МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.Н. КАРАЗИНА

# *МОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

Учебное пособие
для студентов специальности "механика"

2015

УДК 531 : 539.3

МОМЕНТНА ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ. Учбовий посібник для студентів III-IV курсів спеціальності “Механіка”
/ Укладач І.І. Ієвлев – Харків: ХНУ ім.. В.Н.Каразіна, 2015. – 31 с.

Учбовий посібник містить опис термодинаміки пружно деформуємого твердого тіла в наближенні лінійної теорії пружності, коли враховуються внутрішній момент кількості руху та розподілені моменти пар сил. Використовуються методи термодинаміки для побудови головних співвідношень, рівнянь рівноваги та динаміки пружного тіла. Наведен приклад розв’язання задачі розповсюдження плоских хвиль у просторі.

Рекомендовано студентам 3-4 курсів університету, що вивчають теорію пружності.

Рецензент: кандидат фіз.мат.наук, доцент кафедри теоретичної та прикладної механіки Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна Л.П. Терехов

Рекомендовано до друку кафедрою теоретичної та прикладної механіки Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна (протокол №5 від 06.11. 2014.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Общий вид уравнений импульсов и кинетического момента

Рассматривается движение деформируемого твердого тела $V$, ограниченного поверхностью $\Sigma$ (рис.1). Пусть положение макро дифференциала сплошной среды характеризуется координатами его центра масс и пространственной ориентацией трех связанных с ним осей. Будем полагать, как это принято в линейной теории упругости, что перемещения центра масс и углы поворота относительно некоторой ориентации малыми. В этом случае лагранжевы и эйлеровы координаты точек тела совпадают, объем и форма тела при нагружении не меняются, для вектора перемещений $(u_1, u_2, u_3)$ и углов поворота $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ $|u_i| \ll 1, |\partial u_m / \partial x_n| \ll 1, |\partial \varphi_m / \partial x_n| \ll 1$, а линейные и угловые скорости $\mathrm{v}_i, \omega_i$ макро дифференциала связаны соотношениями $\mathrm{vi} = \partial u_i / \partial t$ и $\omega_i = \partial \varphi_i / \partial t$. Пусть на тело действуют распределенные по объему массовые силы $X_i$, пары сил $Y_i$ и распределенные по поверхности $\Sigma$ силы $p_i$ и моменты пар сил $m_i$.

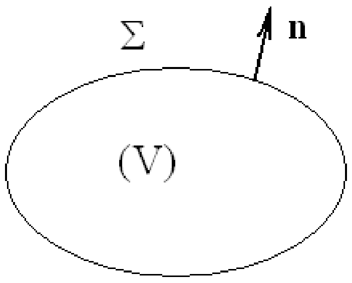

Рис.1

Уравнения изменения импульсов и кинетического момента выражают собой второй и третий законы механики сплошной среды, и в интегральной форме имеют вид [1-3]

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \mathrm{v}_i \, dV = \oint_\Sigma p_i d\Sigma + \int_V \rho X_i dV \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\varepsilon_{ijk} x_j \mathrm{v}_k + s_i\right) dV = \oint_\Sigma \left(\varepsilon_{ijk} x_j p_k + m_i\right) d\Sigma + \int_V \rho\left(\varepsilon_{ijk} x_j X_k + Y_i\right) dV \tag{2}$$

где $\varepsilon_{ijk}$ - тензор Леви-Чивита, $s_i$ - массовая плотность внутреннего кинетического момента, обусловленного вращением частиц среды относительно своего центра масс. Последнюю можно связать с вектором мгновенной угловой скорости $\omega_i$ вращающейся частицы посредством соотношения $s_i = J\omega_i$, где $J$ представляет собой скалярную величину, фактически согласующую физические размерности $s_i$ и $\omega_i$, для однородного шара радиуса $R$ $J = 2mR^2/5$ [3,4,6].

Подынтегральное выражение в левой части соотношения (2) определяет связь кинетического момента системы и относительного кинетического момент [5]. А относительный кинетический момент $L_{ci}$ твердого тела, вычисляемый относительно центра масс частицы, представляется в виде произведения тензора инерции $J_{ij}$ и вектора мгновенной угловой скорости $\omega_i$: $L_{ci} = J_{ij}\omega_j$. В случае тела со сферической симметрией тензор инерции становится шаровым, и последнее соотношение принимает вид $L_{ci} = J\omega_i$.

Как известно, поверхностные силы $p_i$ могут быть заменены эквивалентными объемными силами $F_i$, определяемыми через тензор напряжений $\sigma_{ij}$: $F_i = \partial_j\, \sigma_{ji}$ [1]

$$\oint_\Sigma p_i d\Sigma = \int_V \partial_j\, \sigma_{ji} dV \qquad (3)$$

Совершенно аналогично, можно получить соотношения, выражающие главный момент поверхностных пар сил $m_i$ через некоторые распределенные моменты $M_i$ пар сил по объему в виде $M_i = \partial_j\, \mu_{ji}$

$$\oint_\Sigma m_i d\Sigma = \int_V \partial_j\, \mu_i\, dV \qquad (4)$$

где $\mu_{ij}$ - тензор второго ранга [5].

Следует заметить, что формулы (3),(4) являются следствием соотношений Коши, выполняющихся для элементарных площадок, ориентированных единичной нормалью $n_i$ [1,2]

$$p_i = n_j \sigma_{ji}\,, \quad m_i = n_j \mu_{ji} \qquad (5)$$

где $\sigma_{ij}, \mu_{ij}$ - обычный и моментный тензоры напряжений.

Как известно, соотношение (1) дает дифференциальное уравнение движения [1-3]

$$\rho \frac{d\mathrm{v}_i}{dt} = \partial_j \, \sigma_{ji} + \rho X_i \tag{6}$$

Введем декартову систему координат $(x_1, x_2, x_3)$ с ортонормированным базисом $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, и воспользуемся соответствующими представлениями векторов и тензоров в этой системе. Используя формулу Гаусса-Остроградского, преобразуем первое слагаемое в правой части уравнения (2) следующим образом

$$\begin{aligned} \oint_\Sigma \left( \varepsilon_{ijk} x_j p_k + m_i \right) d\Sigma = \oint_\Sigma \left( \varepsilon_{ijk} x_j n_m \sigma_{mk} + n_m \mu_{mi} \right) d\Sigma = \\ = \oint_\Sigma \left( \varepsilon_{ijk} x_j \partial_m \sigma_{mk} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \partial_m \mu_{mi} \right) d\Sigma = \\ = \int_V \left( \varepsilon_{ijk} x_j \partial_m \, \sigma_{mk} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \partial_m \, \mu_{mi} \right) dV \end{aligned} \tag{7}$$

где $\partial_m = \partial / \partial x_m$.

Для преобразования левой части соотношения (2) воспользуемся теоремой переноса [2]

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \varepsilon_{ijk} x_j \mathrm{v}_k + s_i \right) dV = \int_V \rho \frac{d}{dt} \left( \varepsilon_{ijk} x_j \mathrm{v}_k + s_i \right) dV = \int_V \left( \varepsilon_{ijk} x_j \rho \frac{d\mathrm{v}_i}{dt} + \rho \frac{ds_i}{dt} \right) dV$$

Используя уравнение движения (6), получим

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \varepsilon_{ijk} x_j \mathrm{v}_k + s_i \right) dV = \int_V \rho \left( \varepsilon_{ijk} x_j \partial_m \, \sigma_{mk} + \varepsilon_{ijk} x_j X_k + \frac{ds_i}{dt} \right) dV \tag{8}$$

Тогда после очевидных преобразований уравнение (2) можно представить в интегральной форме

$$\int_V \rho \frac{ds_i}{dt} dV = \int_V \left( \partial_m \mu_{mi} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \rho Y_i \right) dV$$

или в дифференциальной форме

$$\rho \frac{ds_i}{dt} = \partial_m \mu_{mi} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \rho Y_i \tag{9}$$

## Элементарная работа квазистатического деформирования тела

Пусть тело $V$, ограниченное поверхностью $\Sigma$, находится в равновесии под действием внешних объемных сил $X_i$, поверхностных сил $p_i$, моментов пар сил $Y_i$, распределенных по объему, и моментов пар сил $m_i$, распределенных по поверхности $\Sigma$. В этом случае левые части уравнений (6), (9) обращаются в нуль

$$0 = \partial_j \sigma_{ji} + \rho X_i, \quad 0 = \partial_j \mu_{ji} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \rho Y_i \tag{10}$$

Сообщим точкам тела виртуальные перемещения $\delta u\infty$ и повороты $\delta\varphi_i$. Тогда работа указанных выше сил на этих перемещениях и поворотах частиц тела будет равняться

$$\delta A^e = \int_V \rho \left( X_i \delta u_i + Y_i \delta\varphi_i \right) dV + \oint_\Sigma \left( p_i \delta u_i + m_i \delta\varphi_i \right) d\Sigma \tag{11}$$

Воспользуемся уравнениями (10) и преобразуем (11) следующим образом

$$\begin{gathered} \delta A^e = -\int_V \left[ \partial_k \sigma_{ki} \delta u_i + \left( \partial_k \mu_{ki} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} \right) \delta\varphi_i \right] dV + \\ + \oint_\Sigma \left( n_k \sigma_{ki} \delta u_i + m_i \delta\varphi_i \right) d\Sigma = \int_V \left[ \sigma_{ki} \delta\, \partial_k u_i + \mu_{ki} \delta\, \partial_k \varphi_i - \varepsilon_{mki} \sigma_{ki} \delta\varphi_m \right] dV \end{gathered} \tag{12}$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла в правой части (12), будем рассматривать как работу внешних сил над деформируемым телом на виртуальных перемещениях и поворотах, отнесенную к единице объема тела

$$\delta a_V^e = \sigma_{ji}\partial_j \delta u_i + \mu_{ji}\,\partial_j \delta\varphi_i - \varepsilon_{jki}\sigma_{ki}\delta\varphi_j \tag{13}$$

Данное выражение играет основную роль при построении термодинамики деформируемого тела. Тензор второго ранга $\sigma_{ij}$ можно представить в виде суммы симметричного $\overset{s}{\sigma}_{ij} = (\sigma_{ij} + \sigma_{ji})/2$ и антисимметричного $\overset{a}{\sigma}_{ij} = (\sigma_{ij} - \sigma_{ji})/2$ тензоров, а симметричный тензор $\overset{s}{\sigma}_{ij}$, в свою очередь, можно записать в виде суммы шарового тензора и девиатора $\overset{o}{\sigma}_{ij}$

$$\overset{s}{\sigma}_{ij} = \frac{1}{3}\sigma\delta_{ij} + \overset{o}{\sigma}_{ij}$$

где $\delta_{ij}$ - единичный тензор, $\sigma = \sigma_{mm}$ - след тензора $\sigma_{ij}$.

Тогда имеем

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\sigma\delta_{ij} + \overset{o}{\sigma}_{ij} + \overset{a}{\sigma}_{ij} \tag{14}$$

Аналогичные представления можно указать и для всех остальных тензоров, входящих в выражение (13)

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \frac{1}{3}\mu\delta_{ij} + \overset{o}{\mu}_{ij} + \overset{a}{\mu}_{ij} \\ \partial_i \delta u_j &= \frac{1}{3}\delta\vartheta\ \delta_{ij} + \delta\,\overset{o}{\varepsilon}_{ij} + \delta\,\overset{o}{\varepsilon}_{ij} \\ \partial_i \delta\varphi_j &= \frac{1}{3}\delta\kappa\,\delta_{ij} + \delta\,\overset{o}{\kappa}_{ij} + \delta\,\overset{a}{\kappa}_{ij} \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь

$$\overset{o}{\mu}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i \mu_j + \partial_j \mu_i\right) - \frac{1}{3}\mu\delta_{ij}, \qquad \mu = \mu_{mm}$$
$$\overset{o}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right) - \frac{1}{3}\vartheta\delta_{ij}, \qquad \vartheta = u_{mm} = div\,\vec{u}$$
$$\overset{a}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j - \partial_j u_i\right) \tag{16}$$
$$\overset{a}{\kappa}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i \varphi_j + \partial_j \varphi_i\right) - \frac{1}{3}\kappa\delta_{ij}, \qquad \kappa = \kappa_{mm} = div\,\vec{\varphi}$$
$$\overset{a}{\kappa}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i\right)$$

Учитывая то, что двойное внутреннее произведение между парами различных тензоров (шаровой, девиатор, антисимметричный) равняется нулю, запишем соотношение (13) в пересчете на единицу массы $\delta a^e = \delta a_V^e / \rho$ в виде

$$\delta a^e =$$
$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\sigma}{3}\delta\vartheta + \frac{\mu}{3}\delta\kappa + \overset{o}{\sigma}_{ik}\,\delta\overset{o}{\varepsilon}_{ik} + \overset{a}{\sigma}_{ik}\left(\delta\overset{a}{\varepsilon}_{ik} - \varepsilon_{ikj}\delta\varphi_j\right) + \overset{o}{\mu}_{ik}\,\delta\overset{o}{\kappa}_{ik} + \overset{a}{\mu}_{ik}\,\delta\overset{a}{\kappa}_{ik}\right] \tag{17}$$

Введем обозначение

$$\gamma_{ij} = \overset{a}{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon_{ijk}\varphi_k = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j - \partial_j u_i\right) - \varepsilon_{ijk}\varphi_k \tag{18}$$

Тогда, окончательно, имеем

$$\delta a^e = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\sigma}{3\rho}\delta\vartheta + \frac{\mu}{3\rho}\delta\kappa + \frac{\overset{o}{\sigma}_{ij}}{\rho}\delta\overset{o}{\varepsilon}_{ij} + \frac{\overset{a}{\sigma}_{ij}}{\rho}\delta\gamma_{ij} + \frac{\overset{o}{\mu}_{ij}}{\rho}\delta\overset{o}{\kappa}_{ij} + \frac{\overset{a}{\mu}_{ij}}{\rho}\delta\overset{a}{\kappa}_{ij}\right) \tag{19}$$

## Основное термодинамическое равенство

Для равновесных процессов в макросистемах имеет место основное термодинамическое равенство, являющееся следствием первого и второго законов термодинамики [6]. Если выполняется закон сохранения массы, то в терминах удельных величин это равенство можно записать в виде

$$du = Tds + \delta a^e$$

Здесь $u, s$ - удельные величины внутренней энергии, энтропии. В рассматриваемом случае элементарная работа $\delta a^e$ определяется соотношением (19), и основное термодинамическое равенство принимает вид

$$du = Tds + \frac{\sigma}{3\rho}\delta\vartheta + \frac{\mu}{3\rho}\delta\kappa + \frac{\overset{o}{\sigma}_{ij}}{\rho}\delta\overset{o}{\varepsilon}_{ij} + \frac{\overset{a}{\sigma}_{ij}}{\rho}\delta\gamma_{ij} + \frac{\overset{o}{\mu}_{ij}}{\rho}\delta\overset{o}{\kappa}_{ij} + \frac{\overset{a}{\mu}_{ij}}{\rho}\delta\overset{a}{\kappa}_{ij} \quad (20)$$

Внутренняя энергия $u$ как термодинамический потенциал является функцией обобщенных термодинамических переменных

$$\left\{ s, \vartheta, \kappa, \overset{o}{\varepsilon}_{ij}, \gamma_{ij}, \overset{o}{\kappa}_{ij}, \overset{a}{\kappa}_{ij} \right\}$$

Свободная энергия $f$ как термодинамический потенциал зависит от переменных

$$\left\{ T, \vartheta, \kappa, \overset{o}{\varepsilon}_{ij}, \gamma_{ij}, \overset{o}{\kappa}_{ij}, \overset{a}{\kappa}_{ij} \right\}$$

и удовлетворяет равенству

$$df = -sdT + \frac{\sigma}{3\rho}\delta\vartheta + \frac{\mu}{3\rho}\delta\kappa + \frac{\overset{o}{\sigma}_{ij}}{\rho}\delta\overset{o}{\varepsilon}_{ij} + \frac{\overset{a}{\sigma}_{il}}{\rho}\delta\gamma_{ij} + \frac{\overset{o}{\mu}_{ij}}{\rho}\delta\overset{o}{\kappa}_{ij} + \frac{\overset{a}{\mu}_{ij}}{\rho}\delta\overset{a}{\kappa}_{ij} \quad (21)$$

Обозначим через $\theta = T - T_0$ отклонение температуры частицы от ее некоторого начального значения $T_0$. Из соотношения (21) вытекают ряд равенств:

$$
\begin{gathered}
\sigma = \sigma(\theta, \vartheta, \kappa, \overset{o}{\varepsilon}_{mn}, \gamma_{mn}, \overset{o}{\kappa}_{mn}, \overset{a}{\kappa}_{mn}) = 3\rho\left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right) \\
\mu = \mu(\theta, \vartheta, \kappa, \overset{o}{\varepsilon}_{mn}, \gamma_{mn}, \overset{o}{\kappa}_{mn}, \overset{a}{\kappa}_{mn}) = 3\rho\left(\frac{\partial f}{\partial \kappa}\right) \\
\overset{o}{\sigma}_{ik} = \overset{o}{\sigma}_{ik}(\theta, \vartheta, \kappa, \overset{o}{\varepsilon}_{mn}, \gamma_{mn}, \overset{o}{\kappa}_{mn}, \overset{a}{\kappa}_{mn}) = \rho\left(\frac{\partial f}{\partial \overset{o}{\varepsilon}_{ik}}\right) \\
\overset{a}{\sigma}_{ik} = \overset{a}{\sigma}_{ik}(\theta, \vartheta, \kappa, \overset{o}{\varepsilon}_{mn}, \gamma_{mn}, \overset{o}{\kappa}_{mn}, \overset{a}{\kappa}_{mn}) = \rho\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma_{ik}}\right) \\
\overset{o}{\mu}_{ij} = \overset{o}{\mu}_{il}(\theta, \vartheta, \kappa, \overset{o}{\varepsilon}_{ij}, \gamma_{ij}, \overset{o}{\kappa}_{ij}, \overset{a}{\kappa}_{ij}) = \rho\left(\frac{\partial f}{\partial \overset{o}{\kappa}_{ij}}\right) \\
\overset{a}{\mu}_{ij} = \overset{a}{\mu}_{ij}(\theta, \vartheta, \kappa, \overset{o}{\varepsilon}_{ij}, \gamma_{ij}, \overset{o}{\kappa}_{ij}, \overset{a}{\kappa}_{ij}) = \rho\left(\frac{\partial f}{\partial \overset{a}{\kappa}_{ij}}\right)
\end{gathered}
\tag{22}
$$

представляющие собой термические уравнения и

$$
s = s(\theta, \vartheta, \kappa, \overset{o}{\varepsilon}_{mn}, \gamma_{mn}, \overset{o}{\kappa}_{mn}, \overset{a}{\kappa}_{mn}) = -\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \tag{23}
$$

калорическое уравнение.

Пусть система имеет некоторое состояние термодинамического равновесия, характеризуемого набором значений обобщенных термодинамических координат

$$
T = T_0, \quad \vartheta = \kappa = 0, \quad \overset{o}{\varepsilon}_{ik} = \gamma_{ik} = \overset{o}{\kappa}_{ik} = \overset{a}{\kappa}_{ik} = 0 \tag{24}
$$

и представляющее собой естественное ненапряженное состояние в однородном температурном поле, энтропию которого положим равной нулю,

$$
s = \sigma = \mu = 0, \quad \overset{o}{\sigma}_{ik} = \overset{a}{\sigma}_{ik} = \overset{o}{\mu}_{ik} = \overset{a}{\mu}_{ik} = 0 \tag{25}
$$

Раскладывая в ряд Тейлора свободную энергию в окрестности указанного термодинамического равновесия и отбрасывая члены степени выше второй вместе с постоянным нулевым членом разложения, получим

$$
\begin{aligned}
f(\theta,\vartheta,\kappa,\overset{o}{\varepsilon}_{ik},\gamma_{ik},\overset{o}{\kappa}_{ik},\overset{a}{\kappa}_{ik}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^r\theta+\left(\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right)^r\vartheta+\left(\frac{\partial f}{\partial\kappa}\right)^r\kappa+ \\
&+\left(\frac{\partial f}{\partial\overset{o}{\varepsilon}_{ik}}\right)^r\overset{o}{\varepsilon}_{ik}+\left(\frac{\partial f}{\partial\gamma_{ik}}\right)^r\gamma_{ik}+\left(\frac{\partial f}{\partial\overset{o}{\kappa}_{ik}}\right)^r\overset{o}{\kappa}_{ik}+\left(\frac{\partial f}{\partial\overset{a}{\kappa}_{ik}}\right)^r\overset{a}{\kappa}_{ik}+ \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right)^r\theta^2+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\vartheta}\right)^r\theta\vartheta+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\kappa}\right)^r\theta\kappa+ \\
&+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\varepsilon_{ik}^{so}}\right)^r\theta\overset{o}{\varepsilon}_{ik}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\gamma_{ik}}\right)^r\theta\gamma_{ik}+ \\
&+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\overset{o}{\kappa}_{ik}}\right)^r\theta\overset{o}{\kappa}_{ik}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\overset{a}{\kappa}_{ik}}\right)^r\theta\overset{a}{\kappa}_{ik}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2}\right)^r\vartheta^2+ \\
&+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\kappa}\right)^r\vartheta\kappa+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\overset{o}{\varepsilon}_{ik}}\right)^r\vartheta\overset{o}{\varepsilon}_{ik}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\gamma_{ik}}\right)^r\vartheta\gamma_{ik}+ \\
&+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\overset{o}{\kappa}_{ik}}\right)^r\vartheta\overset{o}{\kappa}_{ik}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\overset{a}{\kappa}_{ik}}\right)^r\vartheta\overset{a}{\kappa}_{ik}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa^2}\right)^r\kappa^2+ \\
&+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa\partial\overset{o}{\varepsilon}_{ik}}\right)^r\kappa\overset{o}{\varepsilon}_{ik}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa\partial\gamma_{ik}}\right)^r\kappa\gamma_{ik}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa\partial\overset{o}{\kappa}_{ik}}\right)^r\kappa\overset{o}{\kappa}_{ik}+
\end{aligned}
\qquad (26)
$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa\partial\overset{a}{\kappa}_{ik}}\right)^r \kappa\,\overset{a}{\kappa}_{ik}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\overset{o}{\varepsilon}_{ik}\,\partial\overset{o}{\varepsilon}_{mn}}\right)^r \overset{o}{\varepsilon}_{ik}\,\overset{o}{\varepsilon}_{mn}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\overset{o}{\varepsilon}_{ik}\,\partial\gamma_{mn}}\right)^r \overset{o}{\varepsilon}_{ik}\,\gamma_{mn}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\overset{o}{\varepsilon}_{ik}\,\partial\overset{o}{\kappa}_{mn}}\right)^r \overset{o}{\varepsilon}_{ik}\,\overset{o}{\kappa}_{mn}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\overset{o}{\varepsilon}_{ik}\,\partial\overset{a}{\kappa}_{mn}}\right)^r \overset{o}{\varepsilon}_{ik}\,\overset{a}{\kappa}_{mn}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\gamma_{mn}}\right)^r \gamma_{ik}\gamma_{mn}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\overset{o}{\kappa}_{mn}}\right)^r \gamma_{ik}\,\overset{o}{\kappa}_{mn}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\overset{a}{\kappa}_{mn}}\right)^r \gamma_{ik}\,\overset{a}{\kappa}_{mn}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa\,\overset{o}{\kappa}_{ik}\,\overset{o}{\kappa}_{mn}}\right)^r \overset{o}{\kappa}_{ik}\,\overset{o}{\kappa}_{mn}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\overset{o}{\kappa}_{ik}\,\overset{a}{\kappa}_{mn}}\right)^r \overset{o}{\kappa}_{ik}\,\overset{a}{\kappa}_{mn}++\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\overset{a}{\kappa}_{ik}\,\partial\overset{a}{\kappa}_{mn}}\right)^r \overset{a}{\kappa}_{ik}\,\overset{a}{\kappa}_{mn}$$

Здесь верхний индекс «r» вверху круглых скобок означает, что соответствующая функция берется для начального состояния (24). В силу соотношений (25), слагаемые, содержащие первые производные функции $f$, обращаются в нуль.

Введем следующие обозначения

$$c^{11}=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right)^r,\quad c^{12}=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\vartheta}\right)^r,\qquad c^{13}=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\kappa}\right)^r,$$

$$c_{ik}^{14^{so}}=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\varepsilon_{ik}^{so}}\right)^r,\quad c_{ik}^{15}=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\gamma_{ik}}\right)^r,\quad c_{ik}^{16}=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\kappa_{ik}^{so}}\right)^r,$$

$$
\begin{gathered}
c_{ik}^{17}=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\kappa_{ik}^{a}}\right)^{r},\quad c^{22}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2}\right)^{r},\quad c^{23}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\kappa}\right)^{r},\\
c_{ik}^{24}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\overset{o}{\varepsilon}_{ik}}\right)^{r},\quad c_{ik}^{25}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\gamma_{ik}}\right)^{r},\quad c_{ik}^{26}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\overset{o}{\kappa}_{ik}}\right)^{r},\\
c_{ik}^{27}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\overset{a}{\kappa}_{ik}}\right)^{r},\quad c^{33}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa^2}\right)^{r},\quad c_{ik}^{34}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa\partial\overset{o}{\varepsilon}_{ik}}\right)^{r},\\
c_{ik}^{35}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa\partial\gamma_{ik}}\right)^{r},\quad c_{ik}^{36}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa\partial\overset{o}{\kappa}_{ik}}\right)^{r},\quad c_{ik}^{37}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa\partial\overset{a}{\kappa}_{ik}}\right)^{r},\\
c_{ikmn}^{44}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\overset{o}{\varepsilon}_{ik}\,\partial\overset{o}{\varepsilon}_{mn}}\right)^{r},\quad c_{ikmn}^{45}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\overset{o}{\varepsilon}_{ik}\,\partial\gamma_{mn}}\right)^{r},\quad c_{ikmn}^{46}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\overset{o}{\varepsilon}_{ik}\,\partial\overset{o}{\kappa}_{mn}}\right)^{r}\\
c_{ikmn}^{47}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\overset{o}{\varepsilon}_{ik}\,\partial\kappa\,\overset{a}{\kappa}_{mn}}\right)^{r},\quad c_{ikmn}^{55}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\gamma_{mn}}\right)^{r},\quad c_{ikmn}^{56}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\overset{o}{\kappa}_{mn}}\right)^{r},\\
c_{ikmn}^{57}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\overset{a}{\kappa}_{mn}}\right)^{r},\quad c_{ikmn}^{66}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\overset{o}{\kappa}_{ik}\,\partial\overset{o}{\kappa}_{mn}}\right)^{r},\quad c_{ikmn}^{67}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\overset{o}{\kappa}_{ik}\,\partial\overset{a}{\kappa}_{mn}}\right)^{r},\\
c_{ikmn}^{77}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\overset{a}{\kappa}_{ik}\,\partial\overset{a}{\kappa}_{mn}}\right)^{r}
\end{gathered}
\tag{27}
$$

Тогда выражение для свободной энергии принимает вид

$$
\begin{aligned}
& f(\theta,\vartheta,\kappa,\overset{o}{\varepsilon}_{ik},\gamma_{ik},\overset{o}{\kappa}_{ik},\overset{a}{\kappa}_{ik}) = \\
& = -\frac{1}{2}c^{11}\theta^{2} - c^{12}\theta\vartheta - c^{13}\theta\kappa - c^{14}_{ik}\theta\overset{o}{\varepsilon}_{ik} - c^{15}_{ik}\theta\gamma_{ik} - c^{16}_{ik}\theta\overset{o}{\kappa}_{ik} - -c^{17}_{ik}\theta\overset{a}{\kappa}_{ik} + \\
& + \frac{1}{2}c^{22}\vartheta^{2} + c^{23}\vartheta\kappa + c^{24}_{ik}\vartheta\overset{o}{\varepsilon}_{ik} + c^{25}_{ik}\vartheta\gamma_{ik} + + c^{26}_{ik}\vartheta\overset{o}{\kappa}_{ik} + c^{27}_{ik}\vartheta\overset{a}{\kappa}_{ik} + \\
& + \frac{1}{2}c^{33}\kappa^{2} + c^{34}_{ik}\kappa\overset{o}{\varepsilon}_{ik} + a^{35}_{ik}\kappa\gamma_{ik} + + c^{36}_{ik}\kappa\overset{o}{\kappa}_{ik} + c^{37}_{ik}\kappa\overset{a}{\kappa}_{ik} + \frac{1}{2}c^{44}_{ikmn}\overset{o}{\varepsilon}_{ik}\overset{o}{\varepsilon}_{mn} + \\
& + c^{45}_{ikmn}\overset{o}{\varepsilon}_{ik}\gamma_{mn} + c^{46}_{ikmn}\overset{o}{\varepsilon}_{ik}\overset{o}{\kappa}_{mn} + c^{47}_{ikmn}\overset{o}{\varepsilon}_{ik}\overset{a}{\kappa}_{mn} + \frac{1}{2}c^{55}_{ikmn}\gamma_{ik}\gamma_{mn} + c^{56}_{ikmn}\gamma_{ik}\overset{o}{\kappa}_{mn} + \\
& + c^{57}_{ikmn}\gamma_{ik}\overset{a}{\kappa}_{mn} + c^{66}_{ikmn}\overset{o}{\kappa}_{ik}\overset{o}{\kappa}_{mn} + c^{67}_{ikmn}\overset{o}{\kappa}_{ik}\overset{a}{\kappa}_{mn} + \frac{1}{2}c^{77}_{ikmn}\overset{a}{\kappa}_{ik}\overset{a}{\kappa}_{mn}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Термические уравнения состояния (22) тогда преобразуются к следующему виду

$$\sigma = 3\rho\left( c^{12}\theta + c^{22}\vartheta + c^{23}\kappa + c^{24}_{ik}\overset{o}{\varepsilon}_{ik} + c^{25}_{ik}\gamma_{ik} + c^{26}_{ik}\overset{o}{\kappa}_{ik} + c^{27}_{ik}\overset{a}{\kappa}_{ik} \right) \tag{29}$$

$$\mu = 3\rho\left( c^{13}\theta + c^{23}\vartheta + c^{33}\kappa + c^{34}_{ik}\overset{o}{\varepsilon}_{ik} + c^{35}_{ik}\gamma_{ik} + c^{36}_{ik}\overset{o}{\kappa}_{ik} + c^{37}_{ik}\overset{a}{\kappa}_{ik} \right) \tag{30}$$

$$\overset{o}{\sigma}_{ik} = \rho\left( c^{14}_{ik}\theta + c^{24}_{ik}\vartheta + c^{34}_{ik}\kappa + c^{44}_{ikmn}\overset{o}{\varepsilon}_{mn} + c^{45}_{ikmn}\gamma_{mn} + c^{46}_{ikmn}\overset{o}{\kappa}_{mn} + c^{47}_{ikmn}\overset{a}{\kappa}_{mn} \right) \tag{31}$$

$$\overset{a}{\sigma}_{ik} = \rho\left( c^{15}_{ik}\theta + c^{25}_{ik}\vartheta + c^{35}_{ik}\kappa + c^{45}_{ikmn}\overset{o}{\varepsilon}_{mn} + c^{55}_{ikmn}\gamma_{mn} + c^{56}_{ikmn}\overset{o}{\kappa}_{mn} + c^{57}_{ikmn}\overset{a}{\kappa}_{mn} \right) \tag{32}$$

$$\overset{o}{\mu}_{ik} = \rho\left( c^{16}_{ik}\theta + c^{26}_{ik}\vartheta + c^{36}_{ik}\kappa + c^{46}_{ikmn}\overset{o}{\varepsilon}_{mn} + c^{56}_{ikmn}\gamma_{mn} + c^{66}_{ikmn}\overset{o}{\kappa}_{mn} + c^{67}_{ikmn}\overset{a}{\kappa}_{mn} \right) \tag{33}$$

$$\mu^{a}_{ik} = \rho\left( c^{17^{a}}_{ik}\theta + c^{27}_{ik}\vartheta + c^{37}_{ik}\kappa + c^{47}_{ikmn}\overset{o}{\varepsilon}_{mn} + c^{57}_{ikmn}\gamma_{mn} + c^{67}_{ikmn}\overset{o}{\kappa}_{mn} + c^{77}_{ikmn}\overset{a}{\kappa}_{mn} \right) \tag{34}$$

Калорическое уравнение состояния (23) принимает вид

$$s = c^{11}\theta + c^{12}\vartheta + c^{13}\kappa + c^{14}_{ik}\overset{o}{\varepsilon}_{ik} + c^{15}_{ik}\gamma_{ik} + c^{16}_{ik}\overset{o}{\kappa}_{ik} + c^{17}_{ik}\overset{a}{\kappa}_{ik} \tag{35}$$

Соотношение $T\left(ds/dT\right)_{\vartheta,\kappa,\overset{o}{\varepsilon},\gamma,\overset{o}{\kappa},\overset{a}{\kappa}} = T\left(\partial s/\partial\theta\right)_{\vartheta,\kappa,\overset{o}{\varepsilon},\gamma,\overset{o}{\kappa},\overset{a}{\kappa}} = c_{\varepsilon\kappa}$ представляет собой теплоемкость в отсутствии перемещений и поворотов частиц. Это позволяет выразить коэффициент $c^{11}$ через $c_{\varepsilon\kappa}$ и записать формулу для определения энтропии в виде

$$s = \frac{c_{\varepsilon\kappa}}{T_0}\theta + c^{12}\vartheta + c^{13}\kappa + c^{14}_{ik}\overset{o}{\varepsilon}_{ik} + c^{15}_{ik}\gamma_{ik} + c^{16}_{ik}\overset{o}{\kappa}_{ik} + c^{17}_{ik}\overset{a}{\kappa}_{ik} \tag{36}$$

<u>*Замечание.*</u> В случае неравновесного состояния для описания термодинамики упругого тела следует воспользоваться методами неравновесной термодинамики [3,7]. Гипотеза локального равновесия дает основное термодинамическое соотношение – тождество Гиббса, которое по форме совпадает с основным термодинамическим равенством (20).

## Изотропные среды

В случае изотропных сред термодинамические соотношения значительно упрощаются. В этом случае физические свойства материала не зависят от выбранного пространственного направления, поэтому свободная энергия $f(\theta,\vartheta,\kappa,\overset{o}{\varepsilon}_{ik},\gamma_{ik},\overset{o}{\kappa}_{ik},\overset{a}{\kappa}_{ik})$ может зависеть только от инвариантов независимых переменных тензорного типа. Полагаем начальное состояние недеформированным и ненапряженным, что приводит к равенству нулю членов разложения свободной энергии первого порядка по скалярным аргументам $\{\theta,\vartheta,\kappa\}$. Первые же инварианты тензоров второго ранга $\overset{o}{\varepsilon},\hat{\gamma},\overset{o}{\kappa},\overset{a}{\kappa}$ равняются нулю. Тогда разложение $f$ при сохранении членов не выше второго порядка будет содержать лишь инварианты второго порядка тензоров $\overset{o}{\varepsilon},\hat{\gamma},\overset{o}{\kappa},\overset{a}{\kappa}$:

$$I_1 = \frac{1}{2} \overset{o}{\varepsilon}_{ik} \overset{o}{\varepsilon}_{ki}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \gamma_{ik} \gamma_{ki}, \quad I_3 = \frac{1}{2} \overset{o}{\kappa}_{ik} \overset{o}{\kappa}_{ki}$$

$$I_4 = \frac{1}{2} \overset{a}{\kappa}_{ik} \overset{a}{\kappa}_{ki}, \quad I_5 = \overset{o}{\varepsilon}_{ik} \overset{o}{\kappa}_{ki}, \quad I_6 = \gamma_{ik} \overset{a}{\kappa}_{ki}$$

Выражение для свободной энергии принимает вид

$$\begin{gathered} f\left(\theta, \vartheta, \kappa, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6\right) = \\ = \left[ -\frac{c_{\varepsilon\kappa}}{2T_0}\theta^2 - \beta\theta\vartheta - \alpha\theta\kappa + \frac{1}{2}\left(\lambda_1 + \frac{2}{3}\nu_1\right)\vartheta^2 + \left(\lambda_{12} + \frac{2}{3}\nu_{12}\right)\vartheta\kappa + \right. \\ + \frac{1}{2}\left(\lambda_2 + \frac{2}{3}\nu_2\right)\kappa^2 + \nu_1 \overset{o}{\varepsilon}_{ik} \overset{o}{\varepsilon}_{ki} + 2\nu_{12} \overset{o}{\varepsilon}_{ik} \overset{o}{\kappa}_{ki} + \nu_2 \overset{o}{\kappa}_{ik} \overset{o}{\kappa}_{ki} - \\ \left. - a_1 \gamma_{ik}\gamma_{ki} - 2a_2 \gamma_{ik} \overset{a}{\kappa}_{ki} - a_3 \overset{a}{\kappa}_{ik} \overset{a}{\kappa}_{ki} \right] \frac{1}{\rho} \end{gathered} \tag{37}$$

а определяющие уравнения (29)- (35) с учетом малости деформаций и поворотов приобретают форму

$$\begin{gathered} \sigma = 3\left(\left(\lambda_1 + \frac{2}{3}\nu_1\right)\vartheta + \left(\lambda_{12} + \frac{2}{3}\nu_{12}\right)\kappa - \beta\theta\right) \\ \mu = 3\left(\left(\lambda_{12} + \frac{2}{3}\nu_{12}\right)\vartheta + \left(\lambda_2 + \frac{2}{3}\nu_2\right)\kappa - \alpha\theta\right) \\ \overset{o}{\sigma}_{ik} = 2\nu_1 \overset{o}{\varepsilon}_{ik} + 2\nu_{12} \overset{o}{\kappa}_{ik}, \quad \overset{a}{\sigma}_{ik} = 2a_1 \gamma_{ki} + 2a_2 \overset{a}{\kappa}_{ki} \\ \overset{o}{\mu}_{ik} = 2\nu_{12} \overset{o}{\varepsilon}_{ik} + 2\nu_2 \overset{o}{\kappa}_{ik}, \quad \overset{a}{\mu}_{ik} = 2a_2 \gamma_{ki} + 2a_3 \overset{a}{\kappa}_{ki} \\ s = \frac{c_{\varepsilon\kappa}}{\rho T_0}\theta + \frac{\beta}{\rho}\vartheta + \frac{\alpha}{\rho}\kappa \end{gathered} \tag{38}$$

Здесь введены новые обозначения феноменологических коэффициентов $\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}, \mu_1, \mu_2, \mu_{12}, a_1, a_2, a_3$. Используя представление тензоров второго ранга (14), запишем выражение для компонент тензоров $\sigma_{ik}, \mu_{ik}$

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} &= \left(\lambda_1 \vartheta + \lambda_{12}\kappa - \beta\,\theta\right)\delta_{ik} + 2\nu_1 \overset{s}{\varepsilon}_{ik} + 2a_1\,\gamma_{ki} + 2\nu_{12}\overset{s}{\kappa}_{ik} + 2a_2\overset{a}{\kappa}_{ki}\\ \mu_{ik} &= \left(\lambda_{12}\vartheta + \lambda_2\kappa - \alpha\,\theta\right)\delta_{ik} + 2\nu_{12} \overset{s}{\varepsilon}_{ik} + 2a_2\,\gamma_{ki} + 2\nu_2\overset{s}{\kappa}_{ik} + 2a_3\overset{a}{\kappa}_{ki}\end{aligned} \tag{39}$$

где

$$\begin{aligned}\overset{s}{\varepsilon}_{ik} &= \frac{1}{2}\left(\partial_i u_k + \partial_k u_i\right), \quad \gamma_{ik} = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_k - \partial_k u_i\right) - \varepsilon_{ikm}\varphi_m\\ \overset{s}{\kappa}_{ik} &= \frac{1}{2}\left(\partial_i \varphi_k + \partial_k \varphi_i\right), \quad \overset{a}{\kappa}_{ik} = \frac{1}{2}\left(\partial_i \varphi_k - \partial_k \varphi_i\right)\end{aligned} \tag{40}$$

## Условие устойчивости термодинамического процесса

Второй закон термодинамики позволяет сформулировать критерий устойчивости термодинамического процесса в виде минимаксного свойства соответствующего термодинамического потенциала [4,6,8]. Если выбирать в качестве «внешних» термодинамических переменных частицы величины

$$\{\theta,\ \sigma/3\rho,\ \mu/3\rho,\ \overset{o}{\sigma}_{ik}/\rho,\ \overset{a}{\sigma}_{ik}/\rho,\ \overset{o}{\mu}_{ik}/\rho,\ \overset{a}{\mu}_{ik}/\rho\} \tag{41}$$

то равенство (20), согласно второго закона термодинамики перейдет в неравенство, содержащее термодинамический потенциал Гиббса $g$

$$g = g\left(\theta,\ \frac{\sigma}{3\rho}, \frac{\mu}{3\rho}, \frac{\overset{o}{\sigma}_{ik}}{3\rho}, \frac{\overset{a}{\sigma}_{ik}}{3\rho}, \frac{\overset{o}{\mu}_{ik}}{3\rho}, \frac{\overset{a}{\mu}_{ik}}{3\rho}\right) =$$

$$= u - Ts - \frac{\sigma\vartheta}{3\rho} - \frac{\mu\kappa}{3\rho} - \frac{\overset{o}{\sigma}_{ki}\,\overset{o}{\varepsilon}_{ik}}{3\rho} - \frac{\overset{a}{\sigma}_{ki}\,\gamma_{ik}}{3\rho} - \frac{\overset{o}{\mu}_{ki}\,\overset{o}{\kappa}_{ik}}{3\rho} - \frac{\overset{a}{\mu}_{ki}\,\overset{a}{\kappa}_{ik}}{3\rho}$$

и принимает вид

$$dg \le -s d\theta - \vartheta d\,\frac{\sigma}{3\rho} - \kappa d\,\frac{\mu}{3\rho} - \overset{o}{\varepsilon}_{ik}\,d\,\frac{\overset{o}{\sigma}_{ki}}{3\rho} - \gamma_{ik} d\,\frac{\overset{a}{\sigma}_{ki}}{3\rho} - \overset{o}{\kappa}_{ik}\,d\,\frac{\overset{o}{\mu}_{ki}}{3\rho} - \overset{a}{\kappa}_{ik}\,d\,\frac{\overset{a}{\mu}_{ki}}{3\rho} \tag{42}$$

Отсюда следует, что при неизменных «внешних» переменных (41), когда система находится в «термостате», изменение состояния частицы тела, происходящего за счет флуктуаций, возможно с понижением значения потенциала Гиббса. И, если существует состояние равновесия, то ему соответствует минимум потенциала $g$. Тогда необходимое и достаточное условия устойчивого равновесия (или равновесного процесса) сводятся к равенству нулю первой вариации $\delta g$ потенциала $g$ и положительности второй вариации $\delta^2 g$ этого потенциала, вычисляемой в состоянии рассматриваемого равновесия. Варьирование здесь производится относительно «внутренних» термодинамических переменных

$$\left\{ s, \vartheta, \kappa, \overset{o}{\varepsilon}_{ik}, \gamma_{ik}, \overset{o}{\kappa}_{ik}, \overset{a}{\kappa}_{ik} \right\} \tag{43}$$

Равенство нулю первой вариации $\delta g$ сводится к равенству значений переменных (41) соответствующим значениям переменных термостата, а положительность второй вариации $\left(\delta^2 g\right)^r$ приводит к положительной определенности квадратичной формы

$$\begin{aligned} \delta^2 g = \delta s\, \delta\theta + \delta\left(\frac{\sigma}{3\rho}\right)\delta\vartheta + \delta\left(\frac{\mu}{3\rho}\right)\delta\kappa + \delta\left(\frac{\overset{o}{\sigma}_{ki}}{3\rho}\right)\delta\overset{o}{\varepsilon}_{ik} + \\ +\delta\left(\frac{\overset{a}{\sigma}_{ki}}{3\rho}\right)\delta\gamma_{ik} + \delta\left(\frac{\overset{o}{\mu}_{ki}}{3\rho}\right)\delta\overset{o}{\kappa}_{ik} + \delta\left(\frac{\overset{a}{\mu}_{ki}}{3\rho}\right)\delta\overset{a}{\kappa}_{ik} > 0 \end{aligned} \tag{44}$$

которое с учетом уравнений состояния (38) при постоянных феноменологических коэффициентах можно записать в форме

$$\begin{aligned} \frac{c_{\varepsilon\kappa}}{T_0}\left(\delta\theta\right)^2 + \left(\lambda_1 + \frac{2}{3}\nu_1\right)\left(\delta\vartheta\right)^2 + 2\left(\lambda_{12} + \frac{2}{3}\nu_{12}\right)\delta\vartheta\,\delta\kappa + \left(\lambda_2 + \frac{2}{3}\nu_2\right)\left(\delta\kappa\right)^2 + \\ +2\nu_1\delta\overset{o}{\varepsilon}_{ik}\,\delta\overset{o}{\varepsilon}_{ki} + 4\nu_{12}\,\delta\overset{o}{\varepsilon}_{ik}\,\delta\overset{o}{\kappa}_{ki} + a_1\delta\gamma_{ik}\,\delta\gamma_{ki} + 2a_2\delta\gamma_{ik}\,\delta\overset{a}{\kappa}_{ki} + \\ +2\nu_2\,\delta\overset{o}{\kappa}_{ik}\,\delta\overset{o}{\kappa}_{ki} + a_3\,\delta\overset{a}{\kappa}_{ik}\,\delta\overset{a}{\kappa}_{ki} > 0 \end{aligned} \tag{45}$$

Из условия положительной определенности квадратичной формы вытекает ряд неравенств. Укажем некоторые из них:

- все диагональные элементы матрицы $A$ положительные: $c_{\varepsilon\kappa}, \lambda_1 + 2/3\,\nu_1, \lambda_2 + 2/3\,\nu_2, \nu_1, \nu_2, a_1, a_3 > 0$ ;
- $\nu_1\nu_2 - \nu_{12}^2 > 0$
- $a_1 a_3 - a_2^2 > 0$
- $\left(\lambda_1 + 2/3\,\nu_1\right)\left(\lambda_2 + 2/3\,\nu_2\right) - \left(\lambda_{12} + 2/3\,\nu_{12}\right)^2 > 0$

## Уравнения баланса энтропии, уравнение теплопроводности

В полную энергию $e$ системы входит трансляционная $\mathrm{v}^2/2$ и вращательная $J\omega^2/2$ кинетические энергии, потенциальная энергия $\Pi$ внешнего консервативного поля сил и внутренняя энергия $u$ [3,4,8]

$$e = \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \Pi + u$$

Теорема «живых сил» дает уравнения баланса составляющих кинетической энергии

$$\begin{aligned} &\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{2}\right) = \partial_k\left(\sigma_{ki}\mathrm{v}_i\right) - \sigma_{ki}\partial_k\mathrm{v}_i + \rho X_i\mathrm{v}_i \\ &\rho\frac{d}{dt}\left(J\frac{\omega^2}{2}\right) = \partial_k\left(\mu_{ki}\partial_k\varphi_i\right) - \mu_{ki}\partial_k\varphi_i + \varepsilon_{ijk}\,\omega_i\overset{a}{\sigma}_{jk} + \rho Y_i\omega_i \end{aligned} \qquad (46)$$

Пусть массовые силы и пары сил относятся к консервативным полям сил с потенциалом $\Pi = \Pi\left(\mathrm{x}_i, \varphi_i\right)$

$$X_i = -\frac{\partial\Pi}{\partial x_i},\ Y_i = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_i}$$

Уравнения баланса потенциальной $\Pi$ и внутренней $u$ энергий имеют вид

$$\rho \frac{d\Pi}{dt} = -\rho X_i \mathrm{v}_i - \rho \Upsilon_i \omega_i$$
$$\rho \frac{du}{dt} = -\partial_i J_{ui} + \sigma_u \qquad (47)$$

Здесь $J_{ui}$ - кондуктивный поток и $\sigma_u$ - объемная плотность источника внутренней энергии. Тогда согласно закону сохранения полной энергии системы источник полной энергии $\sigma_e$, который равен сумме источников энергий трансляционного $\sigma_{\mathrm{v}}$, вращательного $\sigma_\omega$ движения, потенциальной $\sigma_\Pi$ и внутренней $\sigma_u$ энергий, равен нулю

$$\sigma_e \equiv \sigma_{\mathrm{v}} + \sigma_\omega + \sigma_\Pi + \sigma_u = 0 \qquad (48)$$

Соотношение (48) можно рассматривать как уравнение для нахождения источника внутренней энергии

$$\sigma_u = -\sigma_{\mathrm{v}} - \sigma_\omega - \sigma_\Pi = \sigma_{ki}\,\partial_k \mathrm{v}_i + \mu_{ki}\,\partial_k \varphi_i - \varepsilon_{ijk}\omega_i \sigma_{jk} =$$
$$= \frac{\sigma}{3}\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \overset{o}{\sigma}_{ki}\frac{\partial \overset{o}{\varepsilon}_{ik}}{\partial t} + \overset{a}{\sigma}_{ki}\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial t} + \overset{o}{\mu}_{ki}\frac{\partial \overset{o}{\kappa}_{ik}}{\partial t} + \overset{a}{\mu}_{ki}\frac{\partial \overset{a}{\kappa}_{ik}}{\partial t} \qquad (49)$$

Если воспользоваться тождеством Гиббса (20) и уравнениями баланса (46), (47), уравнением баланса внутренней энергии, то уравнение баланса энтропии можно записать в виде

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\partial_i\left(\frac{J_{ui}}{T}\right) + \frac{J_{ui}}{T^2}\partial_i T + \frac{1}{T}\left[\frac{\sigma - \sigma^r}{3}\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\mu - \mu^r}{3}\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + \left(\overset{o}{\sigma}_{ki} - \overset{o}{\sigma}{}^r_{ki}\right)\frac{\partial \overset{o}{\varepsilon}_{ik}}{\partial t} + + \left(\overset{a}{\sigma}_{ki} - \overset{a}{\sigma}{}^r_{ki}\right)\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial t} + \left(\overset{o}{\mu}_{ki} - \overset{o}{\mu}{}^r_{ki}\right)\frac{\partial \overset{o}{\kappa}_{ik}}{\partial t} + \left(\overset{a}{\mu}_{ki} - \overset{a}{\mu}{}^r_{ki}\right)\frac{\partial \overset{a}{\kappa}_{ik}}{\partial t}\right] \qquad (50)$$

где индекс $r$ вверху соответствует величине, определяемой в состоянии термодинамического равновесия. Производство энтропии $\sigma_s$ представлено недивергентными слагаемыми в правой части уравнения (50). В классической теории упругости неравновесные характеристики принимают равными равновесным. Тогда в производстве энтропии остается только одно слагаемое $-(J_{ui}\partial_i T)/\mathrm{T}^2$, связанное с явлением теплопроводности в твердых телах. Учет всех слагаемых в производстве энтропии приводит к модели вязкоупругого тела. Если воспользоваться выражением (38) для энтропии $s = s(\theta, \vartheta, \kappa)$, то уравнение (50) можно преобразовать в уравнение теплопроводности в форме

$$c_{\varepsilon\kappa}\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\partial_i\left(J_{ui}\right) - \beta T_0\frac{\partial\vartheta}{\partial t} - \alpha T_0\frac{\partial\kappa}{\partial t} \tag{51}$$

Феноменологические соотношения в данном случае приводят к закону Фурье для теплопроводности [4]

$$J_{ui} = -k\partial_i\theta$$

где $k$ - коэффициент теплопроводности. Тогда уравнение (51) окончательно можно записать в виде

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\partial_i\left(\chi\partial_i\theta\right) - \frac{\beta T_0}{c_{\varepsilon\kappa}}\frac{\partial\vartheta}{\partial t} - \frac{\alpha T_0}{c_{\varepsilon\kappa}}\frac{\partial\kappa}{\partial t} \tag{52}$$

где $\chi = k / c_{\varepsilon\kappa}$ представляет собой коэффициент температуропроводности.

## Уравнения статики

Подставляя соотношения (39) в (10) и считая феноменологические коэффициенты постоянными, после простых преобразований получим уравнения

$$\begin{gathered}\left(\lambda_1+\nu_1-a_1\right)\partial_i\,\partial_k\,u_k+\left(\nu_1+a_1\right)\partial_k\partial_k u_i+\left(\lambda_{12}+\nu_{12}-a_2\right)\partial_i\,\partial_k\,\varphi_k+\\+\left(\nu_{12}+a_2\right)\partial_k\partial_k\varphi_i+2a_1\,\varepsilon_{ijk}\partial_j\varphi_k-\beta\,\partial_i\theta+\rho X_i=0\end{gathered} \tag{53}$$

$$\begin{gathered}\left(\lambda_{12}+\nu_{12}+a_2\right)\,\partial_i\,\partial_k\,u_k+\left(\nu_{12}-a_2\right)\partial_k\partial_k u_i+\left(\lambda_2+\nu_2+a_3\right)\partial_i\,\partial_k\,\varphi_k+\\+\left(\nu_2-a_3\right)\partial_k\partial_k\varphi_i-2a_1\,\varepsilon_{ijk}\partial_j u_k-2a_2\,\varepsilon_{ijk}\partial_j\varphi_k-4a_1\varphi_i-\alpha\,\partial_i\theta+\rho Y_i=0\end{gathered} \tag{54}$$

На границе $\Sigma$ деформируемого тела могут быть заданы граничные условия первого рода

$$u_i\big|_\Sigma = u_i^o, \quad \varphi_i\big|_\Sigma = \varphi_i^o \tag{55}$$

второго рода

$$n_k \sigma_{ki}\big|_\Sigma = p_i^o, \quad n_k \mu_{ki}\big|_\Sigma = m_i^o \tag{56}$$

## Плоские волны в неограниченном упругом пространстве

Будем рассматривать случай изотермического состояния тела, когда $\theta = 0$, поле перемещений и поворотов зависят от одной пространственной переменной $x_1$, а массовые силы и пары сил отсутствуют. Для динамических задач нулевые правые части уравнений (53), (54) заменяются инерционными членами $\rho \partial_t^2 u_i, \rho J \partial_t^2 \varphi_i$. Введем обозначения

$$\begin{gathered} c_1^2 = \frac{\lambda_1 + 2\nu_1}{\rho},\ c_2^2 = \frac{\nu_1 + a_1}{\rho},\ \alpha_{12} = \frac{\lambda_{12} + 2\nu_{12}}{\rho},\ \alpha_1 = \frac{a_1}{\rho}, \\ \beta_{12} = \frac{\nu_{12} + a_2}{\rho},\ \alpha_2^2 = \frac{\lambda_2 + 2\nu_2}{\rho},\ \beta_2^2 = \frac{\nu_2 + a_3}{\rho},\ \beta_1 = \frac{a_2}{\rho}, \gamma_{12} = \frac{\nu_{12} + a_2}{\rho} \end{gathered} \tag{57}$$

и уравнения принимают вид

$$c_1^2 \nabla\, div\, \vec{u} - c_2^2 rot\, rot\, \vec{u} + \alpha_{12} \nabla\, div\, \vec{\varphi} - \gamma_{12} rot\, rot\, \vec{\varphi} + 2\alpha_1\, rot \vec{\varphi} = \partial_t^2 \vec{u} \tag{58}$$

$$\begin{gathered} \alpha_{12} \nabla\, div\, \vec{u} - \gamma_{12}\, rot\, rot\, \vec{u} - 2\alpha_1 rot\, \vec{u} + \alpha_2^2\ \nabla\, div\, \vec{\varphi} - \\ -\beta_2^2\, rot\, rot\, \vec{\varphi} - 2\beta_1\, rot\, \vec{\varphi} - 4\alpha_1 \vec{\varphi} = J\, \partial_t^2 \vec{\varphi} \end{gathered} \tag{59}$$

Воспользуемся общим решением Ламе [15]

$$\vec{u} = \nabla \Phi + rot\, \vec{\chi}, \quad \vec{\varphi} = \nabla \Psi + rot\, \vec{\eta}, \quad div\, \vec{\chi} = 0, \quad div\, \vec{\eta} = 0 \tag{60}$$

Тогда из уравнений (58), (59) вытекают уравнения для неизвестных функций $\Phi, \Psi, \vec{\chi}, \vec{\eta}$

$$c_1^2 \Delta \Phi + \alpha_{12} \Delta \Psi - \ddot{\Phi} = 0 \tag{61}$$

$$\alpha_{12} \Delta \Phi + \alpha_2^2 \Delta \Psi - 4a_1 \Psi - J \ddot{\Psi} = 0 \tag{62}$$

$$c_2^2 \Delta \vec{\chi} + \gamma_{12} \Delta \vec{\eta} + 2\alpha_1\, rot\, \vec{\eta} - \ddot{\vec{\chi}} = 0 \tag{63}$$

$$\gamma_{12}\Delta\vec{\chi} + \beta_2^2\Delta\vec{\eta} - 2\beta_1\, rot\,\vec{\eta} - 4\alpha_1\vec{\eta} + 2\alpha_1\, rot\,\vec{\chi} - J\ddot{\vec{\eta}} = 0 \qquad (64)$$

$$div\,\vec{\chi} = 0, \quad div\,\vec{\eta} = 0 \qquad (65)$$

Для плоских волн имеют место следующие представления

$$\Phi = Ae^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad \Psi = Be^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad \vec{\chi} = \vec{C}e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad \vec{\eta} = \vec{D}e^{i(kx_1 - \omega t)} \qquad (66)$$

содержащие комплекснозначные константы $\mathrm{A}, B$, $\vec{C} = (0, C_2, C_3), \vec{D} = (0, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3)$, вещественные волновое число и частоту колебаний $k, \omega$, соответственно. Тогда уравнения (61)-(64) с учетом (65) приводят к двум независимым системам линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд $A, B$, связанных с продольными волнами,

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - k^2c_1^2\right)A - k^2\alpha_{12}B = 0 \\ -k^2\alpha_{12}A + \left(J\omega^2 - k^2\alpha_2^2 - 4\alpha_1\right)B = 0 \end{cases} \qquad (67)$$

и $C_2, C_3, D_2, D_3$, относящихся к поперечным волнам

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - c_2^2k^2\right)C_2 - \gamma_{12}k^2D_2 - 2\alpha_1 ikD_3 = 0 \\ \left(\omega^2 - c_2^2k^2\right)C_3 + 2a_1 ikD_2 - \gamma_{12}k^2D_3 = 0 \\ -\gamma_{12}k^2C_2 - 2\alpha_1 ikC_3 + \left(J\omega^2 - \beta_2^2k^2 - 4\alpha_1\right)D_2 - 4\beta_1 ikD_3 = 0 \\ 2\alpha_1 ik\,C_2 - \gamma_{12}k^2C_3 + 4\beta_1 ikD_2 + \left(J\omega^2 - \beta_2^2k^2 - 4\alpha_1\right)D_3 = 0 \end{cases} \qquad (68)$$

Введем обозначение $\lambda = c^2 = \omega^2 / \mathrm{k}^2$ для фазовой скорости волны. Тогда дисперсионное соотношение для системы уравнений (67) имеет вид

$$J\lambda^2 - \left(Jc_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + 4\frac{\alpha_1}{k^2}\right)\lambda + \left(\alpha_2^2 + 4\frac{\alpha_1}{k^2}\right)c_1{}^2 - \alpha_{12}{}^2 = 0 \qquad (69)$$

Система уравнений (67) может быть записана в виде обобщенной задачи на собственные значения

$$Mx = \lambda Nx \qquad (70)$$

где матрицы $M, N$ определяются соотношениями

$$M = \begin{pmatrix} c_1^2 & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_2^2 + 4\dfrac{\alpha_1}{k^2} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \tag{71}$$

Обе матрицы симметрические и положительно определенные в силу условий устойчивости термодинамического состояния. Собственные значения $\lambda_{1,2} = c_{I,II}^2$ задачи (70) совпадают с корнями характеристического полинома (69), являются вещественными, положительными и имеют вид

$$\lambda_{1,2} = c_{I,II}^2 = \frac{1}{2}\left(c_1{}^2 + \frac{\alpha_2{}^2}{J} + \frac{4\alpha_1}{Jk^2}\right) \pm$$
$$\pm \frac{\sqrt{\left[J\left(c_1^2 - \dfrac{\alpha_2^2}{J}\right)^2 + 4\alpha_{12}{}^2\right]Jk^4 + 8\alpha_1\left(\alpha_2^2 - Jc_1{}^2\right)k^2 + 16\alpha_1{}^2}}{2Jk^2} \tag{72}$$

Асимптотические значения корней для *длинных волн* $(k \to 0)$ равны

$$c_I^2 = c_1^2, \quad c_{II}^2 = \frac{4\alpha_1}{Jk^2} \tag{73}$$

и *коротких волн* $(k \to \infty)$

$$c_{I,II}^2 = \frac{1}{2}\left(c_1{}^2 + \frac{\alpha_2{}^2}{J} \pm \sqrt{\left(c_1{}^2 - \frac{\alpha_2{}^2}{J}\right)^2 + 4\frac{\alpha_{12}{}^2}{J}}\right) \tag{74}$$

Асимптотический вид корней при $J \to 0$ можно представить в форме

$$\lambda_1 = c_I^2 = c_1{}^2 - \frac{\alpha_{12}{}^2k^2}{\alpha_2{}^2k^2 + 4\alpha_1}, \quad \lambda_2 = c_{II}^2 = \frac{1}{2J}\left(2\alpha_2{}^2 + 8\frac{\alpha_1}{k^2}\right) \tag{75}$$

Соответственно, для системы уравнений (68) дисперсионное соотношение связано с обобщенной задачей на собственные значения

$$Ky = \lambda Ly \tag{76}$$

с матрицами $K, L$

$$K = \begin{pmatrix} c_2^2 & 0 & \gamma_{12} & i2\alpha_1/k \\ 0 & c_2^2 & -i2\alpha_1/k & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & i2\alpha_1/k & \beta_2^2 + 4\alpha_1/k^2 & -i2\beta_1/k \\ -i2\alpha_1/k & \gamma_{12} & i2\beta_1/k & \beta_2^2 + 4\alpha_1/k^2 \end{pmatrix}$$
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \end{pmatrix} \tag{77}$$

Параметр $\lambda = c^2 = (\omega/k)^2$ должен быть не отрицательным. Следовательно, среди собственных значений $\lambda_{1,2,3,4}$ задачи (76) надо разыскивать положительные значения.

Определитель матрицы $K - \lambda L$, разделенный на $J^2$, представляет собой полином 4 степени относительно переменной $\lambda$

$$\lambda^4 + b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0 \tag{78}$$

с коэффициентами

$$b_3 = -2c_2{}^2 - 2\frac{\beta_2{}^2}{J} - 5\frac{\alpha_1}{Jk^2}$$
$$b_2 = c_2{}^4 + \frac{c_2{}^2}{J}\left(4\beta_2{}^2 + 10\frac{\alpha_1}{k^2}\right) - \frac{1}{J}\left(2\gamma_{12}{}^2 + 8\frac{\alpha_1{}^2}{k^2}\right) + \tag{79}$$
$$+\frac{1}{J^2}\left(\beta_2{}^4 + \frac{5\alpha_1\beta_2{}^2 - 16\beta_1{}^2}{k^2} + 4\frac{\alpha_1{}^2}{k^4}\right)$$

$$b_1 = -\frac{c_2^{\ 4}}{J}\left(2\beta_2^{\ 2} + 5\frac{\alpha_1}{k^2}\right) +$$
$$+\left(\frac{1}{J}\left(2\gamma_{12}^{\ 2} + 8\frac{\alpha_1^{\ 2}}{k^2}\right) - \frac{1}{J^2}\left(2\beta_2^{\ 4} + \frac{10\alpha_1\beta_2^{\ 2} - 8\beta_1^{\ 2}}{k^2} + 8\frac{\alpha_1^{\ 2}}{k^4}\right)\right)c_2^{\ 2} +$$
$$+\frac{1}{J^2}\left(2\beta_2^{\ 2}\gamma_{12}^{\ 2} + \frac{8\alpha_1^{\ 2}\beta_2^{\ 2} - 32\alpha_1\beta_1\gamma_{12} + 5\alpha_1\gamma_{12}^{\ 2}}{k^2} + 20\frac{\alpha_1^{\ 3}}{k^4}\right)$$

$$b_0 = \frac{1}{J^2}\Big[\beta_2^{\ 4}c_2^{\ 4} - 2\beta_2^{\ 2}c_2^{\ 2}\gamma_{12}^{\ 2} + \gamma_{12}^{\ 4} +$$
$$+\frac{\left(5\alpha_1 c_2^{\ 4} - 8\alpha_1^{\ 2}c_2^{\ 2}\right)\beta_2^{\ 2} - \left(5\alpha_1 c_2^{\ 2} + 8\alpha_1^{\ 2}\right)\gamma_{12}^{\ 2} - 16\alpha_1\beta_1 c_2^{\ 2}\gamma_{12} - 4\beta_1^{\ 2}c_2^{\ 4}}{k^2} +$$
$$+\frac{4\alpha_1^{\ 2}c_2^{\ 4} - 20\alpha_1^{\ 3}c_2^{\ 2} + 16\alpha_1^{\ 4}}{k^4}\Big]$$

В общем случае существуют две продольные волны ($A \neq 0, B \neq 0$ , $C_2 = C_3 = D_2 = D_3 = 0$) с фазовыми скоростями, равными $c_{I,}\, c_{II}$ (69). Число поперечных волн определяется количеством вещественных положительных корней уравнения (78) ($A = 0, B = 0$). Теоретический анализ решений уравнения (78) затруднен в силу большого числа входящих в него параметров. Рассмотрим частные случаи.

## *ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ*

$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_{12} = \nu_{12} = 0$

Имеем два кратных корня

$$c_{III}^2 = c_{iY}^2 = c_2^2, \quad c_Y^2 = c_{YI}^2 = \frac{\beta_2^2}{J} \tag{80}$$

$\beta_1 = \gamma_{12} = \nu_{12} = 0$

Данному случаю соответствуют 4 корня

$$c_{III}^2 = \frac{1}{2}\Bigg[ {c_2}^2 + \frac{{\beta_2}^2}{J} + \frac{\alpha_1}{Jk^2} +$$

$$+\frac{\sqrt{\left({c_2}^2 J - {\beta_2}^2\right)^2 k^4 - 2\alpha_1\left(-8J\alpha_1 - {\beta_2}^2 + {c_2}^2 J\right)k^2 + {\alpha_1}^2}}{Jk^2}\Bigg]$$

(81)

$$c_{IY}^2 = \frac{1}{2}\Bigg[ {c_2}^2 + \frac{{\beta_2}^2}{J} + \frac{\alpha_1}{Jk^2} -$$

$$-+\frac{\sqrt{\left({c_2}^2 J - {\beta_2}^2\right)^2 k^4 - 2\alpha_1\left(-8J\alpha_1 - {\beta_2}^2 + {c_2}^2 J\right)k^2 + {\alpha_1}^2}}{Jk^2}\Bigg]$$

$$c_{Y}^2 = \frac{1}{2}\Bigg[ {c_2}^2 + \frac{{\beta_2}^2}{J} + \frac{4\alpha_1}{Jk^2} +$$

$$+\frac{\sqrt{\left({c_2}^2 J - {\beta_2}^2\right)^2 k^4 - 8\alpha_1\left(-2J\alpha_1 - {\beta_2}^2 + {c_2}^2 J\right)k^2 + 16{\alpha_1}^2}}{Jk^2}\Bigg]$$

(82)

$$c_{YI}^2 = \frac{1}{2}\Bigg[ {c_2}^2 + \frac{{\beta_2}^2}{J} + \frac{4\alpha_1}{Jk^2} -$$

$$-\frac{\sqrt{\left({c_2}^2 J - {\beta_2}^2\right)^2 k^4 - 8\alpha_1\left(-2J\alpha_1 - {\beta_2}^2 + {c_2}^2 J\right)k^2 + 16{\alpha_1}^2}}{Jk^2}\Bigg]$$

$$c_{III}^2 = c_{IY}^2 = c_2^2,\; c_Y^2 = c_{YI}^2 = \frac{\beta_2^2}{J} \qquad (83)$$

Подкоренные выражения в соотношениях (81), (82)должны быть неотрицательными. Это условие приводит к необходимости выполнения неравенств

$$k^2 \geq \frac{\left(-8J\alpha_1 - \beta_2{}^2 + c_2{}^2 J + 4\sqrt{4J^2\alpha_1{}^2 + J\alpha_1\beta_2{}^2 - J^2\alpha_1 c_2{}^2}\right)\alpha_1}{\left(c_2{}^2 J - \beta_2{}^2\right)^2} \tag{84}$$

для $c_{II}^2, c_{IY}^2$ и

$$k^2 \geq 4\frac{\left(-2J\alpha_1 + c_2{}^2 J - \beta_2{}^2 + 2\sqrt{J^2\alpha_1{}^2 - J^2\alpha_1 c_2{}^2 + J\alpha_1\beta_2{}^2}\right)\alpha_1}{\left(c_2{}^2 J - \beta_2{}^2\right)^2} \tag{85}$$

для $c_Y^2, c_{YI}^2$, соответственно.

Здесь же можно указать асимптотические выражения для фазовых скоростей при $J \to 0$

$$\begin{aligned} c_{III}^2 &= \frac{\alpha_1 + \beta_2{}^2 k^2}{Jk^2}, \qquad & c_{IY}^2 &= c_2{}^2 - \frac{4\alpha_1{}^2}{\alpha_1 + \beta_2{}^2 k^2} \\ c_Y^2 &= \frac{4\alpha_1 + \beta_2{}^2 k^2}{Jk^2}, \qquad & c_{YI}^2 &= c_2{}^2 - \frac{4\alpha_1{}^2}{4\alpha_1 + \beta_2{}^2 k^2} \end{aligned} \tag{86}$$

## Литература

1. Седов Л.И. Механика сплошных сред. Т.1. М.: Наука.-1976.-536 с.
2. Тарапов И.Е. Механика сплошной среды. В 3 ч. Ч.2: Общие законы кинематики и динамики. Харьков: Золотые страницы, 2002.-516 с.
3. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир. 1974.-304 с. М.: Мир, 1964. 456 с.
4. С. де Гроот, П.Мазур. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
5. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Т.1. М.: Наука.-1972. -530 с.
6. Базаров И.П. Термодинамика. М.: Высшая школа, 1983. 344 с.
7. Воронин Г.Ф. Основы термодинамики. М.: Изд-во МГУ, 1987.-192 с.
8. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.-280 с.
9. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des Corps Deformables // Traité de Physique. Ed. O.D. Chwolson. – Paris,
10. 1909. – P. 953-1173.
11. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1962, 11, №5, pp. 415-448.
12. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости. ПММ, 1964, т.28. С. 401-498.
13. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц. Физика твердого тела, 1960, т.11, в.7. С.1399-1409.
14. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1962, 11, №5, pp. 415-448/
15. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир.-1975.-872 с.
16. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Механика сплошной среды. В 3 ч. Ч.1: Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Харьков: Золотые страницы, 2003. - 320 с.

Навчальне видання

# МОМЕНТНА ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ

Учбовий посібник для студентів
III-IV курсів спеціальності “Механіка”

/ Укладач  Ієвлев Іван Іванович
Харків: ХНУ ім.. В.Н.Каразіна, 2015. – 31 с.

Відповідальний за випуск І.І.Ієвлев