УДК 517.532

Н. К. РАДЯКИН

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

1. Постановка задачи. Пусть сверхтекучий гелий (He II) частично заполняет осесимметричный сосуд, который равномерно вращается вокруг оси симметрии Oz с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{k}$ — орт оси симметрии. Будем считать, что нормальная составляющая He II вращается вместе с сосудом, а сверхтекучая компонента не участвует в твердотельном вращении. Это возможно при достаточно малых ω_0, когда отсутствуют вихри в He II. Таким образом, в состоянии относительного равновесия поля скоростей $\boldsymbol{u}_n$ и $\boldsymbol{u}_s$ для нормальной и сверхтекучей компонент будут: $\boldsymbol{u}_n^0 = \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{u}_s^0 = 0$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор в неподвижной цилиндрической системе координат (r, θ, z).

Рассмотрим задачу о малых движениях сверхтекучей жидкости относительно этого равновесия. Будем пренебрегать силами диссипации и жидкость считать несжимаемой.

Сверхтекучая жидкость при относительном равновесии занимает осесимметричную область Ω, ограниченную смоченной твердой стенкой сосуда Σ и свободной поверхностью жидкости Γ. Поместим начало координат в точке пересечения оси симметрии и поверхности Γ, а ось z направим вверх по оси симметрии.

Для определения полей скоростей $\boldsymbol{u}_n$ и $\boldsymbol{u}_s$ и поля давления в жидкости $p(r, t)$ имеем следующую систему уравнений [1, 2]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial t} + (\boldsymbol{u}_s\nabla)\,\boldsymbol{u}_s = -\nabla\mu_1 - g\boldsymbol{k} + \boldsymbol{f}_1, \\ &\frac{\partial \boldsymbol{u}_n}{\partial t} + (\boldsymbol{u}_n\nabla)\,\boldsymbol{u}_n = -\frac{1}{\rho_n}\nabla p + \frac{\rho_s}{\rho_n}\nabla\mu_1 - g\boldsymbol{k} + \boldsymbol{f}_1 \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{u}_n = 0,\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}_s = 0 \end{aligned}\right\}(\boldsymbol{r}\in\Omega), \qquad (1.1)$$

$$\boldsymbol{u}_s\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}_n\cdot\boldsymbol{n} = 0\ (\boldsymbol{r}\in\Sigma),\ p = \mathrm{const},\ \boldsymbol{u}_s\cdot\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{u}_n\cdot\boldsymbol{n}_1 = \frac{\partial\zeta}{\partial t}(\boldsymbol{r}\in\Gamma'),$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta^0,\ \boldsymbol{u}_s|_{t=0} = \boldsymbol{u}_s^0,\ \boldsymbol{u}_n|_{t=0} = \boldsymbol{u}_n^0. \qquad (1.2)$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, μ_1 — химический потенциал, $\rho_s = \mathrm{const}$; $\rho_n = \mathrm{const}$ — плотности сверхтекучей и нормальной компонент соответственно, Γ' — «движущаяся» свободная поверхность жидкости, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}_1$ — нормали к Σ и Γ', внешние по отношению к Ω, $\zeta(r, t)$ — отклонение по нормали $\boldsymbol{n}_1$ поверхности Γ' от ее равновесного состояния Γ, $\boldsymbol{f}$ — заданное малое поле внешних сил.

Искомые функции $\boldsymbol{u}_n$, p и μ_1 представим в виде $\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{u}_n^0 + \boldsymbol{u}_1$, $p = p^0 + p$, $\mu_1 = \mu^0 + \mu$, где величины, обозначенные ноликом, относятся к равновесному состоянию; $\boldsymbol{u}_n^0 = \boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r}$, $p^0 = \rho_n/2\,(\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r})^2 + (\rho_n + \rho_s)\,gz + \mathrm{const}$, $\mu^0 = -gz + \mathrm{const}$, а $\boldsymbol{u}_1$, p, μ — малые добавки к ним.

Пренебрегая квадратами величин $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_s$, p, μ и ζ, а также их смешанными произведениями (после перехода к безразмерным переменным), вместо задачи (1.1)—(1.2), получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t} + 2\omega_0\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}_1 + (\omega_0\times\boldsymbol{r})\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_1 = -\frac{1}{\rho_n}\nabla p + \frac{\rho_s}{\rho_n}\nabla\mu + \boldsymbol{f} \\ &\frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial t} = -\nabla\mu + \boldsymbol{f},\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}_1 = 0,\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}_s = 0 \end{aligned}\right\}(\boldsymbol{r}\in\Omega)\ (1.3)$$

$$\boldsymbol{u}_s\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{n} = 0\ (\boldsymbol{r}\in\Sigma),$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \boldsymbol{u}_s\cdot\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{n}_1,\ \ p = (\rho_n + \rho_s)\,g\zeta\,(\boldsymbol{r}\in\Gamma),$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta^0,\ \boldsymbol{u}_s|_{t=0} = \boldsymbol{u}_s^0,\ \boldsymbol{u}_1|_{t=0} = (-\omega_0\times\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{u}_n^0. \qquad (1.4)$$

2. Проектирование системы (1.3)—(1.4) на ортогональные подпространства. Будем считать при каждом $0 \leqslant t \leqslant T$ неизвестные ∇p, $\nabla\mu$, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_s$ элементами векторного пространства $L_2(\Omega)$, а $\zeta\in L_2(\Gamma)$. Причем в силу условия несжимаемости имеем $\int\limits_\Gamma \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{n}_1\,d\Gamma = 0$, т. е. $\zeta\in L_2(\Gamma)\ominus\{1\}\equiv H$ со скалярным произведением $(\eta, \zeta)_0 = \int\limits_\Gamma \eta\cdot\zeta^*\,d\Gamma$, где ζ^* — функция, комплексно-сопряженная с ζ.

Как известно [3, 4], пространство вектор-функций $L_2(\Omega)$, суммируемых с квадратом по Ω, можно разложить на ортогональные подпространства: $L_2(\Omega) = G_\Gamma(\Omega) \oplus J_\Sigma(\Omega) \oplus J_0(\Omega)$, где $G_\Gamma(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in L_2(\Omega) : \boldsymbol{v} = \nabla\varphi,\ \varphi \in W_2^1(\Omega),\ \varphi = 0 \text{ (на } \Gamma)\}$; $J_\Sigma(\Omega) = \{\boldsymbol{w} \in L_2(\Omega)\colon \boldsymbol{w} = \nabla\Phi,\ \Phi \in W_2^1(\Omega);\ \Delta\Phi = 0\,(в\,\Omega),\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ (на } \Sigma)\}$; $W_2^1(\Omega)$ — пространство С. Л. Соболева для скалярных функций. $J_0(\Omega)$ получается замыканием в норме $L_2(\Omega)$ множества $\dot{J}_0(\Omega)$ гладких соленоидальных векторов:

$$\dot{J}_0(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in L_2(\Omega) : u_i \in C^1(\Omega),\ i = 1, 2, 3;\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \text{ (в } \Omega),$$
$$u_n \equiv \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ (на } \Sigma),\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}_1 = 0 \text{ (на } \Gamma)\}.$$

Тогда из (1.3)—(1.4) следует, что $\boldsymbol{u}_1 \in J_\Sigma(\Omega) \oplus J_0(\Omega)$, $\boldsymbol{u}_s \in J_\Sigma(\Omega) \oplus J_0(\Omega)$, $\nabla p, \nabla\mu \in G_\Gamma(\Omega) \oplus J_\Sigma(\Omega)$. Поэтому будем разыскивать эти функции в виде

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_1 = \nabla\Phi + \boldsymbol{u} && \nabla\Phi \in J_\Sigma(\Omega), && \boldsymbol{u} \in J_0(\Omega),\\
&\boldsymbol{u}_s = \nabla\Phi_s + \boldsymbol{v}_s && \nabla\Phi_s \in J_\Sigma(\Omega), && \boldsymbol{v}_s \in J_0(\Omega),\\
&\nabla p = \nabla\varkappa + \nabla\varphi && \nabla\varkappa \in G_\Gamma(\Omega), && \nabla\varphi \in J_\Sigma(\Omega),\\
&\nabla\mu = \nabla\mu_\Gamma + \nabla\mu_\Sigma && \nabla\mu_\Gamma \in G_\Gamma(\Omega), && \nabla\mu_\Sigma \in J_\Sigma(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в уравнения (1.3)—(1.4) и проектируя эти уравнения на подпространства $L_2(\Omega)$, получим

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + 2\omega_0 P_0[\boldsymbol{k} \times \nabla\Phi + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{a} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{u}] = P_0\boldsymbol{f}; \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\nabla\Phi}{\partial t} + 2\omega_0 P_\Sigma[\boldsymbol{k} \times \nabla\Phi + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{a} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{u}] =$$
$$= -\frac{1}{\rho_n}\nabla\varphi + \frac{\rho_s}{\rho_n}\nabla\mu_\Sigma + P_\Sigma\boldsymbol{f}; \tag{2.3}$$

$$2\omega_0 P_\Gamma[\boldsymbol{k} \times \nabla\Phi + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{a} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{u}] = -\frac{1}{\rho_n}\nabla\varkappa + \frac{\rho_s}{\rho_n}\nabla\mu_\Gamma + P_\Gamma\boldsymbol{f}; \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_s}{\partial t} = P_0\boldsymbol{f},\ 0 = -\nabla\mu_\Gamma + P_\Gamma\boldsymbol{f}; \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\nabla\Phi_s}{\partial t} = -\nabla\mu_\Sigma + P_\Sigma\boldsymbol{f}, \tag{2.6}$$

где $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r})/2$; P_0, P_Σ, P_Γ — ортопроекторы соответственно на $J_0(\Omega)$, $J_\Sigma(\Omega)$ и $G_\Gamma(\Omega)$.

Функции $\boldsymbol{v}_s$ и $\nabla\mu_\Gamma$ находятся сразу из (2.5), тогда уравнение (2.4) может служить для определения величины $\nabla\varkappa$, а уравнение (2.6) — для нахождения $\nabla\mu_\Sigma$ по известным функциям $\nabla\Phi$, $\boldsymbol{u}$ и $\nabla\Phi_s$. Так как $\nabla\Phi$ и $\nabla\Phi_s \in J_\Sigma(\Omega)$ и согласно граничным условиям (1.4) $\dfrac{\partial\Phi}{\partial n_1} = \dfrac{\partial\Phi_s}{\partial n_1}$ (на Γ), то $\nabla\Phi = \nabla\Phi_s$ (в Ω).

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать лишь уравнения (2.2) и (2.3), несколько переписав их:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + 2\omega_0 P_0[\boldsymbol{k} \times \nabla\Phi + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{a} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{u}] = P_0\boldsymbol{f}, && (2.7)\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial t} + 2\omega_0(\psi + \Psi + \Psi_1) = -\frac{1}{\rho_n + \rho_s}\varphi + F. && (2.8)
\end{aligned}\right\}(\text{в}\,\Omega)$$

Здесь $\nabla\varphi = \frac{\rho_n}{\rho_n+\rho_s} P_\Sigma (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u})$, $\nabla\Psi = \frac{\rho_n}{\rho_n+\rho_s} P_\Sigma (\boldsymbol{k} \times \nabla\Phi)$, $\nabla\Psi_1 = \frac{\rho_n}{\rho_n+\rho_s} P_\Sigma (\boldsymbol{a} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u})$, $\nabla F = P_\Sigma \boldsymbol{f}$. Граничные условия на Г(см. (1.4)) принимают вид

$$\varphi|_\Gamma = (\rho_n + \rho_s) g\zeta \text{ и } \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial n} \text{ (на Г)}. \tag{2.9}$$

Рассматривая уравнение (2.8) при $\boldsymbol{r} \in \Gamma$ и учитывая значение $\varphi|_\Gamma$, получим следующую систему уравнений для определения функций $\boldsymbol{u}$, $\Phi|_\Gamma$ и ζ:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + 2\omega_0 P_0 [\boldsymbol{k} \times V\Phi|_\Gamma + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{a} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u}] = P_0 \boldsymbol{f} \text{ (в } \Omega); \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \Phi|_\Gamma}{\partial t} + 2\omega_0 (\psi + \Psi_1 + \Psi) = -g\zeta + F \text{ (на Г)}; \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = C^{-1}\Phi|_\Gamma \text{ (на Г)}. \tag{2.12}$$

Здесь оператор V определен соотношением $V\Phi|_\Gamma = \nabla\Phi$, $\nabla\Phi \in J_\Sigma(\Omega)$, а оператор C^{-1}: $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n_1}\right|_\Gamma = C^{-1}\Phi|_\Gamma$.

3. Вспомогательные предложения. Для того чтобы $\nabla\Phi \in J_\Sigma(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi|_\Gamma \in W_2^{1/2}(\Gamma) \cap H \equiv H_+$. Это следует из теоремы вложения Гальярдо [4]. Тогда оператор V действует из пространства H_+ в $J_\Sigma(\Omega)$. По функции $\Phi|_\Gamma \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ однозначно восстанавливается функция $\Phi \in W_2^1(\Omega) : \nabla\Phi \in J_\Sigma(\Omega)$, при этом $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n_1}\right|_\Gamma \in H_- = (H_+)'$ — пространству функций с негативной нормой [5]. Таким образом, оператор C^{-1} действует из пространства H_+ в пространство H_-.

Лемма 1. Оператор C^{-1} является неограниченным положительно определенным самосопряженным оператором в пространстве $H_+(\Gamma)$.

Действительно, пусть ψ и $\varphi \in H_+$, тогда $(C^{-1}\varphi, \psi)_0 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_1}, \psi\right)_0 = (\nabla\varphi, \nabla\psi)_\Omega = \left(\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial n_1}\right)_0 = (\varphi, C^{-1}\psi)_0$. При $\varphi = \psi$ имеем $(C^{-1}\varphi, \varphi)_0 = (\nabla\varphi, \nabla\varphi)_\Omega$. По теореме вложения С. Л. Соболева $\|\nabla\varphi\|^2 = (\nabla\varphi, \nabla\varphi)_\Omega \geqslant c_1 \|\varphi\|_0^2$, где $c_1 > 0$, а $\varphi \in H_+$. Тогда $(C^{-1}\varphi, \varphi) \geqslant c_1 \|\varphi\|_0^2$, что и требовалось доказать.

Из леммы следует, что существует ограниченный оператор C, который является обратным к оператору C^{-1}.

Рассмотрим в пространстве $J_0(\Omega)$ оператор S: $S\boldsymbol{u} = -iP_0(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{u} \in J_0(\Omega)$.

Лемма 2. Оператор $S : J_0(\Omega) \to J_0(\Omega)$ — самосопряжен и ограничен.

Действительно: Пусть $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{u} \in J_0(\Omega)$, тогда

$$(S\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_\Omega = (-iP_0(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})_\Omega = (-i(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})_\Omega = (\boldsymbol{u}, -i(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}))_\Omega = (\boldsymbol{u}, S\boldsymbol{v})_\Omega.$$

При $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ имеем $|(S\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})| \leqslant \|\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\|_\Omega^2$, т. е. $\|S\| \leqslant 1$.

В пространстве $H_+(\Gamma)$ введем оператор S_1: $iS_1\Phi = \Psi|_\Gamma$, где $\nabla\Psi = P_\Sigma(\boldsymbol{k} \times V\Phi)$. Так как $\nabla\Psi \in J_\Sigma(\Omega)$, то по теореме вложения $\Psi|_\Gamma \in W_2^{1/2}(\Gamma) \cap H \equiv H_+$, т. е. оператор S_1 действует из H_+ в H_+.

Лемма 3. Оператор $S_1: H_+(\Gamma) \to H_+(\Gamma)$ — самосопряжен и ограничен.

Доказательство: Пусть Φ и $\Phi_1 \in H_+(\Gamma)$, тогда $(\Phi, S_1\Phi_1)_+ = (\nabla\tilde{\Phi}, -i\nabla\Psi_1)_\Omega = (\nabla\tilde{\Phi}, -iP_\Sigma(\boldsymbol{k} \times V\Phi_1))_\Omega = (-iP_\Sigma(k \times \nabla\tilde{\Phi}), V\Phi_1)_\Omega = (S_1\Phi, \Phi_1)_+$.

Здесь $\Delta\tilde{\Phi} = 0$, $\tilde{\Phi}|_\Gamma = \Phi$, $\dfrac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial n} = 0$ (на Σ). При $\Phi = \Phi_1$ имеем $(\Phi, S_1\Phi)_+ = (\nabla\tilde{\Phi}, -iP_\Sigma(\boldsymbol{k} \times \nabla\tilde{\Phi}))_\Omega \leqslant \|\nabla\tilde{\Phi}\|_\Omega^2 = \|\Phi\|_+^2$, т. е. $\|S_1\| \leqslant 1$.

4. Переход к операторному уравнению. Введем в уравнениях (2.10)—(2.12) новые искомые функции:

$$\eta = C^{1/2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n_1}\right)_\Gamma = C^{-1/2}\Phi|_\Gamma, \quad \theta = C^{1/2}\zeta \tag{4.1}$$

и подействуем оператором $C^{-1/2}$ на уравнения (2.11) и (2.12). В результате вместо системы уравнений (2.10)—(2.12) мы придем к системе уравнений для функций $\boldsymbol{u}(t) \in J_0(\Omega)$, $\eta(t) \in H_0$ и $\theta(t) \in H_0$.

Будем считать, что вектор функция $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ с компонентами $= \boldsymbol{u}(t) \in J_0(\Omega)$, $\eta(t) \in H_0(\Gamma)$ и $\theta(t) \in H_0(\Gamma)$ принадлежит пространству $H = J_0(\Omega) \oplus H_0(\Gamma) \oplus H_0(\Gamma)$. Тогда исследуемую систему уравнений можно переписать в виде одногооператорногоуравнения в пространстве $\boldsymbol{H}$ для искомого вектор-столбца $v(t)$. Соответствующим образом преобразуются и начальные условия:

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + i2\omega_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + B\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}, \; \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}^0, \tag{4.2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gC^{-1} \\ 0 & -I & 0 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} P_0 f \\ C^{-1/2}\boldsymbol{F} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{v}^0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^0 \\ \eta^0 \\ \theta^0 \end{pmatrix},$$

$$A_{11}\boldsymbol{u} = -iP_0[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{a} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{u}], \; A_{12}\eta = -iP_0[\boldsymbol{k} \times VC^{1/2}\eta],$$
$$A_{21}\boldsymbol{u} = S_0\boldsymbol{u} = -iC^{-1/2}(\psi + \Psi_1), \; A_{22}\eta = S_1\eta = -iC^{-1/2}\Psi;$$
$$\nabla\psi = P_\Sigma(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}), \; \nabla\Psi_1 = P_\Sigma(\boldsymbol{a} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{u}), \; \nabla\Psi = P_\Sigma(\boldsymbol{k} \times VC^{1/2}\eta).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Задача (2.10)—(2.12) равносильна задаче Коши (4.2) в пространстве* $\boldsymbol{H}$.

5. Исследование задачи Коши (4.2). Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 3. *Однородное операторное уравнение (4.2) в пространстве H есть абстрактное параболическое уравнение.*

Доказательство леммы разбивается на две части. Рассмотрим сначала уравнение

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + B_1\boldsymbol{v} = 0, \; \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}^0 \tag{5.1}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & gC^{-1} \\ 0 & -I & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} u \\ \varphi \\ \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad v^0 = \begin{pmatrix} u^0 \\ \varphi^0 \\ \varphi_1^0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = I + gC^{-1},$$

где T_1 — неограниченный самосопряженный оператор. Пусть $v^0 \in D(B_1)$. Тогда легко доказать, что уравнение (5.1) является параболическим, а задача Коши для него равномерно корректна на каждом конечном интервале $[0, T]$. Задача (5.1) распадается на две независимые задачи для компоненты u искомого вектор-столбца и скалярных функций φ и φ_1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + T_1 u = 0, \ u(0) = u^0; \qquad (52)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + T_2\varphi + gC^{-1}\varphi_1 = 0, \ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \varphi = 0 \ \varphi(0) = \varphi^0, \ \varphi_1(0) = \varphi_1^0. \quad (5.3)$$

Решение задачи (5.2) легко находится через полугруппу $W(t)$, порожденную самосопряженным положительно определенным оператором T_1. $W(t)$ можно построить с помощью спектрального разложения, как функцию $W(t) = e^{-T_1 t}$ от оператора T_1. Тогда $u = W(t)\,u^0$.

Решение задачи (5.3) можно получить, используя полугруппу $U(t)$, построенную с помощью спектрального разложения через оператор C^{-1}: $U(t) = e^{-gC^{-1}t}$.

Тогда

$$\varphi = e^{-t}\varphi^0 - \int\limits_0 e^{\tau - t} gC^{-1}U(t)(\varphi^0 + \varphi_1^0)\,d\tau, \ \varphi_1 = U(t)(\varphi^0 + \varphi_1^0) - \varphi.$$

Рассмотрим теперь оператор $B_2 = i2\omega_0 A + B$ из (4.2) и сравним его с оператором B_1. Во-первых, область определения оператора B_2 не у́же области определения оператора B_1, во-вторых, существует ограниченный обратный оператор B_1^{-1}, который равен:

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & g^{-1}C & g^{-1}CT_2 \end{pmatrix},$$

а оператор B_2 допускает замыкание, тогда согласно лемме 7.1 из [6] имеем, что оператор B_2 подчинен оператору B_1. Согласно теореме 7.2 из [6] и замечания к ней получаем, что однородное уравнение (4.2) является абстрактным параболическим. Задача Коши для него равномерно корректна. Соответствующая полугруппа $V(t)$ аналитична в секторе, содержащем положительную полуось. Таким образом, лемма доказана.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение в (4.2). Через полугруппу $V(t)$, отвечающую оператору B_2, решение этого уравнения будем искать в виде [6, 7]:

$$v(t) = V(t)\,v^0 + \int\limits_0^t V(t-\tau)\,F(t)\,d\tau. \qquad (5.4)$$

Теорема 2. *Если в (1.3)—(1.4) выполнены условия:*

$$f(t) \in L_2(\Omega), \ \forall t \in [0, T], \ u_s^0 \in L_2(\Omega), \ u_n^0 \in L_2(\Omega), \ \zeta^0 \in H_-(\Gamma), \quad (5.5)$$

то задача (1.3)—(1.4) корректно разрешима и имеет обобщенное решение (5.4) на интервале $[0, T]$, $\forall T > 0$.

Доказательство. Согласно теореме 1 задача Коши (4.2) эквивалентна исходной задаче (1.3)—(1.4), а ее обобщенное решение дается формулой (5.4). При $\boldsymbol{v}^0 \in \mathcal{H}$ и $F(t) \in \mathcal{H}$ это решение $\boldsymbol{v}(t)$ будет непрерывной функцией от t [6, 7]. Остается проверить, что условия (5.5) на данные исходной задачи обеспечивают требования на $\boldsymbol{v}^0$ и $F(t)$. Если $f(t) \in L_2(\Omega)$, то $P_0 \boldsymbol{f} \in J_0(\Omega)$, а $P_\Sigma \boldsymbol{f} \in \nabla F \in J_\Sigma(\Omega)$, но тогда $F \in W_2^1(\Omega)$, а $F|_\Gamma \in H_+$ и поэтому $C^{1/2}F \in H_0$, т. е. $F(t) \in \mathcal{H} = J_0(\Omega) \oplus \oplus H_0 \oplus H_0$. При $\boldsymbol{u}_n^0 \in L_2(\Omega)$ имеем $P_0 \boldsymbol{u}_n^0 = \boldsymbol{u}^0 \in J_0(\Omega)$, а при $\zeta^0 \in H_-$ получаем $C^{1/2}\zeta \in H_0$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \in H_-$, но $C^{1/2} \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \in H_0$, т. е. $\boldsymbol{v}^0 \in \mathcal{H}$. Таким образом, теорема доказана.

Список литературы: 1. *Патерман С.* Гидродинамика сверхтекучей жидкости. М., 1978. 520 с. 2. *Халатников И. М.* Теория сверхтекучести. М., 1971. 120 с. 3. *Копачевский Н. Д.* Малые движения и собственные колебания идеальной вращающейся жидкости // Препринт. ФТИНТ АН УССР. Х., 1978. С. 38—77. 4. *Копачевский Н. Д.* О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости // Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. 1980. Вып. 6. С. 98—134. 5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. К., 1965. 800 с. 6. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967. 464 с. 7. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. М., 1989. 416 с.

Поступила в редколлегию 18.12.90