний енергетичний потік, що може передаватися поперек магнітного поля альфвеновими модами (GAE-модами та TAE-модами), коли збудження моди швидкими йонами та поглинання її енергії термічною плазмою є розділеними в просторі.
4. Вперше знайдено амплітуду множинних альфвенових мод, потрібну для того, щоб такі моди могли відібрати значну частку енергії швидких йонів, що є необхідною умовою просторового каналювання.
5. Вперше досліджено вплив просторового каналювання енергії термоядерних альфа-частинок швидкими магнітозвуковими модами на енергобаланс в експериментах із дейтерій-третієвою плазмою в токамаку JET; показано, що просторове каналювання може відігравати важливу роль у покращенні характеристик плазми та зростанні йонної температури в експериментах із нагріванням плазми альфа-частинками у токамаку JET.

Практичне значення отриманих результатів. Праці, на основі яких написана дисертація, включають як теоретичні дослідження, так і застосування розвиненої теорії до конкретних термоядерних систем – токамака JET, та сферичного тора NSTX. Нижче подано перелік результатів, що мають практичне значення.

Явище трансформації модових номерів кінетичних альфвенових хвиль при їх радіальному поширенні може бути важливим для діагностики плазми, оскільки внаслідок цього явища модові номери, які спостерігаються зовнішніми магнітними зондами можуть відрізнятися від справжніх модових номерів альфвенової моди, яка випромінює ці хвилі. Крім того, це явище може приводити до збільшення області поширення та поглинання хвиль, впливаючи на баланс енергії плазми.

Проведені дослідження “цеберного перенесення” енергійних йонів є корисними для інтерпретації результатів експериментів у режимах з немонотонним профілем коефіцієнту запасу стійкості.

Знаходження максимальної частки енергії швидких йонів, що може відбиратися альфвеновими нестійкостями, та максимального радіального потоку енергії, що може передаватися альфвеновими модами, є корисним для аналізу просторового каналювання енергії швидких йонів у токамаках та стелараторах. Зокрема, отримано оцінки, які показують, що просторове каналювання могло бути основною причиною аномального перенесення енергії під час сильної інжекції нейтральних пучків в сферичному торі NSTX.

Показано, що доцентрове просторове каналювання енергії може пояснити дейтерій-третієві експерименти на токамаку JET, які проводились під час експериментальної кампанії DTE1, де, ймовірно, мали місце аномальне йонне нагрівання та покращення утримання плазми.

Результати, отримані в дисертації, можуть бути використані в дослідженнях, що проводяться у ННЦ “Харківський фізико-технічний інститут” НАН України, Інституті ядерних досліджень НАН України, Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Харківському національному університеті ім. В. Н. Каразіна. Вони також можуть бути використаними у Інституті фізики плазми Макса Планка (Німеччина), Принстонській лабораторії фізики плазми (США), Калемському науковому центрі (Велика Британія).

Публікації. Результати, що викладені в дисертації, опубліковано в 22 наукових роботах, з них 1 стаття у фаховому виданні України, що входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science [37], 4 статті у закордонних фахових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science [38—41], та 17 тез доповідей на міжнародних та вітчизняних конференціях, конгресах, нарадах. Наведені публікації повністю відображають зміст дисертації.

Особистий внесок здобувача. Роботи, покладені в основу дисертації, виконано в співавторстві. Конкретний особистий внесок здобувача є таким. В роботі [37] здобувачеві належить отримання аналітичного виразу для ширини резонансного острова, створеного альфвеновою власною модою в фазовому просторі, участь у створенні числових кодів та виконанні числових

розрахунків, а також написанні частини тексту. В роботі [38] здобувачеві належить виведення аналітичних виразів для амплітуди трансформованої і нетрансформованої хвиль, а також написання частини тексту. В роботі [39] здобувачеві належить отримання виразів для потоків енергії та частинок при цеберному перенесенні. В роботі [41] здобувачеві належить обчислення просторового каналювання в однорідній моделі, а також участь у виведенні рівнянь та числових розрахунках. В роботі [40] здобувачеві належать розрахунки радіальної групової швидкості для біжучих хвиль, які утворюють GAE-моди, а також участь у виведенні рівнянь, обговоренні результатів та написанні тексту.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на 5-ій Технічній конференції МАГАТЕ з теорії нестійкостей в плазмі (Остін, Техас, США, 2011 р.), Міжнародній конференції та школі з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу (Харків, 2014 р. та Харків, 2018 р.), 5-ій Міжнародній ITER-школі “МГД та енергійні частинки” (Екс-ан-Прованс, Франція, 2011 р.), Українській конференції з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу (Київ, 2011, 2013, 2015, 2019 рр.); Конференції молодих вчених “Проблеми теоретичної фізики” (Київ, 2019 р.); а також на Щорічних конференціях Інституту ядерних досліджень НАН України (2013, 2015, 2017, 2018, 2019 рр.).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації складає – 140 сторінок, з них основний текст – 104 сторінки. Робота містить 26 рисунків та 2 таблиці. Список використаних джерел налічує 129 найменувань.

Подяки. Автор щиро вдячний науковому керівнику – доктору фізико-математичних наук Ю.В. Яковенку, та професору, доктору фізико-математичних наук Я.І. Колесниченку за всебічну підтримку та повсякчасну увагу до роботи. Автор щиро дякує кандидату фізико-математичних наук В.Є. Моїсеєнку за критичні зауваження до дисертації, а також співавторам, з якими було виконано частину робіт, що увійшли до дисертації, особливо доктору фізико-математичних наук В.В. Луценку та співробітникам відділу теорії ядерного синтезу Інституту ядерних досліджень НАН України за корисні дискусії.

РОЗДІЛ 1

ТРАНСФОРМАЦІЯ КІНЕТИЧНИХ АЛЬФВЕНОВИХ ХВИЛЬ В ТОРОЇДАЛЬНІЙ ПЛАЗМІ

Кінетичні альфвенів хвилі (Kinetic Alfvén Waves (KAW)) спостерігаються в лабораторній та космічній плазмі. Зокрема, джерелами цих хвиль в токамаках та стелараторах є континуумне [42] та випромінне загасання [43] альфвенів нестійкостей. Фізичною причиною згаданих процесів загасання є взаємодія нестійкого збурення з альфвенів континуумом. У високотемпературній плазмі результатом такої взаємодії є перетворення енергії збурення в енергію KAW [44, 45]. Інколи в літературі зазначається, що KAW, яка випромінюється внаслідок цих процесів, загасає на короткій відстані від точки випромінювання (декілька ларморових радіусів). Проте так буває не завжди. Як приклад, можна розглянути розряди у стелараторі Wendelstein 7-AS, в якому KAW, згідно з розрахунками в [33], виникають внаслідок випромінного загасання альфвенів нестійкостей, які поширюються в радіальному напрямку на відстань порівняну з малим радіусом пристрою. Як було запропоновано в [33], вплив KAW на електрони може пояснювати теплові колапси, що спостерігались в цих розрядах.

В Розділі 1 будуть викладені результати роботи [38], метою якої було показати, що тороїдальність може викликати трансформацію вихідної KAW, з частотою, що лежить вище щілини альфвенів континууму, в KAW з іншим поїдальним номерами моди (m). Подібні трансформації одних KAW в інші KAW з іншими модовими номерами можуть бути спричинені еліптичністю та іншими відхиленнями магнітної конфігурації від циліндричної геометрії. Фізичною причиною цих трансформацій є “явище уникнення перетину” (avoided crossing phenomenon) [46, 47]. Добре відомо [48], що зачеплення між двома гілками альфвенів континууму, які характеризуються різними модовими номерами утворює щілину в континуумі біля точки, де ці гілки перетинаються, таким чином усуваючи точку перетину і змінюючи топологію кривих континуума так, що різні гілки з’єднуються. Як буде показано нижче, ефект зачеплення гілок дисперсійних кривих KAW на площині (k_r, r) (де r – радіальна координата і k_r – радіальне хвильове число) є досить схожим: зачеплення утворює щілину біля точки перетину двох дисперсійних гілок, з’єднуючи гілки з різними модовими номерами. В результаті, хвиля,

досягаючи такої щілини вздовж однієї дисперсійної гілки, рухається від неї вздовж іншої гілки, що означає, що відбулась трансформація модового номера. Можливість механізму такої трансформації була вперше згадана в [33]. Проте, коли щілина є вузькою, частка енергії хвилі може уникнути трансформації внаслідок тунелювання через щілину. В цій роботі знайдено залежність коефіцієнта трансформації (який визначається як відношення потоку енергії трансформованої хвилі до потоку енергії падаючої хвилі) від ширини щілини та інших параметрів системи.

1.1 Вихідні рівняння для опису двох зачеплених кінетичних альфвенових хвиль

Стисло нагадаємо виведення рівнянь [49], що описують дві зачеплені кінетичні альфвенові хвилі. Наслідуючи [50], починаємо з рівняння квазінейтральності:

$$\nabla \cdot (\mathbf{j}^{\text{MHD}} + \mathbf{j}^{\text{nonideal}}) = 0, \quad (1.1)$$

де $\mathbf{j}^{\text{MHD}}$ – струм ідеальної магнітогідродинаміки (МГД), $\mathbf{j}^{\text{nonideal}}$ – струм, що виникає в результаті кінетичних ефектів (збурене паралельне електричне поле і скінченний ларморів радіус). Коли тиск плазми є нехтовним і частота хвилі (ω) є набагато меншою ніж $k_{\perp} v_A$, $\mathbf{j}^{\text{MHD}}$ у плазмі в великим аспектним відношенням можна записати наступним чином [51] (див. також Розділ 3 дисертації):

$$\mathbf{j}^{\text{MHD}} = \mathbf{b} \frac{ic^2}{4\pi\omega B} \nabla \cdot \left(B^2 \nabla_{\perp} \frac{\nabla_{\parallel} \Phi}{B} \right) + \frac{i\omega c^2}{4\pi v_A^2} \nabla_{\perp} \Phi, \quad (1.2)$$

де $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$, $\mathbf{B}$ – рівноважне магнітне поле, $\nabla_{\parallel} = \mathbf{b} \cdot \nabla$, $\nabla_{\perp} = \nabla - \mathbf{b} \nabla_{\parallel}$, v_A – альфвенова швидкість, Φ – скалярний потенціал хвилі. Згідно з [50]:

$$4\pi \nabla \cdot \mathbf{j}^{\text{nonideal}} = \frac{3}{4} \frac{i\omega c^2}{v_A^2} \rho_i^2 \nabla_{\perp}^4 \Phi + \frac{i}{4\pi\omega} \nabla_{\parallel} \nabla^2 E_{\parallel}, \quad (1.3)$$

$$E_{\parallel} = -(T_e/T_i) \rho_i^2 \nabla_{\parallel} \nabla_{\perp}^2 \Phi,$$

де $E_{\parallel}$ – поздовжнє електричне поле, $\rho_i = c(M_i T_i)^{1/2}/(e_i B)$ – йонний гірорадіус, e_i – заряд йона, T_i і T_e – йонна та електронна температури, відповідно, тут не враховано дисипативні ефекти.

Підставляючи рівняння (1.2) та (1.3) в (1.1), отримуємо рівняння альфвенових хвиль, які в Бузерових координатах [52] $(x^1, x^2, x^3) = (\psi, \vartheta, \varphi)$ (тут ψ – тороїдальний потік, ϑ і φ – відповідно тороїдальний і полоїдальний кути) виглядають наступним чином:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^3 \left\{ \tau \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{g} (g^{ij} - b^i b^j) \frac{\partial}{\partial x^j} \right]^2 \Phi + \right. \\ & + \frac{1}{g B^2} \hat{L} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[B^2 \sqrt{g} (g^{ij} - b^i b^j) \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\hat{L} \Phi}{B^2 \sqrt{g}} \right) \right] + \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\sqrt{g} (g^{ij} - b^i b^j) \frac{\omega^2}{v_A^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

де $\tau = (3/4 + T_e/T_i) \rho_i^2 \omega^2 / v_A^2$, g^{ij} – компоненти контраваріантного метричного тензора, $i, j = 1, 2, 3$, b^i позначають i -ту контраваріантну компоненту $\mathbf{b}$, g – визначник метричного тензора; $\hat{L} = \iota \partial / \partial \vartheta + \partial / \partial \varphi$, $\iota = \iota(\psi) = q^{-1}$ – обертальне перетворення, q – коефіцієнт безпеки. Перший доданок рівняння (1.4) описує кінетичні ефекти, решта доданків є частиною рівнянь ідеальної МГД.

Припускаємо, що хвиля складається з двох Фур'є-гармонік з полоїдальним і тороїдальним номерами мод (m_1, n_1) і (m_2, n_2) відповідно:

$$\Psi(\psi, \vartheta, \varphi) = \Phi_1(\psi) \exp(im_1 \vartheta - in_1 \varphi) + \Phi_2(\psi) \exp(im_2 \vartheta - in_2 \varphi), \quad (1.5)$$

де $m_2 = m_1 + \mu$, $n_2 = n_1 + \nu N$, μ і ν визначає тип розглянутого збурення (наприклад, $\mu = 1$ і $\nu = 0$ відповідають зачепленню внаслідок тороїдальності, $\mu = 2$ і $\nu = 0$, внаслідок видовження, ітд.), N – кількість періодів поля в стелараторі (в токамаках можливе лише зачеплення з $\nu = 0$; величина N є непотрібною в цьому випадку). Беручи відповідні дві гармоніки рівняння (1.4), отримуємо систему з двох рівнянь для Φ_1 та Φ_2 .

Для того, щоб спростити ці рівняння, зроблено декілька припущень. По-перше, розглядаються дрібномасштабні хвилі з $m_1 \approx m_2 \gg 1$ в околі магнітної поверхні $\psi = \psi_*$, де поздовжнє хвильове число двох хвиль співпадає, тобто, $k_1 = -k_2 = k_*$; тут $k_i = (m_i \iota - n_i) / R_0$, де $i = 1, 2$; $k_* = (\nu N - \mu \iota) / 2 R_0$; $\iota_* = \iota(\psi_*) = (2n_1 - \nu N) / (2m_1 + \mu)$; R_0 – великий радіус плазмового тора. Зручно

ввести локальну радіальну координату біля ψ_*

$$x = \sqrt{m_1 m_2} \frac{l_* - l}{r_* l_*'}, \quad (1.6)$$

де r – глобальна радіальна координата, $B_0 = \bar{B}(r = 0)$, риска означає усереднення по φ на магнітній осі, індекс “*” означає, що величина береться при $\psi = \psi_*$, і штрих позначає похідну по r . Тут ми знехтуємо залежністю всіх рівноважних величин від x окрім l , яке входить в k_1 та k_2 з великим коефіцієнтом.

По-друге, використовується параксіальне наближення для метричних коефіцієнтів [51]:

$$B = \bar{B}[1 + \epsilon_{B(\mu, \nu)} \cos(\mu\vartheta - \nu N\varphi)],$$

$$g^{11} = 2\bar{B}\psi\bar{\delta}[1 + \epsilon_{g(\mu, \nu)}^{11} \cos(\mu\vartheta - \nu N\varphi)], \quad (1.7)$$

$$g^{12} = \frac{1}{2}\bar{\delta}\bar{B}\epsilon_{g(\mu, \nu)}^{12} \sin(\mu\vartheta - \nu N\varphi),$$

$$g^{22} = \frac{\bar{\delta}\bar{B}}{2\psi}[1 + \epsilon_{g(\mu, \nu)}^{22} \cos(\mu\vartheta - \nu N\varphi)], \quad (1.8)$$

де величини $\epsilon_{B(\mu, \nu)}$ та $\epsilon_{g(\mu, \nu)}^{ij}$ з $i, j = 1, 2$ (які є функціями ψ) є так званими “параметрами зачеплення” (вони визначають зачеплення між різними Фур’є-гармоніками Φ), $\delta = (\kappa + \kappa^{-1})/2$, $\kappa = \kappa(\varphi)$ – це видовження поперечного перерізу плазми. Зазначимо, що в рівняннях (1.7) та (1.8) відкинуті всі Фур’є-гармоніки, окрім тієї, яка зачеплює гармоніки хвилі, що розглядаються. Вивчаємо випадок рівноваги з великим аспектним відношенням, з чого випливає, що можна виключити всі доданки, які містять g^{ij} , де i чи $j = 3$ в рівнянні (1.4). Припускаємо, що параметри зачеплення є малими і не враховуємо в них члени другого і вищих порядків; в неідеальній частині рівняння не враховуємо всі доданки, що містять ці параметри.

Потім, після деяких перетворень отримуємо наступні рівняння для двох зачеплених Фур’є-гармонік хвилі [49]:

$$\begin{aligned} \hat{\tau} \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right)^2 \Phi_1 + \left[\frac{d}{dx}(\hat{\Delta} + x) \frac{d}{dx} - (\hat{\Delta} + x) \right] \Phi_1 + \\ + \left(\hat{\epsilon} \frac{d^2}{dx^2} + \hat{A} \frac{d}{dx} - \tilde{\epsilon} \right) \Phi_2 = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \hat{\tau} \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right)^2 \Phi_2 + \left[\frac{d}{dx}(\hat{\Delta} - x) \frac{d}{dx} - (\hat{\Delta} - x) \right] \Phi_2 + \\ + \left(\hat{\epsilon} \frac{d^2}{dx^2} - \hat{A} \frac{d}{dx} - \tilde{\epsilon} \right) \Phi_1 = 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

де $\hat{\Delta} = (\omega^2/\bar{v}_A^2 - k_*^2)/\alpha$ – нормована частота, $\bar{v}_A = v_A(B = \bar{B})$, $\alpha = 2r'_*k_*/R_0$, $\hat{\epsilon} = \epsilon_{(\mu,\nu)}^{11}k_*^2/\alpha$, $\tilde{\epsilon} = \epsilon_{(\mu,\nu)}^{22}k_*^2/\alpha$, $\hat{A} = 2\epsilon_{g(\mu,\nu)}^{12}k_*^2/\alpha$, $\epsilon_{(\mu,\nu)}^{jj} = \epsilon_{g(\mu,\nu)}^{jj} - 2\epsilon_{B(\mu,\nu)}$, де $j = 1, 2$, $\hat{\tau} = \tau m^2 \bar{\delta}/(\alpha r^2)$.

1.2 Дисперсійне рівняння для двох зачеплених гармонік кінетичних альфвенових хвиль

Розпочнемо аналіз рівнянь (1.9) і (1.10) з отримання локального дисперсійного співвідношення для хвиль, які описуються цими рівняннями. З цією метою, припускаємо що характерний масштаб варіації амплітуди значно перевищуватиме радіальну довжину хвилі і представляємо хвилю в ейкональній формі.

$$\Phi_{1,2} = \tilde{\Phi}_{1,2}(x) \exp \left(i \hat{\tau}^{-1/2} \int dx z \right), \quad (1.11)$$

де $\hat{\tau}$ – малий параметр і z – нормоване радіальне хвильове число (з рівняння (1.6) випливає, що $z = -(\hat{\tau}^{1/2} r_*/m)k_r$). Підставляючи рівняння (1.11) в (1.9) та (1.10) і збираючи члени найнижчого порядку, отримуємо пару лінійних алгебраїчних рівнянь, звідки отримуємо дисперсійне співвідношення:

$$(\hat{\Delta} - x - z^2)(\hat{\Delta} + x - z^2) - \hat{\epsilon}^2 = 0. \quad (1.12)$$

Перепишемо рівняння (1.12) так, щоб їх фізичний зміст став більш очевидним. Можна побачити, що величини $\hat{\Delta} - x$ і $\hat{\Delta} + x$ є фактично нормованими величинами $\omega^2 - \omega_{A1}^2$ і $\omega^2 - \omega_{A2}^2$, де $\omega_{Ai} = k_i \bar{v}_A$. Врахувавши це, повертаємось

до ненормалізованих частот і перепишемо рівняння (1.12) в такій формі:

$$(\omega^2 - \omega_{A1}^2 - z^2)(\omega^2 - \omega_{A2}^2 - z^2) - k_*^4 \bar{v}_A^4 (\epsilon_{(\mu,\nu)}^{11})^2 = 0. \quad (1.13)$$

Проаналізуємо отримане дисперсійне співвідношення. Покладаючи $\epsilon_{(\mu,\nu)}^{11} = 0$ (тобто, припускаючи, що гармоніки хвилі не зачеплюються), ми отримуємо з рівняння (1.13)

$$k_r^2 \rho_i^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{A1,2}^2}{\bar{\delta} \omega^2} \left(\frac{3}{4} + \frac{T_e}{T_i} \right)^{-1}. \quad (1.14)$$

Для хвиль з частотою $\omega \sim \omega_{A1,2}$ і нехтовним поглинанням в плазмі з круглим перерізом ($\bar{\delta} = 1$), рівняння (1.14) узгоджується з отриманим раніше дисперсійним співвідношенням для KAW з $k_r \gg k_g$ [44, 50], де $k_g = m/r$ – пологідалне модове число. (Варто зазначити, що коли ω набагато перевищує $\omega_{A1,2}$, наші вихідні рівняння (1.9) і (1.10) треба переотримувати, використовуючи більш акуратний підхід до членів, які описують кінетичні ефекти.)

Якщо в рівняннях (1.12) і (1.13) знехтувати внеском від скінченного ларморового радіуса ρ_i (тобто покладаючи $\hat{r} \rightarrow 0$ і, таким чином, $z \rightarrow 0$), ці рівняння стають рівняннями альфвенового континууму:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}^2 &= x^2 + \hat{e}^2 \quad \text{або} \\ (\omega^2 - \omega_{A1}^2)(\omega^2 - \omega_{A2}^2) &= k_*^4 \bar{v}_A^4 (\epsilon_{(\mu,\nu)}^{11})^2. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Як показано на Рис. 1.1 (а), зачеплення утворює частотну щілину в альфвеновому континуумі біля точки $r = r_*$, де гілки континууму $\omega_{A1}(r)$ і $\omega_{A2}(r)$ перетинаються. Нижче зроблено припущення, що знак $\epsilon_{(\mu,\nu)}^{11}$ такий, що частота $\hat{\Delta} = \pm \hat{e}$ відповідає верхній і нижній границям континуумної щілини при $r = r_*$, відповідно, (перевизначаючи кути ϑ і φ можна змінити знак $\epsilon_{(\mu,\nu)}^{11}$).

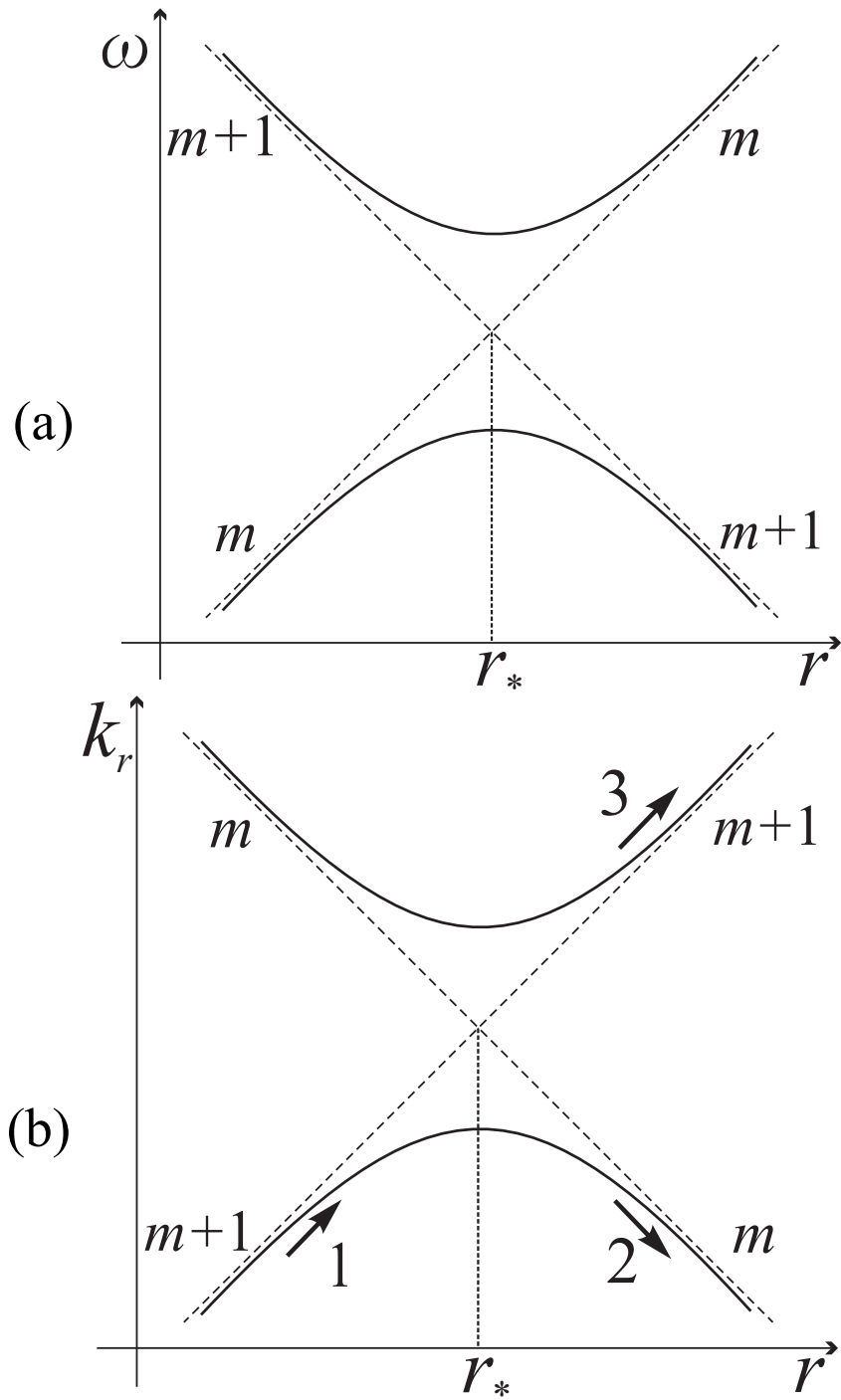


Рис. 1.1 Зачеплення двох гармонік дисперсії альфвенової хвилі: (a) – альфвеновий континуум; (b) – дисперсія KAW. Позначення: пунктирна лінія – дисперсія в циліндричній геометрії; суцільна лінія – дисперсія з урахуванням зачеплення; гілки позначені відповідними полоїдальними номерами мод; стрілки показують напрямки поширення KAW; 1 – падаюча хвиля; 2 – трансформована хвиля; 3 – хвиля, яка не трансформується внаслідок тунелювання крізь щілину

Розв'язуючи рівняння (1.12) і (1.13) для k_r в загальному випадку (коли $\hat{\epsilon} \neq 0$), отримуємо

$$z^2 = \hat{\Delta} \pm (x^2 + \hat{\epsilon}^2)^{1/2} \quad \text{або} \quad k_r^2 \rho_i^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{C1,2}^2}{\bar{\delta}\omega^2} \left(\frac{3}{4} + \frac{T_e}{T_i} \right)^{-1}, \quad (1.16)$$

де ω_{C1} і ω_{C2} є коренями рівняння континууму (1.15). Порівнюючи рівняння (1.14) і (1.16), бачимо, що з точністю до основного порядку, дисперсія двох зачеплених KAW гармонік виглядає як дисперсія KAW з модифікованою, в результаті зачеплення, континуумною частотою. На Рис. 1.1 (b) показано $k_r(r)$ для випадку, коли ω лежить вище континуумної щілини. Зачеплення знищує перетин гілок і утворює щілину на кривій $k_r(r)$. В термінах z це означає, що межі щілини лежать в точках $z^2 = \hat{\Delta} \pm \hat{\epsilon}$.

Можна очікувати, що коли щілина в $k_r(r)$ є достатньо широкою, більша частка енергії хвилі побіжить по нижній гілці дисперсійного співвідношення (стрілка 2 на Рис. 1.1 (b)), це означатиме трансформацію модового номера хвилі. В той же час, частина енергії хвилі в результаті тунелювання може проникнути до верхньої гілки дисперсійного співвідношення і скласти не трансформовану хвилю (стрілка 3 на Рис. 1.1 (b)). Аналіз в найнижчому порядку, про який йшлося вище, не дає можливості оцінити тунелювання і знайти коли хвиля є сильно трансформованою, а коли ні. Більш акуратний ВКБ-підхід до рівнянь (1.9) і (1.10) наводиться в наступному підрозділі.

1.3 Обчислення коефіцієнта трансформації

Для того, щоб понизити порядок рівнянь (1.9) і (1.10), використовуємо Фур'є-перетворення

$$\psi_{1,2}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{1,2}(x) \exp(-ipx) dx. \quad (1.17)$$

Вводячи нові змінні

$$\chi_1 = \psi_1 + \psi_2, \\ \chi_2 = i(\psi_1 - \psi_2)$$

і $z = \hat{\tau}^{1/2} p$, отримуємо наступні диференціальні рівняння першого порядку :

$$\hat{\tau}^{1/2} \frac{d\chi_1}{dz} = -\alpha_1 \chi_2 + \beta_1 \chi_1, \quad (1.18)$$

$$\hat{\tau}^{1/2} \frac{d\chi_2}{dz} = \alpha_2 \chi_1 + \beta_2 \chi_2, \quad (1.19)$$

де $\alpha_1 = H + M$, $\alpha_2 = H - M$, $\beta_1 = -(1 - \hat{A})\hat{\tau}^{1/2}z/(z^2 + \hat{\tau})$,
 $\beta_2 = -(1 + \hat{A})\hat{\tau}^{1/2}z/(z^2 + \hat{\tau})$, $H = z^2 + \hat{\tau} - \hat{\Delta}$, $M = (\hat{\epsilon}z^2 + \hat{\tau}\hat{\epsilon})/(z^2 + \hat{\tau})$.
 Переходячи в рівняннях (1.18) і (1.19) до змінних

$$u_{1,2} = \sqrt{f_{1,2}} \phi_{1,2}, \quad (1.20)$$

$$\text{де } f_{1,2} = \alpha_{1,2}^{-1} \exp \left[\int (\beta_{1,2} - \beta_{2,1}) dz \right] \quad \text{і} \quad \phi_{1,2} = \chi_{1,2} \exp \left[- \int \beta_{1,2} dz \right],$$

та виключаючи одну з цих змінних, отримуємо два еквівалентні рівняння другого порядку:

$$\hat{\tau} \frac{d^2 u_1}{dz^2} + \alpha_1 \alpha_2 u_1 = \frac{\hat{\tau}}{2} f_1^{1/2} \frac{d}{dz} \left(f_1^{-1/2} \frac{df_1}{dz} \right) u_1, \quad (1.21)$$

$$\hat{\tau} \frac{d^2 u_2}{dz^2} + \alpha_1 \alpha_2 u_2 = \frac{\hat{\tau}}{2} f_2^{1/2} \frac{d}{dz} \left(f_2^{-1/2} \frac{df_2}{dz} \right) u_2. \quad (1.22)$$

Якщо знехтувати членами $\sim \hat{\tau}$ в правій частині цих рівнянь, вони стануть ідентичними, описуючи надбар'єрне розсіювання (в термінах [53]) з бар'єром, який задається функцією

$$Q = \alpha_1 \alpha_2 = H^2 - M^2,$$

яка є дійсною на дійсній осі. Бар'єр розташований між коренями $\alpha_1(z)$ та $\alpha_2(z)$ (точки повороту), які позначено як a і b , відповідно. В основному порядку по $\hat{\tau}$, вони дорівнюють

$$a = \sqrt{\hat{\Delta} - \hat{\epsilon}} \quad \text{і} \quad b = \sqrt{\hat{\Delta} + \hat{\epsilon}}.$$

Рівняння (1.16) показує, що ширина бар'єра відповідає ширині в спектрі КАВ (Рис. 1.1 (b)).

Частина осі z зліва від бар'єра ($z < a$) відповідає гілкам хвилі з меншим k_r (на Рис. 1.1 (b) вони позначені стрілками 1 і 3). Припускаємо, що хвиля, яка б рухалася вздовж верхньої гілки з більшим k_r , відсутня. В термінах z -простору, це означає, що немає хвилі, яка б падала на бар'єр справа (при $z > b$). Таким чином, пам'ятаючи, що в z -просторі фазова і групова швидкості направлені в протилежні боки, беремо хвилю в області $z > b$ у вигляді (тут використані позначення Хедінга [54]):

$$u_1 = C(z, b), \quad (1.23)$$

$$(z, b) = (\alpha_1 \alpha_2)^{-1/4} \exp \left[-(i/\hat{\tau}^{1/2}) \int_b^z (\alpha_1 \alpha_2)^{1/2} dz \right], \quad (1.24)$$

де C – константа. Для того, щоб продовжити розв'язок рівнянь (1.21) і (1.22) крізь бар'єр, використаємо метод фазових інтегралів, як це зроблено для випадку надбар'єрного розсіювання в [53, 54]. В розглянутому випадку перешкодою є те, що коефіцієнти рівнянь (1.21) і (1.22) мають полюси другого порядку в точках $z = a$ і $z = b$, відповідно. Добре відомо, що метод фазових інтегралів є непридатним у випадку таких сингулярностей. Таким чином, шукаємо розв'язки рівняння (1.21) при $z > a$ і рівняння (1.22) при $z < b$, а потім зшиваємо їх при $a < z < b$.

Діаграма Стокса для цих рівнянь показана на Рис. 1.2. Використовуючи правила наведені в [53, 54], продовжуємо u_1 з області (1) на цій діаграмі в область (3):

$$\begin{aligned} (1) \quad u_1 &= C(z, b)_s, \\ (2) \quad u_1 &= C(z, b)_s, \\ (3) \quad u_1 &= C(z, b)_d, \end{aligned} \quad (1.25)$$

де індекси “ s ” та “ d ” позначають субдомінантні і домінантні ВКБ-розв'язки, відповідно. Цифри в дужках відповідають областям з Рис. 1.2. Щоб в області (3) перейти від u_1 до u_2 , скористаємось рівнянням (1.18) і визначенням $u_{1,2}$. Для переходу від точки повороту a до точки повороту b використовуємо правило $(z, b) = (z, a)[a, b]$, де

$$[a, b] = \exp \left[(i/\hat{\tau}^{1/2}) \int_a^b (\alpha_1 \alpha_2)^{1/2} dz \right]. \quad (1.26)$$

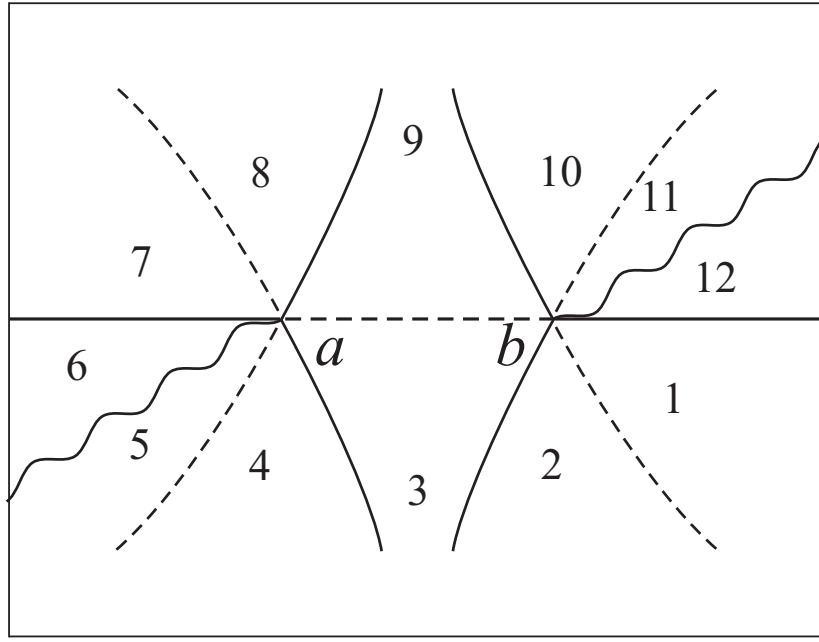


Рис. 1.2 Діаграма Стокса для надбар'єрного розсіювання. Позначення: пунктирна лінія – Стоксові лінії; суцільна лінія – анти-Стоксові лінії; хвилясті лінії – розріз; a і b – точки повороту

Після продовження маємо:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad u_2 &= iCe^W(z, a)_s, \\
 (4) \quad u_2 &= iCe^W(z, a)_d, \\
 (5) \quad u_2 &= iCe^W(z, a)_d - iSCe^W(a, z)_s, \\
 (6) \quad u_2 &= -Ce^W(a, z)_d + SCe^W(z, a)_s,
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

де W визначається як $e^W = [a, b]$; S – стала Стокса, яка для ізольованої точки повороту, як відомо, дорівнює i .

Щоб знайти S більш точно, скористаємось тим фактом, що рівняння (1.18) і (1.19) зберігають потік, який задається виразом

$$\begin{aligned}
 F &\equiv (u_1 u_2^* - u_2 u_1^*) \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} = \\
 &= (\chi_1 \chi_2^* - \chi_2 \chi_1^*) \exp \left[- \int dz (\beta_1 + \beta_2) \right] = \text{const} \tag{1.28}
 \end{aligned}$$

(можна перевірити, що $dF/dz = 0$ саме у випадку, коли z – дійсне). Порахувавши потоки в області 1 і 6, маємо

$$S = i\sqrt{1 + e^{-2W}} e^{i\delta}, \tag{1.29}$$

де δ – довільна дійсна величина.

Тепер легко знайти коефіцієнти відбиття R і проходження T , які характеризують частку потоку хвилі, яка трансформується, і частку, яка тунелюється. Порівнюючи потоки падаючої (z, a) і відбитої (a, z) хвиль в області 6 з потоком хвилі, яка тунелює в область 1, отримуємо:

$$|R|^2 = \frac{1}{1 + e^{-2W}}, \quad |T|^2 = \frac{e^{-2W}}{1 + e^{-2W}}. \quad (1.30)$$

Проте, ВКБ-аналіз наведений вище є виправданим лише для випадку $W \gg 1$. Для того, щоб вивчати тунелювання при $W \lesssim 1$, рівняння (1.18) і (1.19) розв'язувались чисельно. В цих розрахунках покладалось $\hat{A} = \tilde{\epsilon} = 0$ (ці доданки відповідають членам вищих порядків і не входять в результат ВКБ). Якщо в рівняннях (1.18) і (1.19) залишити лише доданки основного порядку, ці рівняння будуть інваріантними відносно перетворення $\hat{\Delta}' = \nu \hat{\Delta}$, $\hat{\epsilon}' = \nu \hat{\epsilon}$, $z' = \nu^{1/2} z$, $\hat{t}' = \nu^3 \hat{t}$ з довільним ν . Таким чином, ми покладали $\hat{\Delta} = 1$ фіксованим, і змінювали параметри $\hat{\epsilon}$ і $\hat{t}$. Результати для $\hat{t} = 0.1$ і $\hat{t} = 0.01$ наведено на Рис. 1.3. Як можна побачити з рисунка, коефіцієнти відбиття і проходження апроксимуються виразами

$$|R|^2 = 1 - e^{-2W}, \quad |T|^2 = e^{-2W} \quad (1.31)$$

з високою точністю навіть при малих $\hat{\epsilon}$, коли W також мале. Для менших значень $\hat{t}$, узгодження між рівняннями (1.31) і чисельними розрахунками є навіть кращим. Для $\hat{t} > 0.1$, рівняння (1.31) працює погано. Причиною цього може бути незастосовність ВКБ ззовні бар'єра (умова застосовності ВКБ зліва від бар'єра $\hat{t}/(\hat{\Delta} - \hat{\epsilon})^3 \ll 1$). Вирази (1.31) і (1.30) є еквівалентними при $W \gg 1$. В той же час, їх поведінка при $W \lesssim 1$ є зовсім іншою. Знайдений чисельно коефіцієнт проходження зникає, коли $W \rightarrow 0$, що добре узгоджується з фізичною інтуїцією: трансформація хвилі є можливою завдяки асиметрії магнітної конфігурації, таким чином вона має зникати зі зникненням асиметрії.

Можна побачити, що W є ключовим параметром, який визначає ефективність трансформації. Коли $e^{-2W} > 1/2$, переважна більшість енергії хвилі тунелює через щілину і трансформація є слабкою. Коли $e^{-2W} < 1/2$, більша частка потоку хвилі відбирається трансформованою хвилею.

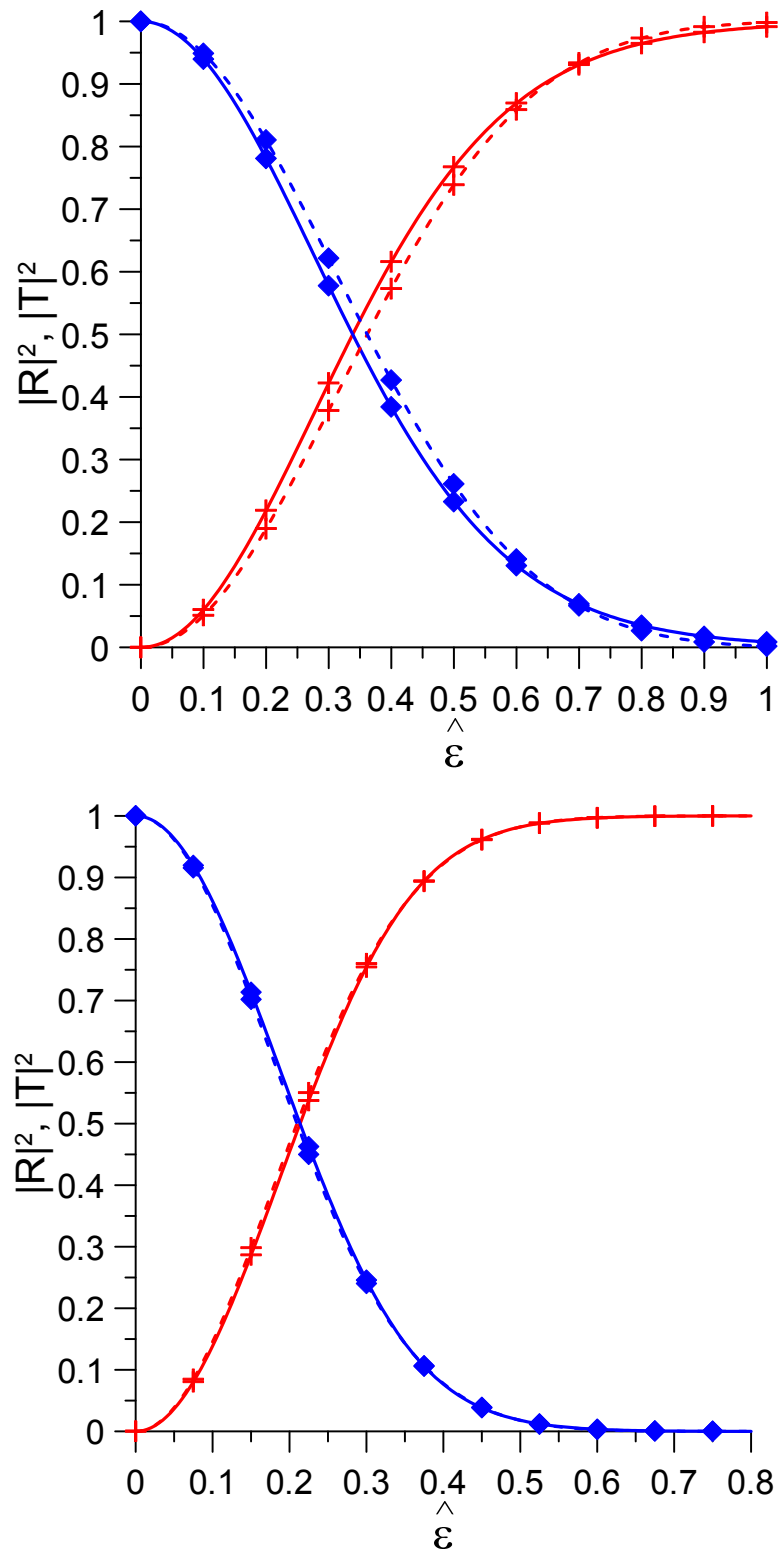


Рис. 1.3 Залежність $|R|^2$ і $|T|^2$ від $\hat{\varepsilon}$. Верхній малюнок: $\hat{\tau} = 0.1$; нижній малюнок: $\hat{\tau} = 0.01$. Позначення: ромби – $|T|^2$; хрести – $|R|^2$; суцільна лінія – результати розрахунків; пунктирна лінія – результати, які описуються (1.31)

Обмежуючись найнижчим порядком по $\hat{t}$, з визначення W отримуємо:

$$W = \frac{1}{\hat{t}^{1/2}} \int_a^b dz [(a^2 - z^2)(z^2 - b^2)]^{1/2} = \gamma(\hat{e}/\hat{\Delta}) \frac{\hat{e}^2}{\hat{t}^{1/2} \hat{\Delta}^{1/2}}, \quad (1.32)$$

де функція γ (певна комбінація еліптичних інтегралів) є майже константою, змінюючись від $\pi/4 \approx 0.785$ до $2\sqrt{2}/3 \approx 0.943$ зі зміною аргумента від 0 до 1. Величина W задовольняє співвідношення $t = \exp(-W)$, де t – параметр тунелювання, який вводиться як рівняння (D27) з роботи [55] і отримується з іншої ВКБ-процедури (покладанням $\lambda = 0$ в рівнянні (D27) з [55], що означає, що $n \gg 1$). В ненормованих величинах умова, коли трансформація переважає ($W > \ln(2)/2$) записується наступним чином:

$$|\hat{s}m| < \frac{\gamma \ln(2)}{(3/4 + T_e/T_i)^{1/2}} \frac{(\epsilon_{(\mu,\nu)}^{11})^2}{\sqrt{\delta_l}} \frac{\omega_*^2}{\omega(\omega^2 - \omega_*^2)^{1/2}} \frac{r|k_*|R_0}{\rho_i}, \quad (1.33)$$

де $\omega_* = k_* \bar{v}_A$, $\hat{s} = -(r/l)dl/dr$ – магнітний шир, і всі величини залежні від r беруться в точці $r = r_*$. Це рівняння показує, що трансформація переважає для мод з досить малим m . Проте, перехід між випадками сильної і слабкої трансформації не є раптовим. Коли нерівність (1.33) порушується, залежність e^{-2W} від W є майже лінійною; таким чином, коефіцієнт трансформації $|R|^2$ спадає як m^{-1} зі зростанням m .

1.4 Розрахунки для існуючих пристроїв

Оцінимо (принаймні за порядком величини) для яких модових номерів трансформація впливає на найбільшу частку потоку хвилі в деяких пристроях. Розглядаємо зачеплення через тороїдальність, тобто, $(\mu, \nu) = (1, 0)$; таким чином, беремо $k_* R_0 = l/2$. Відповідні параметри зачеплення є такими

$$\epsilon_{(1,0)}^{11} = \epsilon_{g(1,0)}^{11} - 2\epsilon_{B(1,0)} = 2(\Delta' + \epsilon_t), \quad (1.34)$$

де $\epsilon_t = r/R_0$, $\Delta(r)$ – Шафрановський зсув.

Розпочинаємо з рівноваги в токамаці-реакторі ITER, для якого великий радіус $R_0 = 6.2$ м, малий радіус $a = 2$ м, і магнітне поле $B = 5.3$ Тл. Множником $\sqrt{\delta}$ для типового поперечного перерізу видовження в центрі плазми у ITER можна знехтувати. Покладаючи $r = 0.5a$, $q = 2$, $T_i = T_e = 8$ кеВ і $\omega/\omega_* = 1.8$ (тобто, припускаючи, що частота хвилі трохи менше ніж

частота альфвенової власної моди в ЕАЕ – щілині (Ellipticity-induced Alfvén Eigenmodes – альфвенові власні моди, спричинені еліптичністю). Використовуючи вирази для Δ' в круглому токамаці (наприклад, [53]), знаходимо, що $\epsilon_{(1,0)}^{11} = 0.67$ для параболічного профілю тиску плазми (p) і $\beta \equiv 8\pi p/B^2 = 3\%$ в центрі. Тоді рівняння (1.33) набуває вигляду $|\hat{s}m| < 11$. Коли $|\hat{s}| \lesssim 1$, трансформація переважає, принаймні для хвиль з $|m| < 11$.

Для сферичного тора NSTX [56] беремо $R_0 = 1$ м, $a = 0.85$ м, $B = 0.45$ Тл, $r = 0.45$ м, $T_i = T_e = 0.8$ кеВ, $\omega/\omega_* = 1.8$, і $q = 2$. З полоїдальної модуляції відстані між магнітними поверхнями конфігурації NSTX з великим β [57], можна зробити висновок, що $\epsilon_{(1,0)}^{11} \sim 0.7$ при $r \sim 0.5a$ (аналітичні результати, отримані для стандартного токамака є незастосовними до NSTX). Тоді права частина рівняння (1.33) дорівнює $|\hat{s}m| < 2.3$. Для розрядів з широкою плоскою областю q , яка є типовою для NSTX, достатньо брати $|\hat{s}| \lesssim 0.5$, в такому випадку переважна частка енергії хвилі трансформується для $|m| < 5$.

Висновки до Розділу 1

У Розділі 1 показано, що відхилення магнітної конфігурації від циліндричної симетрії (перш за все, тороїдальність) може мати наслідком трансформацію однієї гілки KAW в іншу гілку, з відмінним номером моди. Трансформація є значною для KAW з досить малим m , впливаючи на велику частку енергії хвилі для $m \lesssim 5$ в таких пристроях як ITER та NSTX.

Трансформація внаслідок тороїдальності (це найімовірніший випадок) має місце для KAW з частотами вище континуумної щілини, в якій знаходяться частоти TAE (Toroidal Alfvén Eigenmodes – альфвенові моди, спричинені тороїдальністю). Зокрема, відомо, що в цьому частотному діапазоні існують моди, пов'язані з локальним максимумом альфвенового континууму, як у стелараторах (NGAE-моди (Nonconventional Global Alfvén Eigenmodes – незвичайні глобальні альфвенові власні моди), описані в [33, 58]), так і в токамаках (EAE-RSAE-моди (Reversed Shear Alfvén Eigenmodes) і NAE-RSAE-моди (Non-circular triangularity induced Alfvén Eigenmode) [59, 60]). Випромінне загасання, яке властиве цим модам [61, 62], має своїм наслідком випромінювання KAW. З одержаних результатів випливає, що ці хвилі трансформуються (принаймні частково), коли вони проходять через магнітні поверхні з $q = (m \pm 1/2)/n$, де m і n є полоїдальним і тороїдальним номером моди, відповідно.

Трансформація може бути важливою для діагностики, оскільки може змінювати модові номери, які спостерігаються в ході зовнішніх магнітних вимірювань. Амплітуда KAW, яка випромінюється нестійкою модою, може бути порівняна з амплітудою самої моди [62]. Таким чином, без вивчення поширення хвилі на периферії плазми є незрозумілим, що краще спостерігається за допомогою зовнішніх котушок – нестійка альфвенова мода чи KAW, яка випромінюється модою. В останньому випадку трансформація модових номерів KAW може впливати на спостереження.

Іншим практичним наслідком трансформації KAW є те, що вона збільшує область поширення хвилі. Річ у тім, що загасання Ландау альфвенової хвилі на електронах підсилюється зі зростанням $k_{\perp}$, водночас, трансформація перенаправляє хвилю на іншу гілку з меншим $k_{\perp}$, як можна побачити на Рис. 1.1 (b). Приклад такої ситуації можна знайти в [33]. Велика протяжність області впливу KAW в цій роботі була отримана частково внаслідок припущення, що явище трансформації модового номера, яке вивчається, існує.

Варто зазначити, що KAW можуть зазнавати нелінійної трансформації внаслідок зачеплення мод [63, 64], яке, як відомо, може бути значним при досить малих амплітудах хвиль. Ці нелінійні процеси створюють альтернативні канали для еволюції KAW, яка конкурує з лінійною трансформацією, що вивчається в цьому розділі і може в деяких випадках їй перешкоджати.

Основні положення цього розділу викладені у публікації автора [38].

РОЗДІЛ 2

“ЦЕБЕРНЕ” ПЕРЕНЕСЕННЯ ЕНЕРГІЙНИХ ЙОНІВ В ТОКАМАКАХ

Квазістаціонарні збурення, тобто збурення з нехтовним обертанням відносно плазми, які порушують симетрію магнітних конфігурацій, часто спостерігаються в плазмі токамаків. У багатьох випадках вони призводять до появи магнітних островів поблизу магнітної поверхні $q = m/n$ (нагадаємо q – це коефіцієнт запасу стійкості (коефіцієнт безпеки) токамака, m та n – тороїдальні та полоїдальні номери збурень, відповідно. Природа цих збурень і супутні явища можуть бути різними. Відомими прикладами є неокласичні тіринг-моди (Neoclassical tearing mode (NTM)) [65] і пилчасті коливання [66], які пов’язані з великомасштабними збуреннями, наслідком яких є поява островів з малим n . Здається, що низькочастотна активність з $n = 1$, яка супроводжує лавини високочастотних нестійкостей, що збуджуються енергійними йонами [15, 19], також має нульову частоту відносно плазми. З іншого боку, коли профіль q в певній області трохи перевищує резонансне значення $q = m/n$, виникають квазістатичні деформації магнітних поверхонь, зокрема, коли профіль q є плоским і трохи більшим одиниці, мають місце інфернальні моди [67] з $(m, n) = (1, 1)$; моди $(1, 1)$ також можуть виникати в розрядах з оберненим широм, в яких $q_{\min}$ трохи перевищує одиницю [68]. Статичні магнітні збурення з малим n також можуть створюватись зовнішніми котушками з метою придушення чи послаблення мод, локалізованих на краю плазми (Edge Localized Modes (ELM)) [69].

В Розділі 2 представлено результати роботи [39], в якій вивчалось так зване “цеберне перенесення” (bucket transport) – перемішування плазми в результаті зміщення енергійних (швидких) йонів, захоплених в резонанс, коли просторова локалізація резонансів змінюється.

Цеберне перенесення досліджувалось у роботах [11, 12, 70, 71]. У роботах [11, 12, 70] розглядався транспорт, спричинений чірпінгом частоти. В цьому розділі вивчається транспорт, викликаний зіткненнєвим гальмуванням частинок та/чи часовою еволюцією плазмового струму. Вплив зіткнень на транспорт також вивчався в роботі [71], де аналіз обмежувався розглядом руху цебра завдяки інфернальній моді; рух нерезонансних частинок, які, загалом, відіграють важливу роль в перемішуванні частинок, до розгляду не брався. Можливість того, що частинки захоплені хвилею рухаються в радіальному

напрямку в результаті зіткнень, відзначалась у роботі [72] (де цей ефект був названий “конвеєрна стрічка” (conveyor belt)).

2.1 Гамільтонів формалізм

Починаємо розгляд з Лагранжевої диференціальної форми в наближенні ведучого центра [73]:

$$\Gamma = \left(\frac{e}{c} \mathbf{A} - M v_{\parallel} \mathbf{b} \right) \cdot d\mathbf{x} + \frac{Mc}{e} \mu d\Theta + \mathcal{E} dt, \quad (2.1)$$

де $\mathbf{x}$ – положення ведучого центра, Θ – гірофаза, e , $\mathcal{E}$, та μ – це заряд, енергія та магнітний момент частинки, відповідно; $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$, $\mathbf{B}$ – магнітне поле, $\mathbf{A}$ – векторний потенціал магнітного поля. Вважаємо, що електричного поля немає (в цьому розділі розглядаються квазістаціонарні збурення).

Оскільки μ та $\mathcal{E}$ зберігаються, відкидаємо відповідні доданки в диференціальній формі і зосереджуємось на спрощенні доданків, що залишилися. Будемо використовувати магнітні координати $(\psi, \vartheta, \varphi)$ (де ψ – тороїдальний потік, ϑ та φ відповідно полоїдальний та тороїдальний кути). Тоді рівноважне магнітне поле можна представити в такому вигляді [53])

$$\mathbf{B}_0 = \nabla\psi \times \nabla\vartheta + \nabla\varphi \times \nabla\psi_p = \nabla \times (\psi \nabla\vartheta - \psi_p \nabla\varphi) \quad (2.2)$$

і взяти для його векторного потенціалу $\mathbf{A}_0$ калібровку $A_{0\vartheta} = \psi$, $A_{0\varphi} = -\int d\psi \iota(\psi)$ і $A_{0\psi} = 0$, де нижні індекси позначають коваріантні компоненти, ψ_p – полоїдальний магнітний потік, і $\iota = q^{-1} = d\psi_p/d\psi$. Припускаємо, що $\epsilon = r/R_0 \ll 1$ (де r – радіальна координата, R_0 – радіус магнітної осі) і $\tilde{B}_{\parallel}/\tilde{B}_{\perp} \ll 1$, де $\tilde{B}_{\parallel}$ та $\tilde{B}_{\perp}$ – це поздовжня та поперечна компоненти магнітного збурення. Таким чином, для збурення можна вибрати калібровку:

$$\tilde{\mathbf{A}} = -\alpha(\psi) B_0 R_0^2 \cos(m\vartheta - n\varphi) \nabla\varphi, \quad (2.3)$$

де α характеризує амплітуду збурення, $B_0 = B(r=0)$; дійсно, можна показати, що такий вибір означає, що $\tilde{B}_{\parallel}/\tilde{B}_{\perp} \sim \epsilon$. Нехтуємо внеском збурення в $\mathbf{b}$ (варіюючи диференційну форму, можна показати, що член з $\mathbf{b}$ відповідає за дрейф частинки поперек силових ліній) і зберігаємо збурення тільки в доданку з $\mathbf{A}$, який пов'язаний з поздовжнім рухом. Нарешті, нехтуємо b_{ϑ} та b_{ψ} (в порівнянні з b_{φ}) і покладаємо $B_{\varphi} \approx B_0 R_0$. Після нормалізації на eB_0/c , можна

записати рівняння (2.1) у вигляді:

$$\Gamma = J d\vartheta - H d\varphi, \quad (2.4)$$

де $J = \psi/B_0$ – площа перерізу магнітної поверхні, поділена на 2π (для еліптичного перерізу із видовженням κ : $J = \kappa r^2/2$),

$$H = H_0(J, \vartheta) + R_0^2 \alpha(J) \cos(m\vartheta - n\varphi), \quad (2.5)$$

$$H_0 = \int_0^J dJ \iota(J) - \rho_{\parallel} R_0, \quad (2.6)$$

$\rho_{\parallel} = v_{\parallel}/\omega_B$, $\omega_B = eB/(Mc)$, ω_B – циклотронна частота.

Як можна побачити, диференціальна форма Γ відповідає одновимірній гамільтоновій системі, в якій ϑ відіграє роль координати, J – імпульсу, а H – гамільтоніана. Тороїдальний кут φ відіграє роль часу. Якщо зберегти лише перший член в H_0 і підставити $\alpha = 0$, то гамільтонові рівняння описуватимуть незбурені магнітні силові лінії. Додаючи останній доданок H , отримуємо рівняння збурених магнітних силових ліній. Другий доданок в H_0 описує дрейф частинки поперек магнітного поля. Зазначимо, що збурення в рівнянні (2.5) ($\alpha \neq 0$) не веде до хаосу при $\rho_{\parallel} = 0$, оскільки в цьому випадку гамільтоніан має симетрію в магнітних координатах.

Відомо, що зіткненнєве гальмування не впливає на рівняння для $\dot{\mathbf{x}}$. Таким чином гамільтонові рівняння

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{\partial H}{\partial J}, \quad \frac{dJ}{d\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} \quad (2.7)$$

залишаються правильними за наявності гальмування в кожній точці траєкторії частинки, якщо вибрати відповідну величину швидкості частинки v . Розглянемо ансамбль добре пролітних частинок, які одночасно запускаються з однакового кута φ . Величини v та φ пов'язані з часом t такими співвідношеннями:

$$\dot{\varphi} = v_{\parallel}/R, \quad \dot{v} = -v_s v, \quad (2.8)$$

де R – це відстань до осі симетрії, v_s – частота гальмування. Нехтуючи слабкими швидкими варіаціями $v_{\parallel}/R$, для частинок ансамблю можна розглядати v як функцію φ . Звідси можна зробити висновок, що рух цих

частинок описується гамільтоніаном (2.5), у якому v (а отже і $\rho_{||}$) залежить від φ .

Потім після канонічного перетворення координат, замінюючи в гамільтоніані H_0 змінні (J, ϑ) на змінні “дія-кут”, які позначатимемо як (I, θ) (можна показати, що різниця між I та J , так само як між θ та ϑ складає $\sim \Delta_b/r$, де $\Delta_b \sim q\rho/\kappa$ – це відхилення орбіти від магнітної поверхні). У змінних “дія-кут” гамільтоніан H_0 набуває вигляду:

$$H_0 = H_0(I, \varphi) = \int_0^I dI \iota_*(I, \varphi). \quad (2.9)$$

Тут $\iota_* = d\theta/d\varphi$; залежність від φ з’являється тільки при врахуванні зіткненневого гальмування. Величина ι_* відмінна від ι завдяки тороїдальній прецесії. Обчислення тороїдальної прецесії є досить громіздким; воно вимагає знання $\mathbf{B}$ з точністю до ϵ^2 . Наслідуючи [74], запишемо

$$\iota_* = \left\langle \frac{d\vartheta}{d\varphi} \right\rangle = \frac{1}{\bar{q}} \left(1 - \frac{\omega_{\text{pr}}}{\omega_\varphi} \right), \quad (2.10)$$

де кутові дужки означають усереднення по часу, $\bar{q} = \oint d\vartheta q/(2\pi)$, де інтеграл береться по орбіті частинки, $\omega_\varphi = \langle \dot{\varphi} \rangle$, ω_{pr} : – тороїдальна прецесія, яка записується у вигляді

$$\omega_{\text{pr}} = \xi v^2/(R_0^2 \omega_{B0}), \quad (2.11)$$

де $|\xi| \lesssim 1$. Коефіцієнт ξ визначається профілем q і профілем тиску, формою магнітної поверхні та іншими чинниками. Він є від’ємним для круглої плазми з малим β і продовжує спадати зі зростанням β , але може бути додатним при сильному видовженні плазми при малих β [75]. Варто зазначити, коли H_0 залежить від φ , перетворення від (J, ϑ) до (I, θ) також залежать від φ , і ця залежність проявляється в додатковому доданку, який залежить від θ . Тим не менше, можна знехтувати цим доданком, оскільки він дуже малий, $\sim qrR_0 v_s/\omega_B$.

У змінних “дія-кут” через наявність тороїдального дрейфу збурення більше не буде одногармонічним. Проте, для простоти знехтуємо сателітними гармоніками в збуренні разом із просторовою залежністю α . Нехтуючи відмінністю θ та ϑ в доданку зі збуренням рівняння (2.5), можемо записати

резонансну умову:

$$\iota_*(I) = n/m. \quad (2.12)$$

Припускаючи, що профіль ι в околі резонансної точки можна апроксимувати лінійною функцією I , запишемо рівняння (2.5) у вигляді

$$H = \iota'_*(I - I_{\text{res}})^2/2 + R_0^2 \alpha \cos(m\bar{\theta}), \quad (2.13)$$

де $\bar{\theta} = \theta - (n/m)\varphi$, I_{res} – це I в точці резонансу, заданого рівнянням (2.12), штрих означає похідну по I . Можна показати, що гамільтоніан (2.13) зводиться до гамільтоніану з роботи [11]:

$$H = p^2/2 - \hat{A} \cos[q - \phi(t)], \quad (2.14)$$

де (p, q) є канонічними змінними (координата та імпульс), $\hat{A}$ – амплітуда хвилі, ϕ – фаза хвилі, $\dot{\phi}$ – частота хвилі, $\ddot{\phi}$ – чірпінг частоти. Дійсно, при перетворенні координат $Q = q - \phi(t)$ згаданий гамільтоніан стає таким:

$$H = (p - \dot{\phi})^2/2 - \hat{A} \cos Q. \quad (2.15)$$

Очевидно, що гамільтоніани (2.15) та (2.13) є еквівалентними (з точністю до перенормування змінних), причому часова зміна $\dot{\phi}$ відіграє в (2.15) ту ж роль, що і залежність I_{res} від φ в рівнянні (2.13).

Використовуючи рівняння (2.10) та (2.11), можемо записати рівняння (2.12) у такому вигляді:

$$\bar{q} = \frac{m}{n} \left(1 - \frac{\xi}{\chi} \frac{\rho}{R_0} \right). \quad (2.16)$$

Тут $\chi = v_{\parallel}/v$, $\rho = v/\omega_{B0}$. Доданок, що містить ρ , відповідає за ефекти, пов'язані з прецесією. Можна показати, що прецесія зсуває радіальне розташування резонансу на величину $\sim (\epsilon/\hat{s})\rho$, яка є немолою, коли магнітний шир є досить малим.

2.2 Резонансні острови

Відомо, що наслідком збурення є поява дрейфових островів в точках резонансу. Як впливає з рівняння (2.12), резонанси можуть мати місце навіть за відсутності магнітних островів у випадку, коли q знаходиться близько до m/n . Припустімо, що ширина резонансів є недостатньою для того, щоб утворити

глобальну стохастичність (в результаті перекриття з сателітними островами чи островами, утвореними іншими збуреннями), так що рух частинки є переважно регулярним. Тоді частинка внаслідок цеберного механізму може буди перенесена на відстані, які значно перевищують ширину острова [11, 12, 70], внаслідок зміщення островів. Диференціюючи рівняння (2.16) з використанням рівняння (2.10) і (2.11) підставляючи $\bar{q} \approx q$, отримуємо:

$$u_{buc} \equiv \frac{dr_{buc}}{dt} = \frac{r_{buc}}{\hat{s}} \left(-\frac{\partial \ln q}{\partial t} + \frac{\xi}{\chi} \frac{\rho_0}{R_0} v_s \right), \quad (2.17)$$

де r_{buc} – положення цебра. Отже, часова еволюція профіля q разом з гальмуванням внаслідок кулонівських зіткнень може впливати на зміщення острова.

Аналіз в роботі [11] показує, що острів утримує частинки, поки

$$|u_{buc}| < (\pi/2)(\delta r)_{buc}/\tau_{buc}, \quad (2.18)$$

де τ_{buc} – період обертання частинки в центрі цебра, $(\delta r)_{buc}$ – ширина цебра, яку можна оцінити з рівняння (2.13) як

$$(\delta r)_{buc} = 4R_0|\alpha/(\hat{s}\kappa)|^{1/2}. \quad (2.19)$$

Коли збурення супроводжується появою магнітного острова, $(\delta r)_{buc}$ буде порядку його розміру. Взявши швидкість цебра з рівняння (2.17) і підставляючи $(\delta r)_{buc}\tau_{buc} = 8\pi r/|n\hat{s}\omega_\phi|$ (що теж впливає з рівняння (2.13)), бачимо, що коли цебро рухається внаслідок гальмування частинки (з $q(t) = \text{const}$), з нерівності (2.18) впливає умова:

$$\frac{v_s}{\omega_B} < \frac{(\delta r)_{buc}^2}{r^2} \frac{\chi^2 n \hat{s}^2}{16|\xi|}, \quad (2.20)$$

яку легко задовольнити для широких островів навіть при малому ширі. Коли цебро рухається внаслідок еволюції профіля q , нерівність (2.18) також легко задовольняється.

Ще однією умовою, необхідною для утримання частинок в цебрі є те, що частота пітч-кутового розсіювання частинок має бути меншою, ніж частота гальмування (коли цебро рухається в результаті гальмування частинок) і $\partial q/\partial t$

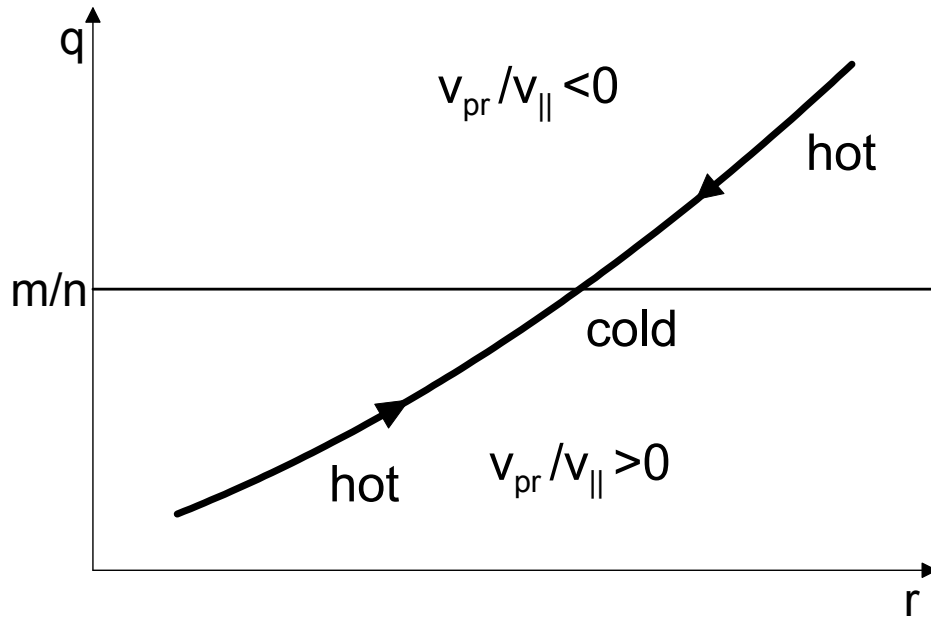


Рис. 2.1 Напрямок руху цебра через гальмування частинки для випадку $\hat{s} > 0$

(коли воно рухається в результаті еволюції q). У випадку, що розглядається, це означає, що $\mathcal{E} > (M_i/M_e)^{1/3} T_e$ (де $\mathcal{E}$ – енергія частинки, M_e та M_i – маса відповідно електрона та йона, T_e – електронна температура), що зазвичай виконується для інжекттованих йонів.

Якщо зазначені умови виконуються, зсув резонансного острова викликає цеберне перенесення швидких йонів. Потік швидких йонів, спричинений цим транспортом, є пропорційним до швидкості цебра, яка згідно з (2.17) є тим більшою, чим менше $\hat{s}$. Зокрема, це має місце, по-перше, в розрядах з оберненим широм i , по-друге, в гібридному операційному режимі, який розглядається як можливий сценарій роботи реактора ITER [4], і тому інтенсивно вивчається в сучасних токамаках.

З рівняння (2.17) можна побачити, що напрямок руху цебра в результаті гальмування визначається знаком $\hat{s}$ та ξ/χ , тобто $v_{pr}/v_{||}$, де $v_{pr} = R_0 \omega_{pr}$ – швидкість тороїдальної прецесії (Рис. 2.1). Загальне правило полягає в тому, що цебро завжди рухається так, щоб наблизитись до резонансу $q = m/n$, але ніколи його не перетинає. Напрямок руху цебра завдяки $\partial q/\partial t$ збігається з напрямком руху магнітного острова (якщо останній існує).

Тепер обговоримо особливості цеберного перенесення, коли профіль $q(r)$ є немонотонним. У цьому випадку магнітний та дрейфовий острови завжди з'являються у вигляді подвійних ланцюжків, що відповідають двом резонансним точкам. Фактори, зазначені вище, (гальмування в результаті кулонівських зіткнень чи еволюція профіля q) викликають рух островів, а отже

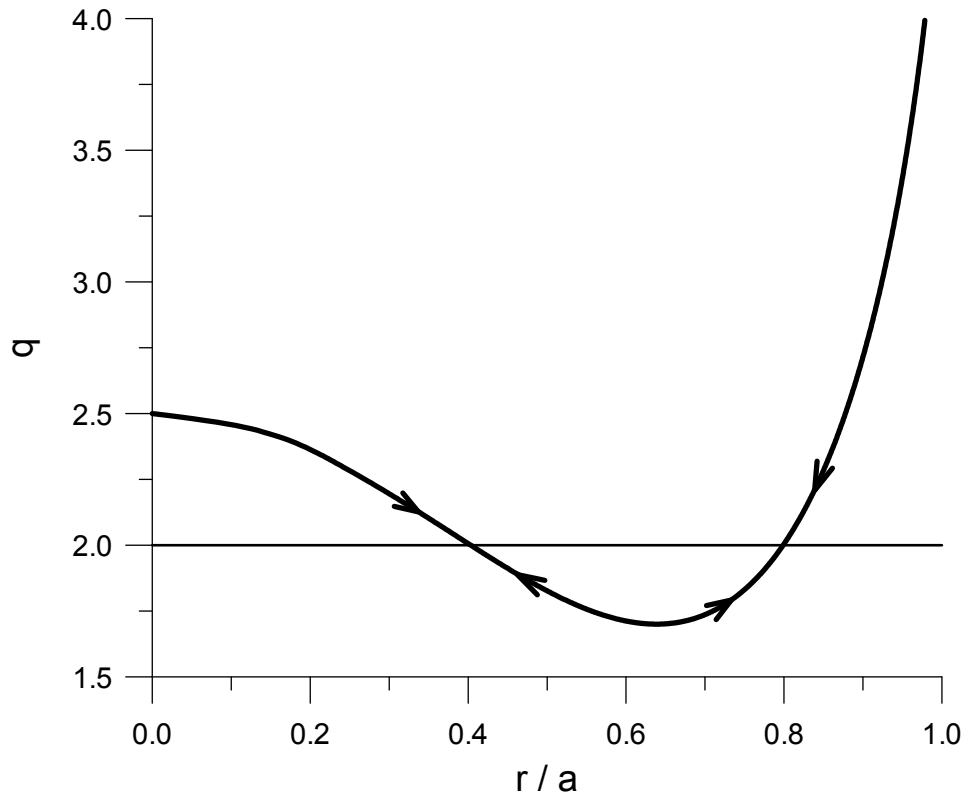


Рис. 2.2 Напрямок руху цебра у випадку немонотонного профіля q

цеберне перенесення частинок. Зокрема, напрямок цеберного руху внаслідок гальмування підпорядковується тим же правилам, що й у випадку монотонного профіля q (Рис. 2.2)

Коли $v_{pr}/v_{\parallel} > 0$ (що відповідає частинкам, інжекттованим проти напрямку струму, в конфігураціях з малим κ і малим β , або частинкам, інжекттованим вздовж напрямку струму, в конфігураціях з великим κ і великим β), можливий такий випадок, що поблизу енергії народження швидких частинок резонансів немає, але вони з'являються при менших енергіях. Такий приклад показано на Рис. 2.3, де зображено карти Пуанкаре для швидких дейтронів, інжекттованих проти напрямку струму. Ці карти були побудовані кодом ORBIT [76] (який описує рух частинок у дрейфовому наближенні) для магнітних конфігурацій з параметрами, подібними до параметрів NSTX ($R_0 = 1$ м, $B_0 = 0.45$ Тл) і профілем q , зображеним на Рис. 2.2. Острови при енергії 10 кеВ мало відрізняються від магнітних островів. Як можна побачити, топологія острова зазнає біфуркації між 10 кеВ та 20 кеВ: Х-точки сепаратрис з'єднують острови одного ланцюжка на Рис. 2.3 (а); в той же час вони з'єднують острови з неперезамкненими дрейфовими поверхнями на Рис. 2.3 (b) та (c). При $\mathcal{E} = 30$ кеВ резонансні острови зникають. Дивлячись на ці рисунки у

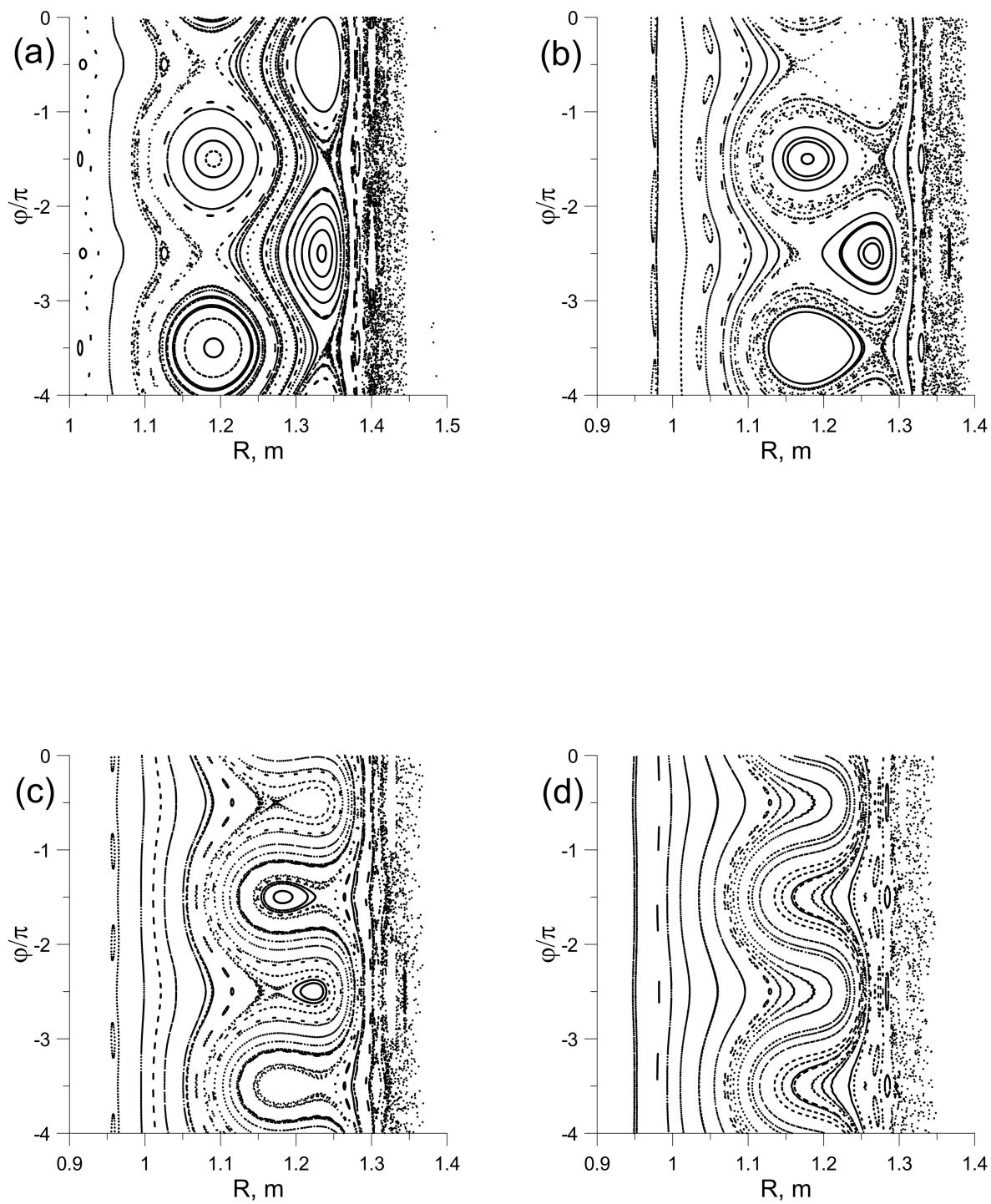


Рис. 2.3 Карты Пуанкаре для дейтронов з різними енергіями: (a) 10 кеВ; (b) 20 кеВ; (c) 25 кеВ; (d) 30 кеВ

зворотньому порядку, бачимо, що йони захоплюються в острів при радіусах, що лежать майже посередині між магнітними островами. Покладаючи $\bar{q} \approx q_{\min}$ і використовуючи рівняння (2.10) та (2.11), можемо знайти швидкість, при якій з'являються резонанси і йони захоплюються в цебро:

$$v_c = \omega_{B0} R_0 |\chi/\xi| \Delta q / q_{\min}, \quad (2.21)$$

де $\Delta q = m/n - q_{\min}$. Ця оцінка є досить грубою і переоцінює v_c . Кращі (але більш громіздкі) оцінки можна отримати, врахувавши вплив ширини орбіти на $\bar{q}$.

Коли $v_{pr}/v_{||} < 0$, можлива протилежна ситуація – резонанси будуть існувати при високих енергіях частинки, а не при низьких. Це може траплятись лише тоді, коли мінімум q задовольняє умові $q_{\min} > m/n$, що означає, що збурення, яке створює цебро, існує за відсутності резонансних магнітних поверхонь. Як було сказано вище, такі збурення мали місце в експерименті [67, 68].

2.3 Потік швидких йонів

Варто пам'ятати, що напрямок потоку швидких йонів не обов'язково збігається з напрямком руху цебра. Незважаючи на це, потік завжди направлений проти градієнту функції розподілу швидких йонів. Річ у тім, що рух цебра завжди супроводжується зворотнім рухом частинок навкруги цебра. Збереження фазового об'єму вимагає, щоб при перетині цебром певної радіальної позиції нерезонансні частинки зазнавали радіальних стрибків, рівних середній радіальній ширині острова (стрибки імпульсу p в роботі [11]). На Рис.2.4 показано просторовий перерозподіл швидких йонів внаслідок цеберного перенесення. Як можна спостерігати, в обох випадках загальний перерозподіл частинок спрямований назовні, хоча створені радіальні профілі є різними.

Порахуємо потік енергії швидких йонів, спричинений рухом цебра в результаті зіткнення гальмування. Припускаємо, що під час гальмування зіткнення з електронами домінують. Тоді величина $F = 2\pi v^3 \int_{-1}^1 d\chi f$ (де f – функція розподілу швидких йонів) зберігається в процесі гальмування в кожному елементі плазмового об'єму (як до того, як цебро прийде, так і після того, як воно піде). Для простоти вважаємо, що швидкі йони народжуються з однаковою швидкістю v_α , а F зберігає однакове значення $F = F_{buc}$ у

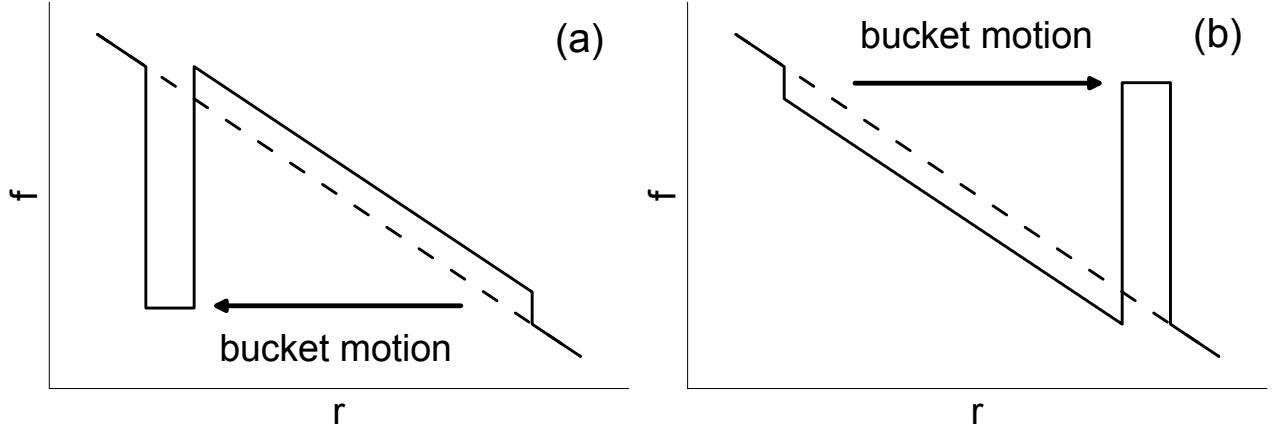


Рис. 2.4 Вплив цеберного перенесення на радіальну залежність функції розподілу швидких йонів (f). Пунктирна лінія – початковий профіль $f(r)$; суцільна лінія – $f(r)$ після того, як цебра зсунули резонансні частинки. (a) – цебра рухаються всередину; (b) - цебра рухаються назовні

всьому об'ємі цебра і не змінюється в процесі гальмування (це припущення не можна застосовувати, якщо цебро росте під час руху). Також припускаємо, що ширина цебра є малою в порівнянні з відстанню, пройденої цебром. Нехай $(I_{buc}(t), v_{buc}(t))$ буде траєкторією цебра на площині (I, v) , де v_{buc} і I_{buc} пов'язані рівнянням (2.16). Тоді ширина цебра в I та v , δI та δv , пов'язанні співвідношенням

$$\frac{\delta I}{\delta v} = \left| \frac{dI_{buc}}{dv_{buc}} \right| = \left| \frac{dv_{buc}}{dt} \right|^{-1} \left| \frac{dI_{buc}}{dt} \right|. \quad (2.22)$$

Враховуючи, що повна енергія енергійний йонів у елементі фазового об'єму – це $2\pi^2 M R_0 v F dI dv$, а середня (по θ) ширина острова складає $(2/\pi)\delta I$, можна записати потік енергії (тобто, передачу енергії через задану магнітну поверхню за одиницю часу) в такій формі:

$$Q(I) = 4\pi M [F_{buc} - F_\alpha(I)] R_0 v_{buc}^2(I) v_s \delta I, \quad (2.23)$$

де $F_\alpha(I)$ – це F при $v = v_\alpha$ (і, отже, при $v > v_{buc}$).

Для прикладу розглянемо простий випадок, коли q та F_α є майже лінійними по I . Тоді з рівняння (2.16) випливає, що v_{buc} є також лінійною функцією від I . Припускаючи, що ширина цебра є незмінною (ми нехтуємо просторовою

варіацією α), можемо записати рівняння (2.23) в такій формі

$$Q(x) = 4\pi M F' R_0 v_\alpha^2 v_s \delta I \Delta I x (1 - x)^2, \quad (2.24)$$

де $\Delta I = I_0 - I_\alpha$ – відстань, пройдена цебром по I , I_0 – положення магнітного острова, I_α – положення цебра при $v = v_\alpha$, $x = (I - I_\alpha)/\Delta I$.

Потік, що описується рівнянням (2.24), можна інтерпретувати в термінах аномальної теплопровідності з коефіцієнтом

$$\chi_{buc} \sim v_s \delta r \Delta r, \quad (2.25)$$

де δr – радіальна ширина цебра, $\Delta r = \xi \rho_\alpha \epsilon / (\chi \hat{s})$ – відстань, яку проходить цебро, $\rho_\alpha = v_\alpha / \omega_{B0}$. Цей коефіцієнт може перевищувати неокласичний за умови, що ширина цебра і відстань пройдена цебром перевищують ларморів радіус; умова $\Delta r > \rho_\alpha$ означає, що шир ϵ малим ($\hat{s} \lesssim \epsilon$). За аналогією з рівнянням (2.25), можна записати більш загальну оцінку:

$$\chi_{buc} \sim u_{buc} \delta r, \quad (2.26)$$

яка не залежить від особливих умов, що зумовлюють зсув цебра. Схожі оцінки є справедливими і для ефективного коефіцієнта аномальної дифузії частинок, пов'язаної з цебрами.

У випадку немонотонного $q(r)$ треба врахувати, що $\hat{s}$ не є сталим, отже не є сталим і δI . Якщо взяти $\alpha = \text{const}$, а профіль $\iota(I)$ параболічним, з рівняння (2.19) випливає, що

$$\delta I \propto 1/\sqrt{x} \quad \text{і} \quad v_{buc} \propto (1 - x^2), \quad (2.27)$$

де $x = (I - I_{\min})/\Delta I$, $\Delta I = I_{\text{mag}} - I_{\min}$, $I_{\min}$ – положення $q_{\min}$, I_{mag} – положення зовнішнього ланцюжка магнітних островів. Проаналізуємо рівняння (2.23) лише для випадку, коли $q_{\min} < m/n$ є достатньо близьким до m/n , так що резонанси при $v = v_\alpha$ відсутні, але з'являються при менших швидкостях (випадок, показаний на Рис. 2.3). Покладаючи $F_{buc} = F(I = I_{\min})$, отримуємо

$$Q(x) = 4\pi M F' R_0 v_c^2 v_s \delta I \Delta I \sqrt{x} (1 - x^2)^2. \quad (2.28)$$

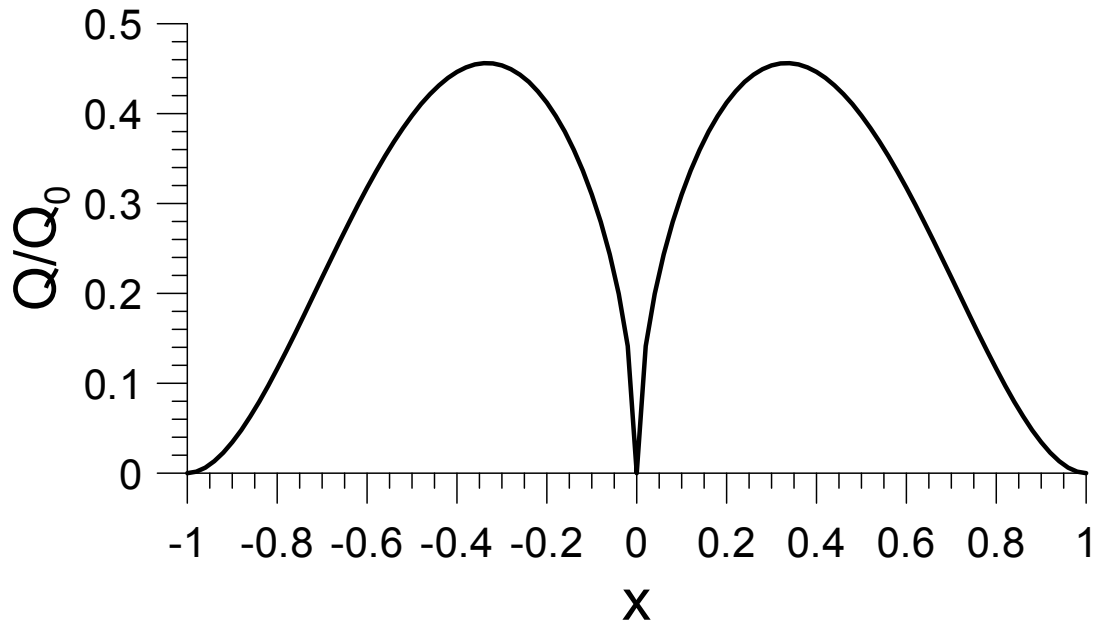


Рис. 2.5 Радіальний профіль потоку енергії Q внаслідок руху цебра у випадку зміни знаку шири. $Q_0 = 4\pi M F' R_0 v_c^2 v_s \delta I \Delta I$. Ширина цебра вважається нехтовною; $x = 0$ відповідає $q = q_{\min}$; $x = \pm 1$ відповідає магнітним островам

Графік $Q(x)$ показано на Рис. 2.5. Як можна побачити, місця, де потік найсильніший ($x = \pm 1/3$), лежать ближче до середини області між магнітними островами, ніж до розташування островів ($x = \pm 1$).

Важливою особливістю потоку, представленого формулою (2.28), є його сильна чутливість до $q_{\min}$ (оскільки v_c сильно залежить від $q_{\min}$). Потік зростає зі зростанням $\Delta q = m/n - q_{\min}$, досягаючи максимуму при $v_c = v_\alpha$ (це трапляється, коли $\Delta q \sim \rho_\alpha/R_0$, рівняння (2.21)). Якщо Δq продовжує далі зростати, рівняння (2.28) перестає бути застосовним, і цеберний потік зникає в центральній області простору між магнітними островами.

Зазначимо, що рівняння (2.28) не працює поблизу точки $x = 0$, оскільки ширина острова там не може вважатися малою. Детальний аналіз показує, що фазові біфуркації, які трапляються при утворенні цебра, створюють ненульовий потік через магнітну поверхню $x = 0$. Цей потік можна оцінити як $Q(0) \sim (\delta I/\Delta I)^{1/3} Q(1/3)$.

Висновки до Розділу 2

У Розділі 2 запропоновано гамільтонів формалізм, який застосовний для випадку, коли зміщення резонансів є наслідком зіткненневого гальмування частинок та часової еволюції коефіцієнту запасу стійкості (магнітного числа

обертів). Показано, що незалежно від напрямку руху цебра, потік енергії і потік частинок, спричинений цеберним перенесенням, завжди направлений проти градієнтів, оскільки будь-яке зміщення фазового об'єму, захопленого цебром, завжди супроводжується зсувом фазового об'єму в протилежному напрямку. Ці зміщення резонансних і нерезонансних частинок в протилежних напрямках призводять до перемішування, а не адвекції частинок та енергії. Потоки енергії та частинок, спричинені цеберним перенесенням, зростають зі зменшенням магнітного широт. Отже цеберне перенесення може бути важливим для гібридного операційного режиму та розрядів з оберненим широт [4].

Цеберні потоки локалізуються на певній відстані від магнітних островів, які спричиняють їх появу. Зокрема, коли $v_{pr}/v_{||} > 0$, потоки енергійних йонів, спричинені подвійними ланцюжками магнітних островів, у розрядах з оберненим широт локалізуються в області між ланцюжками островів – досягаючи свого максимуму поблизу середини цієї області.

Основні положення цього розділу викладені у публікації автора [39].

РОЗДІЛ 3

ПРОСТОРОВЕ КАНАЛЮВАННЯ ЕНЕРГІЇ ШВИДКИХ ЙОНІВ АЛЬФВЕНОВИМИ ХВИЛЯМИ

Просторове каналювання (Spatial channeling (SC)) – це передача енергії та імпульсу швидких йонів модами, що збуджуються цими йонами, з однієї області плазми в іншу. Воно має місце, коли область, де швидкі йони віддають свою енергію модам, і область, де ці моди загасають, в результаті взаємодії з основною плазмою, не збігаються. Зрозуміло, що каналювання буде переважати над дифузією чи теплопровідністю, коли групова швидкість моди поперек магнітного поля (v_g) є достатньо великою,

$$v_g \gg \chi/L, \quad (3.1)$$

де χ – це температуропровідність, L – характерна довжина.

Згідно з [36], просторове каналювання може пояснити експерименти на сферичному торі NSTX, де значне підвищення потужності (в три рази) інжекції пучка нейтральних атомів призводило до розширення профілю температури, а не до зростання температури в центрі плазми. В цих експериментах [30] спостерігалась активність альфвенових мод з частотами в діапазоні (0.5 – 1.1) МГц. В роботі [30] збуджені хвилі ідентифікувались як GAE-моди (Global Alfvén Eigenmodes – глобальні альфвенові власні моди) [77, 78] (пізніше стало відомо, що у високочастотній МГД-активності під час експериментів на NSTX з високою потужністю інжекції нейтрального пучка були присутні як GAE, так і FMM (Fast Magnetoacoustic Modes – швидкі магнітозвукові моди) [31].

В Розділі 3 представлено результати робіт [40] та [37], метою яких було, по-перше, зрозуміти як альфвенові власні моди передають енергію поперек магнітного поля і оцінити величину потоку енергії, який вони здатні створити; по-друге, оцінити кількість та амплітуди хвиль необхідних для того, щоб утворилась широка стохастична область у фазовому просторі швидких йонів, і хвилі могли отримати значку частку потужності інжекції нейтрального пучка, щоб передати її в іншу просторову область плазми.

3.1 Механізм перенесення енергії альфвеновими хвилями поперек магнітного поля в тороїдальній плазмі

Відомо, що альфвенові хвилі – на відміну від швидких магнітозвукових хвиль (Fast Magnetoacoustic Waves (FMW)) – поширюються вздовж магнітного поля так, що їх поперечна групова швидкість в однорідній плазмі і однорідному магнітному полі дорівнює нулю ($\partial\omega/\partial k_{\perp} = 0$, де ω – це частота хвилі, $k_{\perp}$ – це поперечне хвильове число). Таким чином, фізичний механізм просторового каналювання, спричинений GAE, EAE та іншими альфвеновими власними модами, залишався незрозумілим. Незважаючи на це, висновки робіт [36, 79] ґрунтувались на припущенні, що альфвенові моди можуть переносити енергію поперек магнітного поля, хоча аналіз механізму такого перенесення не проводився. Була лише здогадка в роботі [79], що поперечне перенесення енергії альфвеновими модами пов'язане з тим фактом, що, строго кажучи, $\omega \neq k_{\parallel} v_A$, і отже $\nabla \cdot \xi \neq 0$ ($k_{\parallel}$ – поздовжнє хвильове число, v_A – альфвенова швидкість, ξ – це зміщення плазми) для мод, що лежать в щілині альфвенового континууму.

3.1.1 Рівняння альфвенових хвиль у тороїдальній плазмі

Зазвичай при аналітичному дослідженні альфвенових мод (а іноді й при числовому) використовуються редуковані магнітогідродинамічні (МГД) рівняння, з яких задля спрощення вилучено опис швидких магнітозвукових хвиль (FMW), або ж як FMW, так і повільних магнітозвукових хвиль (SMW). Можливість такого спрощення впливає з того, що в типових умовах токамака або стеларатора альфвенові та магнітозвукові хвилі мають різні частоти (якщо порівнювати коливання зі схожими модовими числами). Справді, для альфвенових мод є типовим співвідношення $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$. У такому разі частоти відповідних гілок FMW $\sim k v_A$ значно перевищують частоти альфвенових мод $\sim k_{\parallel} v_A$. З іншого боку, у плазмі з низьким β частоти FMW $\sim k_{\parallel} c_s$, де c_s – швидкість звуку, зазвичай є значно нижчими альфвенових (це твердження може не справджуватися, для мод з дуже малим $k_{\parallel}$, частота яких наближається до частоти геодезичної акустичної моди).

У цьому підрозділі ми стисло викладемо виведення редукованого рівняння для альфвенових хвиль, на якому ґрунтується розгляд у цьому розділі, наслідуючи роботу [80], яка в свою чергу, наслідує підхід робіт [50, 81].

Будемо виходимо з лінеаризованих рівнянь ідеальної МГД:

$$-\rho\omega^2\xi + \nabla\tilde{p} = \frac{1}{c}\tilde{\mathbf{j}} \times \mathbf{B} + \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \tilde{\mathbf{B}}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\xi_{\perp} - (\xi_{\perp} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \xi_{\perp}). \quad (3.3)$$

$$\tilde{p} = -\xi \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \xi, \quad (3.4)$$

де $\mathbf{j} = c/(4\pi)\nabla \times \mathbf{B}$ – густина струму, p – тиск плазми, ρ – рівноважна масова густина, тильдою позначені збурені величини, часова залежність яких береться у вигляді $\exp(-i\omega t)$, ξ – зсув плазми, $\mathbf{B}$ – магнітне поле.

Для розділення характерних частот швидких магнітозвукових хвиль та альфвенових хвиль, вважатимемо, що

$$\omega \sim \varepsilon \frac{v_A}{a}, \quad (3.5)$$

де v_A – альфвенова швидкість, a – характерний поперечний розмір конфігурації (малий радіус), ε – малий параметр. Розглядаємо випадок конфігурацій з великим аспектним відношенням $\sim \varepsilon^{-1}$ і збурень з $k_{\parallel}/k_{\perp} \sim \varepsilon \ll 1$. Припускаємо, що кривина силових ліній ($\mathcal{K} = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{b} = B^{-2}\nabla_{\perp}(B^2/2 + 4\pi p)$) та поздовжні градієнти є малими,

$$\mathcal{K} \sim \nabla_{\parallel} \sim \frac{\varepsilon}{a}, \quad (3.6)$$

де $\nabla_{\parallel} = \mathbf{b} \cdot \nabla$, $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$. Поперечні градієнти збурених величин та більшості рівноважних величин вважаються немалими ($\nabla_{\perp} \sim 1/a$). Також припускаємо, що просторові варіації рівноважного магнітного поля та кривини є слабкими,

$$\nabla \mathbf{B} \sim \varepsilon \frac{\mathbf{B}}{a}, \quad \nabla_{\parallel} \mathbf{B} \sim \varepsilon^2 \frac{\mathbf{B}}{a}, \quad \nabla \mathcal{K} \sim \frac{\varepsilon^2}{a^2}, \quad (3.7)$$

де результати дії оператора ∇ розуміються як тензори. Відзначимо, що з рівняння (3.7) випливає, зокрема, що як полоїдальна компонента так і варіація тороїдальної компоненти магнітного поля є порядку ε . Розглядаємо випадок великого β

$$\beta \sim \varepsilon, \quad (3.8)$$

що дає змогу зберегти ефекти, пов'язані з тиском плазми, в основному порядку по ε [82]. У цьому випадку густину діаманітного струму та струму Пфірша-Шлютера можна оцінити як

$$j_{\perp} \sim j_{\parallel} \sim \frac{c}{4\pi} \varepsilon \frac{B}{a}. \quad (3.9)$$

Знайдемо оцінки для поздовжньої та поперечної компонент $\tilde{\mathbf{B}}$ в рівнянні (3.3) З рівнянь (3.6) та (3.7) можна зробити висновок, що $\tilde{B}_{\perp} \sim \varepsilon \xi B/a$. Для отримання оцінки для $\tilde{B}_{\parallel}$ запишемо (3.2) таким чином (див [83]):

$$\nabla \left(\tilde{p} + \frac{1}{4\pi} B \tilde{B}_{\parallel} \right) = \rho \omega^2 \xi + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{B}} + \frac{1}{4\pi} (\tilde{\mathbf{B}} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (3.10)$$

З рівнянь (3.5) та (3.6) випливає, що перший та другий доданки правої частини (3.10) можна оцінити як $\sim (1/4\pi) \varepsilon^2 B_0^2 \xi / a^2$ та $\sim (1/4\pi) \varepsilon B_0^2 \xi / a^2$, відповідно. Скориставшись рівняннями (3.3), (3.6) та (3.7), запишемо оцінку для третього доданку:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{B}} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= B \nabla_{\parallel} [(\xi_{\perp} \cdot \nabla) \mathbf{B}] - B^2 \mathcal{K} \nabla \cdot \xi_{\perp} - \mathbf{B} (\nabla_{\parallel} B) \nabla \cdot \xi_{\perp} \\ &- (\xi_{\perp} \cdot \nabla) (B^2 \mathcal{K}) - (\xi_{\perp} \cdot \nabla) (\mathbf{B} \nabla_{\parallel} B) = \mathcal{O} \left(\varepsilon \frac{B^2 \xi}{a^2} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Оцінка збурення загального тиску запишеться як:

$$\tilde{p} + (1/4\pi) B_0 \tilde{B}_{\parallel} \sim \varepsilon B^2 \xi / (4\pi a),$$

звідки можна знайти, що:

$$\tilde{B}_{\parallel} \sim \tilde{B}_{\perp} \sim \varepsilon \frac{B \xi}{a}. \quad (3.12)$$

Поперечне стиснення плазми є малим, $\nabla \cdot \xi_{\perp} = \mathcal{O}(\varepsilon \xi / a)$. Це впливає з порівняння рівнянь (3.12) та (3.3). Запишемо рівняння (3.10) з кращою оцінкою для $\tilde{B}_{\parallel}$ (рівняння (3.12)), чим покращимо оцінку для збурення загального тиску:

$$\tilde{p} + \frac{1}{4\pi} B \tilde{B}_{\parallel} = \mathcal{O} \left(\varepsilon^2 \frac{B^2 \xi}{4\pi a} \right). \quad (3.13)$$

Рівняння (3.13) показує, що загальний тиск плазми та магнітного поля збурюється слабо, і, таким чином, виключає з розгляду швидку магнітозвукову хвилю.

Підставляючи (3.3) та (3.4) в рівняння (3.13) і виражаючи $\mathbf{j}$ з рівняння рівноваги

$$c\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (3.14)$$

запишемо (3.13) наступним чином:

$$4\pi\gamma p\nabla \cdot \xi + B^2\nabla \cdot \xi_{\perp} + 2B^2\mathcal{K} \cdot \xi = \mathcal{O}\left(\varepsilon^2 \frac{B^2\xi}{a}\right). \quad (3.15)$$

Подібні перетворення з поздовжньою компонентою рівняння (3.2) з використанням рівняння

$$\nabla p \cdot \tilde{\mathbf{B}} = -\nabla \cdot [\nabla p \times (\xi \times \mathbf{B})] = B\nabla_{\parallel}(\nabla p \cdot \xi) \quad (3.16)$$

дають

$$\xi_{\parallel} = -\frac{c_s^2}{\omega^2}\nabla_{\parallel}\zeta, \quad (3.17)$$

де $\zeta = \nabla \cdot \xi$, $c_s = (\gamma p/\rho)^{1/2}$ – швидкість звуку.

Потім, виключаючи $\nabla \cdot \xi_{\perp}$ та $\xi_{\parallel}$ з рівнянь (3.15), (3.17) та

$$\zeta = \nabla \cdot \xi_{\perp} + B\nabla_{\parallel}\frac{\xi_{\parallel}}{B} \quad (3.18)$$

і нехтуючи доданками порядку ε^2 , отримуємо рівняння:

$$\left[1 + \frac{c_s^2}{v_A^2} + \frac{c_s^2}{\omega^2}B\nabla_{\parallel}\left(\frac{1}{B}\nabla_{\parallel}\right)\right]\zeta + 2\mathcal{K} \cdot \xi = 0. \quad (3.19)$$

Щоб вивести друге рівняння нашої системи, скористаємось рівнянням замикання струмів, $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}} = 0$, у такому вигляді вигляді:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}}_{\perp} + B\nabla_{\parallel}\frac{\tilde{j}_{\parallel}}{B} = 0, \quad (3.20)$$

і запишемо $\tilde{\mathbf{j}}$ через скалярний та векторний потенціали збурення, Φ та $\mathbf{A}$. Знайдемо $\mathbf{A}_\perp$ та $A_\parallel$. Для цього візьмемо скалярний та векторний добутки $\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times (\mathbf{A}_\parallel \mathbf{b} + \mathbf{A}_\perp)$ з $\mathbf{B}$ і скористаємось рівнянням (3.14), звідки отримаємо рівняння:

$$\tilde{B}_\parallel = \frac{4\pi j_\parallel}{cB} A_\parallel + \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_\perp), \quad (3.21)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} \times \mathbf{B} = -B^2 \nabla_\perp \frac{A_\parallel}{B} + \frac{4\pi}{B} A_\parallel \nabla p - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}_\perp). \quad (3.22)$$

Порівнюючи рівняння (3.21) та (3.22) з рівнянням (3.12), можна зробити висновок, що вони узгоджуються з наступними оцінками:

$$A_\parallel \sim A_\perp \sim \varepsilon B \xi, \quad (3.23)$$

що дає змогу спростити вираз для $\tilde{\mathbf{B}}_\perp$. За допомогою рівнянь (3.6), (3.7) та (3.23) можемо записати:

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}_\perp) = -B \nabla_\parallel \mathbf{A}_\perp - \nabla \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_\perp = \mathcal{O} \left(\varepsilon^2 \frac{B^2 \xi}{a} \right), \quad (3.24)$$

що разом з рівняннями (3.8) та (3.23) дає змогу записати (3.22) таким чином:

$$\tilde{\mathbf{B}} \times \mathbf{B} = -B^2 \nabla_\perp \frac{A_\parallel}{B} + \mathcal{O} \left(\varepsilon^2 \frac{B^2 \xi}{a} \right). \quad (3.25)$$

Поздовжній струм можна знайти з відповідної компоненти рівняння $\tilde{\mathbf{j}} = c/(4\pi) \nabla \times \tilde{\mathbf{B}}$ з використанням рівнянь (3.9), (3.12) та (3.25):

$$\begin{aligned} \tilde{j}_\parallel &= \frac{c}{4\pi B} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{B}} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{B} \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{j} \\ &= -\frac{c}{4\pi B} \nabla \cdot \left(B^2 \nabla_\perp \frac{A_\parallel}{B} \right) + \mathcal{O} \left(\varepsilon^2 \frac{c}{4\pi} \frac{B \xi}{a^2} \right), \end{aligned} \quad (3.26)$$

Щоб знайти $\tilde{\mathbf{j}}_\perp$, векторно множимо (3.2) на $\mathbf{B}$:

$$\tilde{\mathbf{j}}_\perp = \frac{c}{B^2} \mathbf{B} \times \nabla \tilde{p} + \frac{\rho \omega^2 c}{B^2} \xi \times \mathbf{B} - \frac{\tilde{B}_\parallel}{B} \mathbf{j}_\perp + \frac{j_\parallel}{B} \tilde{\mathbf{B}}_\perp. \quad (3.27)$$

Тільки перший доданок у правій частині (3.27) має порядок $\propto \varepsilon$, тоді як решта доданків мають порядок ε^2 . Тому розпишемо цей доданок окремо:

$$\frac{c}{B^2} \mathbf{B} \times \nabla \tilde{p} = -c \nabla \times \left(\frac{\tilde{p}}{B^2} \mathbf{B} \right) + \frac{2c\tilde{p}}{B^2} \mathbf{B} \times \mathcal{K} + \frac{4\pi\tilde{p}}{B^2} \mathbf{j} - \frac{8\pi\tilde{p}}{B^2} \mathbf{j}_\perp, \quad (3.28)$$

де лише перший доданок, який має нульову дивергенцію, має порядок $\propto \varepsilon$. Рівняння (3.27) та (3.28) дають

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}}_\perp = & \nabla \cdot \left(\frac{\rho\omega^2 c}{B^2} \xi \times \mathbf{B} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{2c\tilde{p}}{B^2} \mathbf{B} \times \mathcal{K} \right) \\ & + \nabla \cdot \left\{ \frac{j_\parallel}{B} [\nabla \times (A_\parallel \mathbf{B})]_\perp \right\}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

де доданки порядку ε^3 не враховуються.

Щоб виразити $\xi_\perp$ та $A_\parallel$ через Φ , скористаємось законом Ома,

$$\frac{i\omega}{c} \mathbf{A} - \nabla \Phi - \frac{i\omega}{c} \xi \times \mathbf{B} = 0. \quad (3.30)$$

Поздовжня компонента рівняння (3.30) дає

$$A_\parallel = -\frac{ic}{\omega} \nabla_\parallel \Phi. \quad (3.31)$$

З поперечної компоненти отримуємо

$$\xi_\perp = \frac{ic}{\omega B^2} \mathbf{B} \times \nabla \Phi + \frac{1}{B^2} \mathbf{B} \times \mathbf{A}_\perp. \quad (3.32)$$

Другий доданок правої частини рівняння (3.32) пропорційний $\sim \varepsilon \xi$, звідки можна зробити висновок, що доданок, який містить Φ , є доданком основного порядку, і $\Phi = O(\omega B a \xi / c)$. Підставляючи рівняння (3.4), (3.26), (3.29) та (3.32) в рівняння (3.20), а рівняння (3.32) в рівняння (3.19), скориставшись рівнянням (3.13), щоб виключити $\tilde{\mathbf{B}}_\parallel$, і утримуючи тільки доданки найнижчого

порядку, отримуємо такі два рівняння:

$$\begin{aligned} & \omega^2 \nabla \cdot \left(\frac{1}{v_A^2} \nabla_{\perp} \Phi \right) + B \nabla_{\parallel} \left\{ \frac{1}{B^2} \nabla \cdot \left[B^2 \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{B} \nabla_{\parallel} \Phi \right) \right] \right\} \\ & + \frac{2i\omega}{c} \nabla \cdot \left(\frac{c_s^2}{v_A^2} \mathbf{B} \times \mathcal{K} \zeta \right) + 8\pi \nabla \cdot \left\{ [(\mathbf{B} \times \nabla p) \cdot \nabla \Phi] \frac{\mathbf{B} \times \mathcal{K}}{B^4} \right\} \\ & - \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \left\{ \frac{j_{\parallel}}{B} \left[\nabla \times \left(\frac{\nabla_{\parallel} \Phi}{B} \mathbf{B} \right) \right]_{\perp} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\left[\omega^2 \left(1 + \frac{c_s^2}{v_A^2} \right) + c_s^2 B \nabla_{\parallel} \left(\frac{1}{B} \nabla_{\parallel} \right) \right] \zeta - \frac{2ic\omega}{B^2} (\mathbf{B} \times \mathcal{K}) \cdot \nabla \Phi = 0. \quad (3.34)$$

У випадку плазми в однорідному магнітному полі рівняння розчіпляються. Тоді перший та другий доданки рівняння (3.33) дають дисперсію альфвенових хвиль, тоді як перший доданок рівняння (3.34) дає дисперсію повільних магнітозвукових хвиль. Третій доданок рівняння (3.33) та другий рівняння (3.34) описують зачеплення між альфвеновими та звуковими хвилями через кривину магнітних силових ліній. Четвертий доданок рівняння (3.33) відповідає за жолобкову та балонну нестійкості, п'ятий відповідає за гвинтову нестійкість.

При розгляді високочастотних коливань, стисливістю плазми і впливом звукової гілки можна знехтувати. У такому випадку рівняння (3.33) відчіпляється від рівняння (3.34), і ми отримуємо окреме рівняння альфвенових коливань [80]:

$$\begin{aligned} & \omega^2 \nabla \cdot \left(\frac{1}{v_A^2} \nabla_{\perp} \Phi \right) + B \nabla_{\parallel} \left\{ \frac{1}{B^2} \nabla \cdot \left[B^2 \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{B} \nabla_{\parallel} \Phi \right) \right] \right\} \\ & + 8\pi \nabla \cdot \left\{ [(\mathbf{B} \times \nabla p) \cdot \nabla \Phi] \frac{\mathbf{B} \times \mathcal{K}}{B^4} \right\} \\ & - \frac{4\pi}{c} \nabla \frac{j_{\parallel}}{B} \cdot \nabla \times \left(\frac{\nabla_{\parallel} \Phi}{B} \mathbf{B} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Якщо додатково знехтувати доданками, що містять тиск та поздовжній рівноважний струм, ми отримаємо рівняння [84], а також вираз для МГД-струму, використаний в Розділі 1 (рівняння 1.2).

3.1.2 Поперечний потік енергії в альфвенових хвилях: загальний вираз

Виведемо загальний вираз для потоку енергії в альфвенових хвилях. Почнемо розгляд з відповідного рівняння альфвенової хвилі:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{v_A^2} \nabla_{\perp} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = B \nabla_{\parallel} \left[\frac{1}{B^2} \nabla \cdot (B \hat{F} \phi) \right] - \frac{4\pi}{c} \nabla \frac{j_{\parallel}}{B} \cdot \nabla (b \nabla_{\parallel} \phi), \quad (3.36)$$

де $\partial \phi / \partial t = \tilde{\Phi}$ – скалярний потенціал, j – це рівноважний струм і оператор $\hat{F}$ задається виразом $\hat{F} \phi = B \nabla_{\perp} (B^{-1} \nabla_{\parallel} \phi)$, $\nabla_{\perp} = \nabla - b \nabla_{\parallel}$. Рівняння (3.36) – це рівняння (3.35), отримане в попередньому підрозділі, без урахування доданків, що відповідають за тиск. Варто наголосити, що під час його виведення було використано припущення [50], що $\tilde{B}_{\parallel} = 0$ і $\tilde{A} = \tilde{A}_{\parallel} b$. Тут замість змінної $\tilde{\Phi}$, використаної в попередньому підрозділі, взято змінну ϕ , що не впливає на лінійний аналіз, але є важливим для обчислення енергії. Диференційні оператори у всіх трьох членах рівняння (3.36) є самоспряженими [80]. Останній член цього рівняння можна записати у формі, яка показує його самоспряженість більш явно:

$$\frac{2\pi}{c} \left\{ \nabla \cdot \left[\left(b \times \nabla \frac{j_{\parallel}}{B} \right) \nabla_{\parallel} \phi \right] + \nabla \cdot (b \hat{J} \phi) \right\}, \quad (3.37)$$

де

$$\hat{J} \phi = \left(b \times \nabla \frac{j_{\parallel}}{B} \right) \cdot \nabla \phi \quad (3.38)$$

Можна побачити, що рівняння (3.36) випливає з Лагранжіана

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P} \quad (3.39)$$

з кінетичною енергією

$$\mathcal{K} = \frac{c^2}{8\pi} \frac{1}{v_A^2} \left| \nabla_{\perp} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^2 \quad (3.40)$$

і потенціальною енергією

$$\mathcal{P} = \frac{c^2}{8\pi} |\hat{F} \phi|^2 + \frac{c}{2} (\nabla_{\parallel} \phi) \hat{J} \phi. \quad (3.41)$$

Зазначимо, що $\mathcal{K} \approx \rho u_{\perp}^2/2$ ($\mathbf{u}$ – швидкість течії) і перший член у виразі для потенціальної енергії ($\mathcal{P}$) $\approx \tilde{B}_{\perp}^2/(8\pi)$ (дивись вирази для $\tilde{\mathbf{B}}_{\perp}$ і $\mathbf{u}_{\perp}$ в [80]).

Оскільки Лагранжіан (3.39) є інваріантним до трансляцій в часі, то з теореми Нетер випливає, що розв’язки рівняння (3.36) задовольняють певному закону збереження енергії:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (3.42)$$

де W – це густина потоку енергії, $\mathbf{S}$ – це потік енергії. З фізичних міркувань густину енергії можна записати як

$$W = \mathcal{K} + \mathcal{P}. \quad (3.43)$$

Диференціюємо рівняння (3.43) за часом і використовуємо рівняння (3.36), щоб виключити $\partial^2 \phi / \partial t^2$. Далі один за одним перетворюємо доданки в дивергентну форму і отримуємо рівняння (3.42), де $\mathbf{S}$ виражається як

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \frac{c^2}{4\pi} \left[-\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla_{\perp} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \left(\nabla_{\parallel} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \hat{\mathbf{F}} \phi \right. \\ & - \frac{2\pi}{c} \left(\mathbf{b} \times \nabla \frac{j_{\parallel}}{B} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla_{\parallel} \phi + \mathbf{b} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{1}{B} \nabla \cdot (B \hat{\mathbf{F}} \phi) \\ & \left. - \frac{2\pi}{c} \mathbf{b} \frac{\partial \phi}{\partial t} \hat{\mathbf{j}} \phi \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Лише перші три члени рівняння (3.44) дають внесок в поперечний потік. Радіальна контраваріантна компонента радіального потоку має вигляд

$$\begin{aligned} S^r = & -\frac{c^2}{4\pi} g^{rr} \left[\tilde{\Phi} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial r \partial t} + (\nabla_{\parallel} \tilde{\Phi}) B \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{B} \nabla_{\parallel} \phi \right) \right] \\ & - \frac{c}{2} \left(\mathbf{b} \times \nabla \frac{j_{\parallel}}{B} \right)^r \tilde{\Phi} \nabla_{\parallel} \phi, \end{aligned} \quad (3.45)$$

де $g^{rr} = |\nabla r|^2$. В циліндричній геометрії третій доданок в (3.45) дорівнює нулю.

Для того, щоб отримати потік біжучих хвиль у ВКБ-наближенні, ми беремо

$$\tilde{\Phi} = [\hat{\Phi} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) + \text{c.c.}]/2, \quad (3.46)$$

де $\hat{\Phi}$ – це амплітуда потенціалу хвилі, а “с.с.” означає “комплексно спряжене”. У випадку циліндричної геометрії усереднені по часу густина енергії хвилі (W^t) і радіальний потік енергії (S^t) мають такий вигляд:

$$W^t = \frac{c^2 k_{\perp}^2 |\hat{\Phi}|^2}{v_A^2 8\pi}, \quad (3.47)$$

$$S^t = \frac{c^2 k_r}{8\pi\omega} \left(k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{v_A^2} \right) |\hat{\Phi}|^2. \quad (3.48)$$

З рівняння (3.47) і (3.48) отримуємо радіальну групову швидкість альфвенової хвилі в циліндричній геометрії:

$$v_g^t = S^t/W^t = \frac{k_r v_A^2}{\omega k_{\perp}^2} \left(k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{v_A^2} \right). \quad (3.49)$$

3.1.3 Виведення потоку енергії в альфвеновій та швидкій магнітозвуковій хвилях з рівнянь ідеальної МГД

Потік енергії в МГД хвилі пропорційний $\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{B}}$ (за відсутності тиску плазми). Таким чином, в ідеальній хвилі з $\tilde{E}_{\parallel} = 0$ передача енергії поперек магнітного поля неможлива без наявності $\tilde{B}_{\parallel} \neq 0$. В той же час, більшість рівнянь для альфвенових власних мод (зокрема і рівняння (3.36)) отримуються в припущенні, що $\tilde{B}_{\parallel} = 0$ (і супутньому припущенні [50], що $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{A}_{\parallel} \mathbf{b}$). Незважаючи на це, дане рівняння дає ненульовий поперечний потік.

Аналіз, наведений нижче, розв’язує цей парадокс. Ми покажемо, що S^t задане рівнянням (3.48) відповідає звичайній густині потоку енергії, що виражається як

$$S^t = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\tilde{E}_b^* \tilde{B}_{\parallel}), \quad (3.50)$$

де $\tilde{E}_b$ – це бінормальна компонента збуреного електричного поля (тут використано координати $\mathbf{e}_r = \nabla r / |\nabla r|$, $\mathbf{e}_b = \mathbf{b} \times \mathbf{e}_r$, і $\mathbf{e}_{\parallel} = \mathbf{b}$).

Щоб це побачити, скористаємось рівняннями ідеальної МГД, з яких випливає, що збурене магнітне поле можна записати як

$$\tilde{\mathbf{B}} = -\mathbf{B} \nabla \cdot \xi_{\perp} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \xi_{\perp} - (\xi_{\perp} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (3.51)$$

де ξ – зсув плазми. Останній член пов’язаний з неоднорідністю магнітного поля і ним можна знехтувати (завдяки ВКБ-наближенню). Тоді з рівняння (3.51) і МГД рівняння руху отримуємо:

$$\tilde{B}_{\parallel} = -B \nabla \cdot \xi_{\perp} \quad (3.52)$$

і

$$(\omega^2/v_A^2 - k_{\parallel}^2)\xi_{\perp} = iQ\mathbf{b} \times \xi + \mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{k}_{\perp} \cdot \xi_{\perp}) \quad (3.53)$$

де $Q = 4\pi j_{\parallel} k_{\parallel}/(cB)$.

Вводячи змінні $D = k_r \xi_r + k_b \xi_b$ і $R = k_b \xi_r - k_r \xi_b$, рівняння (3.53) можна написати в такому вигляді

$$(\omega^2/v_A^2 - k^2)D = iQR, \quad (3.54)$$

$$(\omega^2/v_A^2 - k_{\parallel}^2)R = -iQD, \quad (3.55)$$

які, фактично, є рівняннями зачеплених магнітозвукової та альфвенової хвиль. Важливо, що звідси випливає, що :

$$\text{Re}(D^* R) = \text{Re}(R^* D) = 0, \quad (3.56)$$

тобто, фази швидкої магнітозвукової та альфвенової компонент зсунуті на $\pi/2$.

Тепер виразимо E_b через R і D :

$$E_b = -\frac{i\omega}{c} B \xi_r = -\frac{i\omega}{ck_{\perp}^2} (k_r D + k_b R). \quad (3.57)$$

Використовуючи рівняння (3.52), (3.56), і (3.57), запишемо рівняння (3.50) у такій формі

$$S^t = \frac{\omega k_r B^2}{8\pi k_{\perp}^2} |D|^2 = \frac{\omega k_r}{8\pi k_{\perp}^2} |\tilde{B}_{\parallel}|^2, \quad (3.58)$$

Варто наголосити, що це рівняння є справедливими як для магнітозвукової так і для альфвенової гілок хвилі.

Зокрема, густина енергії швидкої магнітозвукової хвилі – це $W^t = (k^2/k_{\perp}^2) |\tilde{B}_{\parallel}|^2/(8\pi)$. Враховуючи, що $\omega = kv_A$, отримуємо відомий

вираз для групової швидкості FMW:

$$v_g^t(x) = S^t/W^t = \frac{k_r}{k} v_A. \quad (3.59)$$

Для альфвенової хвилі ($\omega^2 \approx k_{\parallel}^2 v_A^2$), сума рівняння (3.54), домноженого на D^* та рівняння (3.55) домноженого на R^* дає

$$|D|^2 = \frac{1}{k_{\perp}^2} \left(k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{v_A^2} \right) |R|^2. \quad (3.60)$$

В калибровці $\mathbf{k}_{\perp} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\perp} = 0$ (це означає що $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}$ не дає внеску в альфвену хвилю), величина R може бути виражена через скалярний потенціал альфвенової компоненти хвилі:

$$|R^2| = |\mathbf{k} \times \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{b}|^2 = \frac{c^2 k_{\perp}^4}{\omega^2 B_0^2} |\tilde{\Phi}|^2. \quad (3.61)$$

Об'єднуючи рівняння (3.52), (3.60), і (3.61), отримаємо оцінку для $\tilde{B}_{\parallel}$:

$$|\tilde{B}_{\parallel}| = \left(k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{v_A^2} \right)^{1/2} \frac{c k_{\perp}}{\omega} |\tilde{\Phi}|. \quad (3.62)$$

Нарешті, використовуючи рівняння (3.60) і (3.61), можна відтворити рівняння (3.48) з рівняння (3.58). Отже, ми відтворили рівняння (3.48) з рівняння (3.50).

Можна зробити висновок, що хоча $\tilde{B}_{\parallel}$ було знехтувано під час виведення рівняння моди (рівняння (3.36)), воно може бути відновлено з розв'язків цього рівняння. Потік енергії і групова швидкість біжучих хвиль, що утворюють моду, узгоджуються з отриманою величиною $\tilde{B}_{\parallel}$.

3.1.4 Власні моди за наявності джерел і стоків енергії

Власні моди в тороїдальних системах є, насправді, стоячими хвилями в радіальному напрямку. Тому, власна мода може бути представлена як суперпозиція двох біжучих хвиль, одна з яких рухається назовні, а інша всередину плазми. За відсутності локальних джерел і стоків потоки енергії біжучих хвиль в стаціонарному стані повністю компенсують одне одного, так

що потік енергії власної моди має вигляд $S^{(m)} = S_+^t + S_-^t = 0$, де нижні індекси “+” і “-” позначають хвилю, що біжить назовні і всередину плазми, відповідно. Наявність локальних джерел і стоків порушує баланс потоку, що веде до $S^{(m)} \neq 0$ і впливає на радіальний профіль густини енергії хвилі. Проте, коли джерела і стоки є слабкими, радіальна структура моди змінюється слабо. Можна сказати, що в цьому випадку мода виживає, незважаючи на те, що енергія передається з області, де знаходяться джерела в область, де знаходяться стоки.

Умови, що визначають стійкість моди за наявності джерел та стоків можна сформулювати наступним чином [41]. Запишемо рівняння для густини потоку в такому вигляді: $S_\pm^t = \pm |v_g^t| W_\pm^t$, де v_g^t – групова швидкість біжучих хвиль, що утворюють стоячу хвилю і $W_\pm^t$ – густини енергії біжучих хвиль. Групова швидкість v_g^t для FMW відома (це $k_r v_A / k$, де k_r – радіальна компонента хвильового вектора k); для альфвенових хвиль вона буде обчислена у наступних підрозділах.

Рівняння для густини енергії моди $W^{(m)} = W_+^t + W_-^t$ має вигляд:

$$\frac{\partial W^{(m)}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r S^{(m)} = 2\gamma^L W^{(m)}, \quad (3.63)$$

де потік енергії моди поперек магнітного поля це:

$$S^{(m)} = |v_g^t| \delta W = v_g W^{(m)}, \quad (3.64)$$

$\delta W = W_+ - W_-$, v_g – це групова швидкість моди.

Звідси випливає, що

$$v_g = |v_g^t| \frac{\delta W}{W^{(m)}}. \quad (3.65)$$

Для того, щоб описати джерела і стоки використаємо локальний інкремент збудження (декремент загасання) нестійкості (γ^L), який визначається як

$$\gamma = \frac{\int d^3x \gamma^L W^{(m)}}{\int d^3x W^{(m)}}, \quad (3.66)$$

де γ – це інкремент збудження (декремент загасання) нестійкості, інтеграл який береться по всьому об'єму плазми. З іншого боку (як випливає з [85]),

$$\gamma = \text{Re} \frac{\int d^3x \tilde{\mathbf{j}}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \tilde{\Phi}}{2 \int d^3x W^{(m)}}, \quad (3.67)$$

де $\tilde{\mathbf{j}}$ і $\tilde{\Phi}$ – це плазмовий струм і скалярний потенціал електромагнітного поля, відповідно, тильдою позначені збуджені величини, які за припущенням пропорційні $\exp(-i\omega t)$. Порівнюючи рівняння (3.66) і (3.67), отримуємо

$$\gamma^L = \text{Re} \frac{\tilde{\mathbf{j}}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \tilde{\Phi}}{2W^{(m)}}. \quad (3.68)$$

Використовуючи γ^L , ми можемо написати густину потоку енергії в такому вигляді:

$$S^{(m)}(r) = \frac{2}{r} \int_0^r dr' r' \gamma^L(r') W^{(m)}(r'), \quad (3.69)$$

що випливає з рівняння (3.63)

Зрозуміло, що $S^{(m)}(r) = 0$ поза межами локалізації моди. Всередині моди потік $S^{(m)}(r) \neq 0$. В стаціонарному стані він направлений від джерела енергії моди (області, де $\gamma^L \equiv \gamma_+ > 0$) до стоку енергії моди (області, де $\gamma^L \equiv \gamma_- < 0$). Коли амплітуда моди зростає, з'являються додаткові енергетичні потоки, які спричиняють зростання амплітуди в областях, де збудження немає, або воно є слабким [86]. Наприклад, коли стаціонарна мода розташована в області $r_1 \leq r \leq r_2$ і $\gamma^L > 0$ для $r_1 < r < r_0$, $\gamma^L < 0$ для $r_0 < r < r_2$, потік енергії направлений назовні, досягаючи максимуму в точці $r = r_0$:

$$S_{\text{max}}^{(m)} = S^{(m)}(r_0) \sim \gamma_+ W^{(m)} \Delta_{\alpha}, \quad (3.70)$$

де $\Delta_{\alpha} = r_0 - r_1$ – це ширина області збудження нестійкості. З іншого боку, згідно з рівнянням (3.64), $S^{(m)} = v_g^t \delta W$. Таким чином, умова, за якої мода виживає ($\delta W < W^{(m)}$), – тобто її радіальний профіль ($W(r)^{(m)}$) залишаються таким же як і за відсутності нестійкості – задовольняється, коли

$$\gamma_+ \Delta_{\alpha} < v_g^t. \quad (3.71)$$

3.1.4.1 Порівняння потоку енергії моди і теплового потоку

Представляє інтерес подивитись, чи може потік енергії моди ($S^{(m)}$) перевищувати тепловий потік йонів основної плазми (S^T). Беручи $S^T = \chi n_e T / L_T$ (L_T – це характерна довжина неоднорідності температури), з рівняння (3.64) знаходимо, що $S^{(m)} \geq S^T$ за умови:

$$\frac{W^{(m)}}{n_e T} \geq \frac{\chi}{v_g L_T}. \quad (3.72)$$

Відношення $W^{(m)}/(n_e T)$ зазвичай є малим. Таким чином рівняння (3.72) задовольняється за умови, що його права частина є малою (ця умова задана рівнянням (3.1)). Рівняння (3.72) вимагає, щоб була відома групова швидкість, v_g . З іншого боку, v_g можна оцінити з рівняння (3.72) за допомогою рівнянь (3.64) та (3.70) взятих разом, звідки отримуємо вираз $v_g = \Delta_\alpha \gamma_+$. Тоді рівняння (3.72) набуває вигляду:

$$\frac{W^{(m)}}{n_e T} \geq \frac{\chi}{L_T \Delta_\alpha \omega \gamma_+}. \quad (3.73)$$

Таке ж співвідношення впливає прямо з порівняння рівнянь (3.70) та $S^T = \chi n_e T / L_T$. Наприклад, для $L_T = 0.6$ м, $\Delta_\alpha = 0.1$ м, $\gamma_+/\omega = 10^{-2}$, $\omega = 5 \times 10^6$ с⁻¹ ($f \approx 800$ кГц) оцінюємо праву частину рівняння (3.73) як $3 \times 10^{-4} \chi_1$, де χ_1 – це χ в м² с⁻¹. Це означає, що $S^{(m)} \geq S^T$ коли $W^{(m)}/(n_e T) \geq 3 \times 10^{-4} \chi_1$. Для альфвенових хвиль, $W^{(m)} = |\hat{B}|^2/(8\pi)$, де $\hat{B}$ – амплітуда моди. Отже, в розглянутому прикладі потік енергії моди перевищує тепловий потік, коли амплітуда моди задовольняє наступній нерівності:

$$\hat{B}/B \geq 1.2 \times 10^{-3} \sqrt{\chi_1 \beta}, \quad (3.74)$$

де β в %, а $T_e = T_i$. Розглянутий приклад може бути актуальним для сферичного тору NSTX.

3.1.5 Групова швидкість v_g^t в GAE-модах

З рівняння (3.71) випливає, що групова швидкість хвилі має бути достатньо великою для того, щоб мода існувала під час нестійкості. Щоб подивитись чи

можна ці рівняння задовольнити, потрібно знати групову швидкість v_g^t . Нижче наведені розрахунки групової швидкості для GAE-моди в токамаку.

Розглянемо рівняння альфенових коливань (3.35) без урахування доданків, що відповідають за тиск:

$$\begin{aligned} \omega^2 \nabla \cdot \left(\frac{1}{v_A^2} \nabla_{\perp} \Phi \right) + B \nabla_{\parallel} \left\{ \frac{1}{B^2} \nabla \cdot \left[B^2 \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{B} \nabla_{\parallel} \Phi \right) \right] \right\} \\ - \frac{4\pi}{c} \nabla \frac{j_{\parallel}}{B} \cdot \nabla \times \left(\frac{\nabla_{\parallel} \Phi}{B} \mathbf{B} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Скалярний потенціал Φ пов'язаний з напруженістю електромагнітного поля рівняннями [58]:

$$\mathbf{E} = -\nabla_{\perp} \Phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times A \mathbf{b}, \quad A = \frac{ck_{\parallel}}{\omega} \Phi, \quad (3.76)$$

де $A \equiv A_{\parallel}$. Вибираємо збурення в такому вигляді:

$$\Phi = \sum_{mn} \hat{\Phi}_{mn}(\psi) \exp(-i\omega t - in\varphi + im\vartheta), \quad (3.77)$$

де ψ , ϑ , і φ – Бузерові координати. Тоді $k_{\parallel} = (m\iota - n)/R$, де ι – обертальне перетворення, R – великий радіус тора. Наслідуюч [58] і нехтуючи зачепленням між Фур'є-гармоніками Φ , одержуємо наступне рівняння, що описує альфенові власні моди:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{v_A^2} \right) \frac{\partial \hat{\Phi}_{mn}}{\partial r} - \left[\frac{m^2}{r^2} \left(k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{v_A^2} \right) - \frac{k_{\parallel}}{r} (rk'_{\parallel})' \right] \hat{\Phi}_{mn} \\ + \frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{B}_{mn} \cdot \nabla_{\perp} \frac{j_{\parallel}}{B} = 0, \end{aligned} \quad (3.78)$$

де радіальна координата r визначається як $\psi = \bar{B}r^2/2$, $\bar{B}$ – усереднене рівноважне магнітне поле на магнітній осі, штрих позначає радіальну похідну (d/dr).

Інколи зручно використати іншу хвильову функцію, $\Psi = \Phi/r$, замість Φ . Можна показати, що ця функція пропорційна полоїдальній компоненті електричного поля, E_{pol} , а E_{pol} пропорційна радіальному зсуву плазми, ξ_r . В

цих змінних рівняння (3.78) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^3 \left(k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{v_A^2} \right) \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial r} - (m^2 - 1) \left(k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{v_A^2} \right) \Psi_{mn} \\ & - \omega^2 \left(\frac{1}{v_A^2} \right)' r \Psi_{mn} + r k_{\parallel} (3k_{\parallel}' + r k_{\parallel}'') \Psi_{mn} \\ & + \frac{4\pi i \omega}{c^2} r \mathbf{B}_{mn} \cdot \nabla_{\perp} \frac{j_{\parallel}}{B} = 0. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Зробимо ще одну заміну змінних $Y = \Psi_{mn} r^{3/2} \left(k_{\parallel}^2 - \omega^2/v_A^2 \right)^{1/2}$. Така підстановка виключає члени пропорційні першій похідній від хвильової функції і дає наступне рівняння для GAE [58]:

$$\frac{d^2 Y}{dr^2} - G(r) Y = 0, \quad (3.80)$$

де

$$G(r) = \frac{m^2 - 1/4}{r^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{P'}{P} \right)^2 + \frac{3}{2r} \left(\frac{P'}{P} \right) + \frac{P''}{2P} + \frac{\omega^2}{v_A^2} \frac{\rho'}{P r \rho}, \quad (3.81)$$

$P = k_{\parallel}^2 - \omega^2/v_A^2$, ρ – це масова густина. Обмежуючись ВКБ-наближенням [54], можемо представити радіальне хвильове число через $ik_r = \hat{\Phi}'/\hat{\Phi} \approx Y'/Y$. Тоді радіальна групова швидкість хвилі дорівнює

$$v_g^t = -2\sigma_k \sqrt{-G} \left(\frac{\partial G}{\partial \omega} \right)^{-1}, \quad (3.82)$$

де $\sigma_k = k_r/|k_r|$. З цього рівняння випливає, що $v_g \neq 0$ в області $G < 0$ зі скінченною похідною $\partial G/\partial \omega$.

Зазначимо, що рівняння (3.80) можна розглядати як рівняння Шредінгера з повною енергією, рівною нулю. Тоді умову існування розв'язку можна записати як $G = 0$ в парі точок, які відповідають точкам повороту. Більш загальна умова – це $G < 0$ в деяких областях. Коли $G < 0$ усюди в плазмі ($0 \leq r \leq a$), розв'язки рівняння (3.80) існують за умови, що $Y(a) = 0$. Зазначена гранична умова передбачає, що потрібно покласти потенціальну енергію G нескінченною для $r \geq a$, тим самим забезпечивши існування точок повороту.

Зрозуміло, що коли точки, де $G = 0$, існують і не знаходяться поблизу границі плазми, розв'язки слабо залежать від граничних умов.

Для того, щоб представити v_g у зручному для практичного використання вигляді, припустимо, що GAE є сильно локалізованою біля точки r_* , де $\omega'_A = 0$, в такому випадку рівняння (3.80) набуває форми рівняння Шредінгера[58, 78]:

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + [\mathcal{E} - U(x)]Y = 0. \quad (3.83)$$

Тут $\mathcal{E}$ – це ефективна повна енергія і $U(x)$ – це ефективна потенціальна енергія, які визначаються як

$$\mathcal{E} = -\hat{k}_g^2 \Delta^2, \quad U(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{g}{1+x^2}, \quad (3.84)$$

де $\hat{k}_g^2 = (m^2 - 1/4)/r_*^2 \approx m^2/r_*^2 \equiv k_{g*}^2$, $x = (r - r_*)/\Delta$ – це нормалізована радіальна координата, Δ – це характерна ширина моди, яка визначається як $\Delta^2 = 2(\omega_{A*}^2 - \omega^2)/(\omega_A^2)''$, g – це параметр,

$$g = -\frac{2\omega_{A*}^2}{r_*(\omega_A^2)''} \frac{\rho_*'}{\rho_*}, \quad (3.85)$$

індекс “*” позначає величини в точці $r = r_*$.

З визначень Δ^2 та $\mathcal{E}$ випливає, що частота моди:

$$\omega^2 = \omega_{A*}^2 - \frac{1}{2}(\omega_A^2)'' \Delta^2, \quad (3.86)$$

де $\Delta^2 = -\mathcal{E}/\hat{k}_g^2$. Дискретні частоти GAE відповідають дискретним енергетичним рівням ефективної енергії ($\mathcal{E}_l$), де $l = 0, 1, \dots$. Останні існують при $g > 1/4$ [77]. Коли $g \gg 2$ (потенціальна енергія $U(x)$ має мінімум в $x = 0$ при $g > 2$), $\mathcal{E}_l$ можна апроксимувати як в [78]:

$$\mathcal{E}_l = -[g - (2l + 1)\sqrt{g}]. \quad (3.87)$$

Диференціюючи рівняння (3.86) і рівняння

$$k_r^2(x) = (\mathcal{E} - U)/\Delta^2 = -\hat{k}_g^2 - U(x)/\Delta^2, \quad (3.88)$$

ми отримуємо радіальну групову швидкість у такому вигляді:

$$v_g^t(x) = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_r} \right|_r = -\frac{(\omega_A^2)''}{2\omega} k_r(x) \Delta^4 \left[\frac{d}{dx^2}(x^2 U) \right]^{-1} \quad (3.89)$$

(зазначимо, що $x = x(r, \omega)$). Рівняння (3.89) також можна отримати підставивши (3.86) і (3.49) в рівняння (3.49).

Переписавши рівняння (3.89) в термінах $\mathcal{E}_l$, отримуємо:

$$v_g^t(x) = -\sigma_k \frac{(\omega_A^2)''}{2\omega} \frac{\mathcal{E}_l^2}{|\hat{k}_g|^3} \sqrt{\frac{U(x) - \mathcal{E}_l}{\mathcal{E}_l}} \left[\frac{d}{dx^2}(x^2 U) \right]^{-1}, \quad (3.90)$$

де $\sigma_k = \text{sgn } k_r$. Тепер за допомогою рівняння (3.85) виключимо $(\omega_A^2)''$ і візьмемо v_g в точці $x = 0$ ($r = r_*$). Враховуючи, що $\omega^2 \approx \omega_A^2$, отримуємо:

$$v_g^t(r_*) = -\sigma_k \frac{\omega \rho'_*}{r_* \rho_* |\hat{k}_g|^3} \frac{\mathcal{E}_l^2}{g(g-1)} \sqrt{\frac{1-g-\mathcal{E}_l}{\mathcal{E}_l}}. \quad (3.91)$$

Для основної моди ($l = 0$), це рівняння спрощується до

$$v_g^t(r_*) = -\sigma_k F(g) \frac{\omega \rho'_*}{|\hat{k}_g|^3 r_* \rho_*}, \quad (3.92)$$

де функція

$$F(g) = \frac{1}{g^{1/4}} \frac{\sqrt{g}-1}{\sqrt{g}+1} \quad (3.93)$$

показана на Рис. 3.1.

Тепер можна написати умову слабого впливу нестійкості на структуру моди (рівняння (3.71)) в такому вигляді:

$$\frac{\gamma_+}{\omega} < \frac{F(g)}{2\nu_\alpha k_g^2 L_\rho r_*}, \quad (3.94)$$

де $\nu_\alpha = \Delta_\alpha / \delta r_m$ – це частина області локалізації моди, де домінує збудження нестійкості, $\delta r_m \sim r/m$ – це ширина моди, і $L_\rho = |d \ln \rho / dr|_*^{-1}$ – це характерна довжина неоднорідності густини плазми. Наприклад, коли $F = 0.2$, $m = 7$, $r_*/L_\rho = 0.5$, $\nu_\alpha = 0.5$, отримуємо $\gamma_+/\omega < 2 \times 10^{-3}$.

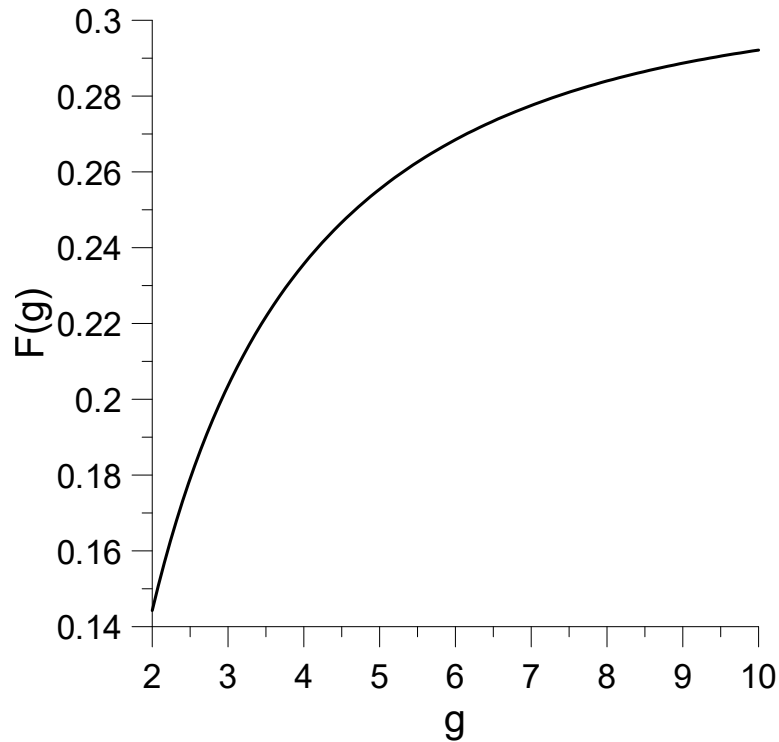


Рис. 3.1 Функція $F(g)$, що задана рівнянням (4.23)

3.1.6 Групова швидкість ν_g^t в ТАЕ-модах

ТАЕ-моди [87] виникають внаслідок зачеплення різних полоїдальних гармонік альфвенової хвилі, яке утворює щілини в гілках континууму хвилі з номерами мод (m, n) та $(m + 1, n)$ біля тих магнітних поверхонь, де $q = (m + 1/2)/n$. Коли магнітний шир ($\hat{s} = q'r/q$) є не малим і $nq \gg 1$, просторова структура моди складається з внутрішніх областей, розташованих біля радіусів, на яких знаходиться щілини, та зовнішніх областей, які їх розділяють; амплітуда збурення в зовнішніх областях є значно меншою [88]. В цьому випадку мода складається з множинних Фур'є-гармонік. Коли шир малий, взаємодія між різними внутрішніми областями експоненційно послаблюється. В цьому випадку ТАЕ-мода локалізована поблизу однієї магнітної поверхні і складається лише з двох гармонік [84, 89, 90]. Групову швидкість потрібно знаходити для двох окремих випадків: для багатомодових ТАЕ ($\hat{s} \gtrsim 1$ та $nq \gg 1$) використовуючи балонний формалізм, та для ТАЕ-моди, що складається з двох гармонік ($\hat{s} \ll \epsilon$ (де $\epsilon = r/R$)), використовуючи інший варіант ВКБ-методу.

3.1.6.1 Багатогармонічні ТАЕ-моди

Балонний формалізм [91, 92] має декілька варіантів. Усі вони дають однакові балонні рівняння, але відрізняються способом виведення та інтерпретації цих рівнянь. Будемо використовувати підхід [93], який розглядає балонний формалізм як спеціальний вид ВКБ-наближення для хвиль з великим $k_{\perp}$, але малим $k_{\parallel}$ (більш детальні умови застосування наводитимуться нижче).

Наслідуючи [94, 95], де цей формалізм було застосовано до ТАЕ-мод, запишемо локальне дисперсійне співвідношення (отримане розв'язуючи балонне рівняння) для цих мод у вигляді

$$\omega = \omega_{\text{loc}}(r, \theta_k), \quad (3.95)$$

де $\theta_k = k_r/(nq')$ – поперечний параметр хвильового числа, введений в [93], і функція $\omega_l \in 2\pi$ – періодичною по θ_k . В балонному наближенні хвилі поширюються в хвильовому фазовому просторі (r, θ_k) вздовж траєкторій $\omega_{\text{loc}}(r, \theta_k) = \text{const}$. Тоді власні моди відповідають замкненим траєкторіям, які задовольняють певним умовам квантування. Щоб це наближення було чинним, мають виконуватись наступні умови. По-перше, n має бути достатньо великим, $nq \gg 1$, для того, щоб існували множинні щільні магнітні поверхні. По-друге, шир має бути достатньо великим для того, щоб збурення інтенсивно взаємодіяли поперек зовнішніх областей, утворюючи об'єднану багатогармонічну структуру; як впливає з [88], це випадок, коли $\hat{s} \gtrsim 1$ (більш точно, коли $\hat{s} \geq 1$, або $\hat{s} < 1$ та $n \exp(-1/\hat{s})/\hat{s} \gtrsim 1$). Знаючи локальне дисперсійне співвідношення, можна знайти радіальну групову швидкість ТАЕ:

$$v_g^t = \frac{\partial \omega_{\text{loc}}}{\partial k_r} = \frac{r}{nq\hat{s}} \frac{\partial \omega_{\text{loc}}}{\partial \theta_k}. \quad (3.96)$$

Для того, щоб завершити ці оцінки, потрібно знати, як ω_{loc} залежить від θ_k . Оскільки $\omega_{\text{loc}}(\theta_k)$ періодична, можна розвинути ω_{loc} наступним чином:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{loc}}(r, \theta_k) &= \omega_{\text{ТАЕ}}(r) \\ &\times \left\{ 1 + \hat{e}(r) \sum_{j=0}^{\infty} c_j(r) \cos[j\theta_k - j\theta_{kj}(r)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

де $\omega_{\text{TAE}} = v_A/(2qR)$ – частота в центрі щілини ТАЕ; $\hat{\epsilon}$ – відносна півширина ТАЕ-щілини (наприклад, $\hat{\epsilon} = \epsilon + \Delta'$ в токамаках з круговим поперечним перерізом, де $\Delta(r)$ – це Шафрановський зсув, $\Delta' \sim \epsilon$); θ_{kj} , і c_j – це параметри, що визначаються властивостями магнітної конфігурації (широм, градієнтом тиску, тощо). В сумі рівняння (3.97) залишимо лише перші два доданки, припускаючи, що $\omega_{\text{loc}}(\theta_k)$ – гармонічна функція, що осцилює всередині континуумної щілини ТАЕ. Як числові результати, Рис. 12 роботи [94], так і аналітичні результати в роботі [95] показують, що профіль $\omega_{\text{loc}}(\theta_k)$ дійсно близький до гармонічного. Припускаємо, що вищі гармоніки рівняння (3.97) є малими і їх вплив на оцінки, наведені нижче, є слабким. Таким чином, запишемо

$$\omega_{\text{loc}}(r, \theta_k) = \omega_{\text{TAE}}(r) \times \left(1 + \hat{\epsilon} \{c_0(r) + c_1(r) \cos[\theta_k - \theta_{k1}(r)]\}\right). \quad (3.98)$$

Зазначимо, що $|c_0| + |c_1| < 1$, це випливає з того факту, що $\omega_{\text{loc}}(r, \theta_k)$ лежить всередині ТАЕ-щілини. Ми припускаємо, що θ_{k1} вибрана таким чином, що $c_1 > 0$. Об'єднуючи рівняння (3.96) та (3.98) і наближаючи до максимуму θ_k (нас цікавить радіальне розташування, де групова швидкість максимальна), отримуємо:

$$v_g^t = \pm \frac{c_1 \hat{\epsilon}}{nq\hat{s}} r \omega_{\text{TAE}} = \pm c_1 \frac{\epsilon \hat{\epsilon}}{2nq^2 \hat{s}} v_A. \quad (3.99)$$

Для того, щоб знайти коефіцієнти c_1 , що входять в рівняння, потрібно розв'язувати балонне рівняння чисельно. З літератури можна зробити висновок, що коли $\hat{s} \gtrsim 1$, цей коефіцієнт порядку свого максимально можливого значення, $c_1 = 1$. Зокрема, для нульового тиску плазми можна знайти c_1 з аналітичних результатів, наведених в Розділі VII роботи [95]:

$$v_g^t = \pm Z(\hat{s}) \frac{\epsilon \hat{\epsilon}}{2nq^2 \hat{s}} v_A \quad (3.100)$$

при чому $Z \equiv c_1/\hat{s}$ має такі асимптотичні наближення:

$$Z(\hat{s}) = \begin{cases} \exp(-1/\hat{s})(\hat{s} + 1)/\hat{s}^2 & \text{for } \hat{s} \ll 1, \\ (1 - \hat{s}^{-3}/6)/\hat{s} & \text{for } \hat{s} \gg 1. \end{cases} \quad (3.101)$$

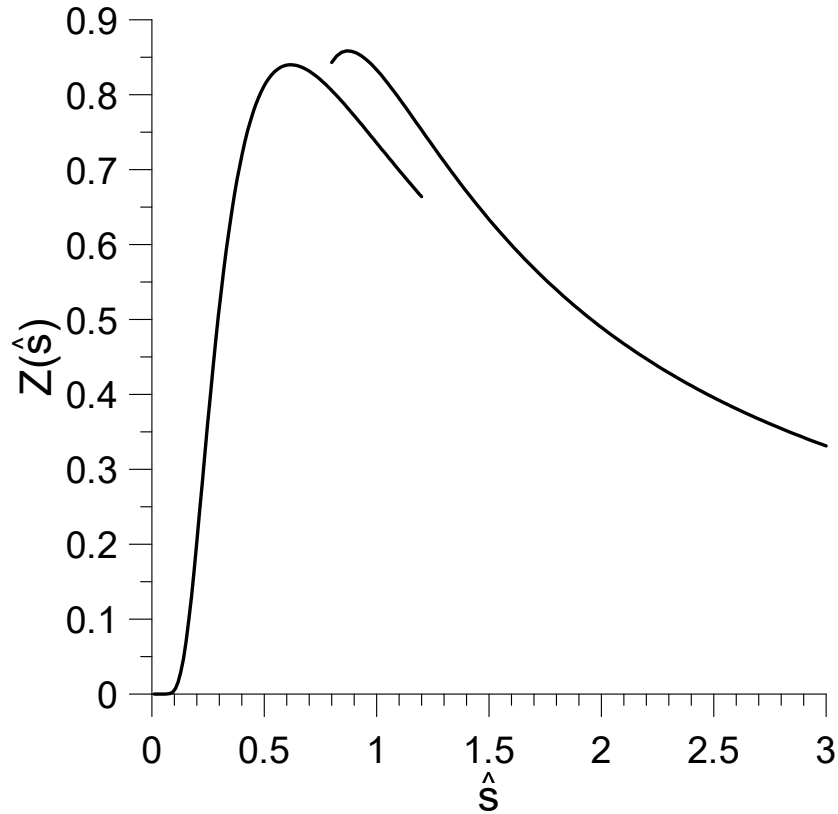


Рис. 3.2 Асимптотичні вирази для функції $Z(\hat{s})$, що задана рівнянням (3.101)

Ці асимптотичні вирази показані на Рис. 3.2.

Можна побачити, що $Z(\hat{s})$ відрізняється від одиниці менше ніж в 3 рази для $1/3 < \hat{s} < 3$. Здається, що вплив тиску плазми (p) на $\omega_{\text{loc}}(\theta_k)$ не вивчався аналітично. Числові розрахунки для дисперсії ТАЕ для $p \neq 0$ показують, що c_1 спадає зі зростанням градієнту тиску. Рис. 12 в роботі [94] показує, що c_1 при $\hat{s} = 0.8$ і $\epsilon = 0.2$ падає від 0.7 до 0.4, коли нормалізований градієнт температури, $\alpha = (8\pi q^2/B^2)p'$, зростає від 0 до 0.15. Зазначимо, що критичне α , при якому ТАЕ-мода зникає, становить приблизно 0.35 для цих значень $\hat{s}$ та ϵ , Рис. 11 в роботі [94]. Отже, здається виправданим взяти $c_1 \sim 1$ для $\hat{s} \gtrsim 1$, принаймні, коли градієнт температури знаходиться далеко від критичного значення. Запишемо оцінки для v_g^t для ТАЕ-мод:

$$v_g^t \sim v_A \epsilon^2 / (nq^2). \quad (3.102)$$

Отже, v_g^t може бути значною, хоча вона є значно меншою за альфвенову швидкість. Варто наголосити, що рівняння (3.102) характеризує передачу енергії поперек глобальної структури ТАЕ-моди, яка відбувається завдяки відносно малим збуренням в зовнішніх областях. Потік енергії у внутрішніх

областях може бути сильнішим, але важко очікувати значного дисбалансу в джерелах та стоках всередині одної внутрішньої області.

При малих $\hat{s}$, залежність локальної дисперсії від θ_k , як відомо, спадає експоненційно (рівняння (3.101), Рис. 3.2, і робота [94]), групова швидкість ТАЕ спадає відповідним чином. Це відображає експоненційне послаблення потоку енергії в зовнішніх областях і перетворення глобальної хвильової структури в набір незалежних двогармонічних власних мод.

3.1.6.2 Двогармонічні ТАЕ-моди

Зі сказаного вище випливає, що передача енергії у зовнішніх областях ТАЕ-моди є слабкою при малому $\hat{s}$. Проте, при малому $\hat{s}$ внутрішня область моди, що складається з двох гармонік, може бути достатньо широкою, отже мода все ще може давати значний внесок в перенесення енергії. Для аналізу моди, що складається з двох гармонік, можна обмежитись випадком $\hat{s} \ll \epsilon$, що вперше розглядався в роботі [84]. Для такого випадку варто зазначити дві характерні особливості ТАЕ-моди. Перша, множинні моди спостерігаються з обох кінців континуумної щілини. Друга, внутрішня область настільки широка, що зовнішньої області моди немає.

Аналіз ТАЕ-моди для випадку $\hat{s} \ll \epsilon$, почнемо з рівняння (С.8) роботи [96], яке є диференціальним рівнянням другого порядку для потенціалу моди. В рамках ВКБ-наближення, це рівняння можна розглядати як квазікласичне рівняння траєкторії на площині (r, k_r) чи, іншими словами, як дисперсійне рівняння, що визначає залежність частоти моди від k_r та r . Змінюючи позначення, напишемо його в такій формі

$$\frac{16\hat{s}^2 n^2 q^2}{r_*^2} (r - r_*)^2 + Q \frac{r_*^2}{n^2 q^2} k_r^2 = E(\omega), \quad (3.103)$$

де r_* – розташування моди, $E = g^2 \hat{\epsilon}^2 - (\epsilon_{(1,0)}^{\vartheta\vartheta})^2$, $Q = \hat{\epsilon} \epsilon_{(1,0)}^{\vartheta\vartheta} - 2(\epsilon_{(1,0)}^{\vartheta\vartheta})^2 - 4(\epsilon_{(1,0)}^{\psi\vartheta})^2$, $g = (\omega^2/\omega_{\text{ТАЕ}}^2 - 1)/(2\epsilon_{(1,0)}^{\psi\psi})$, $\epsilon_{(1,0)}^{ij} = (\epsilon_{g(1,0)}^{ij} + \epsilon_{c(1,0)}^{ij})/2$ (де $i, j = \psi, \vartheta$), величини $\epsilon_{g(1,0)}^{ij} \sim \epsilon$ та $\epsilon_{c(1,0)}^{ij} \sim \epsilon$ (“параметри зачеплення”) визначаються рівняннями (1.7)-(1.8). При цьому відносна півширина ТАЕ-щілини дорівнює $\hat{\epsilon} = 2\epsilon_{(1,0)}^{\psi\psi}$. Комбінації параметрів зачеплення Q та $\epsilon_{(1,0)}^{\vartheta\vartheta}$, які входять у рівняння, можна оцінити як $Q \sim \epsilon^2$ та $\epsilon_{(1,0)}^{\vartheta\vartheta} \sim \epsilon$ (детальний аналіз показує, що, наприклад, $Q = 3\epsilon^2/4$ і $\epsilon^{\vartheta\vartheta} = -\epsilon/2$ для конфігурації з круговим перерізом і нехтовними

широм та градієнтом тиску), $g = (\omega^2/\omega_{\text{TAE}}^2 - 1)/(2\hat{\epsilon})$. Диференціюючи рівняння (3.103) в точці $r = r_*$, знаходимо:

$$v_g^t = \frac{\partial \omega}{\partial k_r} = \pm \frac{r_*}{4nqg\hat{\epsilon}^2} \sqrt{EQ}. \quad (3.104)$$

Для основної моди, беремо $g \sim 1$ і $E = 4\hat{s}$ (визначення для E і рівняння (С.10) взято з роботи [96]) і отримуємо наступні оцінки:

$$v_g^t \sim v_A \epsilon^{3/2} \hat{s}^{1/2} / (nq^2). \quad (3.105)$$

Порівнюючи це рівняння з рівнянням (3.102), можна побачити, що отримані результати для групової швидкості двогармонічних і багатогармонічних мод є досить схожими, і відрізняються лише множником $(\hat{s}/\epsilon)^{1/2}$.

3.2 Просторове каналювання енергії і стохастизація руху швидких йонів високочастотними нестійкостями плазми

В багатьох експериментах на сферичному торі NSTX при досить великій потужності інжекції нейтрального пучка спостерігались множинні високочастотні нестійкості (моди GAE та CAE, які збуджуються швидкими йонами) з частотами $f = \omega/(2\pi) \sim 0.5 \div 1$ МГц [30, 31]. В роботі [36] було показано, що ці нестійкості можуть каналювати енергію та імпульс швидких йонів за межі області, де ці йони локалізовані, що пояснює спостережуване погіршення в енергетичному утриманні плазми. Необхідною умовою для просторового каналювання енергії є здатність нестійкостей відібрати значну частину енергії швидких йонів.

Оцінимо кількість та амплітуду хвиль необхідних, щоб утворити широку стохастичну область у фазовому просторі швидких йонів. В такому випадку хвилі можуть отримати значну частку потужності інжекції нейтрального пучка, щоб передати її в іншу просторову область плазми.

3.2.1 Ширина резонансу

Даний аналіз обмежується розглядом GAE-мод. Крім того, до розгляду не беруться циклотронні резонанси, що дає змогу вивчати рух частинок в наближенні ведучого центра. На початковому етапі нашого дослідження таке припущення є виправданим.

Умову резонансу можна записати в такому вигляді

$$\omega = s\omega_{\vartheta} - n\omega_{\varphi} = \Omega_{J_{\varphi}, J_{\vartheta}} \quad (3.106)$$

де $\omega_{\varphi} = v_{\parallel}/R$, $\omega_{\vartheta} = v_{\parallel}/qR$ – частоти тороїдального і полоїдального рухів, відповідно, R – великий радіус тора, s і n – цілі числа, n завжди дорівнює тороїдальному хвильовому числу в циліндричній геометрії. Нас цікавлять резонанси пролітних частинок. Можна показати, що в лінійному наближенні по амплітуді хвилі, лагранжіан ведучого центра можна записати в такому вигляді.

$$L = J_{\varphi}d\varphi + J_{\vartheta}d\vartheta - Wdt + \sum_{s,n} \text{Re}[V_{sn} \exp(-i\omega t + is\vartheta - in\varphi)], \quad (3.107)$$

де J_{φ} , φ , J_{ϑ} , ϑ – змінні “дія-кут” незбуреного руху частинки, V_{sn} – це матричний елемент резонансу хвиля-частинка,

$$V_{sn} = \frac{ei}{2\pi^2\omega} \oint d\vartheta d\varphi (\vec{v} \cdot \vec{\tilde{E}}) \exp(i\omega t - is\vartheta + in\varphi). \quad (3.108)$$

У випадку взаємодії швидкого йона зі збуреннями альфвенівського типу можна нехтувати внеском $\tilde{E}_{\parallel}$ і $\tilde{A}_{\perp}$, підставляючи $\vec{v} \cdot \vec{\tilde{E}} \approx v_D \nabla \tilde{\Phi}$, де v_D – дрейфова швидкість. Розвиваючи в ряд незбурену частину гамільтоніана в точці резонансу і утримуючи лише резонансний член збурення, отримуємо вираз для ширини резонансу:

$$(\Delta J_{\varphi})_{island} = 4 \left| \frac{nV_{sn}}{\Omega} \right|^{1/2}. \quad (3.109)$$

Використовуючи співвідношення

$$\frac{\Delta W}{\omega} = -\frac{\Delta J_{\varphi}}{n} = \frac{\Delta J_{\vartheta}}{s} \quad (3.110)$$

і оцінюючи V_{sn} для пролітних частинок, можна написати відповідний аналітичний вираз для ширини резонансного острова для пролітних швидких йонів

$$\frac{\delta W_{island}}{W} = 4\chi \left| (1 + \chi^2) \frac{1}{\kappa R k_s} \frac{\tilde{B}_r}{B} \right|^{1/2} \cdot \gamma^{-1/2}, \quad (3.111)$$

де

$$\gamma = 1 - \frac{\omega_\phi^2 s^2}{\omega^2} \frac{\chi \rho R \hat{s}}{r^2 \kappa q},$$

W – енергія частинки, r – радіальна координат, ρ – Ларморів радіус, ω_B – циклотронна частота, $\tilde{B}_r$ і B магнітне поле хвилі і рівноважне магнітне поле, відповідно, $k_s = (s/q - n)$, κ – еліптичність, $\chi = v_{\parallel}/v$ – косинус пітч-кута, де v – це швидкість.

Для оцінки кількості мод необхідних, щоб стохастизувати рух йонів в певному енергетичному інтервалі, скористаємось рівнянням (3.111). Візьмемо параметри плазми з експерименту описаного в [30] ($B=0.45$ Тл; енергія інжектіваних йонів $W_{inj} = 90$ кеВ, електронна густина $n_e = (5 - 6) \times 10^{19} \text{ м}^{-3}$). Тоді для нестійкостей з частотами $f \sim 1$ МГц матимемо $k_{\parallel} \sim 6$. Підставляючи $\chi = 0.8$, $\kappa = 1.5$, $a = 0.85$ м, $R = 1$ м, знаходимо, що ширина резонансного острова $(\delta W)_{island}/W \sim 0.1$ для амплітуди $\tilde{B}_r/B \sim 5 \times 10^{-3}$ і $(\delta W)_{island}/W \sim 0.03$ для амплітуди $\tilde{B}_r/B \sim 5 \times 10^{-4}$. Це означає, що 5 мод з амплітудою 5×10^{-3} або 15 мод з амплітудою 5×10^{-4} достатньо для того, щоб утворити стохастичну область в інтервалі від W_{inj} до $W_{inj}/2$. Ці числа здаються реалістичними, для експериментів на NSTX.

Гальмування, спричинене хвилею, завжди супроводжується радіальним рухом йонів. Оцінки, зроблені вище, базуються на припущенні, що радіальне розташування йонів пучка не змінюється під час гальмування. Зсув йонів, дійсно, буде малим при великих ω , що впливає з рівняння (3.110), яке описує характеристики квазілінійного рівняння [34]:

$$\Delta r^2 = \frac{m}{\omega_B \omega} \Delta v_{\parallel}^2. \quad (3.112)$$

Будемо вважати, що частинки не втрачаються поки не віддадуть половину своєї енергії, тобто $\Delta v_{\parallel}^2/v_{\parallel 0}^2 > 1/2$ (індекс “0” відповідає енергії народження) і $\Delta r^2 < a^2/4$. Тоді з рівняння (3.112) отримуємо умову $\omega > m \cdot 130$ кГц, що відповідає більшості високочастотних GAE-мод, які спостерігаються на NSTX.

3.2.2 Числове моделювання

Аналітичні результати представлені вище базуються на припущенні, що енергетичні інтервали є стохастичними, коли сукупна ширина резонансних островів є достатньою, щоб його покрити. Незважаючи на те, що наше твердження є надійним (і схожим на добре відомий критерій Чірікова [97]) необхідно його перевірити числовими експериментами. Для цього було створено два коди. Перший код будує карти Пуанкаре для знаходження ширини резонансного острова утвореного однією альфвеновою модою. Другий код створений для вивчення перекриття резонансів багатьох хвиль і знаходження стохастичних областей. Ідея полягає в тому, що ми засіваємо набір тестових частинок з різними енергіями при фіксованому радіусі і адіабатично (дуже повільно) вмикаємо збурення; потім так само адіабатично вимикаємо хвилю і знаходимо області фазового простору, де енергії частинок змінилися [98]. Енергетичні інтервали, на яких частинки будуть випадковим чином зміщені, відповідатимуть областям стохастичності або резонансним островам. Области, в яких енергія частинок не зміниться, відповідатимуть областям, де між островами будуть існувати КАМ-поверхні. Це дає нам можливість знайти енергетичні інтервали, де частинки можуть швидко втрачати енергію. Для моделювання були взяті ті ж параметри плазми, що і в попередньому пункті, а профіль q задавався рівнянням $q(r) = q_0 - (q_a - q_0)(r/a)^2$, де $q_a = 3.1$, $q_0 = 0.1$, $a = 0.85$ м. В експериментах [30] спостерігались моди з частотами від 0.5 до 1.1 МГц, і тороїдальними модовими номерами n від -2 до -7 . Для наших числових розрахунків були взяті моди з цими параметрами, а m вибиралось так, щоб $\omega \approx k_{\parallel} v_A$, де $k_{\parallel} = (m/q - n)/R$, і в той же час, щоб хвилі були в резонансі з частинками, які нас цікавлять.

На Рис. 3.3 представлені карти Пуанкаре для різних мод, що спостерігались на NSTX. Це острови утворені GAE-модами з $\tilde{B}_r/B \sim 10^{-3}$ і частотами $f \approx 0.97$ МГц. Ширина резонансів, отримана з рівняння (3.111) узгоджується з результатом отриманим за допомогою коду (з розбіжністю в 20-30 %) На Рис. 3.4, показані енергетичні інтервали, пораховані за допомогою другого (адіабатичного) коду, для тих самих мод. Результати двох кодів отримані для однієї моди добре узгоджуються між собою. Можна побачити, що енергетичні інтервали, на яких частинки перемішуються, знаходяться на тих же місцях, що і резонансні острови на Рис. 3.3. Теорія передбачає, що ширина цих інтервалів

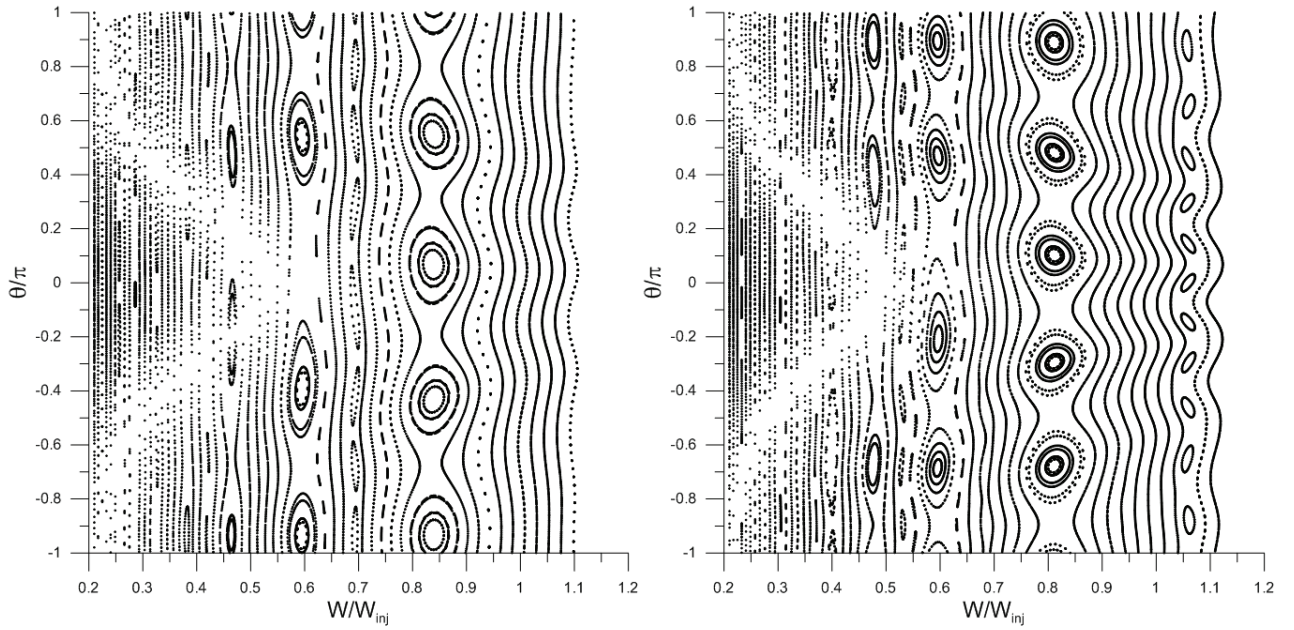


Рис. 3.3 Карти Пуанкаре для мод $(m, n) = (-3, -5)$ та $(m, n) = (-4, -6)$. Показано декілька ланцюжків резонансів; кількість резонансів в ланцюжку відповідає полоїдальному резонансному числу s

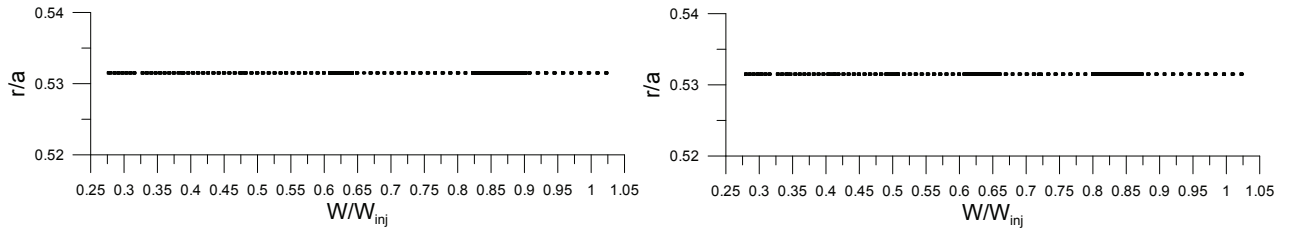


Рис. 3.4 Результат адіабатичного ввімкнення і вимкнення моди. Горизонтальні лінії показують енергетичні інтервали, на яких частинки випадковим чином опинились після вимкнення збурення. Крапки відповідають частинкам з нехтовним зміщенням. Розрахунки проводились для тих самих мод і амплітуд, що й у випадку показаному на Рис. 3.3

має бути в $\sqrt{2}$ рази меншою ніж ширина островів (для того, щоб забезпечити збереження фазового об'єму). Дійсно бачимо, що це має місце (винятком є резонанс $W \approx 0.8W_{inj}$ на Рис. 3.4(б), який дещо ширший). Таким чим, результати двох кодів для однієї моди узгоджуються з задовільною точністю, з чого випливає, що підхід, розроблений в адіабатичному коді, є застосовним. При цьому адіабатичний код можна застосовувати для аналізу відбирання енергії групами мод з різними частотами, тоді як карти Пуанкаре – лише тоді, коли частоти мод є однаковими або їх відношення є раціональним числом із малим знаменником (хоча варто зазначити, що розрахунок адіабатичним кодом забирає значно більше часу, ніж побудова карти Пуанкаре).

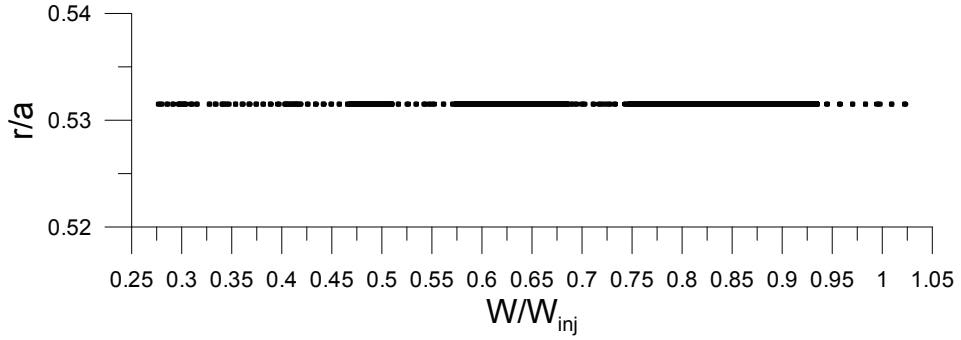


Рис. 3.5 Області стохастичного руху, що утворюються після одночасного адіабатичного ввімкненням і вимкненням мод $(m, n) = (-3, -5)$ та $(m, n) = (-4, -6)$. Амплітуди мод взято, як і у випадку показаному на Рис. 3.3 і 3.4

Приклад розрахунків зроблених для декількох (двох) мод показано на Рис. 3.5. Порівнюючи цей рисунок з Рис. 3.3 і 3.4, можна побачити, що більша частина енергетичного інтервалу покрита горизонтальними лініями. Ці лінії є широкими енергетичними інтервалами, де частинки блукають, і які з'являються внаслідок перекриття островів показаних на Рис. 3.3 і 3.4.

Висновки до Розділу 3

Існування альфвенових власних мод в тороїдальній плазмі свідчить про наявність потоку енергії поперек магнітного поля, який відповідає за радіальну структуру моди. Такий потік здається несумісним з властивостями класичних альфвенових хвиль, які поширюються строго вздовж магнітного поля і не призводять до стиснення плазми ($\nabla \cdot \xi_{\perp} = 0$). В цьому розділі показано, що у власних модах $\nabla \cdot \xi_{\perp} \neq 0$. Це означає, що чисті альфвенові хвилі не існують в реалістичній плазмі, яка обмежена в радіальному напрямку. Замість цього існує суміш альфвенових хвиль і швидких магнітозвукових хвиль. Було показано, що в рамках ідеальної МГД поперечний потік енергії біжучих хвиль, які складають моду є $|S^t| \propto (\nabla \cdot \xi_{\perp})^2$; у випадку альфвенової моди, це означає, що $|S^t| \propto |\omega^2 - k_{\parallel}^2 v_A^2|$.

Зазвичай при дослідженні альфвенових власних мод використовуються редуковані рівняння альфвенових хвиль, отримані в припущенні, що $\tilde{B} \approx 0$. Оскільки густина поперечного потоку енергії дорівнює нулю, коли $\tilde{B}_{\parallel} = 0$, виникає удаваний парадокс, бо з цих редукованих рівнянь випливає ненульовий енергетичний потік. Ми розв'язали цей парадокс, показавши, що величину $\tilde{B}_{\parallel} \neq 0$ можна відтворити з розв'язків рівнянь, отриманих для $\tilde{B} \approx 0$.

З практичної точки зору важливо знати групову швидкість в радіальному напрямку (v_g). Вона залежить від групової швидкості біжучих хвиль (v_g^t), які складають моду. Проте, $v_g \neq 0$ і поперечне перенесення енергії власними модами мають місце лише за наявності локальних джерел та стоків, які порушують баланс біжучих мод, що рухаються назовні і всередину плазми. Іншими словами, $v_g \neq 0$, коли області збудження нестійкості не збігаються з областями, де мода загасає. Можна очікувати, що в такому випадку радіальна структура моди зазнаватиме впливу. Зроблені оцінки показують, що це може мати місце при реалістичних значеннях γ/ω .

Пораховано радіальні групові швидкості (v_g^t) біжучих хвиль, що утворюють GAE-моди та TAE-моди. Вони, як і очікувалось, є набагато меншими за v_A (на відміну від v_g^t швидких магнітозвукових мод). Проте, ці швидкості все ще є значними.

Отримано аналітичний вираз для ширини островів, створених у фазовому просторі швидкого йона сайдбенд-резонансами з альфвеновими власними модами. Це дає змогу оцінити ширину інтервалу енергій швидких йонів, у якому множинні альфвенові моди здатні створити стохастичну зону, і, отже, частку енергії, яку вони можуть відібрати у цих йонів. Зокрема, виявляється, що порядку 10 GAE-мод (така кількість спектральних ліній нестійкостей спостерігалась у експериментах [30]) достатньо, щоб відібрати половину енергії швидких йонів у NSTX. Отже, наші оцінки підтверджують результати роботи [36].

Запропоновано та випробувано новий метод знаходження розміру зон перемішування фазового простору частинок (резонансних островів та стохастичних зон) полем кількох хвиль. Метод полягає у відслідковуванні зміщень, які зазнають частинки при одночасному адіабатичному ввімкненні та вимкненні хвиль. Цей метод можна застосовувати для аналізу відбирання енергії групами мод з різними частотами, тоді як карти Пуанкаре – лише тоді, коли частоти мод є однаковими або їх відношення є раціональним числом із малим знаменником. Числові експерименти показали, що результати обчислень адіабітичним методом і методом карт Пуанкаре добре узгоджуються між собою і з аналітичними оцінками в тих випадках, коли таке порівняння є можливим.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [37, 40].

РОЗДІЛ 4

ПОКРАЩЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАЗМИ ПРИ ДОЦЕНТРОВОМУ КАНАЛЮВАННІ ЕНЕРГІЇ АЛЬФА-ЧАСТИНОК У ТОКАМАКУ JET

Нагрівання плазми часто супроводжується погіршенням часу утримання енергії. Проте, здається, що в DT (дейтерій-третієвих) експериментах на токамаку JET під час кампанії Дейтерій-Третієвих Експериментів (DTE1), див. [99—101] загальний час утримання був не меншим, а трохи вищим при максимальній термоядерній потужності.

Окрім того, ті ж самі експерименти показали, що температура йонів в центральній області плазми в DT розрядах була вищою, ніж в дейтерієвих розрядах, де використовувалось йонно-циклотронне резонансне нагрівання (ICRH) з потужністю, рівною потужності альфа-частинок (продуктів синтезу) в DT розрядах, див. Табл. 4.1. Цей факт вказує на наявність деякого механізму аномального нагрівання, оскільки під час гальмування 3.5 MeV альфа-частинок в результаті кулонівських зіткнень нагрівались переважно електрони.

Покращення утримання плазми завдяки термоядерним реакціям матиме практичне значення в майбутніх DT експериментах на JET [102] та для ITER. Сценарії з $T_i > T_e$ (T_i та T_e – це йонна температура та електронна температура, відповідно) також можуть бути важливими, оскільки вони забезпечують максимальну термоядерну реактивність при заданій густині плазми та β (відношення тиску плазми до тиску магнітного поля).

В Розділі 4 буде викладено результати роботи [41], метою якої було з'ясувати, чи може просторове каналювання енергії та імпульсу швидкий йонів покращити параметри плазми, зокрема, пояснити згадані експерименти, що спостерігались на токамаку JET.

Таблиця 4.1

Параметри плазми в дейтерієвих та дейтерій-трیتیєвих розрядах в момент часу, коли температури йонів та електронів були максимальними (перед початком колапсу пилчастих коливань), див.[99, 100]

Розряд	Нагрівання	T_{i0}, e	T_{e0}, e	$T_{i0} - T_{e0}$	n_{e0}, m^{-3}	$t, = c$
#41069 дейтерій	10MBт NBI	13.3	9.9	3.4	3.8×10^{19}	53.5
#41067 дейтерій	10MBт NBI 0.9MBт ICRH	14.5	10.4	4.1	3.6×10^{19}	53.5
#41068 дейтерій	10MBт NBI 2.0MBт ICRH	14.5	10.3	4.2	3.6×10^{19}	53.5
#42856 дейтерій (50%) + тритій (50%)	10MBт NBI 1.34MBт P_α	16.5	11.5	5.0	3.9×10^{19}	54.0
#42847 дейтерій (25%) + тритій (75%)	10MBт NBI 1.4MBт P_α	17.5	12.0	5.5	4.1×10^{19}	54.0

4.1 Доцентрове каналювання енергії альфа-частинок швидкими магнітозвукowymi модами: основна ідея

Згідно з [36], просторове каналювання може бути поясненням експерименту на сферичному торі NSTX, де значне підвищення потужності (в три рази) інжекції пучка нейтральних атомів вело до розширення профілю температури, а не до зростання температури в центрі плазми [30]. В роботі [36] було зроблено припущення, що швидкі йони, які знаходяться в центральній області (при $r \sim r_f$, де r_f – це радіус центральної області плазми, $r_f \ll a$, a – це радіус плазми) були відповідальні за збудження альфвенових власних мод, які затухали на периферії плазми (при $r \sim r_{damp}$, де $r_{damp} > r_f$). Це пояснювало негативний наслідок просторового каналювання на нагрівання плазми.

Вплив просторового каналювання був би позитивним якби моди загасали в області поблизу магнітної осі, тоді як нестійкість збуджувалась на більших радіусах ($r \sim r_{damp} \ll a$ і $r_{damp} < r_f \lesssim a$). Розділ 4 присвячений просторовому каналюванню направленому всередину плазми. В ньому буде розглянуто, чи може швидка магнітозвукова мода (Fast Magnetoacoustic mode (FMM)), збуджена альфа-частинками, що утворились в результаті термоядерної реакції, викликати покращення утримання плазми внаслідок

передачі термоядерної енергії в центральну область плазми (поблизу магнітної осі). Схема доцентрового каналювання енергії показана на Рис. 4.1

4.1.1 Резонанси між швидкими магнітозвуковимим модами та частиками

Швидкі магнітозвукові моди (FMM) збуджувались в багатьох експериментах на токамаках. Здається, FMM нестійкості відповідали за надтеплове йонно-циклотронне випромінювання (Ion Cyclotron Emission (ICE)), що спостерігалось на JET [103], TFTR [104], JT-60 [105], LHD [106], DIII-D [107], ASDEX Upgrade [108] та інших пристроях.

В підготовчих тритієвих експериментах (Preliminary Tritium Experiment (PTE)) спектр потужності йонно-циклотронної емісії мав гострі піки при частотах $\omega = l\omega_{B\alpha}^{min}$, з $l < 7$; при вищих частотах, $\omega > 7\omega_{B\alpha}$, спектр був неперервним, 98% випромінюваної потужності пов'язувалось з цією частиною спектру [109]. Тут і нижче індекс “ α ” позначає альфа-частинки, індекс “min” означає, що величина береться в точці поблизу зовнішнього обводу тора, де магнітне поле (B) є мінімальним і, де, ймовірно, знаходилось джерело спостережуваного ICE, і l – ціле число. ICE, яке пов'язане з енергійними йонами і виникає під час ICRH, також спостерігалось на JET [110, 111].

Теоретики пояснюють ICE, що спостерігалось в більшості експериментів, резонансним збудженням FMM енергійними йонами, див. [112—116] і огляд [6]. До розгляду беруться швидкі FMM-нестійкості (з інкрементом нестійкості, що перевищує обернений баунс/пролітний час енергійних йонів, $\gamma > (\tau_{b\alpha})^{-1}$) і повільні нестійкості з $\gamma < (\tau_{b\alpha})^{-1}$. У всіх ICE-теоріях за нестійкості відповідальний циклотронний резонанс. Під час швидких нестійкостей мають місце лише локальні резонанси, тоді як під час повільних нестійкостей присутні як локальні, так і глобальні резонанси (резонанси, що містять баунс-усереднені величини).

Нижче ми розглянемо локальні резонанси між FMM і частинками (альфа-частинками, йонами та електронами основної плазми).

Умова локального йонного-циклотронного резонансу:

$$\omega - l\omega_B(x) - \omega_D(r, \vartheta) = k_{\parallel}(r)v_{\parallel}, \quad (4.1)$$

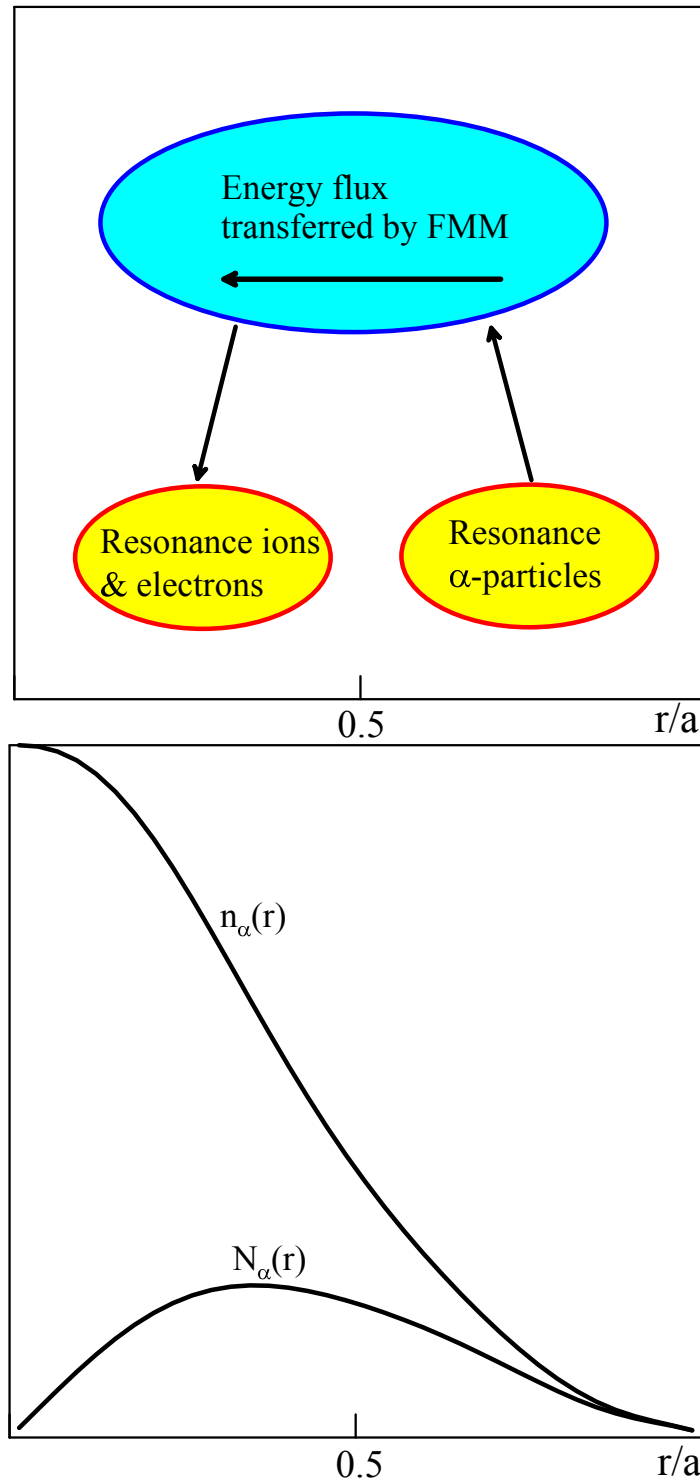


Рис. 4.1 Рисунок показує просторове каналування енергії альфа-частинок, яке направлене всередину плазми: рисунок справа – радіальний розподіл густини альфа-частинок і кількість альфа-частинок на магнітній поверхні ($N_\alpha(r) = r n_\alpha(r)$); рисунок зліва – енергія, яка передається від резонансної альфа-частинки, розташованої на периферії, йонам та електронам основної плазми через FMM. Стрілочки вказують напрямки енергетичних потоків

де ω – частота моди, $\omega_B = \bar{\omega}_B(1 - x/R)$, $\bar{\omega}_B = \omega_B(r = 0)$, R – це великий радіус тора, $x = r \cos \vartheta$, ω_D – тороїдальна дрейфова швидкість.

В області близькій до зовнішнього обводу тора (де знаходиться джерело ICE) інкремент FMM нестійкості є максимальним, коли $k_{\parallel} v_{\parallel\alpha} < \omega_{D\alpha}$ [114, 115]. Нестійкість збуджується анізотропією швидкості функції розподілу альфа-частинок, яка виникає через велику ширину орбіт альфа-частинок. Ми хочемо з'ясувати, чи може FMM з $\omega > \omega_{B\alpha}$ передати енергію альфа-частинок йонам основної плазми, що знаходяться поблизу магнітної осі.

Припускаємо, що множинні високочастотні FMM займають значну частину поперечного перерізу плазми, а не локалізовані на периферії плазми, де знаходиться джерело ICE. Нещодавні вимірювання FMM з $\omega \lesssim \omega_{Bi}$ в сферичному торі NSTX [31] і числові розрахунки [117] підтримують це припущення [118]. Проте, досі не було жодних експериментальних вимірювань радіальної структури високочастотних FMM на JET. Можна сподіватись, майбутні експерименти на JET дадуть відповідь про структуру FMM з частотами вищими за 20 МГц (гірчастота альфа-частинок і дейтронів при $B = 3.5$ Тл складає 26.7 МГц).

Різне розташування мод з різноманітними модовими номерами так само, як і скінченна ширина їх резонансів з енергійними йонами, веде до появи неперервного спектру FMM-нестійкостей, хоча номери мод є дискретними. Як уже було сказано, такий тип частотного спектру містив майже всю загальну інтегральну потужність ICE випромінювання в JET PTE [109]. Таким чином, не будемо обмежуватись розглядом FMM з частотами $l\omega_{Bi}^{min}$. Замість цього, аналізуючи резонанси, вважатимемо, що

$$l\omega_{B\alpha}^{min} \leq \omega \leq l\bar{\omega}_{B\alpha} \quad (\bar{\omega}_{B\alpha} = \omega_{B\alpha}(r = 0)) \quad (4.2)$$

і братимемо

$$\omega = l_{\alpha}\bar{\omega}_{B\alpha}(1 - r_1/R), \quad (4.3)$$

де r_1 – певний радіус, $0 \leq r_1 \leq a$.

(а) **Випадок** $k_{\parallel\alpha} v_{\parallel\alpha} \gg \omega_{D\alpha}$. Застосовуючи рівняння резонансу (4.1) до альфа-частинок і йонів плазми, отримуємо:

$$\frac{v_{\parallel i}^{res}}{v_{\parallel\alpha}} = \frac{k_{\parallel\alpha}}{k_{\parallel i}} \frac{\omega - l_i \bar{\omega}_{Bi} + l_i \bar{\omega}_{Bi} x_i / R - \omega_{Di}}{\omega - l_\alpha \bar{\omega}_{B\alpha} + l_\alpha \bar{\omega}_{B\alpha} x_\alpha / R - \omega_{D\alpha}}, \quad (4.4)$$

де (r_i, x_i) – це точка, де йон плазми зі швидкістю $v_{\parallel i}^{res}$ перебуває в резонансі з хвилею. Розглянемо випадок $k_{\parallel\alpha} v_{\parallel\alpha} \gg \omega_{D\alpha}$ для альфа-частинок, і, для того, щоб знехтувати дрейфовими членами, таке ж припущення зробимо для теплових йонів.

Спочатку припускаємо, що $l_i = l_\alpha$. В цьому випадку найбільші члени ($\sim l\omega_B$) в рівнянні (4.4) для дейтронів компенсують один одного (тому що, $\bar{\omega}_{Bi} = \bar{\omega}_{B\alpha}$). Завдяки цьому, рівняння (4.4) спрощується до

$$\frac{v_{\parallel i}^{res}}{v_{\parallel\alpha}} = \frac{k_{\parallel\alpha} \tilde{r}_i}{k_{\parallel i} \tilde{r}_\alpha}, \quad (4.5)$$

де $\tilde{r}_\alpha \equiv x_\alpha - r_1 \neq 0$, $\tilde{r}_i \equiv x_i - r_1 \neq 0$. Як можна побачити $v_{\parallel i}^{res} \ll v_{\parallel\alpha}$, коли $\tilde{r}_i \ll \tilde{r}_\alpha$, поки $k_{\parallel\alpha}/k_{\parallel i}$ є великим. Таким чином, просте співвідношення, в принципі, показує, що одна й та сама FMM може одночасно бути в резонансі і з високоенергійними альфа-частинками на периферії плазми і з дейтронами поблизу магнітної осі.

Проте, необхідний більш детальний аналіз, щоб побачити чи $v_{\parallel i}^{res}$ задовольняє певним вимогам. Річ в тім, що SC з периферії до центру плазми може бути ефективним, коли задовольняються дві умови: (і) затухання хвилі на периферії плазми має бути нехтовним, (ii) в центрі плазми воно має бути значним, але не дуже великим, щоб уникнути появи FMM-нестійкості (інкремент нестійкості $\gamma \equiv \gamma_\alpha - \gamma_d \geq 0$, де γ_α і γ_d – це інкремент збудження нестійкості альфа-частинками, та декремент загасання нестійкості, відповідно). Це означає, що відношення $v_{\parallel i}^{res}/v_{Ti}$ ($v_{Ti} = \sqrt{2T_i/M_i}$ – тепла швидкість йонів) має бути дуже великим на периферії, але помірно великим в центрі плазми.

Для того, щоб знайти $v_{\parallel i}^{res}$, скористаємось рівнянням резонансу для йонів:

$$\omega - l_i \bar{\omega}_{Bi} \left(1 - \frac{x_i}{R}\right) = k_{\parallel i} v_{\parallel i}^{res}, \quad (4.6)$$

де номер циклотронної гармоніки l_i може відрізнитись від l_α . Беремо $l_i = l_\alpha - j$, з $j = 0, \pm 1, \dots$, $|j| \ll l_\alpha$. Виключаючи ω з (4.6) та застосовуючи (4.3), для дейтронів отримуємо :

$$v_{\parallel i}^{res} = \frac{l_\alpha \bar{\omega}_{Bi}}{k_{\parallel i} R} \left(\tilde{r}_i + \frac{j}{l_\alpha} R \right), \quad (4.7)$$

де $k_{\parallel i}$ має бути визначено. Можна побачити, що резонансна швидкість тритонів набагато більша ніж та, що задається виразом (4.7) (оскільки основні члени в чисельнику рівняння (4.4) для тритонів не компенсують один одного, $\bar{\omega}_{B\alpha} \neq \bar{\omega}_{Bi}$).

Поздовжнє хвильове число для нестійких хвиль визначається резонансною умовою для альфа-частинок. Воно записується як:

$$k_{\parallel \alpha} = \frac{l \bar{\omega}_{B\alpha} \tilde{r}_\alpha}{v_{\parallel \alpha} R}. \quad (4.8)$$

Знаючи $k_{\parallel \alpha}$ і використовуючи наступне загальне співвідношення:

$$\frac{k_{\parallel i}}{k_{\parallel \alpha}} = 1 + \frac{m(l_i - l_\alpha)}{k_{\parallel \alpha} R} \quad (4.9)$$

можемо порахувати $k_{\parallel i}$. Зрозуміло, що $k_{\parallel \alpha} \neq k_{\parallel i}$ через наявність магнітного ширу. Проте, коли другий член в (4.9) є малим, $k_{\parallel \alpha} \approx k_{\parallel i}$. Це випадок

$$\Delta l \equiv |l_i - l_\alpha| \ll \frac{\tilde{r}_\alpha}{r_*} \frac{v_{A*}}{|v_{\parallel \alpha}|} \frac{k_*}{|k_g|}, \quad (4.10)$$

де r_* визначається співвідношенням $\omega = k_* v_{A*}$, і $|k_g| = |m|/r_* < k_*$, $|m| = (r_* \omega / v_{A*}) (|k_g| / k_*)$. Другий член в (4.9), якщо він не малий, значно збільшує відношення $k_{\parallel i} / k_{\parallel \alpha}$ чи зменшує його, в залежності від знаку m .

Оцінка декременту затухання на йонах показує, що резонансна швидкість для йонів на JET має лежати в інтервалі $v_{\parallel i}^{res} / v_{Ti} = 1.5 - 2$. Хвилі з нижчими $v_{\parallel i}^{res} / v_{Ti}$ не будуть збуджуватись; хвилі з більшими швидкостями не будуть взаємодіяти з йонами.

Вимога до швидкості $v_{\parallel i}^{res}/v_{Ti} = 1.5 - 2$ не суперечить рівнянню (4.7) з $r_i \ll r_\alpha$. Щоб це побачити, запишемо (4.7) у формі:

$$\frac{x_\alpha}{a} = \frac{r_1}{a} + w \left(\frac{x_i}{a} - \frac{r_1}{a} - \frac{jA}{l} \right), \quad (4.11)$$

де $w = \chi_\alpha(v_\alpha/v_{Ti})(v_{Ti}/v_{\parallel i}^{res})(k_{\parallel\alpha}/k_{\parallel i})$, $\chi = v_{\parallel}/v$, $w > 0$ чи $w < 0$, $x_i = r_i \cos \vartheta_i$ і $x_\alpha = r_\alpha \cos \vartheta_\alpha$. Наприклад, коли $T_{i0} \approx 20$ кеВ, $|\chi_\alpha| = 0.5$, $|v_{\parallel i}^{res}|/v_{Ti} = 1.5$, $k_{\parallel i} = k_{\parallel\alpha}$, $j = 0$ отримуємо $|w| = 3.3$, $r_\alpha : r_1 : r_i = 5.3 : 2 : 1$ для $w = -3.3$. Більш того, завдяки $j \neq 0$ резонансу, існує розв'язок з $x_i \ll r_1 \approx x_\alpha$ при будь-якому відношенні $k_{\parallel i}/k_{\parallel\alpha}$. Умова для цього – $r_1/a \approx jA/l_\alpha$, де $A=R/a$ – аспектне відношення тора. Наприклад, коли $A = 3.3$, $j = 1$, ця умова дає $r_1/a = 0.82$ для $l_\alpha = 4$ ($l_i = 3$) та $r_1/a = 0.66$ для $l_\alpha = 5$ ($l_i = 4$).

Просторове каналювання передає енергію альфа-частинок не тільки йонам, але й електронам. Умова слабого затухання на електронах:

$$\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2(r)v_{Te}^2} = \left(\frac{Rv_{\parallel\alpha}}{\tilde{r}_\alpha v_{Te}(r)} \frac{k_{\parallel\alpha}}{k_{\parallel}(r)} \right)^2 \gg 1, \quad (4.12)$$

де $v_{Te} = \sqrt{2T_e/M_e}$ – теплова швидкість електронів. Це можна записати як

$$\frac{r_\alpha}{a} < \frac{A|\chi_\alpha|v_\alpha}{(1 - r_1/r_\alpha)v_{Te}} \left| \frac{k_{\parallel\alpha}}{k_{\parallel}(r)} \right|. \quad (4.13)$$

Для параметрів, використаних вище ($A = 3.3$, $\chi_\alpha = 0.5$, $r_\alpha/r_1 = 2.65$) і $T_e(0) = 10$ кеВ, рівняння (4.12) редукується до $r_\alpha/a < 0.6k_{\parallel\alpha}/k_{\parallel}(r)$. Це означає, що тільки хвилі з $k_{\parallel\alpha}/k_{\parallel}(r) > 1$, з певним знаком m , слабо загасають, коли $r_\alpha/a > 0.6$. З іншого боку, рівняння (4.13) легко задовольнити при заданому відношенні $k_{\parallel\alpha}/k_{\parallel i}$ для $r_1 \approx r_\alpha$, тобто, коли частота моди близька до гармоніки йонно-циклотронної частоти в області, де знаходиться джерело нестійкості. Проте, $(r_1 - r_\alpha)$ не може бути довільно малою, оскільки $k_{\parallel\alpha} \propto (r_1 - r_\alpha)$, тоді як ми розглядаємо випадок нехтовного дрейфу, $k_{\parallel\alpha}v_{\parallel\alpha} \gg \omega_{D\alpha}$. З цієї нерівності випливає:

$$\frac{r_\alpha - r_1}{r_\alpha} \gg \frac{k_{\vartheta\alpha}}{k_*} \frac{v_{\parallel\alpha}}{v_{A*}} \frac{\rho_\alpha}{r_\alpha}. \quad (4.14)$$

Щоб отримати це рівняння, ми припустили, що $\omega = k_* v_{A*}$ і використали рівняння (4.8).

(б) Випадок $k_{\parallel\alpha} v_{\parallel\alpha} < \omega_{D\alpha}$. Нехтуючи позовжнім хвильовим числом в резонансі між альфа-частинками і хвилями, запишемо наступне резонансне рівняння:

$$\omega - l_\alpha \bar{\omega}_{B\alpha} \left(1 - \frac{x_\alpha}{R}\right) = \omega_{D\alpha}(r, \vartheta). \quad (4.15)$$

Відношення $\omega_{D\alpha}/l_\alpha \bar{\omega}_{B\alpha}$ є малим. Таким чином, із (4.3) і (4.15) випливає, що $r_1 \approx x_\alpha$ (тобто ω близьке до $l_\alpha \omega_{B\alpha}^{min}$ for $\vartheta \ll 1$), коли $r_\alpha/a \sim 1$.

Для теплових йонів використовуємо рівняння (4.6). Виключаючи ω з (4.6) і (4.15), отримуємо:

$$\frac{v_{\parallel i}^{res}}{v_{Ti}} = \frac{l_\alpha \bar{\omega}_{Bi}}{k_{\parallel i} v_{Ti}} \left[\frac{x_i - x_\alpha}{R} + \frac{j}{l_\alpha} \left(1 - \frac{x_i}{R}\right) + \frac{\omega_{D\alpha}}{l_\alpha \bar{\omega}_{Bi}} \right]. \quad (4.16)$$

Тут $k_{\parallel i}$ визначається рівнянням (4.9), звідки випливає, що $k_{\parallel i} = m\Delta l/R$ у розглянутому випадку дуже малих $k_{\parallel\alpha}$. Тоді множник перед дужками є дуже великим, $l_\alpha \bar{\omega}_{Bi}/(k_{\parallel i} v_{Ti}) \sim R v_{A*}/(r v_{Ti} \Delta l) \gg 1$. Таким чином, загасання на йонах є дуже малим, поки головні члени в дужках не скомпенсують один одного, тобто,

$$\frac{x_\alpha}{a} \approx \frac{x_i}{a} + A \frac{j}{l_\alpha}, \quad (4.17)$$

в цьому випадку

$$\frac{v_{\parallel i}^{res}}{v_{Ti}} = \frac{\omega_{D\alpha}}{k_{\parallel i} v_{Ti}}. \quad (4.18)$$

Рівняння (4.17) показує, що $x_\alpha \gg x_i$, коли $l_\alpha \ll jR/r_i$. Зокрема, x_α/a лежить в діапазоні 0.5 – 0.9, коли $l_\alpha = 4 - 9$ ($l_i = 3 - 8$) $A = 3.3$ $x_i/a = 0.1$, $j = 1$.

Йонна резонансна швидкість, що задана рівнянням (4.18) може бути записана як

$$\frac{v_{\parallel i}^{res}}{v_{Ti}} = \frac{\rho_\alpha}{r_\alpha} \frac{v_\alpha}{v_{Ti}} \frac{1 + \chi_\alpha^2}{2\Delta l}. \quad (4.19)$$

Покладаючи $\rho_\alpha/r_\alpha = 0.1$, $v_\alpha/v_{Ti} = 10$, $\chi_\alpha = 1/2$, і $2\Delta l = 1$, отримуємо $v_{\parallel i}^{res}/v_{Ti} = 1.25$. Звідси випливає, що $\gamma_i/\omega = 10^{-2} = 10^{-4}$ для моди з $l_\alpha = l_i + 1 = 4 - 5$. Отже, загасання на йонах може бути сприятливим для просторового каналювання до області поблизу магнітної осі.

Умова слабого загасання на електронах $\omega > k_{\parallel}(r)v_{Te}$, це

$$\frac{Rv_{A*}k_*}{r_*v_{Te}(r)\Delta l k_g} > 1. \quad (4.20)$$

Нерівність в (4.20) добре задовольняється біля краю плазми завдяки низькій температурі електронів. Вона також добре задовольняється в центральній області плазми. Для того, щоб це побачити, візьмемо $\Delta l = 0.5$, $R = 300$ см, припустимо, що $r_* = 50$ см і $v_{Te}/v_{A*} = 6$ (наприклад, $T_e = 10$ кеВ і $v_{A*} = 10^9$ см с⁻¹), і отримаємо $\omega/|k_{\parallel}|v_{Te} = 2k_*/|k_g| \gg 1$. В цьому випадку роль загасання на електронах є малою.

4.1.2 Просторове каналювання енергії швидкими магнітозвуковими модами

Необхідною умовою для ефективного просторового каналювання енергії швидких йонів є отримання і перенесення хвилею в радіальному напрямку значної частки енергії швидких йонів. Розглянемо, за яких умов це має місце.

Густина потужності, яку отримують хвилі в результаті нестійкості, що збуджується α -частинками визначається як $P_{\alpha}^{(w)} = 2\gamma_{\alpha}W$. Можна показати, що $W = \tilde{B}^2/(4\pi)$ для FMM з $\omega^2 \gg \omega_{Bi}^2$, коли поздовжнє хвильове число досить мале, $k_{\parallel}^2/k_{\perp}^2 \ll \omega_{Bi}^2/\omega^2$. Враховуючи це і припускаючи, що $\omega \approx l\omega_{Bi}$, зручно записати $P_{\alpha}^{(w)}$ в такому вигляді:

$$P_{\alpha}^{(w)} = 2l\omega_{B\alpha} \frac{\gamma_{\alpha}}{\omega} \frac{B^2}{4\pi} \left(\frac{\tilde{B}}{B} \right)^2. \quad (4.21)$$

Наприклад, для $B = 3.5$ Тл, $l = 5$ (що відповідає $f_w = 133$ МГц, коли $\omega_{B\alpha}$ – це гірчастота альфа-частинки), $\gamma_{\alpha}/\omega = 10^{-3}$, отримуємо $P_{\alpha}^{(w)} = 1.63 \times 10^7 (\tilde{B}/B)^2$ Вт·см⁻³. З іншого боку, потужність термоядерного синтезу – це $P_{\alpha}^{DT} = \mathcal{E}_{\alpha} n_D n_T \langle \sigma v \rangle$, де $\mathcal{E}_{\alpha} = 3.5$ МеВ. Для $T_i = 10$ кеВ (при $r/a \sim 1/2$) і $n_i = n_D + n_T = 4 \times 10^{13}$ см⁻³, $n_D = n_T$ ми маємо $P_{\alpha}^{DT} = 2.5 \times 10^{-2}$ Вт·см⁻³. З цих співвідношень випливає, що досить малі амплітуди хвиль є достатніми, щоб хвиля могла відібрати в альфа-частинок стільки густини потужності скільки виробляється при термоядерному синтезі. У розглянутому прикладі, $P_{\alpha}^{(w)} = P_{\alpha}^{DT}$ коли $\tilde{B}/B = 3.9 \times 10^{-5}$. Оскільки, в

дійсності, тільки частина енергії альфа-частинок може бути передана хвилям, амплітуди, які для цього потрібні, є значно меншими.

Зрозуміло, що вся потужність, яку отримують хвилі, складає

$$P_{\alpha}^{(w)} = \int_{V_{ins}} d^3x P_{\alpha}^w,$$

де інтеграл береться по області локалізації нестійкості, V_{ins} – об’єм цієї області.

Для необхідного просторового каналювання FMM має забезпечувати передачу енергії з периферії плазми, де розташована нестійкість, до центральної області поблизу магнітної осі.

4.1.3 Кількість альфа-частинок з високими енергіями на периферії плазми

Для того, щоб просторове каналювання забезпечувало передачу енергії альфа-частинок з периферії плазми в центральну область, на периферії плазми має бути значна кількість альфа-частинок з енергіями близькими до 3.5 MeV. Отже, нам необхідно оцінити кількість альфа-частинок в цій області. По-перше, розглянемо радіальну залежність рівня продукування альфа-частинок завдяки термоядерним реакціям та реакціям плазма-пучок, $S_{\alpha}(r)$. На Рис. 4.2 показані величини $S_{\alpha}(r)$ і функція $rS_{\alpha}(r)$ для розрядів #42856 та #42847. Функція $rS_{\alpha}(r)$ дає змогу побачити безпосередньо рівень продукування 3.5 MeV альфа-частинок на кожній магнітній поверхні. Максимум $rS_{\alpha}(r)$ знаходиться близько до магнітної поверхні $r/a \approx 0.3$ в розряді #42856 і $r/a \approx 0.4$ в розряді #42847, більшість альфа-частинок народжуються в області $0.1 < r/a < 0.6$. Отже, при $r/a > 1/2$ народжуються значна кількість альфа-частинок.

Для більш точного висновку необхідно обчислити функцію $F(r)$, що описує частку альфа-частинок з $\mathcal{E}_{\alpha} = 3.5$ MeV, які народились в області поза певним радіусом r . Ця функція наведена нижче

$$F^{(0)}(r) \equiv \frac{\int_r^a dr_0 r_0 S_{\alpha}(r_0)}{\int_0^a dr_0 r_0 S_{\alpha}(r_0)}, \quad (4.22)$$

де $r < a$, індекс “0” означає, що ніякі орбітальні ефекти не враховуються; підінтегральний вираз містить профіль народження альфа-частинки.

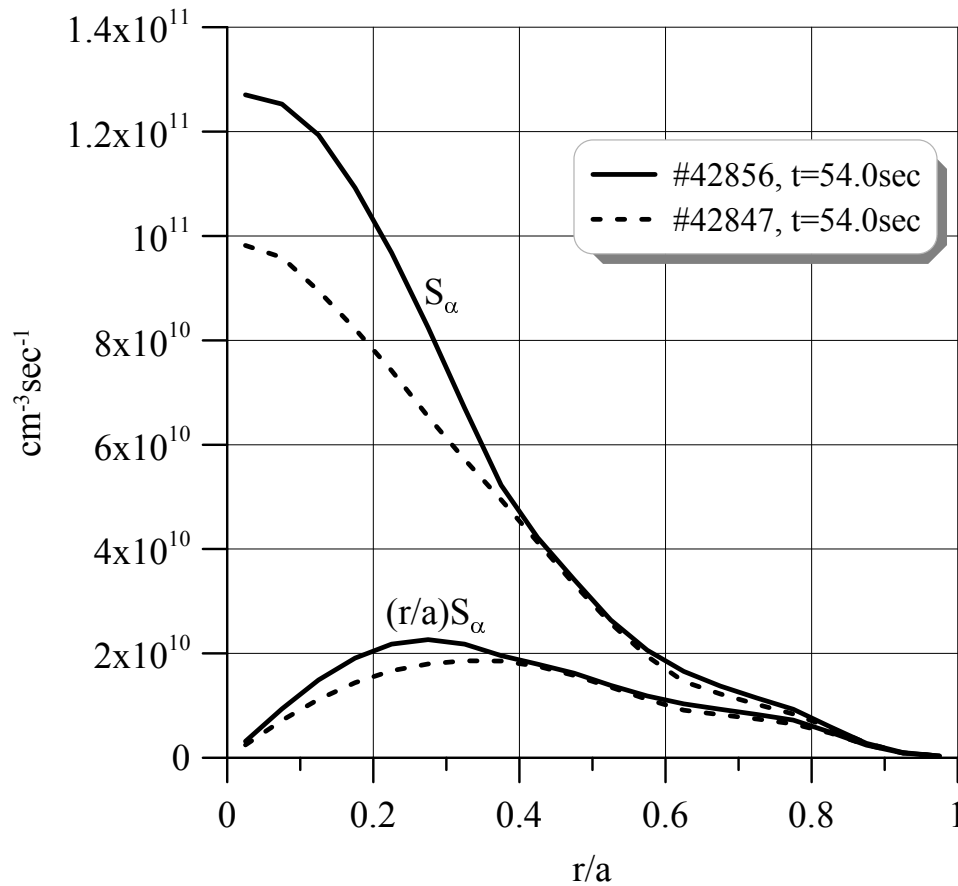


Рис. 4.2 Залежність рівня продукування альфа-частинок завдяки термоядерним реакціям $S_\alpha(r)$ від r та його розподіл по магнітним поверхням $S_\alpha(r)$, в розрядах #42847 та #42856 в токамаку JET

Обчисливши інтеграли в (4.22), отримуємо результат показаний на Рис. 4.3. З цього рисунка випливає, що приблизно 30% альфа-частинок народжуються ззовні магнітної поверхні $r/a \geq 0.5$.

Після народження альфа-частинки рухаються вздовж різних орбіт. Під час цього руху, вони відхиляються від магнітної поверхні всередину та назовні. Оскільки $S_\alpha(r)$ є монотонно спадною функцією, основним впливом орбітального руху на густину 3.5 MeV альфа-частинок є розширення їхнього радіального профілю. Це означає, що кількість альфа-частинок, що знаходяться на периферії, зростає, хоча деякі з них втрачаються на стінці. Ще одним фактором, який збільшує кількість 3.5 MeV альфа-частинок, що знаходяться на периферії, – це стохастична (беззіткненнева та слабкозіткненнева) дифузія [119, 120]. Нижче ми розглянемо розширення профілю врахувавши лише орбітальний рух.

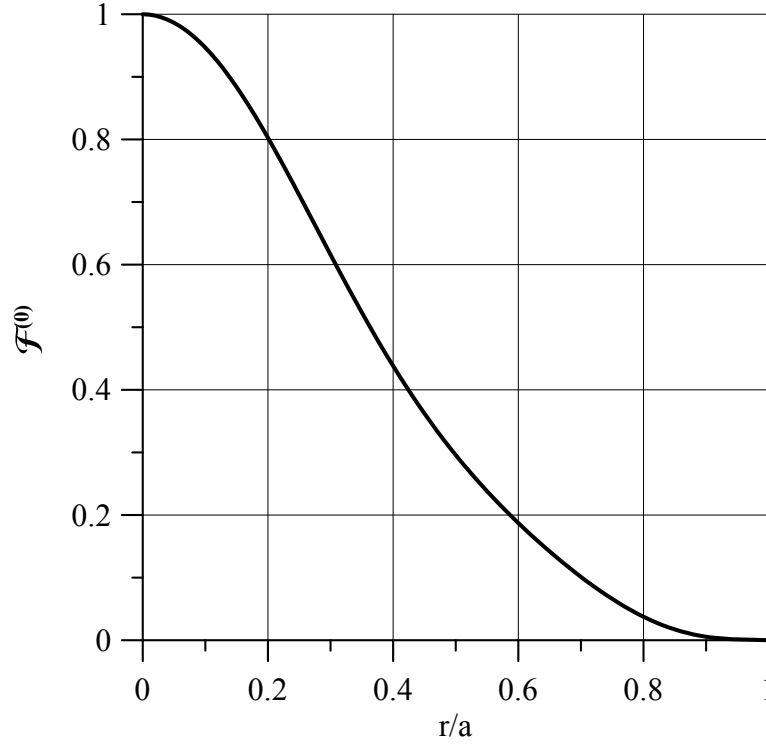


Рис. 4.3 Частка альфа-частинок з енергією народження ззовні певної магнітної поверхні з радіусом r в розряді #42856, що порахована без урахування ширини орбіти

Оскільки пролітний час альфа-частинки (τ_b) є набагато меншим за час гальмування (τ_s), ми можемо ввести баунс/пролітно-усереднену функцію розподілу популяції альфа-частинок з $\mathcal{E} \sim 3.5$ MeV:

$$F_\alpha = \frac{\Delta t}{4\pi v_\alpha^2} \delta(v - v_\alpha) \langle S_\alpha \rangle, \quad (4.23)$$

де $\langle S_\alpha \rangle = \oint dt S_\alpha[r(t)]/\tau_b$, Δt – це характерний час життя альфа-частинки з енергією $\mathcal{E}_\alpha$, $\tau_b \ll \Delta t \ll \tau_s$, $v_\alpha = \sqrt{2\mathcal{E}_\alpha/M_\alpha}$, інтеграл береться вздовж орбіти частинки, так що F_α визначається дрейфовими інтегралами руху. Зазвичай для опису ведучого центру частинки використовують канонічний кутовий імпульс (P_ϕ), енергію ($\mathcal{E}$), магнітний момент (μ_p), і напрямок поздовжнього руху пролітних частинок ($\sigma = \text{sgn } v_\parallel$). Для опису розподілу частинок, що утримуються, більш зручно використовувати інші інтеграли руху, а саме, максимальне радіальне зміщення під час орбітального руху (r_{max}) замість P_ϕ і пітч-кутовий параметр $\lambda = \mu_p \bar{B}/\mathcal{E}$. Зрозуміло, що захопленими є частинки, для яких $r_{max} < a$, а тороїдально захопленими є частинки з $b_{max}^{-1} < \lambda < b_{min}^{-1}$

($b \equiv B(r, \vartheta)/\bar{B}$, b_{max} і b_{min} – це максимум та мінімум b на орбіті), а пролітними є частинки з $0 \leq \lambda < b_{max}^{-1}$.

З цими інтегралами руху, ми можемо написати:

$$\langle S_\alpha \rangle = \left\{ \oint \frac{d\vartheta S_\alpha[r(\vartheta)]}{v_\parallel} \right\} \times \left\{ \oint \frac{d\vartheta}{v_\parallel} \right\}^{-1}, \quad (4.24)$$

$r(\vartheta) = r[r_{max}, \lambda, v_\alpha, \vartheta]$, $v_\parallel = \pm v \sqrt{1 - \lambda b(r, \vartheta)}$. Тут інтеграли беруться по всій області ϑ , $(0, 2\pi)$, для пролітних частинок, і між точками повороту для захоплених частинок (враховуючи, що знак $v_\parallel$ після проходження точок повороту змінюється).

В периферійній області, яка нас і цікавить, наближення вузьких орбіт ($\Delta \ll r$, де Δ – півширина орбіти) є виправданим. Відповідні умови запишуться наступним чином: $r > R(q\rho/\kappa_E R)^{2/3}$ (κ_E – це видовження плазми, $\rho = v_\alpha/\omega_{B\alpha}$), що для альфа-частинок на JET дає $r > 20$ см.

Більшість пролітних частинок мають $v_\parallel \approx const$. Завдяки цьому, ми можемо описати їх орбіти наступним чином:

$$r^{pas}(\vartheta) = r_{max} - \Delta_p + \sigma \Delta_p \cos \vartheta, \quad (4.25)$$

$\Delta_p = q(r_0)\rho\sqrt{1 - \lambda/\kappa_E}$, нижній індекс “p” позначає орбіти пролітних частинок. В цьому наближенні під час знаходження інтегралів в рівнянні (4.24) ми маємо покласти $b(r, \vartheta) = 1$ і $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.

Орбіти захоплених частинок задаються виразом

$$r_{1,2}^{tr}(\vartheta) = r_0 + \frac{q\rho}{\kappa_E \sqrt{\epsilon_0}} \left[-\sigma_0 \sqrt{\frac{1-\lambda}{\epsilon_0} + \lambda \cos \vartheta_0} \pm \sqrt{\frac{1-\lambda}{\epsilon_0} + \lambda \cos \vartheta} \right], \quad (4.26)$$

де $\epsilon = r/R$, індекс “0” позначає точку на орбіті, точки повороту частинок (ϑ_t) визначаються як

$$\cos \vartheta_t = (1 - \lambda^{-1})/\epsilon_0. \quad (4.27)$$

Під час обчислення інтегралів в (4.24), треба брати до розгляду обидві гілки, що задані (4.26). Далі зручно перейти до кута β , визначеного як

$\sin^2(\vartheta/2) = \kappa_p^2 \sin^2 \beta$, де $\kappa_p^2 = [0.5 + (\lambda^{-1} - 1)/(2\epsilon_0)] > 0$ – параметр захоплення частинки (для захоплених частинок $\kappa_p^2 < 1$, що означатиме $\lambda > (1 + \epsilon)^{-1}$), $\sin \beta_0 = \kappa_p^{-1} \sin(\vartheta_0/2)$. Тоді

$$r_{1,2}^{tr}(\beta) = r_{max} - \Delta_t + \sigma \Delta_t \cos \beta, \quad (4.28)$$

$\Delta_t = q(\bar{r})\rho(\kappa_p/\kappa_E)\sqrt{2\lambda/\bar{\epsilon}}$, $\bar{r} = r_{max} - \Delta_t$. В цих змінних

$$\begin{aligned} \langle S_\alpha \rangle^{tr} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1,2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta S_\alpha[r_j^{tr}(\beta)]}{\sqrt{1 - \kappa_p^2 \sin^2 \beta}} \right\} \\ \times \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \kappa_p^2 \sin^2 \beta}} \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

Якщо функцію, що описує джерело альфа-частинок, апроксимувати як

$$S_\alpha(r(\vartheta)) = S_m + S'_m(r - r_{max}), \quad (4.30)$$

$S_m \equiv S_\alpha(r_{max})$, $S'_m \equiv S'_\alpha(r_{max})$, де штрих означає радіальну похідну, для пролітних частинок ми отримаємо:

$$\langle S_\alpha \rangle(r_{max}) = S_m - S'_m \Delta_p. \quad (4.31)$$

Це ж рівняння є чинним для глибоко захоплених частинок (частинок з $\kappa_p \ll 1$). Рівняння (4.31) показує, що $\langle S_\alpha \rangle(r_{max} = a) \neq 0$ навіть коли джерело народження на краю плазми зникає, $S_m = 0$. З іншого боку, в приосьовій області ($r \lesssim R(q\rho/\kappa_E R)^{2/3}$ для $\lambda \sim 1$ та $r < 2q\rho$ для добре пролітних частинок) $\langle S_\alpha \rangle = 0$, оскільки немає частинок з меншим r_{max} . Це означає, що розподіл $\langle S_\alpha \rangle(r_{max})$ є зсунутим назовні відносно $S_\alpha(r)$, тим самим збільшуючи кількість альфа-частинок, які можуть взаємодіяти з хвилями на периферії плазми.

Для захоплених і пролітних частинок в розряді #42856 були зроблені числові розрахунки. Результати, отримані для коефіцієнту безпеки $q(r)$, що заданий кривою на Рис. 4.4, представлені на Рис. 4.5.

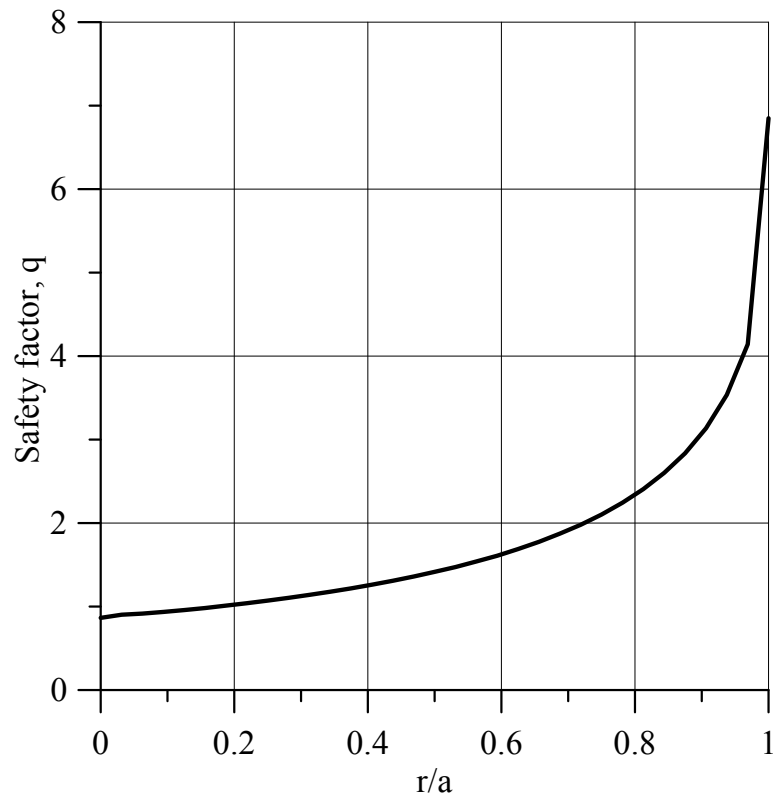


Рис. 4.4 Коефіцієнт безпеки в розряді #42856

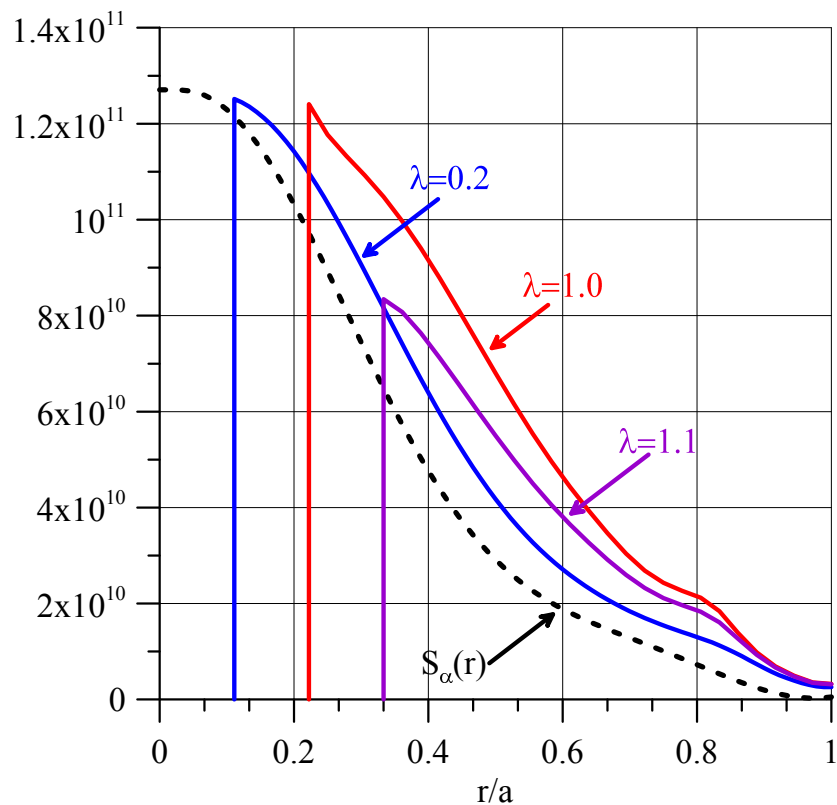


Рис. 4.5 Баунс/пролітно усереднена функція джерела $\langle S_\alpha \rangle(r_{max}, \lambda, \mathcal{E}_\alpha)$ в залежності від r для різних λ в розряді # 42856. Цей рисунок показує, що радіальний розподіл густини альфа-частинок з заданим r_{max} ($n_\alpha(r_{max}) \propto \langle S_\alpha \rangle(r_{max})$) є досить сильно зсунутим на зовні в порівнянні з профілем народження альфа-частинок, що показаний пунктирною лінією

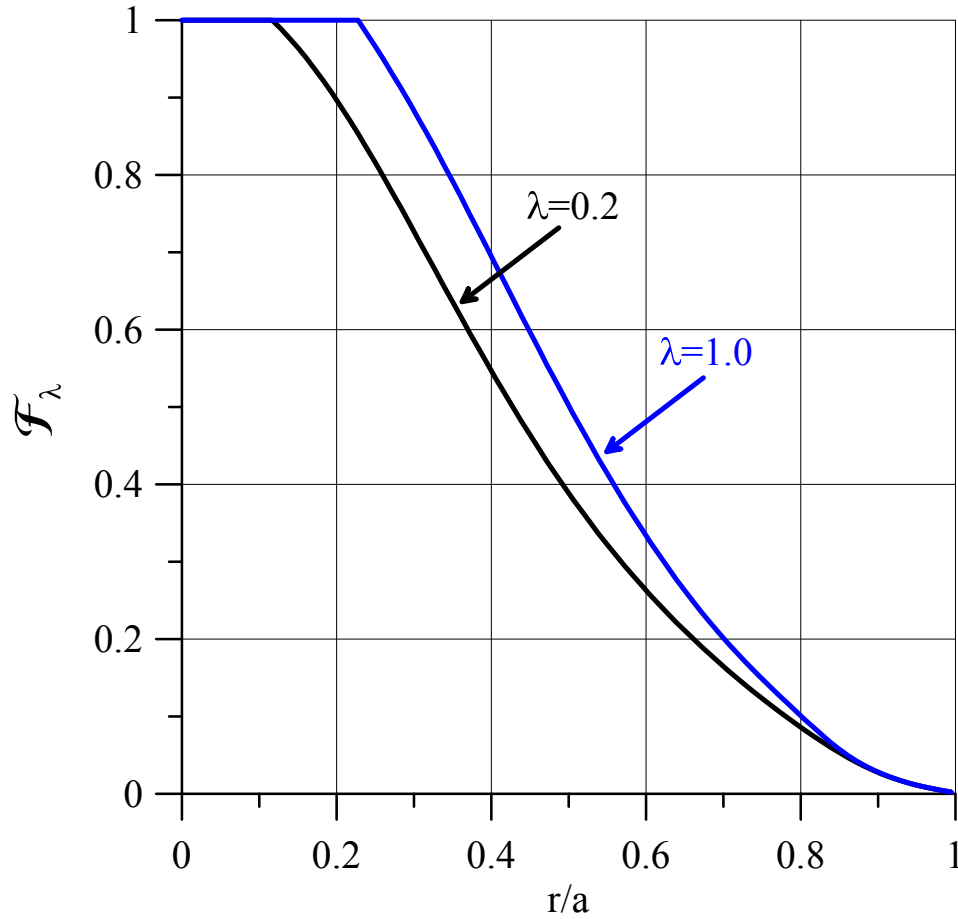


Рис. 4.6 Частка пролітних альфа-частинок ($\lambda = 0.2$, $\sigma = 1$ або $\sigma = -1$) і захоплених альфа-частинок ($\lambda = 1$), чий r_{max} знаходиться ззовні певного радіуса r в розряді # 42856

Частка 3.5 MeV альфа-частинок з заданим λ і r_{max} ззовні певного радіуса r описується за виразом

$$F_{\lambda}(r) \equiv \frac{\int_r^a dr_{max} r_{max} \langle S_{\alpha} \rangle(r_{max}, \lambda)}{\int_0^a dr_{max} r_{max} \langle S_{\alpha} \rangle(r_{max}, \lambda)} \quad (4.32)$$

і показана на Рис. 4.6. Як можна побачити, на периферії плазми F_{λ} перевищує $F^{(0)}$, що задане рівнянням (4.23). Цей ефект є значним навіть для пролітних частинок.

4.1.4 Загасання високочастотних швидких магнітозвукових хвиль

Дослідимо загасання швидких магнітозвукових хвиль на електронах та йонах, для якого і електрони, і теплові йони можна розглядати як холодні частинки. Метою цього розгляду є з'ясувати чи можуть частинки основної плазми призводити до швидкості затухання (dampingrate) порівняної за

величининою зі збудженням FMW, спричиненого альфа-частинками. Нас буде цікавити FMW, що задовольняє умовам:

$$\omega \approx l\omega_{Bi} \gg \omega_{Bi}, \quad (4.33)$$

$$(\omega - l\omega_{Bi})^2 \gg (k_{\parallel}v_{Ti})^2, \quad \omega^2 \gg (k_{\parallel}v_{Te})^2, \quad k_{\perp}\rho_i < 1, \quad (4.34)$$

де $\rho_i = v_{Ti}/\omega_{Bi}$.

Вважатимемо, що збурення електромагнітного поля пропорційне $\exp(-i\omega t + ik_x x + ik_z z)$, де вісь z направлена вздовж магнітного поля. Будемо виходимо з рівнянь Максвелла $\mathbf{B} = (c/\omega)\mathbf{k} \times \mathbf{E}$ і $\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -(\omega/c)\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}$, де $\boldsymbol{\epsilon} \equiv \epsilon_{ij}$ – це діелектричний тензор. Тоді, врахувавши рівняння (4.34), ми можемо отримати наступні рівняння:

$$\left(\epsilon_1 - \frac{N_{\parallel}^2}{1 - N_x^2/\eta} \right) E_x + igE_y = 0, \quad (4.35)$$

$$-igE_x + (\epsilon_2 - N^2) E_y = 0, \quad (4.36)$$

де $\epsilon_1 = \epsilon_{xx}$, $\epsilon_2 = \epsilon_{yy}$, $\eta = \epsilon_{zz}$, і g визначено за допомогою $\epsilon_{xy} = ig$, $N^2 = c^2 k^2 / \omega^2$, $N_{\parallel}^2 = c^2 k_{\parallel}^2 / \omega^2$, і $N_x^2 = c^2 k_x^2 / \omega^2$. Ці рівняння дають дисперсійне співвідношення

$$\Lambda(\omega) \equiv \left(\epsilon_1 - \frac{N_{\parallel}^2}{1 - N_x^2/\eta} \right) (\epsilon_2 - N^2) - g^2 = 0. \quad (4.37)$$

Коли $\text{Im } \epsilon_{ij} \ll \text{Re } \epsilon_{ij}$, рівняння (4.37) може бути розв'язане за теорією збурень. Підставляючи $\omega = \omega_0 + i\gamma$, де ω_0 – це частота моди і $\gamma \ll \omega_0$ декремент загасання, можна записати $\Lambda(\omega) = \Lambda_0(\omega_0) + i\gamma d\Lambda/d\omega_0 + i\lambda(\omega_0) = 0$. Тоді ω_0 – це розв'язок рівняння $\Lambda_0 = 0$, а декремент загасання задається таким чином

$$\gamma = - \left. \frac{\lambda}{d\Lambda/d\omega} \right|_{\omega_0}. \quad (4.38)$$

Для того, щоб порахувати γ за допомогою цього рівняння, потрібно визначити компоненти діелектричного тензора.

Починаючи з добре відомих загальних виразів для діелектричного тензора в Максвелівській плазмі і використовуючи рівняння (4.34), де $\omega \ll \omega_{Be}$, ми

отримуємо:

$$\varepsilon_1 = -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + i\sqrt{\pi}\frac{\omega_{pi}^2}{\omega k_{\parallel} v_{Ti}} \sum_n e^{-x_n^2} \frac{n^2}{z} e^{-z} I_n. \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + i\sqrt{\pi}\frac{\omega_{pi}^2}{\omega k_{\parallel} v_{Ti}} \sum_n e^{-x_n^2} 2ze^{-z}(I_n - I'_n) \\ + i\sqrt{\pi}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} k_{\perp}^2 \rho_e^2 x_e e^{-x_e^2}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$g = -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega \omega_{Bi}} + i\sqrt{\pi}\frac{\omega_{pi}^2}{\omega k_{\parallel} v_{Ti}} \sum_n e^{-x_n^2} e^{-z} n(I_n - I'_n), \quad (4.41)$$

$$\eta = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + 2i\sqrt{\pi} \left(\frac{\omega_{pi}^2}{\omega k_{\parallel} v_{Ti}} \sum_n x_n^2 e^{-x_n^2 - z} + \frac{\omega_{pe}^2}{k_{\parallel}^2 v_{Te}^2} x_e e^{-x_e^2} \right), \quad (4.42)$$

де $\omega_{pe,i}^2 = 4\pi n_{e,i}^2 / M_{e,i}$, $I_n = I_n(z)$ – модифікована функція Бесселя n -го порядку, $z = k_{\perp}^2 \rho_i^2 / 2$, $x_n = (\omega - n\omega_{Bi}) / (k_{\parallel} v_{Ti})$, $x_e = \omega / (k_{\parallel} v_{Te})$.

В результаті, ми маємо:

$$\omega^2 = k^2 v_A^2 (1 + k_{\parallel}^2 v_{\parallel}^2 / \omega_{Bi}^2),$$

$$\frac{\gamma_i}{\omega} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{k v_A}{|k_{\parallel} v_{Ti}|} \sum_n e^{-x_n^2} \frac{n^2}{z} e^{-z} I_n, \quad (4.43)$$

$$\frac{\gamma_e}{\omega} = -\sqrt{\pi} x_e e^{-x_e^2} \frac{M_e}{M_i} \left(\frac{k_{\perp}^2 k^2 v_A^4}{\omega_{Bi}^4} \frac{v_A^2}{v_{Te}^2} + \frac{k_{\perp}^2}{2k^2} \frac{v_{Te}^2}{v_A^2} \right). \quad (4.44)$$

Тут нижній індекс “0” при ω опущено.

Декремент загасання на йонах та декремент загасання на електронах для $T_i = 15$ кеВ, $T_e = 10$ кеВ, $n_e = 4 \times 10^{13}$ см⁻³, $B = 3.5$ Тл показано на Рис. 4.7, Рис. 4.8, і Рис. 4.9

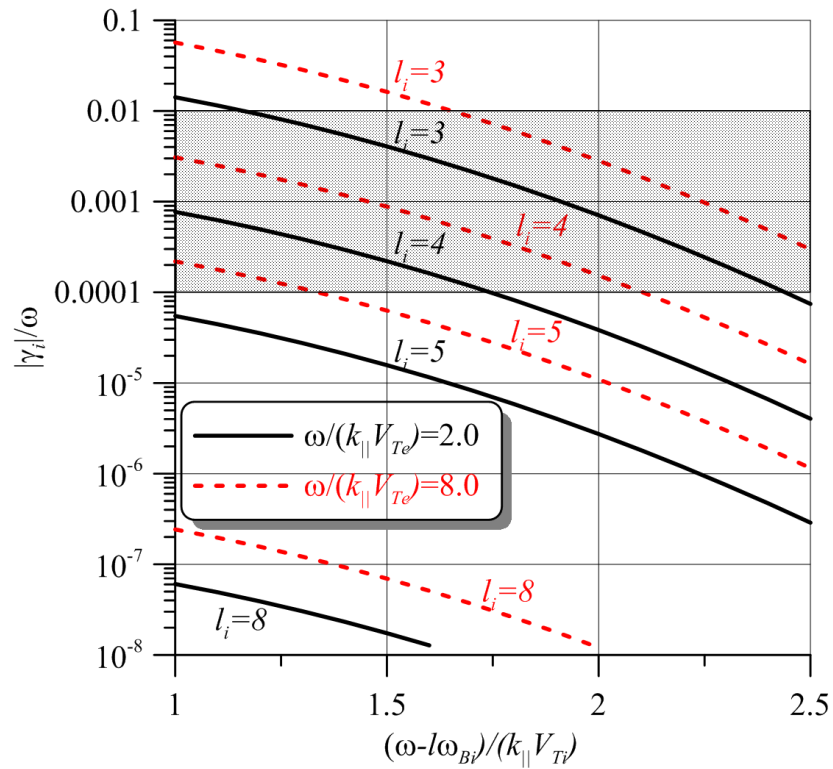


Рис. 4.7 Декремент загасання на йонах. Заштрихована область – це найбільш цікава область, оскільки очікуване значення інкременту збудження нестійкості становить $\gamma_{\alpha}/\omega = 10^{-4} - 10^{-2}$, $l_i = l_{\alpha} - 1$

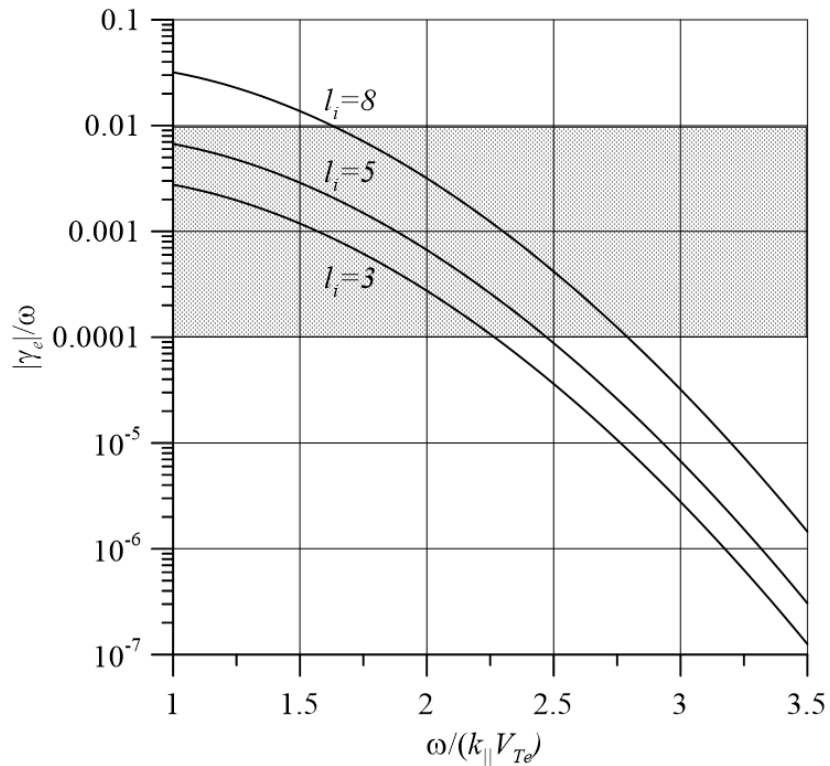


Рис. 4.8 Декремент загасання на електронах. Заштрихована область – це найбільш цікава область, оскільки очікуване значення інкременту збудження нестійкості становить $\gamma_{\alpha}/\omega = 10^{-4} - 10^{-2}$

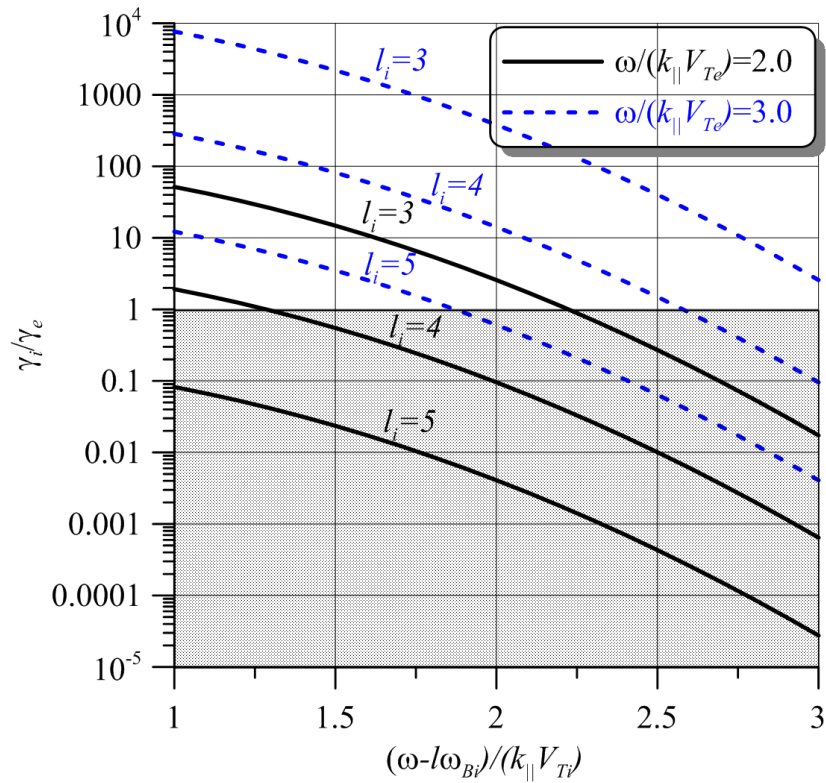


Рис. 4.9 Відношення декременту загасання на йонах до і декременту загасання на електронах. Заштрихована область – це область, де домінує загасання на електронах

4.2 Доцентрове просторове каналювання в однорідній моделі

В підрозділі 4.1 було показано, що хвилі з частотами близькими до гармонік йонної гірчастоти можуть бути одночасно в резонансі і з енергійними йонами на периферії плазми, і з тепловими йонами в центрі плазми. Проте, зроблений аналіз не дає відповіді на питання, чи може таке SC покращити час утримання енергії і суттєво підвищити температуру плазми. Нижче ми розглянемо це питання в простій одновимірній моделі.

Розглянемо рівняння стаціонарного стану для балансу енергії в реакторі з самопідтримуваним горінням, припускаючи, що просторове каналювання має місце:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \mathcal{K} \frac{dT}{dr} + Q^{(c)} + Q^{(w)} = 0, \quad (4.45)$$

де T – це температура плазми (припускаємо, що $T_i = T_e$), $\mathcal{K} = \kappa_T n_e$ – це коефіцієнт теплопровідності, $Q^{(c)}$ – описує нагрівання плазми альфа-частинками в результаті зіткнень, $Q^{(w)}$ – нагрівання плазми хвилями,

які переносять енергію альфа-частинок в область поблизу магнітної осі

$$\int d^3r Q^{(w)} = \nu P_\alpha,$$

$$\int d^3r Q^{(c)} = (1 - \nu) P_\alpha,$$

інтеграл береться по всьому об'єму плазми, P_α – це повна потужність пов'язана з альфа-частиками, ν – це частка цієї потужності, що відбирається хвилями. Втрати енергії, пов'язаними з випромінюванням, тут знехтувано.

Загальний розв'язок рівняння (4.45) має вигляд:

$$T(r) = T(a) + \int_r^a \frac{dr'}{r' \mathcal{K}} \int_0^{r'} dr'' r'' (Q^{(c)} + Q^{(w)}). \quad (4.46)$$

Для того, щоб порахувати інтеграли в цьому рівнянні, ми припускаємо, що

$$Q^{(w)} = Q_0^{(w)} \exp(-\sigma_w r^2/a^2), \quad (4.47)$$

$$Q^{(c)} = Q_0^{(c)} \exp(-\sigma_c r^2/a^2), \quad (4.48)$$

σ_w і σ_c – це величина пікованості профілю, і $\mathcal{K} = \text{const}$. Можна побачити, що $Q_0^{(w)} = \nu \sigma_w P_\alpha / (J_w V_p)$ та $Q_0^{(c)} = (1 - \nu) \sigma_c P_\alpha / (J_c V_p)$, де $J_j = 1 - \exp(-\sigma_j)$, а $j = (c, w)$, V_p – це об'єм плазми.

Враховуючи це, ми отримуємо:

$$T(r) = T(a) + \frac{a^2 P_\alpha}{4 \mathcal{K} V_p} \left[(1 - \nu) \frac{I_c(\xi)}{J_c} + \nu \frac{I_w(\xi)}{J_w} \right], \quad (4.49)$$

де $\xi = r/a$, $I(\xi) = \int_{\sigma_j \xi^2}^{\sigma_j} (1 - e^{-t}) t^{-1} dt$. На магнітній осі ($r = 0$), $I(\xi)$ редукується до Ein функції, $\text{Ein}(\sigma) = \int_0^\sigma (1 - e^{-t}) t^{-1} dt$, яку можна апроксимувати як $\text{Ein}(\sigma) \approx \sigma$ для $\sigma \ll 1$ і $\text{Ein}(\sigma) \approx \ln \sigma + 0.577$ for $\sigma \geq 2$. Зокрема, коли $\sigma_c \ll 1$, рівняння (4.49) набуває вигляду:

$$T_0 = \frac{a^2 P_\alpha}{4 \mathcal{K} V_p} \left[1 + \nu \left(\frac{I_w(0)}{J_w} - 1 \right) \right], \quad (4.50)$$

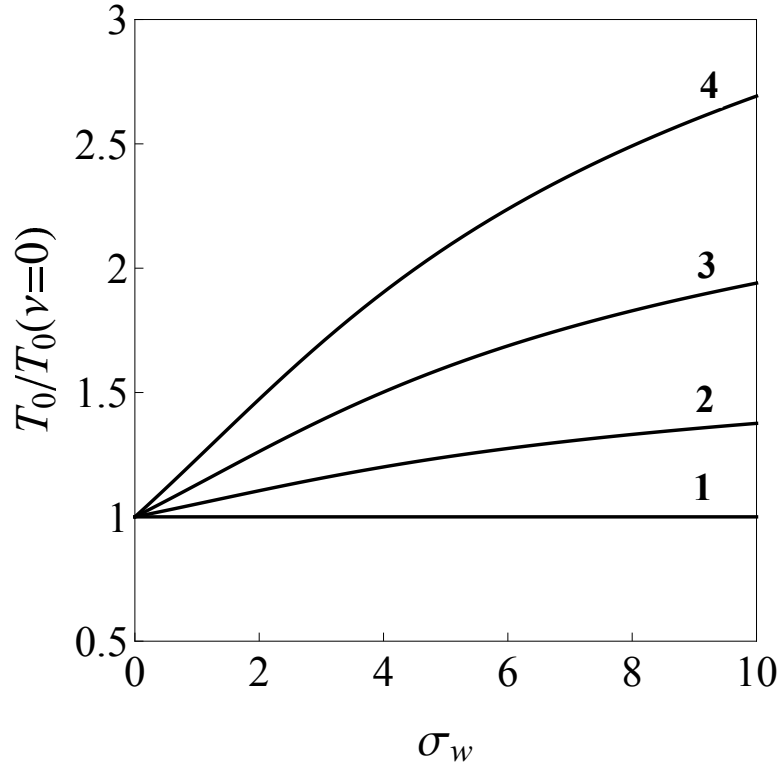


Рис. 4.10 Залежність температури в центрі плазми в реакторі з самопідтримуваним горінням від величини пікованості профілю σ_w , для різних величин частки енергії альфа-частинок (ν) переданої хвилям: 1, $\nu = 0$; 2, $\nu = 0.2$; 3, $\nu = 0.5$; 4, $\nu = 0.9$

де $T_0 = T(0)$. Тут перший член описує температуру за відсутності SC. Тому просторове каналювання відіграє значну роль, коли другий член є не малим. З (4.50) випливає, що для випадку $\sigma_w \gg 1$, SC підвищує температуру плазми поблизу осі вдвічі, коли

$$\nu(\ln \sigma_w - 0.42) = 1. \quad (4.51)$$

Наприклад, рівняння (4.51) вимагає, щоб $\nu = 0.53$ для $\sigma_w = 10$. Це задовольняє очевидному обмеженню $\nu \leq 1$. Вплив просторового каналювання на температуру в центрі плазми показано на Рис. 4.10.

Отже, просторове каналювання може мати сильний вплив на баланс енергії. Величини ν , $Q^{(c)}(x)$ і $Q^{(w)}(x)$ залежать від експериментальних умов. Для того, щоб знати чи рівняння (4.51) задовольняється в конкретному експерименті, потрібен окремий аналіз.

4.3 Моделювання просторового каналювання в токамаку JET

Вищесказане означає, що просторове каналювання, в принципі, може впливати на баланс енергії плазми та забезпечити значне зростання температури в центрі плазми. Однак, модель використана у підрозділі 4.2 не показує різниці в температурі електронів та йонів. Більш того, в модель не входять характерні параметри токамаку JET і не врахована наявність інжекції пучків нейтральних атомів.

У цьому підрозділі проведено аналіз в рамках більш реалістичної моделі, що описує як T_i , так і T_e , з параметрами (такими як густини електронів та йонів, потужність нагрівання інжекцією пучків нейтральних атомів, тощо), що взяті з бази даних токамаку JET.

Для того, щоб побачити ефект просторового каналювання, були проведені розрахунки для трьох випадків. По-перше, для чистої дейтерієвої плазми з визначеною густиною та нагріванням інжекцією пучків нейтралів. Це дало змогу визначити коефіцієнти теплопровідності електронів та йонів, які потрібні для забезпечення бажаної електронної та йонної температур. По-друге, використовуючи ці коефіцієнти теплопровідності, були проведені розрахунки для дейтерій-тритієвої плазми з тим самим нагріванням інжекцією пучків нейтралів. Порівнюючи результати розрахунків першого та другого випадків, ми спостерігали ефект нагрівання альфа-частинками. Третій випадок відрізняється від другого лише додаванням просторового каналювання. Просторове каналювання моделювалось як і в підрозділі 4.2, але з додатковим припущенням, що хвилі загасають внаслідок взаємодії з йонами основної плазми.

Ми використовували такі рівняння:

$$\frac{3}{2}n_e \frac{\partial T_e}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r n_e \kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = Q_{ei}^{(c)} + Q_{nbi}^{(e)} + Q_e^{(c)} - Q_{br}, \quad (4.52)$$

$$\frac{3}{2}n_i \frac{\partial T_i}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r n_i \kappa_i \frac{\partial T_i}{\partial r} = Q_{ie}^{(c)} + Q_{nbi}^{(i)} + Q_i^{(c)} + Q^{(w)}, \quad (4.53)$$

де доданок $Q_{ei}^{(c)} = -Q_{ie}^{(c)}$ описує обмін енергією між електронами та йонами внаслідок кулонівських зіткнень, $Q_{nbi}^{(i)}$ та $Q_{nbi}^{(e)}$ описують нагрівання йонів та електронів пучками нейтральних атомів, відповідно, $Q_e^{(c)}$ та $Q_i^{(c)}$ описують зіткненнєве нагрівання електронів та йонів альфа-частинками, відповідно;

нижній індекс e/i позначає електрони/йони. Як і раніше, доданок $Q^{(w)}$ описує SC. Наведені рівняння записані у припущенні, що температури дейтерію та тритію є однаковими.

Доданки $Q_{ei}^{(c)}$ та Q_{br} добре відомі. Візьмемо їх у такому вигляді:

$$Q_{ei}^{(c)} = - \sum_{i=D,T} \frac{3M_e n_e (T_e - T_i)}{M_i \tau_e}, \quad (4.54)$$

$$Q_{br} = \text{const } n_e n_i \sqrt{T_e}, \quad (4.55)$$

де $\tau_e \propto T_e^{3/2}/n_i$ – час електронно-йонних зіткнень.

Для доданків, що описують нагрівання йонів та електронів пучками нейтральних атомів ($Q_{nbi}^{(e)}$ та $Q_{nbi}^{(i)}$), використовувались розрахунки виконані кодом TRANSP з бази даних токамаку JET.

Частка потужності альфа-частинок, яку отримують хвилі, описувалась параметром ν , $\int d^3r Q^{(w)}(r) = \nu P_\alpha$, а радіальні профілі нагрівання хвилями мали вигляд $Q^{(w)}(r) = Q_0^{(w)} \exp(-\sigma_w r^2/a^2)$, де $Q^{(w)} = Q_0^{(w)} \exp(-\sigma_w r^2/a^2)$. Крім того, ми припускали, що хвилі загасають внаслідок взаємодії з йонами основної плазми, саме тому хвильовий доданок був включений у рівнянні (4.53).

Зіткненняве нагрівання плазми альфа-частинками, можна порахувати двома шляхами. По-перше, покладаючись на розрахунки кодом TRANSP з бази даних токамаку JET. По-друге, використовуючи аналітичні вирази. Перший шлях залежить від конкретного розряду. Тому цікаво перевірити прості аналітичні формули, що чітко показують залежність $Q_e^{(c)}$ та $Q_i^{(c)}$ від параметрів плазми.

Спочатку опишемо перший спосіб на основі розрахунків виконаних кодом TRANSP. Розпочнемо з такого очевидного співвідношення:

$$(1 - \nu)P_\alpha = \int d^3r [Q_e^{(c)} + Q_i^{(c)}],$$

яке можна записати як

$$(1 - \nu)P_\alpha = 2V_p Q_{e0}^{(c)} \int_0^1 d\xi \xi \left[\tilde{Q}_i^{(c)}(\xi) q_{ie} + \tilde{Q}_e^{(c)}(\xi) \right], \quad (4.56)$$

де $\tilde{Q}_e^{(c)}(\xi) = Q_e^{(c)}/Q_{e0}^{(c)}$, $\tilde{Q}_i^{(c)}(\xi) = Q_i^{(c)}/Q_{i0}^{(c)}$, $q_{ie} = Q_{i0}/Q_{e0}$ та $Q_0^c = Q^{(c)}(0)$. Це рівняння дає можливість знайти $Q_{e0}^{(c)}$ за умови, що q_{ie} та функції $\tilde{Q}_e^{(c)}(\xi)$, $\tilde{Q}_i^{(c)}(\xi)$ відомі, а

$$q_{ie} = \delta_{ie} \frac{\int_0^1 d\xi \xi \tilde{Q}_e^{(c)}(\xi)}{\int_0^1 d\xi \xi \tilde{Q}_i^{(c)}(\xi)}, \quad (4.57)$$

де δ_{ie} – відношення повної термоядерної енергії, що отримують йони, до енергії, що отримують електрони внаслідок зіткнень. Це відношення описує зіткненнєвий розподіл енергії альфа-частинок між електронами та йонами.

При розв'язанні рівнянь (4.52) – (4.57) нехтувалось впливом SC на q_{ie} , $\tilde{Q}_e^{(c)}(\xi)$, $\tilde{Q}_i^{(c)}(\xi)$ та δ_{ie} . Ці величини, а також деякі інші, брались з розрахунків кодом TRANSP за відсутності SC.

Рівняння для $Q_i^{(c)}$ та $Q_e^{(c)}$ були отримані у роботі [121] для плазми з одним типом йонів. Їх легко узагальнити для дейтерій-тритієвої плазми. В результаті отримаємо:

$$Q_i^{(c)} = (1 - \nu) S_\alpha \mathcal{E}_\alpha \zeta_{\alpha i}, \quad (4.58)$$

$$Q_e^{(c)} = (1 - \nu) S_\alpha \mathcal{E}_\alpha (1 - \zeta_{\alpha i}), \quad (4.59)$$

де S_α – функція, що описує джерело альфа-частинок (важливими є як термоядерна частина $n_D n_T \langle \sigma v \rangle$, так і внесок від взаємодії пучок-плазма), $\mathcal{E}_\alpha = 3.5$ MeV та [121]

$$\zeta_{\alpha i} = \frac{2}{3} \eta^2 \left[\sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 - \eta}{\sqrt{3} \eta} + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \eta)^3}{1 + \eta^3} \right], \quad (4.60)$$

$$\eta = \left[\frac{3\sqrt{\pi}}{8} \frac{M_\alpha}{M_{DT}} \left(\frac{M_\alpha}{M_e} \right)^{1/2} \right]^{1/3} \left(\frac{T_e}{\mathcal{E}_\alpha} \right)^{1/2}, \quad (4.61)$$

$M_{DT} = M_D M_T / (M_D + M_T)$, M – маса частинки.

Використовуючи ці рівняння, проаналізуємо вплив SC наступним чином. Виберемо розряди #42856 та #42847 з дейтерій-тритієвою плазмою, див. Табл. 4.1. Враховуючи, що густини електронів у цих розрядах, а також у дейтерієвому розряді #41069 були досить подібними, з проміжним значенням густини у розряді #42856, для наших розрахунків ми використали розподіл густини розряду #42856.

Почнемо зі знаходження значень κ_e та κ_i , необхідних для досягнення температури електронів та йонів у центрі плазми близьких до тих, що спостерігалися у дейтерієвому розряді #41069. Для цього були розв'язані рівняння (4.52), (4.53) із заданою густиною частинок $n_i(r)$ та $n_e(r)$, Q_{nbi}^i та Q_{nbi}^e , взятою з бази даних токамаку JET, Рис. 4.11 та Рис. 4.12

В розрахунках покладалось $\kappa_i(r) = const$ та $\kappa_e(r) = const$. Показано, що задовільне узгодження з експериментальними даними (наведеними у Табл.4.1 в 4.1.3) досягається для $\kappa_i = 5000 \text{ см}^2\text{с}^{-1}$ та $\kappa_e = 2700 \text{ см}^2\text{м}^{-1}$, що дає $T_{i0} = 13.35 \text{ кеВ}$ та $T_{e0} = 9.90 \text{ кеВ}$. В дійсності, ці транспортні коефіцієнти є деякими середніми значеннями коефіцієнтів, обчислених кодом TRANSP. Моделювання теплопровідності, в якому покладалось $\kappa_{eli}(r) = const$ було зроблено не лише для простоти. Такий вибір дозволяє виділити ефекти просторового каналювання. Мається на увазі, що транспортні коефіцієнти, перш за все, їх радіальна структура у дейтерій-тритієвій плазмі може відрізнятися від їх радіальної структури у дейтерієвій плазмі внаслідок ізотопічних ефектів, нагрівання альфа-частинками, залежності порогу йонно-температурної градієнтної нестійкості (Ion Temperature Gradient (ITG)) від T_i/T_e та SC. За наявності просторового каналювання не має сенсу використовувати транспортні коефіцієнти $\kappa_{eli}(r)$, знайдені кодом TRANSP.

З цієї причини, наступним кроком був перехід до розрахунків для дейтерій-тритієвої плазми з тими ж значеннями $\kappa_i(r) = const$ та $\kappa_e(r) = const$ та різними значеннями ν . Результати показано на Рис. 4.13 та наведено у Табл. 4.2. Порівнюючи перший та другий рядки Табл. 4.2 бачимо, що перехід від дейтерієвої до дейтерій-тритієвої плазми з незмінними транспортними коефіцієнтами зменшує різницю $T_i - T_e$ переважно за рахунок зростання температури електронів. Це є природнім результатом, оскільки час зіткнень альфа-частинок з електронами є меншим за час зіткнень альфа-частинок з йонами. Наявність SC змінює ситуацію, як це видно з третього та четвертого рядків Табл 4.2: йонна температура зростає в той час як електронна температура спадає; SC з $\nu = 0.2$ є достатнім, щоб забезпечити помітний ефект. Цей ефект зростає приблизно лінійно, як це впливає з Рис. 4.13.

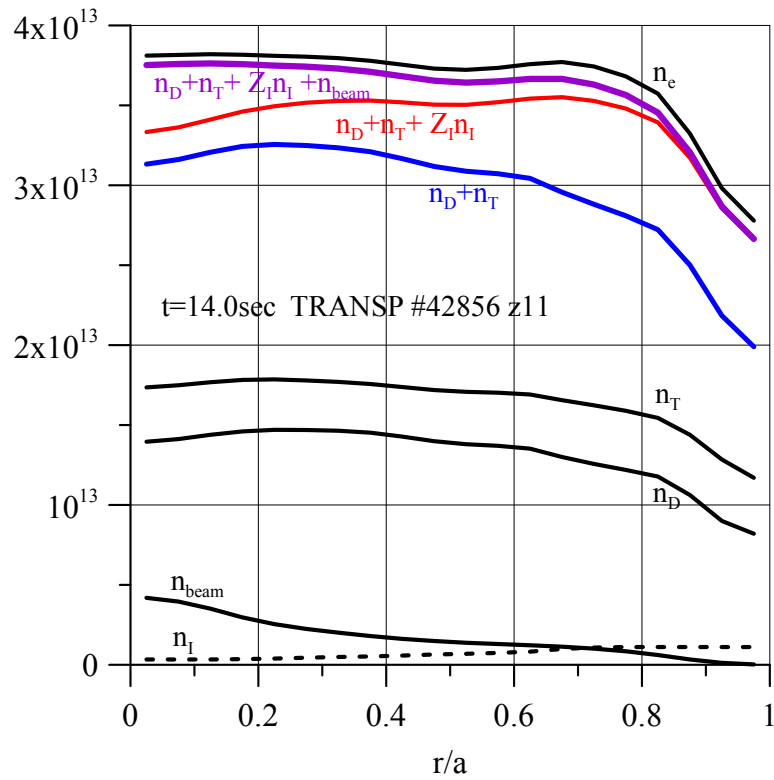


Рис. 4.11 Профілі густини електронів, густини теплових йонів (дейтерій, тритій та вуглець), йонів пучка та сумарної густини йонів ($n_D + n_T + Z_I n_I + n_{beam}$) в розряді #42856, $t = 54$ с

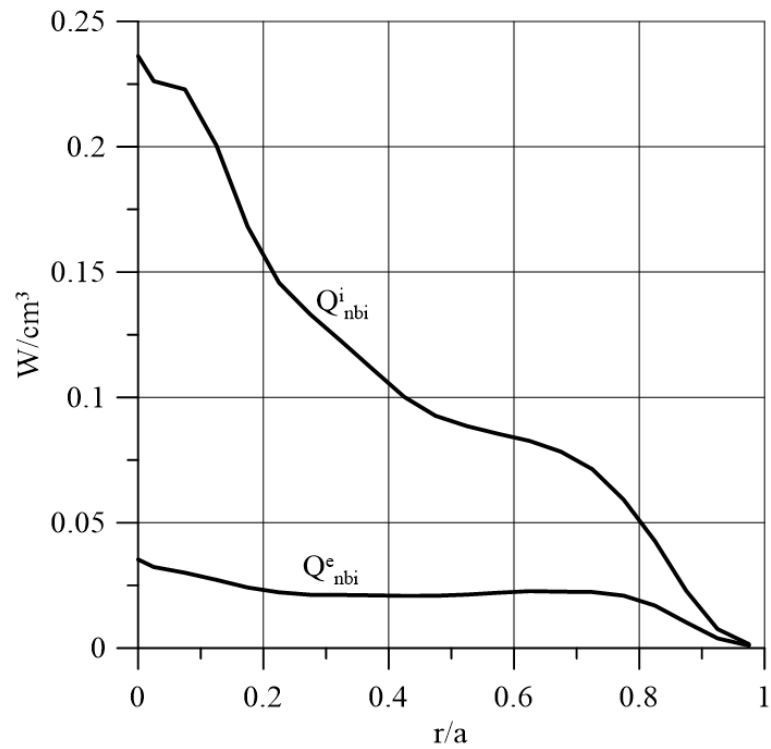


Рис. 4.12 Джерела Q_{nbi}^i та Q_{nbi}^e для розряду #42856, $t = 54$ с

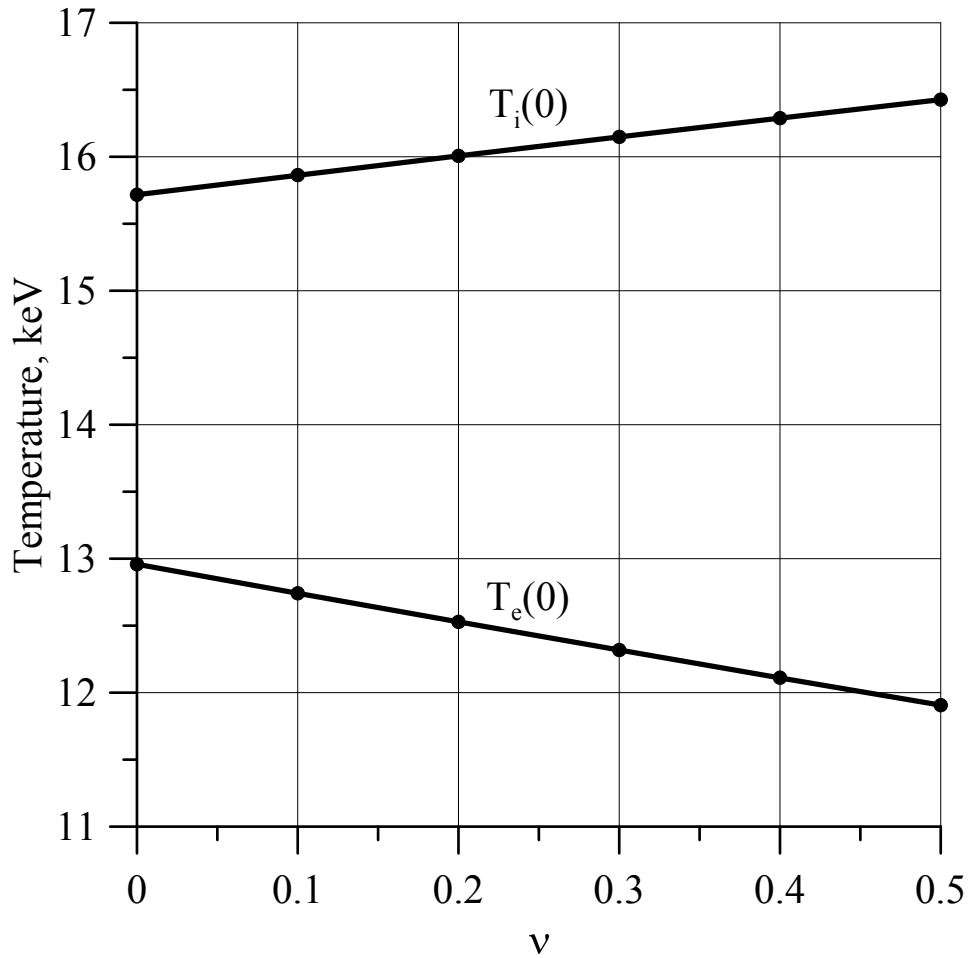


Рис. 4.13 Залежність температури йонів та електронів в центрі плазми від частки енергії альфа-частинок (ν), що передається хвилям; залежність отримана з розв'язків системи рівнянь (4.52), (4.53) для $\chi_i = 5000 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$, $\chi_e = 2700 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$, $\sigma_w = 10$ та $Q_i^{(c)}$, $Q_e^{(c)}$, що мають вигляд (4.58) та (4.59)

Нагадаємо, що потужність альфа-частинок у розглянутих експериментах була набагато меншою за потужність інжекції пучків нейтральних атомів, і становила приблизно 15% від P_{NBI} . Це означає, що просторове каналювання має набагато сильніший вплив на температури йонів та електронів в центрі плазми, та викликає помітне покращення утримання плазми в експериментах з більшим відношенням P_α/P_{NBI} . З іншого боку, зрозуміло, що переважне нагрівання йонів не обов'язково матиме місце, оскільки загасання на електронах може бути значним, див. підрозділ 4.1.4.

Розрахунки, в яких використано $Q_e^{(c)}$ та $Q_i^{(c)}$, що задані рівняннями (4.56) та (4.57) (які використовують дані, отримані кодом TRANSP) дають приблизно такі ж результати. Це означає, що наближення цих величин простими аналітичними виразами (4.58) та (4.59) є виправданим.

Таблиця 4.2

Чисельно знайдені рівноважні електронні та йонні температури у центрі плазми за відсутності та за наявності просторового каналювання

Нагрівання	T_{i0} , кеВ	T_{e0} , кеВ	$T_{i0} - T_{e0}$, кеВ
NBI	13.35	9.90	3.45
NBI+ α	15.71	12.96	2.75
NBI+ α +SC($\nu = 0.2$)	16.01	12.53	3.48
NBI+ α +SC($\nu = 0.3$)	16.15	12.32	3.83

В Табл. 4.2 представлені чисельно знайдені рівноважні електронні та йонні температури у центрі плазми за відсутності просторового каналювання (перші два рядки) та за наявності просторового каналювання (два останніх рядки) під час інжекції пучків нейтралів з потужністю $P = 10$ МВт. Перший рядок відтворює температури у дейтерієвому розряді #41069. Два останніх рядки демонструють можливі ефекти SC у дейтерій-тритієвих розрядах #42856 та #42847. Для розрахунків було вибрано $\chi_i = 5000 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$, $\chi_e = 2700 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$, $\sigma_w = 10$, густини частинок та профілі нагрівання інжекцією пучків нейтралів показані на Рис. 4.11 та Рис. 4.12. Згадані розряди були описані у роботах [99—101]. Згідно з цими роботами та Табл. 4.1, нагрівання альфа-частинками у токамаку JET має наслідком зростання електронної і йонної температур. Наші розрахунки за відсутності та при наявності SC узгоджуються з цим фактом, $T_{i0} = 13.35$ кеВ та $T_{e0} = 9.9$ кеВ у першому рядку Табл. 4.2 є меншими за значення йонної та електронної температур, наведених у інших рядках цієї таблиці та на Рис. 4.13. Однак, порівнюючи результати наведені у Табл. 4.2 та Табл. 4.1, ми бачимо, що у наших розрахунках, які базуються на припущенні, що транспортні коефіцієнти є однаковими у D та DT розрядах, за відсутності SC ($\nu = 0$) йонне нагрівання є недооціненим, а електронне – переоціненим. Такого перегріву електронів не можна уникнути без введення додаткового погіршення часу утримання енергії електронів у дейтерій-тритієвій плазмі, в той час як краще утримання енергії йонів є необхідним для збільшення йонної температури для випадку, коли $\nu = 0$. У дейтерій-тритієвій плазмі

просторове каналювання збільшує різницю $(T_i - T_e)$ шляхом додаткового нагріву йонів (що призводить до росту T_i) та зменшує нагрівання електронів (що призводить до падіння T_e). Незважаючи на це, наші розрахунки для $\nu = 0.2$ та $\nu = 0.3$ все ще дають менше значення T_i та більше значення T_e ніж ті, що спостерігались на експериментах. Збільшуючи ν , ми отримуємо краще узгодження з експериментом ($T_i > 16.2$ кеВ та $T_e \lesssim 12$ кеВ), як це впливає з Рис. 4.13. Однак, здається, що значення $\nu > 0.3$ є нереалістичним: розрахунки для прямого магнітного поля передбачають, що лише 15-20% енергії альфа-частинок можуть бути передані FMM [122]; більше значення (50%) було отримано у підрозділі 3.2 та роботі [37], але, в дійсності, це була оцінка, зроблена для іншого типу хвиль (GAE) з досить великими амплітудами. Окрім того, в наших розрахунках не було враховано, що деяка частка енергії FMM поглинається електронами. Тому, ймовірно, що інші чинники, не лише SC, можуть давати вклад у ріст $(T_i - T_e)$. Наприклад, це може бути зменшення йонного транспорту внаслідок стабілізації ITG нестійкості [123—125]. Зазначимо, що інтерпретація експериментів ускладнювалася нестационарною природою плазмових розрядів [126].

Висновки до Розділу 4

Проведений аналіз показує, що просторове каналювання може відігравати важливу роль у покращенні параметрів плазми та зростанні йонної температури в експериментах з нагріванням альфа-частинками у токамаку JET. Цей висновок базується на такому:

1. Частка альфа-частинок з енергією 3.5 МеВ, що народжується в периферійній області ($r/a \geq 0.5$) є значною. Для розряду #42856 ця частка становить $\sim 30\%$. Внаслідок орбітального руху частка альфа-частинок в периферійній області зростає. Зокрема, частка захоплених альфа-частинок, що мають r_{max} при $r/a \geq 0.5$ сягає 50% для $\lambda = 1$ у згаданому розряді.
2. Необхідну умова для просторового каналювання – резонансну взаємодію між дестабілізованою у периферійній області швидкою магнітозвуковою модою та основною плазмою у приосьовій області ($r_i \ll r_\alpha$) – можна задовольнити для FMM, частоти яких є близькими до частоти циклотронних гармонік альфа-частинок.
3. Декремент загасання хвиль у центральній області може лежати у діапазоні $\gamma_d = (10^{-2} - 10^{-4})\omega$. Ця величина є одного порядку з інкрементом

збудження нестійкості, що виникає внаслідок анізотропії функції розподілу периферійних альфа-частинок по швидкостям. Зазначимо, що йонно-циклотронна емісія, що спостерігалася на JET та інших токамаках була пов'язана з периферійними FMM нестійкостями, для яких відношення γ_α/ω лежить саме в цьому діапазоні.

4. Загасання хвиль у приосьовій області пов'язано як з йонами, так і з електронами. Це означає, що просторове каналювання може передавати енергію альфа-частинок не лише йонам основної плазми, але й електронам. Знайдено умови, що забезпечують загасання хвилі переважно на йонах.
5. Досить малі амплітуди хвиль є достатніми, щоб забезпечити отримання хвилями і передачу ними поперек магнітних поверхонь стільки густини енергії, скільки необхідно для просторового каналювання значної частки термоядерної енергії.
6. Має місце якісне узгодження між електронною та йонною температурами в дейтерій-тритієвих розрядах токамаку JET, що виміряні експериментально, та величинами температур, які пораховані чисельно, у припущенні, що, по-перше, транспортні коефіцієнти в дейтерій-тритієвих розрядах є такими ж, як і в дейтерієвих розрядах, та, по-друге, в дейтерій-тритієвих розрядах має місце доцентрове просторове каналювання, що викликає нагрівання йонів плазми в центральній частині.

Якщо виконуються умови пунктів (1) – (3), то час утримання енергії плазми зростає. Коли загасання на йонах переважає над загасанням на електронах, просторове каналювання призводить, головним чином, до зростання температури йонів в центральній області плазми.

Отже можна зробити висновок, що проведений аналіз експериментальних даних токамаку JET, підтвердив висновки робіт [99—102], що енерговміст DT розрядів перевищує енерговміст дейтерієвих розрядів, де використовувалось йонно-циклотронне резонансне нагрівання з потужністю, рівною потужності альфа-частинок в DT розрядах. Показано, що енергетичний час утримання плазми в розглянутих розрядах з ICRH є найменшим при найбільшій потужності ICRH.

Слід зауважити, що покращене утримання в дейтерій-тритієвій плазмі може виникати внаслідок інших ефектів, наприклад, стабілізації ITG-нестійкості швидкими йонами [124], а також сприятливій залежності

утримання від йонної маси, що спостерігалось у токамаках JET [127, 128] та JT60-U [129]. Крім того, інтерпретація цих розрядів ускладнюється їх перехідною природою та змінами поведінки пилчастих коливань при зміні ізотопічної маси [126].

Підсумовуючи сказане, можна зробити висновок, що просторове каналювання потужності альфа-частинок може відігравати важливу роль в термоядерній плазмі. Хоча, може виявитись неможливим точно з'ясувати, що саме просторове каналювання відіграло провідну роль у описаних експериментах на токамаку JET, з проведеного аналізу випливає, що доцентрове просторове каналювання здатне суттєвого покращити параметри плазми термоядерного реактора, каналюючи потужність альфа-частинок з периферії до центральної області плазми.

Основні положення цього розділу викладені у публікації автора [41].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вивчено поширення альфвенових хвиль поперек магнітного поля, знайдено потоки енергії поперек магнітного поля, які виникають при взаємодії швидких йонів з магнітогідродинамічними хвилями та магнітними островами, та проведено аналіз фізичних механізмів, що викликають такі потоки. Основні результати, отримані в дисертації:

1. Вперше показано, що відхилення від циліндричної симетрії (зокрема, тороїдальність) може мати наслідком лінійну трансформацію кінетичної альфвенової хвилі в іншу кінетичну альфвенову хвилю, яка відрізняється номером моди. Отримано аналітичні вирази для амплітуди трансформованої і нетрансформованої хвиль та знайдено залежність коефіцієнта трансформації від ширини щілини, що утворюється внаслідок “явища уникнення перетину” між гілками альфвенового континуума.

Показано, що трансформація може бути сильною для хвиль з малими полоїдальними номерами мод в таких термоядерних пристроях як NSTX та ITER. Трансформація може впливати на модовий склад нестійкості, яка спостерігається під час зовнішніх магнітних вимірювань

Також трансформація може послаблювати загасання Ландау, тим самим збільшуючи область поширення хвилі і, отже, область, у якій хвиля змінює параметри плазми. Збільшення області поширення хвилі може бути важливим, коли хвиля впливає на енергобаланс плазми, переносячи енергію або змінюючи коефіцієнти перенесення плазми. Результати дисертації підтверджують результати роботи [33], в якій велика протяжність області впливу KAW була отримана внаслідок припущення, що мала місце трансформація модового номера хвилі.

2. Знайдено величину та розташування потоків частинок та енергії, що виникають при цеберному перенесенні внаслідок гальмування швидких йонів в полі квазістаціонарних збурень. Запропоновано гамільтонів формалізм, придатний для випадку, коли зміщення резонансів є наслідком зіткненневого гальмування частинок та часової еволюції коефіцієнту запасу стійкості. Потік енергії, що створюється цеберним перенесенням, є значним у конфігураціях із малим широм, – отже цеберне перенесення може бути важливим для гібридного операційного режиму і розрядів з оберненим широм. Цеберні потоки локалізуються на певній відстані від магнітних

островів, які спричиняють їх появу. Зокрема, в конфігураціях з немонотонним профілем коефіцієнту запасу стійкості цеберний потік енергії має тенденцію зосереджуватись в просторі між магнітними островами.

3. Виявлено фізичний механізм передачі енергії поперек магнітного поля ідеальними альфвеновими хвилями в тороїдальній плазмі. Знайдено, що на відміну від класичних альфвенових хвиль у нескінченній плазмі, альфвенові хвилі в тороїдальних системах спричиняють стиснення плазми завдяки зачепленню зі швидкими магнітозвуковими хвилями, що і вможливорює передачу енергії.

Пораховано радіальну групову швидкість для біжучих хвиль, які утворюють GAE-моди та TAE-моди. Показано, що хоча редуковані рівняння для альфвенових власних мод отримуються в тому наближенні, що поле хвилі, направлене вздовж рівноважного магнітного поля, є відсутнім, з цих рівнянь можна правильно відтворити поздовжнє магнітне поле хвилі, тому вони дають правильний поперечний потік енергії. Отримані результати пояснюють, як альфвенові власні моди можуть здійснювати просторове каналювання енергії.

4. Знайдено величину та кількість множинних альфвенових власних моди, при яких ці моди здатні відібрати значну частину енергії швидких йонів для передачі в іншу область простору. Отримано аналітичний вираз для ширини островів, створених у фазовому просторі швидкого йона сайдбенд-резонансами з альфвеновими власними модами. Таким чином оцінено ширину інтервалу енергій швидких йонів, у якому множинні альфвенові моди здатні створити стохастичну зону, і, отже, частку енергії, яку вони можуть відібрати у цих йонів. Зокрема, виявляється, що порядку 10 GAE-мод (така кількість спектральних ліній нестійкостей спостерігалась у експериментах [30]) достатньо, щоб відібрати половину енергії швидких йонів у NSTX. Отже, наші оцінки підтверджують результати роботи [36].

5. Показано, що просторове каналювання може відігравати важливу роль у покращенні характеристик плазми та зростанні йонної температури в експериментах з нагріванням альфа-частинками у токамаку JET. Аналіз проведено в припущенні, що альфа-частинки, які знаходяться на периферії плазми, збуджують множинні швидкі магнітозвукові моди, що мають глобальну радіальну структуру. Показано, що швидкі магнітозвукові моди з частотами, близькими до циклотронних гармонік

альфа-частинок, можуть бути в резонансі з йонами та електронами основної плазми, що знаходяться в центральній області плазми, передаючи енергію альфа-частинок в цю область. Ця передача енергії покращує загальне утримання енергії в плазмі. Окрім того, вона може спричиняти аномальне нагрівання йонів, коли загасання швидких магнітозвукових мод на йонах переважає над загасанням швидких магнітозвукових мод на електронах.

Знайдено умови, що забезпечують загасання FMM переважно на йонах. Пораховано швидкість загасання розглянутих хвиль. Показано, що досить малі амплітуди хвиль є достатніми, щоб забезпечити отримання хвилями і передачу ними поперек магнітних поверхонь енергії з густиною, що є необхідною для просторового каналювання значної частки термоядерної енергії. Показано, що розвинена теорія доцентрового просторового каналювання енергії може пояснювати ті дейтерій-третієві експерименти на токамаку JET, які проводились під час кампанії DTE1, де, ймовірно, мали місце аномальне йонне нагрівання та покращення утримання плазми.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] B. Bigot, «Progress toward ITER's First Plasma», *Nuclear Fusion* **59**, 112001 (2019) DOI: 10.1088/1741-4326/ab0f84.
- [2] E. Joffrin and et al, «Overview of the JET preparation for deuterium – tritium operation with the ITER like-wall», *Nuclear Fusion* **59**, 112021 (2019).
- [3] O. Motojima, «The ITER project construction status», *Nuclear Fusion* **55**, 104023 (2015) DOI: 10.1088/0029-5515/55/10/104023.
- [4] A. C. Sips, G. Giruzzi, S. Ide, C. Kessel, T. C. Luce, J. A. Snipes, and J. K. Stober, «Progress in preparing scenarios for operation of the International Thermonuclear Experimental Reactor», *Physics of Plasmas* **22**, 021804 (2015) DOI: 10.1063/1.4904015.
- [5] Y. I. Kolesnichenko, «The role of alpha particles in tokamak reactors», *Nuclear Fusion* **20**, 727–780 (1980) DOI: 10.1088/0029-5515/20/6/008.
- [6] N. Gorelenkov, S. Pinches, and K. Toi, «Energetic particle physics in fusion research in preparation for burning plasma experiments», *Nuclear Fusion* **54**, 125001 (2014) DOI: 10.1088/0029-5515/54/12/125001.
- [7] ITER Physics Expert Group on Energetic Particles, Heating and Current Drive and ITER Physics Basis Editors, «Chapter 5: Physics of energetic ions», *Nuclear Fusion* **39**, 2471–2495 (1999) DOI: 10.1088/0029-5515/39/12/305.
- [8] A. Fasoli, C. Gormenzano, H. Berk, B. Breizman, S. Briguglio, D. Darrow, N. Gorelenkov, W. Heidbrink, A. Jaun, S. Konovalov, R. Nazikian, J.-M. Noterdaeme, S. Sharapov, K. Shinohara, D. Testa, K. Tobita, Y. Todo, G. Vlad, and F. Zonca, «Chapter 5: Physics of energetic ions», *Nuclear Fusion* **47**, S264–S284 (2007) DOI: 10.1088/0029-5515/47/6/s05.
- [9] B. N. Breizman and S. E. Sharapov, «Major minority: energetic particles in fusion plasmas», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **53**, 054001 (2011).
- [10] W. W. Heidbrink and R. B. White, «Mechanisms of energetic-particle transport in magnetically confined plasmas», *Physics of Plasmas* **27**, 030901 (2020) DOI: 10.1063/1.5136237.
- [11] C. T. Hsu, C. Z. Cheng, P. Helander, D. J. Sigmar, and R. B. White, «Particle dynamics in chirped-frequency fluctuations», *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2503–2507 (1994) DOI: 10.1103/PhysRevLett.72.2503.

- [12] H. Mynick and N. Pomphrey, «Frequency sweeping: a new technique for energy-selective transport», *Nuclear Fusion* **34**, 1277–1282 (1994) DOI: 10.1088/0029-5515/34/9/i09.
- [13] K. McGuire, R. Goldston, M. Bell, M. Bitter, K. Bol, K. Brau, D. Buchenauer, T. Crowley, S. Davis, F. Dylla, H. Eubank, H. Fishman, R. Fonck, B. Grek, R. Grimm, R. Hawryluk, H. Hsuan, R. Hulse, R. Izzo, R. Kaita, S. Kaye, H. Kugel, D. Johnson, J. Manickam, D. Manos, D. Mansfield, E. Mazzucato, R. McCann, D. McCune, D. Monticello, R. Motley, D. Mueller, K. Oasa, M. Okabayashi, K. Owens, W. Park, M. Reusch, N. Sauthoff, G. Schmidt, S. Sesnic, J. Strachan, C. Surko, R. Slusher, H. Takahashi, F. Tenney, P. Thomas, H. Towner, J. Valley, and R. White, «Study of High-Beta Magnetohydrodynamic Modes and Fast-Ion Losses in PDX», *Phys. Rev. Lett.* **50**, 891–895 (1983) DOI: 10.1103/PhysRevLett.50.891.
- [14] W. Heidbrink and G. Sager, «The fishbone instability in the DIII-D tokamak», *Nuclear Fusion* **30**, 1015–1025 (1990) DOI: 10.1088/0029-5515/30/6/004.
- [15] M. Podestà, R. Bell, N. Crocker, E. Fredrickson, N. Gorelenkov, W. Heidbrink, S. Kubota, B. LeBlanc, and H. Yuh, «Non-linear dynamics of toroidicity-induced Alfvén eigenmodes on the National Spherical Torus Experiment», *Nuclear Fusion* **51**, 063035 (2011) DOI: 10.1088/0029-5515/51/6/063035.
- [16] K.-L. Wong, «A review of Alfvén eigenmode observations in toroidal plasmas», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **41**, R1–R56 (1999) DOI: 10.1088/0741-3335/41/1/001.
- [17] Y. I. Kolesnichenko, A. Könies, V. V. Lutsenko, and Y. V. Yakovenko, «Affinity and difference between energetic-ion-driven instabilities in 2D and 3D toroidal systems», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **53**, 024007 (2011) DOI: 10.1088/0741-3335/53/2/024007.
- [18] K. Toi, K. Ogawa, M. Isobe, M. Osakabe, D. A. Spong, and Y. Todo, «Energetic-ion-driven global instabilities in stellarator/helical plasmas and comparison with tokamak plasmas», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **53**, 024008 (2011) DOI: 10.1088/0741-3335/53/2/024008.

- [19] E. Fredrickson, N. Gorelenkov, R. Bell, J. Menard, A. Roquemore, S. Kubota, N. Crocker, and W. Peebles, «Fast ion loss in a 'sea-of-TAE'», *Nuclear Fusion* **46**, S926–S932 (2006) DOI: 10.1088/0029-5515/46/10/s09.
- [20] A. Fasoli, D. Testa, S. Sharapov, H. L. Berk, B. Breizman, A. Gondhalekar, R. F. Heeter, M. Mantsinen, and contributors to the EFDA-JET Workprogramme, «MHD spectroscopy», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **44**, B159–B172 (2002) DOI: 10.1088/0741-3335/44/12b/312.
- [21] G. Besson, A. de Chambrier, G. A. Collins, B. Joye, A. Lietti, J. B. Lister, J. M. Moret, S. Nowak, C. Simm, and H. Weisen, «A review of Alfvén wave heating», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **28**, 1291–1303 (1986) DOI: 10.1088/0741-3335/28/9a/008.
- [22] O. M. Shvets, L. A. Dikij, S. S. Kalinichenko, A. I. Lysojvan, N. I. Nazarov, T. Y. Ranyuk, D. L. Grekov, K. N. Stepanov, and V. T. Tolok, «Absorption of Alfvén waves and plasma production in the OMEGA and URAGAN-3 toroidal devices», *Nuclear Fusion* **26**, 23–41 (1986) DOI: 10.1088/0029-5515/26/1/003.
- [23] S. N. Golovato and J. L. Shohet, «Plasma heating by Alfvén wave excitation in the Proto-Cleo stellarator», *The Physics of Fluids* **21**, 1421–1427 (1978) DOI: 10.1063/1.862385.
- [24] O. M. Shvets, S. S. Kalinichenko, A. I. Lyssoivan, N. I. Nazarov, A. S. Slavnyi, K. N. Stepanov, and V. F. Tarasenko, «Heating of a three-component current-free plasma by Alfvén waves in the Uragan-2 stellarator», *JETP Letters* **34**, 508 (1981).
- [25] L. Ruchko and E. e. Lerche, «The analysis of alfvén wave current drive and plasma heating in TCABR tokamak», *Brazilian Journal of Physics* **32**, 57–64 (2002) DOI: 10.1590/S0103-97332002000100012.
- [26] V. Dolgoplov and K. Stepanov, «Cerenkov absorption of Alfvén waves and of fast magneto-acoustic waves in an inhomogeneous plasma», *Nuclear Fusion* **5**, 276–278 (1965) DOI: 10.1088/0029-5515/5/4/003.
- [27] L. Chen and A. Hasegawa, «Plasma heating by spatial resonance of Alfvén wave», *The Physics of Fluids* **17**, 1399–1403 (1974) DOI: 10.1063/1.1694904.

- [28] V. E. Moiseenko, A. V. Lozin, M. M. Kozulia, Y. K. Mironov, V. S. Romanov, V. G. Konovalov, and A. N. Shapoval, «Alfvén Plasma Heating in Stellarator Uragan-2M», *Ukrainian Journal of Physics*, **62**, 311 (2018) DOI: 10.15407/ujpe62.04.0311.
- [29] A. Weller, M. Anton, J. Geiger, M. Hirsch, R. Jaenicke, A. Werner, C. Nührenberg, E. Sallander, and D. A. Spong, «Survey of magnetohydrodynamic instabilities in the advanced stellarator Wendelstein 7-AS», *Physics of Plasmas* **8**, 931–956 (2001) DOI: 10.1063/1.1346633.
- [30] D. Stutman, L. Delgado-Aparicio, N. Gorelenkov, M. Finkenthal, E. Fredrickson, S. Kaye, E. Mazzucato, and K. Tritz, «Correlation between Electron Transport and Shear Alfvén Activity in the National Spherical Torus Experiment», *Phys. Rev. Lett.* **102**, 115002 (2009) DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.115002.
- [31] N. Crocker, E. Fredrickson, N. Gorelenkov, W. Peebles, S. Kubota, R. Bell, A. Diallo, B. LeBlanc, J. Menard, M. Podestà, K. Tritz, and H. Yuh, «Internal amplitude, structure and identification of compressional and global Alfvén eigenmodes in NSTX», *Nuclear Fusion* **53**, 043017 (2013) DOI: 10.1088/0029-5515/53/4/043017.
- [32] E. V. Belova, N. N. Gorelenkov, N. A. Crocker, J. B. Lestz, E. D. Fredrickson, S. Tang, and K. Tritz, «Nonlinear simulations of beam-driven compressional Alfvén eigenmodes in NSTX», *Physics of Plasmas* **24**, 042505 (2017) DOI: 10.1063/1.4979278.
- [33] Y. I. Kolesnichenko, Y. V. Yakovenko, A. Weller, A. Werner, J. Geiger, V. V. Lutsenko, and S. Zegenhagen, «Novel Mechanism of Anomalous Electron Heat Conductivity and Thermal Crashes during Alfvénic Activity in the Wendelstein 7-AS Stellarator», *Phys. Rev. Lett.* **94**, 165004 (2005) DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.165004.
- [34] Y. I. Kolesnichenko, Y. V. Yakovenko, V. V. Lutsenko, R. B. White, and A. Weller, «Effects of energetic-ion-driven instabilities on plasma heating, transport and rotation in toroidal systems», *Nuclear Fusion* **50**, 084011 (2010) DOI: 10.1088/0029-5515/50/8/084011.
- [35] N. Gorelenkov, D. Stutman, K. Tritz, A. Boozer, L. Delgado-Aparicio, E. Fredrickson, and R. B. Kaye S. and White, «Anomalous electron transport

- due to multiple high frequency beam ion driven Alfvén eigenmodes», *Nuclear Fusion* **50**, 084012 (2010) DOI: 10.1088/0029-5515/50/8/084012.
- [36] Y. I. Kolesnichenko, Y. V. Yakovenko, and V. V. Lutsenko, «Channeling of the Energy and Momentum during Energetic-Ion-Driven Instabilities in Fusion Plasmas», *Phys. Rev. Lett.* **104**, 075001 (2010) DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.075001.
- [37] M. H. Tyshchenko and Y. V. Yakovenko, «Spatial Energy Channelling and Stochastization of Fast Ion Motion by High-Frequency Plasma Instabilities», *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics* №1(95), 49–52 (2015).
- [38] M. H. Tyshchenko and Y. V. Yakovenko, «Transformations of kinetic Alfvén waves in toroidal plasmas», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **54**, 065002 (2012) DOI: 10.1088/0741-3335/54/6/065002.
- [39] Y. V. Yakovenko, O. S. Burdo, Y. I. Kolesnichenko, and M. H. Tyshchenko, «Bucket transport of energetic ions in tokamaks», *Physics Letters A* **379**, 2062–2067 (2015) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2015.06.041>.
- [40] Y. I. Kolesnichenko, Y. V. Yakovenko, and M. H. Tyshchenko, «Mechanisms of the energy transfer across the magnetic field by Alfvén waves in toroidal plasmas», *Physics of Plasmas* **25**, 122508 (2018) DOI: 10.1063/1.5049543.
- [41] Y. I. Kolesnichenko, V. V. Lutsenko, M. H. Tyshchenko, H. Weisen, Y. V. Yakovenko, and JET Contributors, «Analysis of possible improvement of the plasma performance in JET due to the inward spatial channelling of fast-ion energy», *Nuclear Fusion* **58**, 076012 (2018) DOI: 10.1088/1741-4326/aac09f.
- [42] H. L. Berk, J. W. Van Dam, Z. Guo, and D. M. Lindberg, «Continuum damping of low- n toroidicity-induced shear Alfvén eigenmodes», *Physics of Fluids B: Plasma Physics* **4**, 1806–1835 (1992) DOI: 10.1063/1.860455.
- [43] R. R. Mett and S. M. Mahajan, «Kinetic theory of toroidicity-induced Alfvén eigenmodes», *Physics of Fluids B: Plasma Physics* **4**, 2885–2893 (1992) DOI: 10.1063/1.860459.
- [44] A. Hasegawa and L. Chen, «Kinetic Process of Plasma Heating Due to Alfvén Wave Excitation», *Phys. Rev. Lett.* **35**, 370–373 (1975) DOI: 10.1103/PhysRevLett.35.370.

- [45] J. Candy and M. N. Rosenbluth, «Nonideal theory of toroidal Alfvén eigenmodes», *Physics of Plasmas* **1**, 356–372 (1994) DOI: 10.1063/1.870838.
- [46] J. von Neumann and E. Wigner, «Eigenwerte bei adiabatischen prozessen», *Physikalische Zeitschrift* **30**, 467–470 (1929).
- [47] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Теоретическая физика. Т.3. - 4-е изд. испр. (Наука, Москва, 1989), 767 с.
- [48] C. E. Kieras and J. A. Tataronis, «The shear Alfvén continuous spectrum of axisymmetric toroidal equilibria in the large aspect ratio limit», *Journal of Plasma Physics* **28**, 395–414 (1982) DOI: 10.1017/S0022377800000386.
- [49] O. P. Fesenyuk, Y. I. Kolesnichenko, V. V. Lutsenko, H. Wobig, and Y. V. Yakovenko, «Kinetic mirror-induced Alfvén eigenmodes in Wendelstein-type stellarators», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **46**, 89–104 (2003) DOI: 10.1088/0741-3335/46/1/006.
- [50] M. N. Rosenbluth and P. H. Rutherford, «Excitation of Alfvén Waves by High-Energy Ions in a Tokamak», *Phys. Rev. Lett.* **34**, 1428–1431 (1975) DOI: 10.1103/PhysRevLett.34.1428.
- [51] Y. I. Kolesnichenko, V. V. Lutsenko, H. Wobig, Y. V. Yakovenko, and O. P. Fesenyuk, «Alfvén continuum and high-frequency eigenmodes in optimized stellarators», *Physics of Plasmas* **8**, 491–509 (2001) DOI: 10.1063/1.1339228.
- [52] A. H. Boozer, «Plasma equilibrium with rational magnetic surfaces», *The Physics of Fluids* **24**, 1999–2003 (1981) DOI: 10.1063/1.863297.
- [53] R. B. White, *The Theory of Toroidally Confined Plasmas*, Vol. 2nd ed ("Imperial College Press", 2006), p. 367.
- [54] J. Heading, *An introduction to phase-integral methods* (London : Methuen & Co ; New York : J. Wiley & Sons, 1962).
- [55] H. L. Berk, R. R. Mett, and D. M. Lindberg, «Arbitrary mode number boundary-layer theory for nonideal toroidal Alfvén modes», *Physics of Fluids B: Plasma Physics* **5**, 3969–3996 (1993) DOI: 10.1063/1.860617.
- [56] M. Ono, S. M. Kaye, Y.-K. M. Peng, G. Barnes, W. Blanchard, M. D. Carter, J. Chrzanowski, L. Dudek, R. Ewig, D. Gates, R. E. Hatcher, T. Jarboe, S. Jardin, D. Johnson, R. Kaita, M. Kalish, C. E. Kessel,

- H. W. Kugel, R. Maingi, R. Majeski, J. Manickam, B. McCormack, J. Menard, D. Mueller, B. A. Nelson, B. Nelson, C. Neumeyer, G. Oliaro, F. Paoletti, R. Parsells, E. Perry, N. Pomphrey, S. Ramakrishnan, R. Raman, G. Rewoldt, J. Robinson, A. Roquemore, P. Ryan, S. Sabbagh, D. Swain, E. J. Synakowski, M. Viola, M. Williams, J. R. Wilson, and NSTX Team, «Exploration of spherical torus physics in the NSTX device», *Nuclear Fusion* **40**, 557–561 (2000) DOI: 10.1088/0029-5515/40/3y/316.
- [57] S. Gerhardt, D. Gates, S. Kaye, R. Maingi, J. Menard, S. Sabbagh, V. Soukhanovskii, M. Bell, R. Bell, J. Canik, E. Fredrickson, R. Kaita, E. Kolemen, H. Kugel, B. Le Blanc, D. Mastrovito, D. Mueller, and H. Yuh, «Recent progress towards an advanced spherical torus operating point in NSTX», *Nuclear Fusion* **51**, 073031 (2011) DOI: 10.1088/0029-5515/51/7/073031.
- [58] Y. I. Kolesnichenko, V. V. Lutsenko, A. Weller, A. Werner, Y. V. Yakovenko, J. Geiger, and O. P. Fesenyuk, «Conventional and nonconventional global Alfvén eigenmodes in stellarators», *Physics of Plasmas* **14**, 102504 (2007) DOI: 10.1063/1.2789558.
- [59] G. J. Kramer and G.-Y. Fu, «Reversed shear Alfvén eigenmodes associated with the ellipticity and triangularity Alfvén gaps», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **48**, 1285–1295 (2006) DOI: 10.1088/0741-3335/48/9/002.
- [60] G. J. Kramer, F. G.-Y., R. Nazikian, R. V. Budny, C. Z. Cheng, N. N. Gorelenkov, S. D. Pinches, S. E. Sharapov, K.-D. Zastrow, and JET-EFDA Contributors, «Reversed shear Alfvén eigenmodes in the frequency range of the triangularity induced gap on JET», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **50**, 082001 (2008) DOI: 10.1088/0741-3335/50/8/082001.
- [61] L. Yu, G.-Y. Fu, and Z.-M. Sheng, «Kinetic damping of Alfvén eigenmodes in general tokamak geometry», *Physics of Plasmas* **16**, 072505 (2009) DOI: 10.1063/1.3190158.
- [62] O. P. Fesenyuk, Y. V. Yakovenko, Y. I. Kolesnichenko, and A. A. Pasichnyi, «Theory of generation of kinetic Alfvén waves by Non-conventional Global Alfvén Eigenmodes», *Nuclear Fusion* **50**, 084018 (2010) DOI: 10.1088/0029-5515/50/8/084018.

- [63] Y. M. Voitenko, «Three-wave coupling and parametric decay of kinetic Alfvén waves», *Journal of Plasma Physics* **60**, 497–514 (1998) DOI: 10.1017/S0022377898007090.
- [64] O. G. Onishchenko, O. A. Pokhotelov, R. Z. Sagdeev, L. Stenflo, R. A. Treumann, and M. A. Balikhin, «Generation of convective cells by kinetic Alfvén waves in the upper ionosphere», *Journal of Geophysical Research: Space Physics* **109**, A03306 (2004) DOI: <https://doi.org/10.1029/2003JA010248>.
- [65] Z. Chang, J. D. Callen, E. D. Fredrickson, R. V. Budny, C. C. Hegna, K. M. McGuire, M. C. Zarnstorff, and TFTR group, «Observation of Nonlinear Neoclassical Pressure-Gradient-Driven Tearing Modes in TFTR», *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4663–4666 (1995) DOI: 10.1103/PhysRevLett.74.4663.
- [66] S. von Goeler, W. Stodiek, and N. Sauthoff, «Studies of Internal Disruptions and $m = 1$ Oscillations in Tokamak Discharges with Soft-X-Ray Techniques», *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1201–1203 (1974) DOI: 10.1103/PhysRevLett.33.1201.
- [67] A. A. Ware, «Toroidal Contributions to the Shear and the $j_{\parallel}$ -Kink Instability in the Tokamak and Screw Pinch», *Phys. Rev. Lett.* **26**, 1304–1307 (1971) DOI: 10.1103/PhysRevLett.26.1304.
- [68] J. E. Menard, R. E. Bell, D. A. Gates, S. M. Kaye, B. P. LeBlanc, F. M. Levinton, S. S. Medley, S. A. Sabbagh, D. Stutman, K. Tritz, and H. Yuh, «Observation of Instability-Induced Current Redistribution in a Spherical-Torus Plasma», *Phys. Rev. Lett.* **97**, 095002 (2006) DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.095002.
- [69] T. E. Evans, R. A. Moyer, P. R. Thomas, J. G. Watkins, T. H. Osborne, J. A. Boedo, E. J. Doyle, M. E. Fenstermacher, K. H. Finken, R. J. Groebner, M. Groth, J. H. Harris, R. J. La Haye, C. J. Lasnier, S. Masuzaki, N. Ohyabu, D. G. Pretty, T. L. Rhodes, H. Reimerdes, D. L. Rudakov, M. J. Schaffer, G. Wang, and L. Zeng, «Suppression of Large Edge-Localized Modes in High-Confinement DIII-D Plasmas with a Stochastic Magnetic Boundary», *Phys. Rev. Lett.* **92**, 235003 (2004) DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.235003.
- [70] C. Z. Cheng, R. V. Budny, L. Chen, M. S. Chu, D. S. Darrow, E. D. Fredrickson, T. S. Fu G.-Y. and Hahm, C. T. Hsu, E. Mazzucato, and et al., «Energetic/alpha particle effects on MHD modes and transport», in

- Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1994, 15th Conf. Proc., Seville, 1994, Vol. 3 (1995), pp. 373–389.
- [71] V. S. Marchenko, «Fast ion transport induced by saturated infernal mode», *Physics of Plasmas* **21**, 054504 (2014) DOI: 10.1063/1.4881418.
 - [72] H. L. Berk and B. N. Breizman, «Saturation of a single mode driven by an energetic injected beam. II. Electrostatic “universal” destabilization mechanism», *Physics of Fluids B: Plasma Physics* **2**, 2235–2245 (1990) DOI: 10.1063/1.859405.
 - [73] R. G. Littlejohn, «Variational principles of guiding centre motion», *Journal of Plasma Physics* **29**, 111–125 (1983) DOI: 10.1017/S002237780000060X.
 - [74] Y. I. Kolesnichenko, R. B. White, and Y. V. Yakovenko, «Precession of toroidally passing particles in tokamaks and spherical tori», *Physics of Plasmas* **10**, 1449–1457 (2003) DOI: 10.1063/1.1568343.
 - [75] O. S. Burdo, Y. I. Kolesnichenko, S. Sipilä, and Y. V. Yakovenko, «Numerical study of precession of circulating particles in tokamaks», *Journal of Plasma Physics* **77**, 559–569 (2011) DOI: 10.1017/S0022377810000735.
 - [76] R. B. White and M. S. Chance, «Hamiltonian guiding center drift orbit calculation for plasmas of arbitrary cross section», *The Physics of Fluids* **27**, 2455–2467 (1984) DOI: 10.1063/1.864527.
 - [77] K. Appert, R. Gruber, F. Troyon, and J. Vaclavik, «Excitation of global eigenmodes of the Alfvén wave in Tokamaks», *Plasma Physics* **24**, 1147–1159 (1982) DOI: 10.1088/0032-1028/24/9/010.
 - [78] S. M. Mahajan, D. W. Ross, and G. Chen, «Discrete Alfvén eigenmode spectrum in magnetohydrodynamics», *The Physics of Fluids* **26**, 2195–2199 (1983) DOI: 10.1063/1.864404.
 - [79] Y. Kolesnichenko and A. Tykhyy, «Temperature gradient driven Alfvén instability producing inward energy flux in stellarators», *Physics Letters A* **382**, 2689–2692 (2018) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2018.06.014>.
 - [80] O. P. Fesenyuk, Y. I. Kolesnichenko, H. Wobig, and Y. V. Yakovenko, «Ideal magnetohydrodynamic equations for low-frequency waves in toroidal plasmas», *Physics of Plasmas* **9**, 1589–1595 (2002) DOI: 10.1063/1.1462633.

- [81] Y. I. Kolesnichenko, V. V. Lutsenko, H. Wobig, Y. V. Yakovenko, and O. P. Fesenyuk, «Alfvén continuum and high-frequency eigenmodes in optimized stellarators», *Physics of Plasmas* **8**, 491–509 (2001) DOI: 10.1063/1.1339228.
- [82] H. Strauss, «Finite-aspect-ratio MHD equations for tokamaks», *Nuclear Fusion* **23**, 649–655 (1983) DOI: 10.1088/0029-5515/23/5/006.
- [83] B. Coppi, S. Migliuolo, and F. Porcelli, «Macroscopic plasma oscillation bursts (fishbones) resulting from high-energy populations», *The Physics of Fluids* **31**, 1630–1648 (1988) DOI: 10.1063/1.866702.
- [84] J. Candy, B. Breizman, J. Van Dam, and T. Ozeki, «Multiplicity of low-shear toroidal Alfvén eigenmodes», *Physics Letters A* **215**, 299–304 (1996) DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(96\)00197-1](https://doi.org/10.1016/0375-9601(96)00197-1).
- [85] Y. I. Kolesnichenko, V. V. Lutsenko, H. Wobig, and V. Yakovenko, «Alfvén instabilities driven by circulating ions in optimized stellarators and their possible consequences in a Helias reactor», *Physics of Plasmas* **9**, 517–528 (2002) DOI: 10.1063/1.1432993.
- [86] Y. I. Kolesnichenko and A. V. Tykhyy, «Radial energy flux during destabilized Alfvén eigenmodes», *Physics of Plasmas* **25**, 102507 (2018) DOI: 10.1063/1.5048380.
- [87] C. Z. Cheng and M. S. Chance, «Low-n shear Alfvén spectra in axisymmetric toroidal plasmas», *The Physics of Fluids* **29**, 3695–3701 (1986) DOI: 10.1063/1.865801.
- [88] M. N. Rosenbluth, H. L. Berk, J. W. Van Dam, and D. M. Lindberg, «Mode structure and continuum damping of high-n toroidal Alfvén eigenmodes*», *Physics of Fluids B: Plasma Physics* **4**, 2189–2202 (1992) DOI: 10.1063/1.860023.
- [89] G. Y. Fu, «Existence of core localized toroidicity-induced Alfvén eigenmode», *Physics of Plasmas* **2**, 1029–1031 (1995) DOI: 10.1063/1.871382.
- [90] H. L. Berk, J. W. Van Dam, D. Borba, J. Candy, G. T. A. Huysmans, and S. Sharapov, «More on core-localized toroidal Alfvén eigenmodes», *Physics of Plasmas* **2**, 3401–3406 (1995) DOI: 10.1063/1.871174.

- [91] Y. Lee and J. Van Dam, «Kinetic Theory of Ballooning Instabilities», in Proceedings of the Finite Beta Theory Workshop, September 1977, Varenna, Italy (1979), pp. 93–101.
- [92] J. W. Connor, R. J. Hastie, and J. B. Taylor, «High mode number stability of an axisymmetric toroidal plasma», Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences **365**, 1–17 (1979) DOI: 10.1098/rspa.1979.0001.
- [93] R. Dewar, J. Manickam, R. Grimm, and M. Chance, «n-dependence of ballooning instabilities», Nuclear Fusion **21**, 493–498 (1981) DOI: 10.1088/0029-5515/21/4/008.
- [94] G. Y. Fu and C. Z. Cheng, «Theory of a high- n toroidicity-induced shear Alfvén eigenmode in tokamaks», Physics of Fluids B: Plasma Physics **2**, 985–993 (1990) DOI: 10.1063/1.859245.
- [95] F. Zonca and L. Chen, «Theory of continuum damping of toroidal Alfvén eigenmodes in finite- β tokamaks», Physics of Fluids B: Plasma Physics **5**, 3668–3690 (1993) DOI: 10.1063/1.860839.
- [96] Y. I. Kolesnichenko, V. V. Lutsenko, A. Weller, A. Werner, H. Wobig, Y. V. Yakovenko, J. Geiger, and S. Zegenhagen, «Effects of fast-ion-orbit width on Alfvén instabilities in stellarators: a general theory and its application to a W7-AS experiment», Nuclear Fusion **46**, 753–769 (2006) DOI: 10.1088/0029-5515/46/8/001.
- [97] B. V. Chirikov, «A universal instability of many-dimensional oscillator systems», Physics Reports **52**, 263–379 (1979) DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(79\)90023-1](https://doi.org/10.1016/0370-1573(79)90023-1).
- [98] R. B. White, *The theory of toroidally confined plasmas*, Vol. 3rd ed (London:Imperial College Press, 2014), p. 494.
- [99] P. R. Thomas, P. Andrew, B. Balet, D. Bartlett, J. Bull, B. de Esch, A. Gibson, C. Gowers, H. Guo, G. Huysmans, T. Jones, M. Keilhacker, R. Koenig, M. Lennholm, P. Lomas, A. Maas, F. Marcus, F. Nave, V. Parail, F. Rimini, J. Strachan, K.-D. Zastrow, and N. Zornig, «Observation of Alpha Heating in JET DT Plasmas», Phys. Rev. Lett. **80**, 5548–5551 (1998) DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.5548.
- [100] Thomas.P., G. C., P. Lomas, P. Stubberfield, S. Sharapov, and D. t. Testa, «Heating of thermal ions by alphas in the JET DT experiment», in Proc. 28th

- EPS Conf. Controlled Fusion and Plasma Physics, Madeira, Portugal, 18-22 June 2001, Europhysics Conference Abstracts, Vol. 25 (2001), pp. 929–932.
- [101] S. E. Sharapov, L.-G. Eriksson, A. Fasoli, G. Gorini, J. Källne, V. G. Kiptily, A. A. Korotkov, A. Murari, D. S. Pinches S. D. and Testa, and P. R. Thomas, «Chapter 5: Burning Plasma Studies at JET», *Fusion Science and Technology* **53**, 989–1022 (2008) DOI: 10.13182/FST08-A1745.
 - [102] H. Weisen, A. C. C. Sips, C. D. Challis, L.-G. Eriksson, S. E. Sharapov, P. Batistoni, L. D. Horton, K.-D. Zastrow, and EFDA-JET Contributors, «The scientific case for a JET D-T experiment», *AIP Conference Proceedings* **1612**, 77–86 (2014) DOI: 10.1063/1.4894028.
 - [103] G. A. Cottrell and R. O. Dendy, «Superthermal Radiation from Fusion Products in JET», *Phys. Rev. Lett.* **60**, 33–36 (1988) DOI: 10.1103/PhysRevLett.60.33.
 - [104] S. Cauffman and R. Majeski, «Ion cyclotron emission on the Tokamak Fusion Test Reactor», *Review of Scientific Instruments* **66**, 817–819 (1995) DOI: 10.1063/1.1146232.
 - [105] M. Ichimura, H. Higaki, S. Kakimoto, Y. Yamaguchi, K. Nemoto, M. Katano, S. Ishikawa M. and Moriyama, and T. Suzuki, «Observation of spontaneously excited waves in the ion cyclotron frequency range on JT-60U», *Nuclear Fusion* **48**, 035012 (2008) DOI: 10.1088/0029-5515/48/3/035012.
 - [106] K. Saito, R. Kumazawa, T. Seki, H. Kasahara, G. Nomura, F. Shimpo, H. Igami, M. Isobe, K. Ogawa, K. Toi, M. Osakabe, M. Nishiura, T. Watanabe, S. Yamamoto, M. Ichimura, and T. Mutoh, «Measurement of Ion Cyclotron Emissions by Using High-Frequency Magnetic Probes in the LHD», *Plasma Science and Technology* **15**, 209–212 (2013) DOI: 10.1088/1009-0630/15/3/03.
 - [107] W. W. Heidbrink, R. K. Austin M. E. andd Fisher, M. García-Muñoz, G. Matsunaga, R. McKeeG, R. A. Moyer, C. M. Muscatello, M. Okabayashi, D. C. Pace, K. Shinohara, W. M. Solomon, E. J. Strait, M. A. Van Zeeland, and Y. B. Zhu, «Characterization of off-axis fishbones», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **53**, 085028 (2011) DOI: 10.1088/0741-3335/53/8/085028.
 - [108] M. D’Inca R. and Garcia-Munoz, G. Tardini, and J.-M. t. Noterdaeme, «Characteristics of Ion Cyclotron Emission on ASDEX Upgrade», in 38th

- EPS Conference on Plasma Physics, 27 June - 1 July 2011, Vol. 35G (2011), P1.053.
- [109] G. Cottrell, V. Bhatnagar, O. D. Costa, R. Dendy, J. Jacquinet, K. McClements, D. McCune, M. Nave, P. Smeulders, and D. Start, «Ion cyclotron emission measurements during JET deuterium-tritium experiments», *Nuclear Fusion* **33**, 1365–1387 (1993) DOI: 10.1088/0029-5515/33/9/i10.
 - [110] G. A. Cottrell, «Identification of Minority Ion-Cyclotron Emission during Radio Frequency Heating in the JET Tokamak», *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2397–2400 (2000) DOI: 10.1103/PhysRevLett.84.2397.
 - [111] K. McClement, R. D'Inca, R. Dendy, L. Carbajal, S. Chapman, J. Cook, W. Harvey R.W. and. Heidbrink, and S. Pinches, «Fast particle-driven ion cyclotron emission (ICE) in tokamak plasmas and the case for an ICE diagnostic in ITER», *Nuclear Fusion* **55**, 043013 (2015) DOI: 10.1088/0029-5515/55/4/043013.
 - [112] R. Dendy, K. McClements, C. Lashmore-Davies, G. Cottrell, R. Majeski, and S. Cauffman, «Ion cyclotron emission due to collective instability of fusion products and beam ions in TFTR and JET», *Nuclear Fusion* **35**, 1733–1742 (1995) DOI: 10.1088/0029-5515/35/12/i38.
 - [113] N. Gorelenkov and C. Cheng, «Alfven cyclotron instability and ion cyclotron emission», *Nuclear Fusion* **35**, 1743–1752 (1995) DOI: 10.1088/0029-5515/35/12/i39.
 - [114] Y. I. Kolesnichenko, D. Anderson, T. Fulop, and M. Lisak, «Novel Mechanism of ion cyclotron emission in Tokamaks», in *Proc. of 16th IAEA Conference of Fusion Energy, Montreal, 7-11 October 1996*, Vol. 2 (1997), p. 487.
 - [115] T. Fulop, Y. Kolesnichenko, M. Lisak, and D. Anderson, «Origin of superthermal ion cyclotron emission in tokamaks», *Nuclear Fusion* **37**, 1281–1293 (1997) DOI: 10.1088/0029-5515/37/9/i08.
 - [116] R. O. Dendy, C. N. Lashmore-Davies, and K. F. Kam, «A possible excitation mechanism for observed superthermal ion cyclotron emission from tokamak plasmas», *Physics of Fluids B: Plasma Physics* **4**, 3996–4006 (1992) DOI: 10.1063/1.860304.

- [117] H. M. Smith and E. Verwichte, «Compressional Alfvén eigenmode structure in spherical tokamaks», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **51**, 075001 (2009) DOI: 10.1088/0741-3335/51/7/075001.
- [118] Y. Kolesnichenko, T. Fülöp, M. Lisak, and D. Anderson, «Localized fast magnetoacoustic eigenmodes in tokamak plasmas», *Nuclear Fusion* **38**, 1871–1879 (1998) DOI: 10.1088/0029-5515/38/12/311.
- [119] R. B. White, *The Theory of Toroidally Confined Plasmas* (London: Imperial College Press, 2001), p. 295.
- [120] Y. Kolesnichenko and V. Yavorskij, «Ripple induced diffusion of fast ions in tokamaks with an elliptic cross-section», *Nuclear Fusion* **29**, 1319–1323 (1989) DOI: 10.1088/0029-5515/29/8/008.
- [121] D. Sigmar and G. Joyce, «Plasma heating by energetic particles», *Nuclear Fusion* **11**, 447–456 (1971) DOI: 10.1088/0029-5515/11/5/006.
- [122] J. W. S. Cook, R. O. Dendy, and S. C. Chapman, «Stimulated Emission of Fast Alfvén Waves within Magnetically Confined Fusion Plasmas», *Phys. Rev. Lett.* **118**, 185001 (2017) DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.185001.
- [123] D. Testa and M. Albergante, «Evidence for a new path to the self-sustainment of thermonuclear fusion in magnetically confined plasmas», *EPL (Europhysics Letters)* **97**, 35003 (2012) DOI: 10.1209/0295-5075/97/35003.
- [124] J. Garcia, C. Challis, J. Citrin, H. Doerk, G. Giruzzi, T. Görler, F. Jenko, P. Maget, and JET Contributors, «Key impact of finite-beta and fast ions in core and edge tokamak regions for the transition to advanced scenarios», *Nuclear Fusion* **55**, 053007 (2015) DOI: 10.1088/0029-5515/55/5/053007.
- [125] H.-T. Kim, A. Sips, M. Romanelli, C. Challis, F. Rimini, L. Garzotti, E. Lerche, J. Buchanan, X. Yuan, S. Kaye, and JET contributors, «High fusion performance at high T_i/T_e in JET-ILW baseline plasmas with high NBI heating power and low gas puffing», *Nuclear Fusion* **58**, 036020 (2018) DOI: 10.1088/1741-4326/aaa582.
- [126] R. Budny and JET contributors, «Alpha heating and isotopic mass effects in JET plasmas with sawteeth», *Nuclear Fusion* **56**, 036013 (2016) DOI: 10.1088/0029-5515/56/3/036013.
- [127] J. Jacquinot and JET Team, «JET results in D-T divertor plasmas», *Nuclear Fusion* **38**, 1263–1273 (1998) DOI: 10.1088/0029-5515/38/9/301.

- [128] C. F. Maggi, H. Weisen, J. C. Hillesheim, A. Chankin, E. Delabie, L. Horvath, F. Auriemma, I. S. Carvalho, G. Corrigan, J. Flanagan, L. Garzotti, D. Keeling, D. King, E. Lerche, R. Lorenzini, M. Maslov, S. Menmuir, S. Saarelma, A. C. C. Sips, E. R. Solano, F. J. Belonohy E. and Casson, C. Challis, C. Giroud, V. Parail, C. Silva, M. Valisa, and JET Contributors, «Isotope effects on L-H threshold and confinement in tokamak plasmas», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **60**, 014045 (2017) DOI: 10.1088/1361-6587/aa9901.
- [129] H. Urano, T. Takizuka, N. Aiba, M. Kikuchi, T. Nakano, T. Fujita, N. Oyama, N. Kamada Y. and Hayashi, and the JT-60 Team, «Hydrogen isotope effects on ITG scale length, pedestal and confinement in JT-60 H-mode plasmas», *Nuclear Fusion* **53**, 083003 (2013) DOI: 10.1088/0029-5515/53/8/083003.

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

Наукові праці у наукових фахових виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. **М.Н. Tyshchenko** and Yu.V. Yakovenko, «Spatial energy channeling and stochastization of fast ion motion by high-frequency plasma instabilities», Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics №1(95), 49-52 (2015). *(Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить отримання аналітичного виразу для ширини резонансного острова, створеного альфвеновою власною модою в фазовому просторі, участь у створенні числових кодів та виконанні числових розрахунків, а також написанні частини тексту.)* (Видання входить до SCOPUS та Web of Science)

Наукові праці у зарубіжних наукових спеціалізованих виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

2. **М.Н. Tyshchenko** and Yu.V. Yakovenko, «Transformations of kinetic Alfvén waves in toroidal plasmas», Plasma Physics and Controlled Fusion **54**, Vol. 54, P. 065002 (2012). *(Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить виведення аналітичних виразів для амплітуди трансформованої і нетрансформованої хвиль, а також участь у написанні частини тексту.)* (Видання входить до SCOPUS та Web of Science)
3. Yu.V. Yakovenko, O.S. Burdo, Ya.I. Kolesnichenko, and **М.Н. Tyshchenko**, «Bucket transport of energetic ions in tokamaks», Physics Letters A **379**, 2062-2067 (2015). *(Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить отримання виразів для потоків енергії та частинок при цєберному перенесенні.)* (Видання входить до SCOPUS та Web of Science)
4. Ya.I. Kolesnichenko, V.V. Lutsenko, **М.Н. Tyshchenko**, H. Weisen, Yu.V. Yakovenko, and JET Contributors, «Analysis of possible improvement of the plasma performance in JET due to the inward spatial channelling of fast-ion energy», Nuclear Fusion **58**, 076012 (2018). *(Особистий внесок*

здобувача: здобувачеві належить обчислення просторового каналювання в однорідній моделі, а також участь у виведенні рівнянь та числових розрахунках.) (Видання входить до SCOPUS та Web of Science)

5. Ya.I. Kolesnichenko, Yu.V. Yakovenko, and **М.Н. Tyshchenko**, «Mechanisms of the energy transfer across the magnetic field by Alfvén waves in toroidal plasmas», *Physics of Plasmas* **25**, 122508 (2018). (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належать розрахунки радіальної групової швидкості для біжучих хвиль, які утворюють GAE-моди, а також участь у виведенні рівнянь, обговоренні результатів та написанні тексту.) (Видання входить до SCOPUS та Web of Science)

Наукові праці, які засвідчують апробацію результатів дисертації

6. **М.Н. Tyshchenko** and Yu.V. Yakovenko, in: *Proceedings of the 5th ITER International Summer School “MHD and Energetic Particles”*, (Aix en Provence, 2011), P. 64. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить виведення аналітичних виразів для амплітуди трансформованої і нетрансформованої хвиль, участь в обговоренні результатів; доповідач.)
7. **М.Н. Tyshchenko** and Yu.V. Yakovenko, in: *Proceedings of the 5th IAEA Techninal Meeting on the The Theory of Plasma Instabilities*, (IAEA, Vienna, 2011), P. 28. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить виведення аналітичних виразів для амплітуди трансформованої і нетрансформованої хвиль, участь в обговоренні результатів.)
8. **М.Г. Тищенко** та Ю.В. Яковенко, в: *Матеріали Української конференції з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу*, (ІЯД НАНУ та ІТФ НАНУ, Київ, 2011), С.21. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить виведення аналітичних виразів для амплітуди трансформованої і нетрансформованої хвиль, участь в обговоренні результатів; доповідач.)
9. **М.Г. Тищенко** та Ю.В. Яковенко, в: *Матеріали XX щорічної наукової конференції Інституту ядерних досліджень НАН України*, (ІЯД НАНУ, Київ, 2013), С. 143-144. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить отримання аналітичного виразу для ширини резонансного острова, участь у написанні числового коду, числові розрахунки та участь в обговоренні результатів; доповідач.)

10. **М.Г. Тищенко** та Ю.В. Яковенко, в: *Матеріали Української конференції з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу*, (ІЯД НАНУ та ІТФ НАНУ, Київ, 2013), С.17. *(Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить виведення аналітичного виразу для ширини резонансного острова, участь у написанні числового коду, числові розрахунки та участь в обговоренні результатів; доповідач.)*
11. **М.Н. Tyshchenko** and Yu.V. Yakovenko, in: *Proceedings of the International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion*, (NSC KIPT, Kharkiv, 2014), P. 42. *(Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить отримання аналітичного виразу для ширини резонансного острова, участь у написанні числового коду, числові розрахунки та участь в обговоренні результатів; доповідач.)*
12. **М.Г. Тищенко** та Ю.В. Яковенко, в: *Матеріали XXII щорічної наукової конференції Інституту ядерних досліджень НАН України*, (ІЯД НАНУ, Київ, 2015), С. 152-153. *(Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить отримання аналітичного виразу для ширини резонансного острова, участь у написанні числового коду, числові розрахунки та участь в обговоренні результатів; доповідач.)*
13. Ю.В. Яковенко, О.С. Бурдо, Я.І. Колесниченко, **М.Г. Тищенко**, в: *Матеріали XXII щорічної наукової конференції Інституту ядерних досліджень НАН України*, (ІЯД НАНУ, Київ, 2015), С. 160. *(Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить отримання виразів для потоків енергії та частинок при цеберному перенесенні.)*
14. Ю.В. Яковенко, О.С. Бурдо, Я.І. Колесниченко, **М.Г. Тищенко**, в: *Матеріали Української конференції з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу*, (ІЯД НАНУ та ІТФ НАНУ, Київ, 2015), С. 5. *(Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить отримання виразів для потоків енергії та частинок при цеберному перенесенні.)*
15. **М.Г. Тищенко** та Ю.В. Яковенко, в: *Матеріали Української конференції з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу*, (ІЯД НАНУ та ІТФ НАНУ, Київ, 2015), С. 22. *(Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить участь у створенні числового коду та числові розрахунки; доповідач.)*

16. Я.І. Колесниченко, **М.Г. Тищенко**, Ю.В. Яковенко, в: *Матеріали XXIV щорічної наукової конференції Інституту ядерних досліджень НАН України*, (ІЯД НАНУ, Київ, 2017), С. 173-174. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належать розрахунки радіальної групової швидкості для біжучих хвиль, які утворюють GAE-моди; доповідач.)
17. Я.І. Колесниченко, В.В. Луценко, **М.Г. Тищенко**, Г. Вейсен, Ю.В. Яковенко, в: *Матеріали XXV щорічної наукової конференції Інституту ядерних досліджень НАН України*, (ІЯД НАНУ, Київ, 2018), С. 157. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить участь у виведенні рівнянь та частина числових розрахунків.)
18. **М.Н. Tyshchenko**, Ya.I. Kolesnichenko, V.V. Lutsenko , Yu.V. Yakovenko, в: *Матеріали XXV щорічної наукової конференції Інституту ядерних досліджень НАН України*, (ІЯД НАНУ, Київ, 2018), С. 165-166. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить обчислення просторового каналювання в однорідній моделі; доповідач.)
19. Ya.I. Kolesnichenko, Yu.V. Yakovenko, **М.Н. Tyshchenko**, in: *Proceedings of the International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion*, (NSC KIPT, Kharkiv, 2018), P. 181. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належать розрахунки радіальної групової швидкості для біжучих хвиль, які утворюють GAE-моди та участь у виведенні рівнянь; доповідач.)
20. **М.Н. Tyshchenko**, Ya.I. Kolesnichenko, Yu.V. Yakovenko, в: *Матеріали XXVI щорічної наукової конференції Інституту ядерних досліджень НАН України*, (ІЯД НАНУ, Київ, 2019), С. 137. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належать розрахунки радіальної групової швидкості для біжучих хвиль, які утворюють GAE-моди та участь у виведенні рівнянь; доповідач.)
21. Я.І. Колесниченко, Ю.В. Яковенко, **М.Г. Тищенко**, в: *Матеріали Української конференції з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу*, (ІЯД НАНУ та ІТФ НАНУ, Київ, 2019), С. 30. (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належать розрахунки радіальної групової швидкості для біжучих хвиль, які утворюють GAE-моди та участь у виведенні рівнянь; доповідач.)

22. Ya.I. Kolesnichenko, Yu.V. Yakovenko, **M.H. Tyshchenko**, in: *Proceedings of the X Conference of Young Scientists "Problems of Theoretical Physics"*, (BITP, Kyiv, 2019), P. 14. (*Особистий внесок здобувача: здобувачеві належать розрахунки радіальної групової швидкості для біжучих хвиль, які утворюють GAE-моди та участь у виведенні рівнянь; доповідач.*)