Задача объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня.

В. А. Стеклова.

1) Задача объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня зависитъ, какъ извѣстно, отъ интегрированія слѣдующаго уравненія въ частныхъ производныхъ

$$g\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \xi}n\frac{\partial U}{\partial \xi}-lU, \tag{1}$$

гдѣ t есть время, а g, n и l суть положительныя функціи ξ на всемъ протяженіи стержня, направленіе котораго совпадаетъ съ осью ξ.

Функція U представляетъ температуру стержня, g есть удѣльная теплота стержня, n коэффиціентъ его теплопроводности, l коэффиціентъ лучеиспускательной способности на каждомъ поперечномъ сѣченіи стержня.

Предположимъ, что абсциссы начала и конца стержня суть 0 и X.

Функція U, опредѣляемая уравненіемъ (1), должна удовлетворять слѣдующимъ предѣльнымъ условіямъ

$$\begin{aligned} n\frac{\partial U}{\partial \xi}-hU=0 \qquad &\text{при } \xi=0,\\ n\frac{\partial U}{\partial \xi}+HU=0 \qquad &\text{при } \xi=X, \end{aligned} \tag{2}$$

гдѣ h и H суть положительныя постоянныя.

Въ начальный моментъ времени, который примемъ за начало счета временъ, функція U должна обращаться въ заданную функцію отъ ξ

$$U=f(\xi) \qquad \text{при } t=0.$$

Полагая

$$U=e^{-kt}V,$$

гдѣ k есть нѣкоторая постоянная, а V функція одного ξ, приведемъ рѣшеніе задачи къ опредѣленію функціи V при помощи слѣдующаго линейнаго уравненія

$$\frac{d}{d\xi} n \frac{dV}{d\xi} + (gk - l)V = 0 \tag{3}$$

при условіяхъ

$$\begin{aligned} n\frac{dV}{d\xi} - hV = 0 \qquad &\text{при } \xi = 0\,, \\ n\frac{dV}{d\xi} + HV = 0 \qquad &\text{при } \xi = X. \end{aligned} \tag{4}$$

M. Jordan въ третьемъ томѣ своего соч. „Cours d'Analyse de l'école polytechnique“ *), изслѣдуя разсматриваемую задачу, показалъ, что существуетъ безчисленное множество положительныхъ, различныхъ между собою чиселъ

$$k_1\,,\ k_2\,, \ldots, k_n\,, \ldots,$$

при каждомъ изъ которыхъ, положимъ $k_n (n = 1, 2, \ldots)$, можетъ быть найдена конечная и отличная отъ нуля въ интервалѣ отъ 0 до X функція $U_n (n = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющая уравненію типа (3) при условіяхъ (4).

Частнымъ рѣшеніемъ уравненія (1), удовлетворяющимъ условіямъ (2), будетъ выраженіе

$$A_n e^{-k_n t} U_n\,,$$

гдѣ A_n есть произвольная постоянная.

Болѣе общее рѣшеніе получимъ, положивъ

$$U = \sum_1^{\infty} A_n e^{-k_n t} U_n\,. \tag{5}$$

Опредѣленная такимъ образомъ функція U будетъ искомымъ рѣшеніемъ разсматриваемой нами задачи, если выберемъ коэффиціенты A_n такъ, чтобы рядъ (5) при $t = 0$ представлялъ въ интервалѣ отъ 0 до X разложеніе данной функціи $f(\xi)$ въ рядъ по функціямъ $U_n (n = 1, 2, \ldots)$.

M. Jordan въ своемъ изслѣдованіи указываетъ только необходимыя условія, которымъ должны удовлетворять постоянныя $A_n (n = 1, 2, \ldots)$, чтобы рядъ

$$\sum A_n U_n$$

*) См. C. Jordan. „Cours d'Analyse de l'école polytechnique“. Paris, 1887, pp. 394—412.

могъ представлять разложеніе функціи $f(\xi)$ въ рядъ по функціямъ $U_n (n = 1, 2, \ldots)$, и заканчиваетъ изслѣдованіе слѣдующимъ замѣчаніемъ, которое приведу дословно:

„Si cette série est convergente et a bien pour somme $f(\xi)$ dans tout l'intervalle de 0 à X, le probléme sera résolu; mais, pour s'en assurer, il serait nécessaire de sommer directement la série. Ce résultat n'a encore été atteint que dans quelques cas particuliers".

2) Въ настоящей работѣ я также намѣренъ заняться вышеуказанной задачей и предложить особый пріемъ ея рѣшенія, позволяющій довести изслѣдованіе до конца при сравнительно общихъ предположеніяхъ относительно функціи $f(\xi)$ предыдущаго §-а.

Разсмотримъ уравненіе

$$\frac{d}{d\xi} n \frac{dV}{d\xi} + (gk - l) V = 0. \tag{6}$$

Предположимъ, что функціи n и g, оставаясь положительными, не обращаются въ нуль въ интервалѣ отъ 0 до X.

Это предположеніе вполнѣ соотвѣтствуетъ физическому характеру функцій k и g.

Итакъ, допустимъ, что для всѣхъ значеній ξ между 0 и X

$$A_1 < n < B_1,$$
$$A_2 < g < B_2,$$

гдѣ A_1, B_1, A_2, B_2 суть конечныя, положительныя, не равныя нулю постоянныя.

Примемъ за независимую перемѣнную

$$x = \int \frac{d\xi}{n} \tag{7}$$

и положимъ

$$ng = p_1(\xi), \qquad nl = q_1(\xi).$$

Функціи $p_1(\xi)$ и $q_1(\xi)$ положительны въ интервалѣ отъ 0 до X, и первая изъ нихъ удовлетворяетъ сверхъ того условію

$$A = A_1 A_2 < p_1(\xi) < B_1 B_2 = B. \tag{8}$$

Обозначимъ черезъ $p(x)$ и $q(x)$ выраженія $p_1(\xi)$ и $q_1(\xi)$ по замѣнѣ въ послѣднихъ ξ черезъ x при помощи (7).

Уравненіе (6), преобразованное къ перемѣнной x, приметъ видъ

$$V'' + [kp(x) - q(x)] V = 0, \tag{9}$$

гдѣ

$$V'' = \frac{d^2V}{dx^2}.$$

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ обозначать первую и вторую производную по x какой либо функціи F соотвѣтственно черезъ F' и F''.

Пусть при измѣненіи ξ отъ 0 до X перемѣнная x измѣняется отъ a до b.

Соотношеніе (7) показываетъ, что

$$a > 0, \qquad b > 0$$

и

$$b - a > 0.$$

Предѣльныя условія (4) замѣнятся слѣдующими

$$\begin{aligned} V' - hV &= 0 \qquad \text{при } x = a, \\ V' + HV &= 0 \qquad \text{при } x = b. \end{aligned} \tag{10}$$

Послѣдующіе §§-ы будутъ посвящены изслѣдованію свойствъ интеграловъ уравненій типа (9) при условіяхъ (10).

3) Обозначимъ черезъ $f(x)$ конечную и непрерывную въ интервалѣ отъ a до b функцію x.

Теорема I. *Существуетъ единственная, вполнѣ опредѣленная, конечная и непрерывная въ интервалѣ отъ a до b функція x, удовлетворяющая уравненію*

$$V'' - q(x)V + f(x) = 0 \tag{11}$$

и условіямъ

$$\begin{aligned} V' - hV &= 0 \qquad \text{при } x = a, \\ V' + HV &= 0 \qquad \text{при } x = b. \end{aligned} \tag{12}$$

Обозначимъ черезъ v_1 и v_2 два линейно независимыхъ частныхъ рѣшенія уравненія

$$V'' - q(x)V = 0.$$

Общій интегралъ уравненія (11) представится подъ видомъ

$$V = M_1 v_1 + M_2 v_2, \tag{13}$$

гдѣ

$$M_1 = C_1 + \int_a^x \frac{fv_2}{\Delta}\,dx,$$

$$M_2 = C_2 - \int_a^x \frac{fv_1}{\Delta}\,dx,$$

C_1 и C_2 произвольныя постоянныя, а

$$\Delta = \begin{vmatrix} v_1, & v_2 \\ v_1', & v_2' \end{vmatrix} = \text{const.}$$

по извѣстной теоремѣ Liouville'a.

Положивъ

$$m(x) = v_1 \int_a^x \frac{fv_2}{\Delta}\, dx - v_2 \int_a^x \frac{fv_1}{\Delta}\, dx, \tag{14}$$

представимъ равенство (13) подъ видомъ

$$V = C_1 v_1 + C_2 v_2 + m(x). \tag{15}$$

Очевидно, что

$$m(a) = 0, \qquad m'(a) = 0.$$

Выберемъ постоянныя C_1 и C_2 такъ, чтобы удовлетворялись условія (12).

Для опредѣленія C_1 и C_2 получаемъ слѣдующія уравненія

$$\begin{aligned} C_1[v_1'(a) - hv_1(a)] + C_2[v_2'(a) - hv_2(a)] &= 0, \\ C_1[v_1'(b) + Hv_1(b)] + C_2[v_2'(b) + Hv_2(b)] + n(b) &= 0, \end{aligned} \tag{16}$$

гдѣ положено для сокращенія

$$n(b) = m'(b) + Hm(b).$$

Всегда можно предположить, что опредѣлитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} v_1'(a) - hv_1(a), & v_2'(a) - hv_2(a) \\ v_1'(b) + Hv_1(b), & v_2'(b) + Hv_2(b) \end{vmatrix}$$

не равенъ нулю.

При этомъ допущеніи уравненія (16) даютъ

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{v_2'(a) - hv_2(a)}{\Delta_1}\, n(b) = n_1 n(b), \\ C_2 &= -\frac{v_1'(a) - hv_1(a)}{\Delta_1}\, n(b) = n_2 n(b), \end{aligned} \tag{17}$$

гдѣ положено для сокращенія

$$n_1 = \frac{v_2'(a) - hv_2(a)}{\varDelta_1},$$

$$n_2 = -\frac{v_1'(a) - hv_1(a)}{\varDelta_1}.$$

Разумѣя подъ C_1 и C_2 въ равенствѣ (15) постоянныя, опредѣляемыя равенствами (17), получаемъ интегралъ уравненія (11), удовлетворяющій условіямъ (12).

Функціи v_1 и v_2 конечны и непрерывны въ интервалѣ отъ a до b вмѣстѣ съ ихъ производными, функція $f(x)$ конечна и непрерывна въ томъ же интервалѣ по условію.

Такова же, очевидно, и функція V [рав. (15)].

Лемма I. *Функція V удовлетворяетъ условію*

$$V^2 < Q\int_a^b f^2 dx$$

для всѣхъ значеній x отъ a до b, гдѣ Q есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Каковы бы ни были функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, всегда

$$\left(\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)dx\right)^2 < \int_a^b \varphi^2(x)dx \cdot \int_a^b \psi^2(x)dx. \tag{18}$$

Обозначимъ черезъ A' наибольшій изъ наибольшихъ модулей функцій v_1 и v_2 въ интервалѣ отъ a до b.

Примѣнивъ неравенство (18) къ (14), получимъ

$$|m(x)| < \frac{A'}{|\varDelta|}\left[\left(\int_a^x v_1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^x v_2^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\int_a^x f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

а, слѣдовательно, и подавно

$$|m(x)| < \frac{A'}{|\varDelta|}\left[\left(\int_a^b v_1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b v_2^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\int_a^b f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положимъ

$$\frac{A'}{|\varDelta|}\left[\left(\int_a^b v_1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b v_2^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] = M_1,$$

гдѣ M_1 есть, очевидно, конечная, положительная, неравная нулю постоянная, зависящая отъ характера функціи $q(x)$ и интервала (a, b).

Получимъ

$$|m(x)| < M_1 \left(\int_a^b f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Точно также, обозначивъ черезъ B' наибольшій изъ наибольшихъ модулей функцій v_1' и v_2' въ интервалѣ (a, b), можемъ писать

$$|m'(x)| < M_2 \left(\int_a^b f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

гдѣ

$$M_2 = \frac{B'}{|\varDelta|}\left[\left(\int_a^b v_1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b v_2^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Такимъ образомъ

$$|n(b)| < K \left(\int_a^b f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

гдѣ

$$K = M_2 + HM_1.$$

Назовемъ черезъ n наибольшее изъ численныхъ значеній величинъ n_1 и n_2.

Получаемъ

$$|C_1| < nK \left(\int_a^b f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|C_2| < nK \left(\int_a^b f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

и, наконецъ,

$$|V| < (2nKA' + M_1)\left(\int_a^b f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

или, положивъ

$$2n\,KA' + M_1 = \sqrt{Q}\,,$$

получимъ

$$V^2 < Q\int_a^b f^2 dx, \tag{19}$$

что и требовалось показать.

4) Теорема II. *Уравненіе*

$$V'' + [kp(x) - q(x)]\,V + f = 0 \tag{20}$$

допускаетъ въ интервалѣ отъ a до b конечный и непрерывный интегралъ, удовлетворяющій условіямъ

$$\left.\begin{aligned} V'(a) - hV(a) &= 0\,, \\ V'(b) + HV(b) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

и представляющійся въ видѣ ряда, расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ k, пока $|k|$ не превосходитъ нѣкотораго предѣла ϱ, гдѣ ϱ есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Положимъ

$$V = V_0 + kV_1 + k^2 V_2 + \ldots + k^n V_n + \ldots\,, \tag{22}$$

гдѣ $V_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ суть нѣкоторыя функціи отъ x.

Подставивъ это выраженіе V въ уравненіе (20) и приравнявъ нулю коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ k, получимъ слѣдующую систему уравненій для послѣдовательнаго опредѣленія функцій V_n

$$\begin{aligned} &V_0'' - q(x)V_0 + f = 0\,, \\ &V_1'' - q(x)V_1 + p(x)V_0 = 0\,, \\ &V_2'' - q(x)V_2 + p(x)V_1 = 0\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &V_n'' - q(x)V_n + p(x)V_{n-1} = 0\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

при условіяхъ

$$\left.\begin{aligned} V_n'(a) - hV_n(a) &= 0\,, \\ V_n'(b) + HV_n(b) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{24}$$

По теоремѣ предыдущаго §-а мы можемъ опредѣлить V_n, начиная съ $n = 0$ и т. д.

Рядъ (22) будетъ навѣрно сходящимся при достаточно малыхъ значеніяхъ параметра k.

Найдемъ высшій предѣлъ радіуса круга сходимости этого ряда по параметру k.

Разсмотримъ интегралы

$$W_{m,n} = \int_a^b p(x) V_m V_n dx,$$

гдѣ V_m и V_n суть функціи, опредѣляемыя уравненіями (23) при условіяхъ (24).

Аналогичные интегралы были введены въ употребленіе впервые, если не ошибаемся, Schwarz'емъ при рѣшеніи одной задачи, относящейся къ варіаціонному исчисленію.

Мы будемъ называть иногда интегралы $W_{m,n}$ интегралами Schwarz'а.

Не трудно убѣдиться, что

$$W_{m,n} = W_{m+1,\,n-1} = \ldots = W_{m+j,\,m-j}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, въ силу (23) и (24) имѣемъ

$$W_{m,n} = \int_a^b p(x) V_m V_n dx = \int_a^b q(x) V_{m+1} V_n dx - \int_a^b V''_{m+1} V_n dx,$$

$$\int_a^b V_n V''_{m+1} dx = V_n V'_{m+1} \Big|_a^b - \int_a^b V'_n V'_{m+1} dx,$$

$$\int_a^b V'_n V'_{m+1} dx = V'_n V_{m+1} \Big|_a^b - \int_a^b V_{m+1} V''_n dx,$$

$$\int_a^b V_{m+1} V''_n dx = \int_a^b q(x) V_{m+1} V_n dx - \int_a^b p(x) V_{m+1} V_{n-1} dx.$$

Отсюда

$$W_{m,n} = V_n V'_{m+1} - V'_n V_{m+1} \Big|_a^b + \int_a^b p(x) V_{m+1} V_{n-1} dx.$$

Но [рав. (24)]

$$V_n V'_{m+1} - V'_n V_{m+1} \Big|_a^b = 0$$

и, согласно вышепринятому обозначенію,

$$\int_a^b p(x) V_{m+1} V_{n-1} dx = W_{m+1, n-1}.$$

Слѣдовательно,

$$W_{m,n} = W_{m+1, n-1}$$

и, вообще,

$$W_{m,n} = W_{m+j, n-j}.$$

Разсмотримъ два случая

1) $m + n = 2s$, (четное)

2) $m + n = 2s - 1$. (нечетное)

Пусть $m+n$ есть число четное и равно $2s$.

Въ такомъ случаѣ

$$W_{m,n} = \int_a^b p(x) V_s^2 dx. \tag{25}$$

Интегралъ правой части этого равенства обозначимъ просто черезъ W_{2s}.

Пусть $m+n$ есть число нечетное и равно $2s-1$.

Тогда

$$W_{m,n} = \int_a^b p(x) V_{s-1} V_s dx. \tag{26}$$

Интегралъ правой части этого равенства обозначимъ просто черезъ W_{2s-1}.

Всѣ интегралы $W_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ *положительны.*

Для случая четнаго $n = 2s$ это доказывается равенствомъ (25).

Остается только разсмотрѣть интегралы W_{2s-1}.

Имѣемъ

$$W_{2s-1} = \int_a^b p(x) V_{s-1} V_s dx = \int_a^b V_s [q(x) V_s - V_s''] dx,$$

$$\int_a^b V_s V_s'' dx = V_s' V_s \Big|_a^b - \int_a^b (V_s')^2 dx,$$

т. е.

$$W_{2s-1}=\int_a^b q(x)V_s^2dx+\int_a^b (V_s')^2dx-V_s'V_s\Big|_a^b.$$

Но

$$-V_s'V_s\Big|_a^b=HV_s^2(b)+hV_s^2(a)>0.$$

Слѣдовательно,

$$W_{2s-1}>0,$$

что и требовалось показать.

Интегралы $W_{2s}(s=0,1,2,\ldots)$ *удовлетворяютъ неравенствамъ*

$$\frac{\sqrt{W_2}}{\sqrt{W_0}}<\frac{\sqrt{W_4}}{\sqrt{W_2}}<\ldots<\frac{\sqrt{W_{2s}}}{\sqrt{W_{2s-2}}}<\ldots. \qquad (27)$$

По предыдущему

$$W_{2s}=\int_a^b p(x)V_{s+1}V_{s-1}dx.$$

Отсюда [нерав. (18)]

$$W_{2s}^2<W_{2s+2}\cdot W_{2s-2},$$

или

$$\frac{\sqrt{W_{2s}}}{\sqrt{W_{2s-2}}}<\frac{\sqrt{W_{2s+2}}}{\sqrt{W_{2s}}}. \qquad (s=1,2,\ldots)$$

Неравенства (27) доказаны.

Отношеніе

$$\frac{\sqrt{W_{2s}}}{\sqrt{W_{2s-2}}}$$

стремится при возрастаніи значка s *къ конечному предѣлу.*

Примѣнивъ лемму I къ s'тому изъ уравненій (23) [при s'томъ изъ условій (24)], получимъ

$$|V_s|<\left(Q\int_a^b p^2(x)V_{s-1}^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

или (см. обозначенія §-а 2-ого)

$$V_s^2 < QBW_{2s-1} = Q_1 W_{2s-1}\,. \tag{28}$$

Положимъ

$$\int_a^b p(x)dx = c > 0\,.$$

Неравенство (28) даетъ

$$W_{2s} < Q_2 W_{2s-2}$$

при всякомъ s, гдѣ

$$Q_2 = cQ_1$$

есть конечная, неравная нулю, положительная постоянная.

Такимъ образомъ

$$\lim \frac{\sqrt{W_{2s}}}{\sqrt{W_{2s-2}}}\Bigg|_{s=\infty} < \sqrt{Q_2}\,,$$

что и требовалось доказать.

Неравенство (28) показываетъ, что модуль каждаго члена ряда

$$V_0 + kV_1 + k^2V_2 + \ldots + k^nV_n + \ldots \tag{29}$$

меньше соотвѣтствующаго члена ряда

$$Q_1\sqrt{W_0} + |k|Q_1\sqrt{W_2} + |k|^2 Q_1\sqrt{W_4} + \ldots + |k|^n Q_1\sqrt{W_{2n}} + \ldots\,.$$

Послѣдній рядъ сходится, пока

$$|k| < \lim \frac{\sqrt{W_{2n-2}}}{\sqrt{W_{2n}}} = \varrho\,.$$

При этомъ же условіи сходится и рядъ (29), удовлетворяющій уравненію (20) и условіямъ (21).

Теорема III. *Функція V, удовлетворяющая уравненію (20) и условіямъ (21), есть голоморфная функція параметра k только для значеній k, лежащихъ внутри круга радіуса*

$$\varrho = \lim \frac{\sqrt{W_{2n-2}}}{\sqrt{W_{2n}}}\,,$$

*

и не можетъ быть голоморфной функціей k во всей плоскости перемѣннаго k, если разсматривать f какъ произвольную функцію x.

Мы видѣли, что радіусъ круга сходимости ряда (29) по параметру k не менѣе ϱ.

Остается только показать, что этотъ радіусъ не можетъ быть болѣе ϱ.

Помножимъ рядъ (29) на $p(x)V_0$ и интегрируемъ полученный рядъ по x въ предѣлахъ отъ a до b.

Получимъ рядъ

$$\int_a^b p(x)V_0^2 dx + k\int_a^b p(x)V_0V_1 dx + \ldots + k^n\int_a^b p(x)V_0V_n dx + \ldots,$$

который можно представить подъ видомъ

$$W_0 + kW_1 + k^2W_2 + \ldots k^nW_n + \ldots \quad . \tag{30}$$

Этотъ рядъ будетъ несомнѣнно сходящимся для тѣхъ значеній k, для которыхъ рядъ (29) сходится абсолютно и равномѣрно, и радіусъ круга сходимости ряда (29) не болѣе радіуса круга сходимости ряда (30).

Послѣдній же радіусъ во всякомъ случаѣ не болѣе радіуса круга сходимости ряда

$$W_0 + k^2W_2 + k^4W_4 + \ldots + k^{2n}W_{2n} + \ldots,$$

который перестанетъ быть сходящимся при

$$|k| \geq \lim \frac{\sqrt{W_{2n-2}}}{\sqrt{W_{2n}}} = \varrho.$$

Итакъ, радіусъ круга сходимости ряда (30), а, слѣдовательно, и (29) не болѣе ϱ.

Интегралъ уравненія (20), удовлетворяющій условіямъ (21), не можетъ быть, вообще говоря, голоморфной функціей параметра k во всей плоскости этой перемѣнной.

Теорема доказана вполнѣ.

5) Теорема IV. *Интегралъ уравненія*

$$V'' + [kp(x) - q(x)]V + f = 0,$$

удовлетворяющій условіямъ

$$V'(a) - hV(a) = 0,$$
$$V'(b) + HV(b) = 0$$

и разсматриваемый какъ функція параметра k, есть, вообще говоря, мероморфная функція этого параметра, полюсами которой служатъ корни нѣкотораго трансцендентнаго уравненія.

Назовемъ черезъ w_1 и w_2 два линейно независимыхъ частныхъ рѣшенія уравненія

$$V'' + [kp(x) - q(x)]V = 0. \tag{31}$$

Функціи w_1 и w_2 суть функціи x и k, конечныя и непрерывныя вмѣстѣ со своими производными для значеній x въ интервалѣ отъ a до b и при всѣхъ значеніяхъ k.

Общій интегралъ уравненія (31) представится подъ видомъ

$$V = D_1 w_1 + D_2 w_2, \tag{32}$$

гдѣ D_1 и D_2 суть произвольныя постоянныя.

Выраженіе (32) будетъ интеграломъ уравненія

$$V'' + [kp(x) - q(x)]V + f = 0, \tag{33}$$

если предположимъ, что

$$D_1 = C_1 + \int_a^x \frac{fw_2}{\varDelta}\,dx,$$

$$D_2 = C_2 - \int_a^x \frac{fw_1}{\varDelta}\,dx,$$

гдѣ C_1 и C_2 суть произвольныя постоянныя, а

$$\varDelta = \begin{vmatrix} w_1, & w_2 \\ w_1', & w_2' \end{vmatrix} = \text{const.}$$

по теоремѣ Liouville'a.

Такимъ образомъ общій интегралъ уравненія (33) приметъ видъ

$$V = C_1 w_1 + C_2 w_2 + \vartheta(x), \tag{34}$$

гдѣ положено для сокращенія

$$\vartheta(x) = w_1 \int_a^x \frac{fw_2}{\varDelta}\,dx - w_2 \int_a^x \frac{fw_1}{\varDelta}\,dx.$$

Очевидно

$$\vartheta(a)=0\,,\qquad \vartheta'(a)=0\,.$$

Функція V (34) будетъ удовлетворять предѣльнымъ условіямъ теоремы IV, если опредѣлимъ C_1 и C_2 при помощи уравненій

$$\begin{aligned} C_1[w_1'(a)-hw_1(a)]+C_2[w_2'(a)-hw_2(a)]&=0\,,\\ C_1[w_1'(b)+Hw_1(b)]+C_2[w_2'(b)+Hw_2(b)]&=\varkappa(b)\,, \end{aligned}\tag{35}$$

гдѣ положено для сокращенія

$$\varkappa(b)=-[\vartheta'(b)+H\vartheta(b)].$$

Уравненія (35) даютъ

$$C_1=\frac{Q_1}{\tilde{\omega}(k)}\,,\qquad C_2=\frac{Q_2}{\tilde{\omega}(k)}\,,$$

гдѣ Q_1 и Q_2 суть опредѣленныя постоянныя, а

$$\tilde{\omega}(k)=\begin{vmatrix} w_1'(a)-hw_1(a)\,, & w_2'(a)-hw_2(a)\\ w_1'(b)+Hw_1(b)\,, & w_2'(b)-Hw_2(b)\end{vmatrix}$$

есть цѣлая трансцендентная функція k.

Такимъ образомъ получаемъ

$$V=\frac{Q_1w_1+Q_2w_2}{\tilde{\omega}(k)}+\vartheta(x).\tag{36}$$

Функція

$$Q_1w_1+Q_2w_2$$

есть опредѣленная, конечная и непрерывная функція x въ интервалѣ отъ a до b и для всѣхъ значеній параметра k.

Такъ какъ по теоремѣ III функція V не можетъ быть, вообще говоря, голоморфной функціей параметра k во всей плоскости этой перемѣнной, то V должно быть, какъ показываетъ выраженіе (36), мероморфной функціей k, полюсами которой служатъ по крайней мѣрѣ нѣкоторые изъ корней уравненія

$$\tilde{\omega}(k)=0.\tag{37}$$

Представимъ функцію V въ видѣ

$$V=\frac{W}{\tilde{\omega}(k)},$$

гдѣ W есть функція x и параметра k.

Произвольную функцію f всегда можно выбрать такъ, чтобы W не обращалось тождественно въ нуль при k, равномъ одному изъ корней уравненія (37), каковъ бы ни былъ этотъ корень.

Поэтому, считая функцію f произвольной (неопредѣленной), можемъ утверждать, что, вообще говоря, V есть мероморфная функція k, полюсами которой служатъ корни уравненія (37).

6) **Теорема V.** *При каждомъ изъ значеній k, равномъ корню уравненія*

$$\tilde{\omega}(k) = 0\,,$$

существуетъ конечная и непрерывная въ интервалѣ отъ a до b функція x, удовлетворяющая уравненію

$$V'' + [kp(x) - q(x)]V = 0 \tag{38}$$

и условіямъ

$$\left.\begin{aligned} V'(a) - hV(a) &= 0\,, \\ V'(b) + HV(b) &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Въ самомъ дѣлѣ, функція W удовлетворяетъ уравненію

$$W'' + [kp(x) - q(x)]W + \tilde{\omega}(k)f = 0$$

и условіямъ (39) каково бы ни было значеніе k.

При k, равномъ одному изъ корней уравненія (37), функція W обратится въ функцію V, удовлетворяющую уравненію типа (38) при условіяхъ (39).

По предыдущему, эту функцію можемъ считать не равной нулю.

Каждому корню уравненія (37) будетъ соотвѣтствовать особая функція V.

Условіями (38) и (39) функція V опредѣляется вполнѣ до нѣкотораго произвольнаго множителя.

Этотъ множитель мы опредѣлимъ изъ условія

$$\int_a^b p(x)V^2dx = 1. \tag{40}$$

Функцію V, соотвѣтствующую корню $k_n[n = 1, 2, \ldots$ до числа корней уравненія (37)] и удовлетворяющую уравненію (38) при условіяхъ (39) и (40), мы будемъ въ дальнѣйшемъ обозначать черезъ U_n.

7) Пусть k_n и k_m два неравныхъ между собою корня уравненія (37)

Теорема VI. *Функціи U_n и U_m удовлетворяютъ условію*

$$\int_a^b p(x)U_nU_m dx = 0$$

при всякихъ n и m, не равныхъ между собою.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$k_n\int_a^b p(x)U_nU_m dx = \int_a^b U_m[q(x)U_n - U_n'']dx =$$

$$= \int_a^b q(x)U_nU_m dx + \int_a^b U_n'U_m dx - U_mU_n'\Big|_a^b,$$

$$k_m\int_a^b p(x)U_nU_m dx = \int_a^b U_n[q(x)U_m - U_m'']dx =$$

$$= \int_a^b q(x)U_nU_m dx + \int_a^b U_n'U_m' dx - U_nU_m'\Big|_a^b.$$

Отсюда

$$(k_n - k_m)\int_a^b p(x)U_nU_m dx = 0,$$

или

$$\int_a^b p(x)U_nU_m dx = 0,$$

если

$$n \gtrless m,$$

что и требовалось показать.

8) **Теорема VII.** *Всѣ корни уравненія*

$$\varpi(k) = 0 \qquad \textbf{(37)}$$

суть простые, вещественные и положительные.

Предположимъ, что уравненіе (37) допускаетъ мнимый корень

$$k_n = \alpha + i\beta.$$

Выраженіе

$$k_m = \alpha - i\beta$$

есть также корень разсматриваемаго уравненія.

Соотвѣтствующія этимъ корнямъ функціи U_n и U_m будутъ вида

$$U_n = p + iq, \qquad U_m = p - iq.$$

По предыдущей теоремѣ

$$\int_a^b p(x) U_n U_m dx = 0. \tag{41}$$

Съ другой стороны

$$\int_a^b p(x) U_n U_m dx = \int_a^b p(x)(p^2 + q^2) dx.$$

Равенство (41) очевидно невозможно, ибо p и q не могутъ равняться нулю одновременно.

Итакъ, всѣ корни функціи $\tilde{\omega}(k)$ вещественны.

Допустимъ существованіе отрицательнаго корня функціи $\tilde{\omega}(k)$.

Положимъ

$$k_n = -\alpha^2,$$

гдѣ α есть вещественная постоянная.

Имѣемъ

$$U_n'' = [p(x)\alpha^2 + q(x)] U_n.$$

Помноживъ это уравненіе на U_n и проинтегрировавъ по x отъ a до b, получимъ

$$-U_n U_n' \Big|_a^b + \int_a^b (U')^2 dx + \int_a^b [p(x)\alpha^2 + q(x)] U_n^2 dx = 0.$$

Это равенство очевидно невозможно, ибо

$$-U_n U_n' \Big|_a^b = HU_n^2(b) + hU_n^2(a) > 0\,,$$

и интегралы, входящіе въ правую часть предыдущаго равенства положительны.

Слѣдовательно, всѣ корни уравненія (37) положительны.

Докажемъ, наконецъ, что это уравненіе имѣетъ только простые корни.

Функція W, введенная нами въ §§-ахъ 5-омъ и 6-омъ, удовлетворяетъ уравненію

$$W'' + [kp(x) - q(x)]\,W + \tilde{\omega}(k)f = 0$$

и условіямъ

$$W'(a) - hW(a) = 0\,,$$
$$W'(b) + HW(b) = 0\,.$$

При k равномъ одному изъ корней уравненія (37), положимъ k_n, W обращается въ U_n.

Положимъ

$$k = k_n + \xi\,,$$

гдѣ ξ есть безконечно малая величина.

Означимъ затѣмъ черезъ (F) производную отъ какой либо функціи F по k_n.

Имѣемъ

$$W\,(x, k_n + \xi) = U_n + \xi(U_n) + \cdots\,,$$
$$W'(x, k_n + \xi) = U_n' + \xi(U_n') + \cdots\,,$$
$$W''(x, k_n + \xi) = U_n'' + \xi(U_n'') + \cdots\,,$$
$$\tilde{\omega}(k) = \tilde{\omega}(k_n) + \xi[\tilde{\omega}(k_n)] + \cdots = \xi[\tilde{\omega}(k_n)] + \cdots\,.\ ^{*)}$$

Слѣдовательно,

$$(U_n)'' + [k_n p(x) - q(x)](U_n) + p(x)[\tilde{\omega}(k_n)]\,U_n + p(x)U_n = 0 \qquad \textbf{(42)}$$

и

$$(U_n)' - h(U_n) = 0 \quad \text{при } x = a\,,$$
$$(U_n)' + H(U_n) = 0 \quad \text{при } x = b\,.$$

---

*) $[\tilde{\omega}(k_n)]$ обозначаетъ также производную отъ $\tilde{\omega}(k_n)$ по k_n.

Если k_n есть двойной корень уравненія (37), то

$$[\tilde{\omega}(k_n)] = 0$$

и уравненіе (42) обращается въ слѣдующее

$$(U_n)'' + [k_n p(x) - q(x)](U_n) + p(x) U_n = 0 .$$

Помноживъ это уравненіе на U_n и проинтегрировавъ по x въ предѣлахъ отъ a до b, получимъ

$$\int_a^b U_n (U_n)'' dx + \int_a^b [k_n p(x) - q(x)] U_n (U_n) dx + \int_a^b p(x) U_n^2 dx = 0 .$$

Это равенство очевидно невозможно, ибо

$$\int_a^b U_n (U_n)'' dx + \int_a^b [k_n p(x) - q(x)] U_n (U_n) dx = 0 ,$$

а

$$\int_a^b p(x) U_n^2 dx = 1$$

по условію.

Уравненіе (37) не можетъ имѣть корня второй кратности.

Точно такимъ же путемъ убѣдимся, что интересующее насъ уравненіе не можетъ имѣть корня какой бы то ни было p'той кратности.

Итакъ, всѣ корни уравненія (37) суть простые, вещественные и положительные, что и требовалось доказать.

Сопоставляя эту теорему съ теоремой V (§ 6-ого), можемъ утверждать, что существуетъ нѣкоторое число p (p равно по крайней мѣрѣ единицѣ) положительныхъ (неравныхъ между собою) чиселъ

$$k_1 , \; k_2 , \ldots , k_p ,$$

каждому изъ которыхъ, положимъ k_n ($n = 1, 2, \ldots, p$), соотвѣтствуетъ единственная, вполнѣ опредѣленная функція U_n, конечная и непрерывная въ интервалѣ (a, b), удовлетворяющая уравненію

$$U_n'' + [k_n p(x) - q(x)] U_n = 0$$

и условіямъ

$$U_n'(a) - hU_n(a) = 0\,,$$

$$U_n'(b) + HU_n(b) = 0\,,$$

$$\int_a^b p(x)U_n^2 dx = 1\,.$$

9) Мы покажемъ ниже, что число p безконечно велико. Теперь же установимъ одну лемму, имѣющую существенное значеніе какъ для доказательства только что упомянутаго предложенія о числѣ p, такъ и для многихъ дальнѣйшихъ соображеній.

Лемма II (основная). *Если функція u отъ x удовлетворяетъ условію*

$$\int_a^b u dx = 0\,,$$

то отношеніе $\dfrac{B}{A}$ *интеграловъ*

$$B = \int_a^b (u')^2 dx\,, \quad A = \int_a^b u^2 dx$$

болѣе числа $\dfrac{2}{(b-a)^2}$.

Положимъ

$$b - a = l.$$

Имѣемъ

$$Al = \int_a^b u^2 dx d\xi = \int_a^b (u)^2 d\xi dx.$$

Въ первомъ изъ этихъ интеграловъ (считая слѣва) интегрированіе совершается сначала по x потомъ по ξ, во второмъ сначала по ξ потомъ по x каждый разъ въ предѣлахъ отъ a до b, причемъ въ послѣднемъ изъ этихъ интеграловъ (u) означаетъ, что въ функціи u перемѣнная x замѣнена черезъ ξ.

Такъ какъ

$$\int_a^b u dx \cdot \int_a^b (u) d\xi = 0\,,$$

то

$$2Al = \int_a^b [u - (u)]^2 dx d\xi.$$

Но

$$[u - (u)]^2 = \left(\int_\xi^x \frac{du}{db}\, db \right)^2.$$

Такъ какъ [см. нерав. (18)]

$$\left(\int_\xi^x \frac{du}{db}\, db \right)^2 \leqq (x - \xi) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db}\right)^2 db,$$

то

$$2Al \leqq \int_a^b \left((x - \xi) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db}\right)^2 db \right) dx d\xi.$$

Положимъ

$$K = \int_a^b \left((x - \xi) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db}\right)^2 db \right) dx.$$

Можемъ писать

$$K = \int_a^\xi \left((x - \xi) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db}\right)^2 db \right) dx + \int_\xi^b \left((x - \xi) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db}\right)^2 db \right) dx.$$

Несомнѣнно

$$\int_a^\xi \left((x - \xi) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db}\right)^2 db \right) dx = \int_a^\xi \left((\xi - x) \int_x^\xi \left(\frac{du}{db}\right)^2 db \right) dx \geqq 0,$$

$$\int_a^\xi \left((\xi - x) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db}\right)^2 db \right) dx \leqq \int_a^\xi \left((\xi - x) \int_a^b \left(\frac{du}{db}\right)^2 db \right) dx = \frac{(\xi - a)^2}{2}\, \omega,$$

гдѣ положено

$$\omega = \int_a^b \left(\frac{du}{db}\right)^2 db$$

Такъ какъ, далѣе,

$$\frac{(\xi - a)^2}{2} \leqq \frac{(b - a)^2}{2},$$

то

$$\int_a^\xi \left((\xi - x) \int_x^\xi \left(\frac{du}{db}\right)^2 db \right) dx \leqq \frac{(b-a)^2}{2}\,\omega = \frac{l^2}{2}\,\omega. \qquad \textbf{(43)}$$

Подобнымъ же путемъ убѣждаемся въ справедливости слѣдующихъ неравенствъ

$$\int_\xi^b \left((x - \xi) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db}\right)^2 db \right) dx \geqq 0\,,$$

$$\int_\xi^x \left((x - \xi) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db}\right)^2 db \right) dx \leqq \frac{(b-\xi)^2}{2}\,\omega \leqq \frac{(b-a)^2}{2}\,\omega = \frac{l^2}{2}\,\omega. \qquad \textbf{(44)}$$

Неравенства (43) и (44) показываютъ (см. выраж. K), что

$$K < l^2 \omega.$$

Слѣдовательно,

$$Al < \frac{l^3}{2}\,\omega.$$

Съ другой стороны

$$Bl = l\omega.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{B}{A} > \frac{2}{l^2}, \qquad \textbf{(45)}$$

что и доказываетъ лемму.

Раздѣлимъ интервалъ $(a\,,\,b)$ на p промежуточныхъ интерваловъ

$$(a\,,\,b_1),\quad (b_1\,,\,b_2),\ldots,(b_{n-1}\,,\,b).$$

Предположимъ для простоты эти интервалы равными между собою, такъ что длина каждаго изъ нихъ равна

$$\frac{l}{n}.$$

Слѣдствіемъ предыдущей леммы будетъ слѣдующая

Лемма III. *Если функція u удовлетворяетъ n условіямъ*

$$\int_a^{b_1} u dx = 0\,, \quad \int_{b_1}^{b_2} u dx = 0\,, \ldots, \quad \int_{b_{n-1}}^{b} u dx = 0\,,$$

то отношеніе

$$\frac{B}{A} > \frac{2}{l^2} n^2.$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$B = \int_a^{b_1} (u')^2 dx + \int_{b_1}^{b_2} (u')^2 dx + \ldots + \int_{b_{n-1}}^{b} (u')^2 dx = B_1 + B_2 + \ldots + B_n\,,$$

$$A = \int_a^{b_1} u^2 dx + \int_{b_1}^{b_2} u^2 dx + \ldots + \int_{b_{n-1}}^{b} u^2 dx = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Такъ какъ [нерав. (45)]

$$\frac{B_s}{A_s} > \frac{2}{l^2} n^2\,, \qquad (s = 1\,, 2\,, \ldots, n)$$

то и подавно

$$\frac{B}{A} = \frac{\sum B_s}{\sum A_s} > \frac{2}{l^2} n^2.$$

10) Мы видѣли, что полюсами мероморфной по k функціи V, удовлетворяющей уравненію (20) и условіямъ (21), служатъ корни уравненія

$$\tilde{\omega}(k) = 0. \tag{37}$$

Характеръ распредѣленія полюсовъ функціи V зависитъ отъ свойствъ функціи f.

Теорема VIII. *Всегда можно подобрать функцію f такъ, что наименьшій *) изъ полюсовъ функціи V будетъ болѣе числа*

$$Kn^2,$$

гдѣ K есть конечная, неравная нулю, положительная постоянная.

Мы видѣли (см. § 4), что функція V голоморфна для значеній k, лежащихъ внутри круга радіуса

$$\varrho = \lim_{s=\infty} \frac{\sqrt{W_{2s-2}}}{\sqrt{W_{2s}}}.$$

Положимъ

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_{n+1} f_{n+1},$$

гдѣ f_j $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ суть какія либо функціи x [конечныя и непрерывныя въ интервалѣ (a, b)], а a_j $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ пока неопредѣленныя постоянныя.

Разсматривая уравненія (23) 4-аго §-а, мы замѣчаемъ, что всѣ функціи V_s $(s = 1, 2, \ldots)$ будутъ при этомъ значеніи f линейными функціями коэффиціентовъ a_j $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$.

Можемъ положить

$$V_s = a_1 V_{s1} + a_2 V_{s2} + \cdots + a_{n+1} V_{s,n+1},$$

гдѣ V_{sj} $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ суть функціи перемѣнной x.

Раздѣлимъ интервалъ (a, b) на n равныхъ между собою интерваловъ

$$(a, b_1), \quad (b_1, b_2), \ldots, (b_{n-1}, b)$$

и опредѣлимъ коэффиціенты a_j $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$, что всегда возможно, при помощи слѣдующихъ уравненій

$$a_1 \int_a^{b_1} V_{s1}dx + a_2 \int_a^{b_1} V_{s2}dx + \cdots + a_{n+1} \int_a^{b_1} V_{s,n+1}dx = 0,$$

$$a_1 \int_{b_1}^{b_2} V_{s1}dx + a_2 \int_{b_1}^{b_2} V_{s2}dx + \cdots + a_{n+1} \int_{b_1}^{b_2} V_{s,n+1}dx = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1 \int_{b_{n-1}}^{b} V_{s1}dx + a_2 \int_{b_{n-1}}^{b} V_{s2}dx + \cdots + a_{n+1} \int_{b_{n-1}}^{b} V_{s,n+1}dx = 0.$$

---

*) Мы говоримъ просто: „наименьшій изъ полюсовъ“, такъ какъ по предыдущему значенія k, соотвѣтствующія полюсамъ функціи V, суть числа положительныя.

Эти уравненія опредѣлятъ отношенія n изъ коэффиціентовъ a_j $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ къ одному какому либо изъ нихъ.

Приэтомъ на основаніи леммы II (основной) будемъ имѣть

$$\frac{\int\limits_a^b (V_s')^2 dx}{\int\limits_a^b V_s^2 dx} > \frac{2}{l^2} n^2. \tag{46}$$

Соотвѣтствующимъ выборомъ коэффиціентовъ a_j $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ этому неравенству можно удовлетворить при какомъ угодно s и, говоря теоретически, при $s = \infty$.

Допустимъ, что коэффиціенты a_j $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ выбраны такъ, что

$$\lim_{s=\infty} \frac{\int\limits_a^b (V_s')^2 dx}{\int\limits_a^b V_s^2 dx} > \frac{2}{l^2} n^2,$$

или

$$\lim_{s=\infty} \frac{\int\limits_a^b (V_s')^2 dx}{B\int\limits_a^b V_s^2 dx} > Kn^2, \tag{46$_1$}$$

гдѣ

$$K = \frac{2}{l^2 B},$$

а B есть maximum $p(x)$ въ интервалѣ (a, b).

Коль скоро удовлетворено неравенство (46), то неравенство

$$\lim_{s=\infty} \frac{\int\limits_a^b (V_s')^2 dx}{W_{2s}} > Kn^2 \tag{47}$$

и подавно удовлетворится, ибо

$$W_{2s} < B\int_a^b V_s^2 dx.$$

Обращаемся теперь къ равенству (26) §-а 6-ого.

Имѣемъ [въ силу s'таго изъ (23)]

$$W_{2s-1} = \int_a^b p(x) V_{s-1} V_s dx = \int_a^b q(x) V_s^2 dx - \int_a^b V_s V_s'' dx.$$

Но

$$\int_a^b V_s V_s'' dx = V_s V_s' \Big|_a^b - \int_a^b (V_s')^2 dx.$$

Слѣдовательно,

$$W_{2s-1} = \int_a^b q(x) V_s^2 dx + \int_a^b (V_s')^2 dx + H V_s^2(b) + h V_s^2(a).$$

Отсюда при всякомъ s

$$W_{2s-1} > \int_a^b (V_s')^2 dx.$$

Коль скоро имѣетъ мѣсто неравенство (47), то и подавно должно быть при всякомъ s

$$\frac{W_{2s-1}}{W_{2s}} > Kn^2. \tag{48}$$

Примѣнивъ къ (26) неравенство (18), получимъ

$$W_{2s-1} < \sqrt{W_{2s-2}}\sqrt{W_{2s}},$$

или

$$\frac{W_{2s-1}}{W_{2s}} < \frac{\sqrt{W_{2s-2}}}{\sqrt{W_{2s}}}.$$

Поэтому непосредственнымъ слѣдствіемъ неравенства (48), а, слѣдовательно, и (46) будетъ неравенство вида

$$\varrho = \lim_{s=\infty} \frac{\sqrt{W_{2s-2}}}{\sqrt{W_{2s}}} > Kn^2. \tag{49}$$

Такъ какъ, по предыдущему, соотвѣтствующимъ выборомъ коэффиціентовъ a_j $(j=1, 2, \ldots, n+1)$ всегда можно удовлетворить неравенству (46) и такъ какъ неравенство (49) есть прямое слѣдствіе (46), то соотвѣтствующимъ выборомъ постоянныхъ a_j $(j=1, 2, \ldots, n+1)$, т. е. функціи f, всегда можно удовлетворить и неравенству (49).

Иначе говоря, функцію f всегда можно выбрать такъ, что функція V будетъ голоморфной функціей параметра k для значеній k, модуль которыхъ больше числа Kn^2. Приэтомъ наименьшій изъ полюсовъ функціи V будетъ болѣе Kn^2.

Теорема доказана.

Слѣдствіемъ этой теоремы и теоремъ предыдущихъ §§-овъ будетъ слѣдующая

Теорема IX. *Всѣ корни уравненія*

$$\bar{\omega}(k) = 0 \tag{37}$$

суть простые, вещественные, положительные и число ихъ безконечно велико.

Пусть при какомъ либо значеніи функціи f наименьшій изъ полюсовъ функціи V есть k_n.

Постоянная k_n равна, по предыдущему, одному изъ корней уравненія (37).

Замѣнимъ f нѣкоторой другой функціей f_1, которую на основаніи предыдущей теоремы можно выбрать такъ, что наименьшій изъ полюсовъ функціи V будетъ болѣе

$$Kn^2,$$

гдѣ n есть цѣлое число, т. е. болѣе какого угодно заданнаго числа, напр. k_n.

Значеніе k, соотвѣтствующее этому полюсу функціи V, опять будетъ корнемъ уравненія (37), который обозначимъ черезъ k_{n+1}, причемъ

$$k_{n+1} > k_n.$$

Измѣняя снова соотвѣтствующимъ образомъ функцію f_1 на f_2, убѣдимся въ существованіи новаго корня k_{n+2} уравненія (37), удовлетворяющаго условіямъ

$$k_{n+2} > k_{n+1} > k_n,$$

и продолжая разсуждать такимъ образомъ далѣе до безконечности, убѣдимся въ существованіи безчисленнаго множества корней уравненія (37).

Мы обозначимъ корни этого уравненія черезъ

$$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n, \ldots,$$

предполагая ихъ расположенными въ возрастающемъ порядкѣ по величинѣ.

11) Сопоставивъ только что доказанную теорему съ положеніемъ, высказаннымъ въ концѣ §-а 8-ого, выводимъ слѣдующую теорему:

Теорема X. *Существуетъ безчисленное множество положительныхъ, неравныхъ между собою чиселъ*

$$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n, \ldots,$$

служащихъ корнями нѣкотораго трансцендентнаго уравненія, каждому изъ которыхъ, положимъ k_n, *соотвѣтствуетъ единственная, конечная, непрерывная и отличная отъ нуля въ интервалѣ отъ* a *до* b *функція* U_n, *удовлетворяющая уравненію*

$$U_n'' + [k_n p(x) - q(x)] U_n = 0 \qquad (n=1, 2, \ldots \infty)$$

и условіямъ

$$U_n'(a) - hU_n(a) = 0,$$

$$U_n'(b) + HU_n(b) = 0, \qquad (n=1, 2, \ldots \infty)$$

$$\int_a^b p(x) U_n^2 dx = 1.$$

12) Теорема XI. *Корни уравненія*

$$\tilde{\omega}(k) = 0 \tag{37}$$

при всякомъ n *удовлетворяютъ неравенству*

$$k_n > W(n-1)^2,$$

гдѣ M *есть конечная, положительная, неравная нулю постоянная.*

Положимъ

$$U = a_1 U_1 + \cdots + a_n U_n,$$

гдѣ a_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ суть нѣкоторыя постоянныя.

Обозначимъ черезъ W и V интегралы

$$W = \int_a^b (U')^2 dx, \qquad V = \int_a^b U^2 dx.$$

Имѣемъ

$$W = \sum a_j^2 \int_a^b (U_j')^2 dx + 2 \sum a_r a_s \int_a^b U_r' U_s' dx.$$

Далѣе,

$$\int_a^b (U_j')^2 dx = U_j U_j' \Big|_a^b - \int_a^b U_j U_j'' dx,$$

$$\int_a^b U_j U_j'' dx = \int_a^b q(x) U_j^2 dx - k_j,$$

ибо по условію

$$\int_a^b p(x) U_j^2 dx = 1.$$

Слѣдовательно,

$$\int_a^b (U_j')^2 dx = -[H U_j^2(b) + h U_j^2(a)] - \int_a^b q(x) U_j^2 dx + k_j. \qquad \textbf{(50)}$$

Съ другой стороны

$$\int_a^b U_r' U_s' dx = U_r' U_s \Big|_a^b - \int_a^b U_r'' U_s dx,$$

$$\int_a^b U_r'' U_s dx = \int_a^b q(x) U_r U_s dx,$$

ибо по теоремѣ VI

$$\int_a^b p(x) U_r U_s dx = 0. \qquad (r \gtrless s)$$

Слѣдовательно,

$$\int_a^b U_r' U_s' dx = -H U_r(b) U_s(b) - h U_r(a) U_s(a) - \int_a^b q(x) U_r U_s dx. \qquad \textbf{(51)}$$

При помощи равенствъ (50) и (51) получаемъ

$$W = \sum a_j^2 k_j - H(\sum a_j B_j)^2 - h(\sum a_j A_j)^2 - \int_a^b q(x)(\sum a_j U_j)^2 dx\,,$$

гдѣ положено

$$B_j = U_j(b)\,, \qquad A_j = U_j(a).$$

Такъ какъ по условію $q(x)$ есть положительная функція x въ интервалѣ $(a,\ b)$, то

$$W < \sum a_j k_j. \tag{52}$$

Разсмотримъ теперь интегралъ

$$V_1 = \int_a^b p(x)\,U^2 dx.$$

Имѣемъ

$$V_1 = \sum a_j^2 \int_a^b p(x)\,U_j^2 dx + 2 \sum a_r a_s \int_a^b p(x)\,U_r U_s dx.$$

Такъ какъ

$$\int_a^b p(x)\,U_j^2 dx = 1\,, \qquad \int_a^b p(x)\,U_r U_s dx = 0\,, \qquad (r \gtrless s)$$

то

$$V_1 = \sum a_j^2.$$

Неравенство (52) и послѣднее равенство даютъ

$$\frac{W}{V_1} < \frac{\sum a_j^2 k_j}{\sum a_j^2} < k_n\,,$$

каковы бы ни были постоянныя a_j.

Съ другой стороны

$$\frac{W}{V_1} < \frac{W}{AV}\,,$$

гдѣ A, напомнимъ, есть minimum функціи $p(x)$ въ интервалѣ отъ a до b.

Слѣдовательно,

$$k_n > \frac{W}{AV}.$$

Распорядившись соотвѣтствующимъ образомъ коэффиціентами a_j, мы можемъ удовлетворить неравенству

$$\frac{W}{V} > \frac{2}{l^2}(n-1)^2$$

(см. § 10), причемъ будемъ имѣть

$$k_n > \frac{2}{l^2 A}(n-1)^2 = M(n-1)^2, \tag{53}$$

гдѣ

$$M = \frac{2}{l^2 A}$$

есть конечная, положительная, отличная отъ нуля постоянная.

Теорема доказана.

Изъ этой теоремы, какъ слѣдствіе, получается слѣдующая

Теорема XII. *Корни*

$$k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots,$$

уравненія

$$\varpi(k) = 0,$$

расположенные въ возрастающемъ порядкѣ по величинѣ, возрастаютъ безпредѣльно съ возрастаніемъ значка n, такъ что

$$\lim_{n=\infty} k_n = \infty.$$

13) Теорема XIII. *Если функція f удовлетворяетъ условію*

$$\int_a^b f U_n dx = 0,$$

то значеніе $k = k_n$ есть простая точка функціи V, удовлетворяющей уравненію

$$V'' + [kp(x) - q(x)]V + f = 0 \tag{54}$$

и условіямъ

$$\begin{aligned} V'(a) - hV(a) &= 0, \\ V'(b) + HV(b) &= 0. \end{aligned} \tag{55}$$

Помножимъ уравненіе (54) на U_n и интегрируемъ по x въ предѣлахъ отъ a до b.

Если

$$\int_a^b fU_n dx = 0,$$

то

$$\int_a^b V'' U_n dx + k\int_a^b p(x) VU_n dx - \int_a^b q(x) VU_n dx = 0. \tag{56}$$

Имѣемъ

$$\int_a^b V' U_n dx = \Big| U_n V' - U_n V \Big|_a^b + \int_a^b VU_n'' dx,$$

или, въ силу (55),

$$\int_a^b V'' U_n dx = \int_a^b VU_n'' dx.$$

Но

$$\int_a^b VU_n'' dx = \int_a^b q(x) VU_n dx - k_n \int_a^b p(x) VU_n dx.$$

Равенство (56) приводится къ виду

$$(k - k_n)\int_a^b p(x) VU_n dx = 0. \tag{57}$$

Если $k = k$ есть полюсъ функціи V, то

$$V = \frac{W}{k - k_n},$$

гдѣ, по предыдущему, W есть функція x и параметра k, обращающаяся при $k = k_n$ въ U_n (см. § 5).

При сдѣланномъ предположеніи равенство (57) при $k=k_n$ должно приводиться къ слѣдующему

$$\int\limits_a^b p(x)U_n^2dx=0\,,$$

что очевидно невозможно.

Теорема доказана.

Слѣдствіе I. *Если въ уравненіи (54) функція f удовлетворяетъ условіямъ*

$$\int\limits_a^b fU_1dx=0\,,\quad \int\limits_a^b fU_2dx=0\,,\quad \ldots\,,\quad \int\limits_a^b fU_ndx=0\,, \tag{58}$$

то наименьшій изъ полюсовъ функціи V не менѣе числа k_n.

Слѣдствіе II. *Если функція f удовлетворяетъ условіямъ (58), то отношеніе интеграловъ Schwarz'а W_{2s-2} и W_{2s} (см. § 4) болѣе (или равно) числа k_n^2 при всякомъ s, т. е.*

$$\lim_{s=\infty}\frac{W_{2s-2}}{W_{2s}}>k_n^2.$$

Это предложеніе является непосредственнымъ слѣдствіемъ теоремы XIII и теоремы III.

Слѣдствіе III. *Если функція f удовлетворяетъ условіямъ (58), то*

$$\frac{W_0}{W_2}>k_n^2.$$

Это неравенство непосредственно слѣдуетъ изъ предыдущаго неравенства и неравенствъ (27) 4-аго §-а.

14) Лемма IV. *Модуль функціи U_n $(n=1,\,2,\ldots)$ въ интервалѣ отъ a до b менѣе числа Nk_n, гдѣ N есть конечная, неравная нулю, положительная постоянная.*

Назовемъ, какъ и прежде (§ 3), черезъ v_1 и v_2 два линейно независимыхъ частныхъ рѣшенія уравненія

$$V''-q(x)V=0.$$

Интегралъ уравненія

$$U''+[k_np(x)-q(x)]U=0$$

можно представить подъ видомъ

$$U=D_1v_1+D_2v_2$$

при соотвѣтствующемъ выборѣ функцій D_1 и D_2, которыя будутъ зависѣть и отъ самой функціи U.

Примѣняя къ разсматриваемому случаю методу измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, получаемъ слѣдующія выраженія для D_1 и D_2

$$D_1 = C_1 + k_n \int_a^x \frac{p(x) v_2 U dx}{\Delta}$$

$$D_2 = C_2 - k_n \int_a^x \frac{p(x) v_1 U dx}{\Delta},$$

гдѣ C_1 и C_2 суть произвольныя постоянныя, а

$$\Delta = \text{const}.$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$U = C_1 v_1 + C_2 v_2 + r(x), \tag{59}$$

гдѣ

$$r(x) = k_n \left(v_1 \int_a^x \frac{p(x) v_2 U}{\Delta} dx - v_2 \int_a^x \frac{p(x) v_1 U}{\Delta} dx \right).$$

Функція U, опредѣляемая равенствомъ (59), будетъ удовлетворять условіямъ

$$U'(a) - hU(a) = 0,$$

$$U'(b) + HU(b) = 0,$$

если опредѣлимъ C_1 и C_2 при помощи уравненій

$$\begin{aligned} C_1[v_1'(a) - hv_1(a)] + C_2[v_2'(a) - hv_2(a)] &= 0, \\ C_1[v_1'(b) + Hv_1(b)] + C_2[v_2'(b) + Hv_2(b)] &= s(b), \end{aligned} \tag{60}$$

гдѣ положено для сокращенія

$$-s(b) = r'(b) + Hr(b).$$

Опредѣленная такимъ образомъ функція U очевидно будетъ представлять функцію U_n.

Разумѣя подъ C_1 и C_2 постоянныя, удовлетворяющія уравненіямъ (60), получимъ

$$U_n = C_1 v_1 + C_2 v_2 + r(x).$$

Разсуждая далѣе такъ же, какъ при доказательствѣ леммы I (§ 3) получаемъ

$$|U_n| < k_n \sqrt{Q} \left(\int\limits_a^b p^2(x) U_n^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = N k_n , \tag{61}$$

гдѣ

$$N = \sqrt{Q} \left(\int\limits_a^b p^2(x) U_n^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

есть конечная, неравная нулю, положительная постоянная.

15) Обозначимъ черезъ $\varphi(x)$ произвольно заданную функцію отъ x, конечную и непрерывную въ интервалѣ отъ a до b.

Будемъ вычислять функцію $\varphi(x)$ по функціямъ $U_n \, (n = 1, 2, \ldots)$, полагая

$$\varphi(x) = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \cdots + A_p U_p + R_p , \tag{62}$$

гдѣ $A_n \; (n = 1, 2, \ldots, p)$ суть пока неопредѣленныя постоянныя, а R_p есть функція x, конечная и непрерывная въ интервалѣ (a, b).

Характеръ этой функціи зависитъ отъ выбора коэффиціентовъ $A_n \, (n = 1, 2, \ldots, p)$ и числа ихъ p.

Положимъ

$$A_n = \int\limits_a^b p(x) \varphi(x) U_n dx . \qquad {\scriptstyle (n=1,\, 2, \ldots,\, p)} \tag{63}$$

При такомъ выборѣ коэффиціентовъ $A_n \, (n = 1, 2, \ldots, p)$ функція R_p обладаетъ слѣдующими свойствами:

1) R_p *удовлетворяетъ* p *условіямъ вида*

$$\int\limits_a^b p(x) R_p U_1 dx = 0 , \quad \int\limits_a^b p(x) R_p U_2 dx = 0 , \ldots , \int\limits_a^b p(x) R_p U_p dx = 0 . \tag{64}$$

Въ этомъ легко убѣдиться, помноживъ обѣ части равенства (62) на $p(x) U_n$ и проинтегрировавъ полученный результатъ по x въ предѣлахъ отъ a до b.

Принявъ во вниманіе вышеуказанныя свойства функціи U_n и равенства (63), получимъ условія (64).

2) *Интегралъ*

$$S_p = \int_a^b p(x) R_p^2 dx$$

убываетъ съ возрастаніемъ значка p, *такъ что*

$$\lim_{p=\infty} S_p$$

есть конечная, положительная постоянная.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$S_p = \int_a^b p(x)\varphi^2(x)dx + \sum A_j^2 \int_a^b p(x) U_j^2 dx - 2\sum A_j \int_a^b p(x)\varphi(x) U_j dx -$$

$$-2\sum A_r A_s \int_a^b p(x) U_r U_s dx.$$

Такъ какъ по условію

$$\int_a^b p(x) U_j^2 dx = 1,$$

а по теоремѣ V

$$\int_a^b p(x) U_r U_s dx = 0, \qquad (r \gtrless s)$$

то

$$S_p = \int_a^b p(x)\varphi^2(x)dx + \sum A_j^2 - 2\sum A_j \int_a^b p(x)\varphi(x) U_j dx,$$

или, въ силу (63),

$$S_p = \int_a^b p(x)\varphi^2(x)dx - \sum A_j^2.$$

Замѣнивъ p черезъ $p+1$, получимъ

$$S_{p+1} = S_p - A_{p+1}^2,$$

откуда при всякомъ p

$$S_{p+1} < S_p,$$

что и требовалось доказать.

16) Теорема XIV. *Рядъ*

$$\sum_1^\infty U_n \int_a^b p(x)\varphi(x)U_n dx$$

представляетъ разложеніе въ рядъ функціи $\varphi(x)$ по функціямъ U_n въ интервалѣ (a, b) всякій разъ, когда этотъ рядъ сходится (хотя бы и не абсолютно и не равномѣрно).

Положимъ, какъ и въ предыдущемъ §-ѣ,

$$\varphi(x) = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_p U_p + R_p,$$

гдѣ

$$A_n = \int_a^b p(x)\varphi(x)U_n dx. \qquad (n=1,2,\ldots,p)$$

Будемъ искать функцію V, удовлетворяющую уравненію

$$V'' + [kp(x) - q(x)]V + f = 0,$$

гдѣ

$$f = R_p p(x),$$

при условіяхъ

$$V'(a) - hV(a) = 0,$$

$$V'(b) + HV(b) = 0.$$

Такъ какъ функція f (см. предыд. §) удовлетворяетъ условіямъ

$$\int_a^b f U_n dx = 0, \qquad (n=1,2,\ldots,p)$$

то наименьшій изъ полюсовъ V (слѣдствіе I теоремы XIII) не менѣе числа k_p.

Функція V представляется въ видѣ ряда

$$V = V_0 + kV_1 + k^2V_2 + \ldots + k^nV_n + \cdots,$$

сходящагося для всѣхъ значеній k, модуль которыхъ не болѣе числа k_p.

Составимъ интегралы W_n Schwarz'а для функцій V_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

На основаніи слѣдствія III теоремы XIII имѣемъ

$$\frac{W_0}{W_2} > k_p^2,$$

или

$$\int_a^b p(x) V_0^2 dx > k_p^2 \int_a^b p(x) V_1^2 dx. \tag{65}$$

По предыдущему (см. лемму I)

$$V_0^2 < Q \int_a^b f^2 dx < Q_1 \int_a^b p(x) R_p^2 dx = QBS_p.$$

Отсюда

$$\int_a^b p(x) V_0^2 dx < QBS_p \int_a^b p(x) dx = Q_2 S_p, \tag{66}$$

гдѣ

$$Q_2 = QB \int_a^b p(x) dx$$

есть конечная, неравная нулю, положительная постоянная.

Неравенства (65) и (66) даютъ

$$S_p > \frac{k_p^2}{Q_2} \int_a^b p(x) V_1^2 dx > \frac{k_p^2}{Q_2} B \int_a^b V_1^2 dx = k_p^2 L \int_a^b V_1^2 dx, \tag{67}$$

гдѣ

$$L = \frac{B}{Q_2}.$$

Неравенство (67) справедливо при всякомъ p.

Допустимъ, что рядъ

$$\sum_1^\infty U_n \int_a^b p(x)\varphi(x) U_n dx$$

есть рядъ сходящійся.

Будемъ увеличивать p до безконечности. Функція R_p будетъ стремиться къ нѣкоторой опредѣленной функціи R, конечной и непрерывной въ интервалѣ (a, b).

Такъ какъ при этомъ S_p стремится къ конечной постоянной, то въ предѣлѣ (при $p = \infty$) должно имѣть [на основаніи неравенства (67)]

$$\lim_{p=\infty} \int_a^b V_1^2 dx = 0\,,$$

ибо k_p стремится къ безконечности при безпредѣльномъ возрастаніи p (теорема XII).

Слѣдовательно,

$$\lim_{p=\infty} V_1 = 0\,.$$

Функція V должна приводиться къ одному члену

$$\lim_{p=\infty} V_0\,,$$

не зависящему отъ параметра k.

Это возможно только въ томъ случаѣ, если

$$\lim_{p=\infty} V_0 = 0$$

и

$$R = 0\,.$$

Положимъ

$$T_p = \sum_1^p U_n \int_a^b p(x)\varphi(x) U_n dx\,.$$

Въ силу вышесказаннаго

$$R = \lim R_p = \lim\,[\varphi(x) - T_p] = 0\,,$$

т. е.

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty U_n \int_a^b p(x)\varphi(x) U_n dx.$$

Рядъ правой части этого равенства представляетъ разложеніе функціи $\varphi(x)$ въ рядъ по функціямъ U_n всякій разъ, когда онъ сходится. Теорема доказана.

17) Теорема XV. *Рядъ*

$$\sum_1^\infty U_n \int_a^b p(x)\varphi(x) U_n dx$$

сходится абсолютно и равномѣрно въ интервалѣ (a, b), *если функція* $\varphi(x)$, *конечная и непрерывная въ этомъ интервалѣ вмѣстѣ со своими производными первыхъ четырехъ порядковъ, удовлетворяетъ условіямъ*

$$\begin{gathered} \varphi'(a) - h\varphi(a) = 0, \\ \varphi'(b) + H\varphi(b) = 0, \end{gathered} \tag{68}$$

$$\begin{gathered} \psi'(a) - h\psi(a) = 0, \\ \psi'(b) + H\psi(b) = 0, \end{gathered} \tag{69}$$

гдѣ

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)q(x) - \varphi''(x)}{p(x)}.$$

По леммѣ IV имѣемъ

$$|U_n| < k_n N, \tag{70}$$

гдѣ N есть конечная, положительная постоянная.

Далѣе,

$$\int_a^b p(x)\varphi(x) U_n dx = \frac{1}{k_n}\left(\int_a^b q(x)\varphi(x) U_n dx - \int_a^b \varphi(x) U_n'' dx\right),$$

$$\int_a^b \varphi(x) U_n'' dx = \varphi(x) U_n' \Big|_a^b - \int_a^b \varphi'(x) U_n' dx,$$

$$\int_a^b \varphi'(x) U_n' dx = \varphi'(x) U_n \Big|_a^b - \int_a^b \varphi''(x) U_n dx.$$

Слѣдовательно,

$$\int_a^b \varphi(x)U_n''dx = \int_a^b \varphi''(x)U_n dx,$$

ибо, въ силу условій (68),

$$\left| \varphi(x)U_n' - \varphi'(x)U_n \right|_a^b = 0.$$

Такимъ образомъ

$$\int_a^b p(x)\varphi(x)U_n dx = \frac{1}{k_n}\int_a^b \psi_1(x)U_n dx, \tag{71}$$

гдѣ

$$\psi_1(x) = q(x)\varphi(x) - \varphi''(x).$$

Подобно предыдущему получаемъ

$$\int_a^b \psi_1(x)U_n dx = \frac{1}{k_n}\left(\int_a^b \frac{\psi_1(x)q(x)}{p(x)}U_n dx - \int_a^b \frac{\psi_1(x)}{p(x)}U_n''dx\right).$$

Положимъ

$$\frac{\psi_1(x)}{p(x)} = \psi(x).$$

Имѣемъ

$$\int_a^b \psi(x)U_n''dx = \left| \psi(x)U_n' - \psi'(x)U_n \right|_a^b + \int_a^b \psi''(x)U_n dx.$$

Если функція $\varphi(x)$ удовлетворяетъ условіямъ (69), то

$$\left| \psi(x)U_n' - \psi'(x)U_n \right|_a^b = 0$$

и

$$\int_a^b \psi(x)U_n''dx = \int_a^b \psi''(x)U_n dx.$$

Слѣдовательно,

$$\int_a^b \psi_1(x) U_n dx = \frac{1}{k_n} \int_a^b \vartheta(x) p(x) U_n dx\,, \tag{72}$$

гдѣ положено для сокращенія письма

$$\vartheta(x) = \frac{\psi_1(x) q(x)}{p^2(x)} - \frac{\psi''(x)}{p(x)}.$$

Сопоставляя равенства (71) и (72), получаемъ

$$A_n = \int_a^b p(x)\varphi(x) U_n dx = \frac{1}{k_n^2} \int_a^b \vartheta(x) p(x) U_n dx\,,$$

гдѣ $\vartheta(x)$ есть конечная, непрерывная въ интервалѣ (a, b) функція отъ x.

Положимъ

$$\int_a^b \vartheta^2(x) p(x) dx = P\,,$$

гдѣ P есть конечная, положительная постоянная.

Такъ какъ [нерав. (18)]

$$\left(\int_a^b \vartheta(x) p(x) U_n dx \right)^2 < \int_a^b \vartheta^2(x) p(x) dx \,.\, \int_a^b p(x) U_n^2 dx = P\,,$$

то

$$|A_n| < \frac{P}{k_n^2}.$$

Принявъ во вниманіе это неравенство и (70), заключаемъ, что

$$|A_n U_n| < \frac{N.P}{k_n} = \frac{R}{k_n},$$

гдѣ R есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Такъ какъ по теоремѣ XI

$$k_n > M(n-1)^2,$$

то

$$|A_n U_n| < \frac{S}{(n-1)^2},$$

гдѣ

$$S=\frac{R}{M}$$

есть конечная, неравная нулю, положительная постоянная.

Модуль каждаго члена ряда

$$\sum_1^\infty A_n U_n \tag{73}$$

меньше соотвѣтствующаго члена ряда

$$S\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\right).$$

Такъ какъ это есть рядъ сходящійся, то и рядъ (73) сходится въ интервалѣ отъ a до b и притомъ абсолютно и равномѣрно, что и требовалось доказать.

18) Резюмируя все вышеизложенное, получаемъ слѣдующую теорему:

Теорема XVI. *Всякая функція $\varphi(x)$, конечная и непрерывная вмѣстѣ со своими производными первыхъ четырехъ порядковъ въ какомъ либо интервалѣ (a, b) и удовлетворяющая на границахъ этого интервала (при $x=a$ и $x=b$) условіямъ*

$$\begin{gathered}\varphi'(a)-h\varphi(a)=0\,,\\ \varphi'(b)+H\varphi(b)=0\\ \psi'(a)-h\psi(a)=0\,,\\ \psi'(b)+H\psi(b)=0\,,\end{gathered} \tag{74}$$

гдѣ

$$\psi(x)=\frac{\varphi(x)q(x)-\varphi''(x)}{p(x)}$$

а h и H суть положительныя постоянныя, разлагается въ интервалѣ (a, b) въ абсолютно и равномѣрно сходящійся рядъ

$$\varphi(x)=\sum_1^\infty U_n\int_a^b p(x)\varphi(x)U_n dx\,, \tag{75}$$

гдѣ U_n $(n=1,\ 2,\ldots)$ суть непрерывныя и конечныя функціи x, удовлетворяющія уравненіямъ

$$U_n''+[k_n p(x)-q(x)]U_n=0 \qquad {\scriptstyle (n=1,2,\ldots)}$$

и условіямъ

$$U'_n - hU_n = 0 \qquad \text{при } x = a,$$

$$U'_n + HU_n = 0 \qquad \text{при } x = b,$$

$p(x)$ есть положительная, не обращающаяся въ нуль въ интервалѣ (a, b), функція x, $q(x)$ также положительная функція x въ разсматриваемомъ интервалѣ, а

$$k_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

суть положительныя числа, служащія корнями нѣкотораго трансцендентнаго уравненія.

Припомнимъ соображенія и обозначенія §-а 1-аго и предположимъ, что $f(\xi)$ по замѣнѣ ξ его выраженіемъ черезъ x обращается въ функцію $\varphi(x)$, удовлетворяющую условіямъ только что приведенной теоремы.

На основаніи послѣдней теоремы и разсужденій §-а 1-аго мы можемъ утверждать, что задача объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня разрѣшается вполнѣ во всѣхъ случаяхъ, когда температура стержня въ начальный моментъ времени обращается въ функцію $\varphi(x)$, удовлетворяющую условіямъ послѣдней теоремы.

Пользуясь же теоремой XIV, можемъ сказать, что вообще для полнаго рѣшенія аналитической задачи объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня при произвольно заданной функціи $\varphi(x)$ [не удовлетворяющей условіямъ (74)], въ которую должна обращаться температура стержня въ начальный моментъ времени (при $t = 0$), достаточно доказать сходимость ряда (75), не прибѣгая къ непосредственному суммированію его.

Въ заключеніе нашихъ изслѣдованій считаемъ не лишнимъ сдѣлать слѣдующее замѣчаніе: положимъ, что намъ надо рѣшить физическую задачу объ охлажденіи какого либо твердаго стержня, зная, что въ начальный моментъ времени его температура обращается въ нѣкоторую функцію $\varphi(x)$, не удовлетворяющую условіямъ (74).

Можно подыскать такую функцію $\varphi_1(x)$, что для всѣхъ значеній x въ промежуткѣ отъ a до b значенія $\varphi_1(x)$ будутъ сколь угодно мало отличаться отъ значеній $\varphi(x)$, а для $x = a$ и $x = b$ функція $\varphi_1(x)$ будетъ удовлетворять условіямъ (74).

Рѣшимъ задачу объ охлажденіи стержня при условіи

$$U = \varphi_1(x) \text{ при } t = 0,$$

гдѣ U есть температура стержня.

По предыдущему, задача можетъ быть разрѣшена вполнѣ.

Получимъ функцію U_1, достаточно мало отклоняющуюся для всѣхъ значеній x между a и b и всѣхъ значеній t отъ искомой функціи, удовлетворяющей условію

$$U = \varphi(x) \text{ при } t = 0.$$

Для цѣлей практической физики такое рѣшеніе будетъ вполнѣ достаточнымъ, ибо распредѣленіе температуры по длинѣ стержня (за исключеніемъ его концовъ) и для всѣхъ моментовъ времени, даваемое функціей U_1, будетъ весьма мало отличаться отъ дѣйствительнаго.