ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXV 1957

ОБ ОБРАЩЕНИИ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Н. И. Ахиезер и В. А. Щербина

Харьков

Хорошо известны примеры сингулярных ядер $L(x, y)$, при которых интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^a L(x, y)\psi(y)\,dy \qquad (0 < x < a;\ a \leqslant \infty) \tag{1}$$

допускает решение с помощью формул обращения, имеющих в каждом случае особый вид и в каждом случае выводимых особым способом[1]. Важнейшими из таких ядер являются[2]

$$L_1(x, y) = \frac{1}{2xy}\ln\left|\frac{x+y}{x-y}\right|,$$

$$L_2(x, y) = \frac{1}{|x^2-y^2|^p} \quad (0 < p < 1),$$

$$L_3(x, y) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{x+y}\mathrm{K}\left(\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\right),$$

где $\mathrm{K}(k)$ — обычное обозначение полного эллиптического интеграла первого рода

$$\mathrm{K}(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Однако, насколько мы можем судить, никем не было отмечено, что эти ядра весьма просто связаны с некоторой гипергеометрической функцией. Вместе с тем это обстоятельство оказывается довольно существенным, так как оно не только приводит к новым способам решения уравнения (1) в указанных известных случаях и выясняет возможность представления этих решений в различных видах, но также позволяет получить формулы обращения для уравнения (1) в новых случаях.

---

[1] В своих недавних исследованиях, связанных с обратной проблемой Штурма—Лиувилля, М. Г. Крейн [1] пришел к некоторым общим методам построения подобных формул обращения и для ряда конкретных ядер получил эффективные формулы.

[2] Ядро $L_1(x, y)$ естественно называть ядром Гильберта-Рисса, уравнение (1) с ядром $L_2(x, y)$ впервые изучено Карлеманом [2], а уравнение (1) с ядром $L_3(x, y)$ — Герцем.

Итак, примем, что ядро $L(x, y)$ в уравнении (1) имеет вид

$$L(x, y)=\frac{1}{(x^2+y^2)^p} F\left(\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}, \frac{q}{2}; \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), \tag{2}$$

где

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z)={}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z),$$

а параметры p, q удовлетворяют неравенствам

$$0<2p<q<2p+2. \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что для получения из ядра $L(x, y)$ ядер $L_1(x, y)$, $L_2(x, y)$, $L_3(x, y)$ надлежит положить соответственно $p=1$, $q=3$; $0<p<1$, $q=p+1$; $p=\frac{1}{2}$, $q=2$.

Определяемое формулой (2) ядро $L(x, y)$ имеет особенность только на диагонали $y=x$. Характер этой особенности зависит от значения величины

$$\sigma=\frac{q}{2}-p-\frac{1}{2},$$

которая в силу неравенства (3) численно менее, чем $\frac{1}{2}$. Если $\sigma=0$, то при $y \to x$

$$L(x, y):\left\{\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \frac{2}{(x^2+y^2)^p} \ln\left|\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right|\right\} \to 1.$$

Если $\sigma<0$, то при $y \to x$

$$L(x, y):\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(p-\frac{q}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \frac{|x^2-y^2|^{q-2p-1}}{(x^2+y^2)^{q-p-1}}\right\} \to 1.$$

Если, наконец, $0<\sigma<\frac{1}{2}$, то ядро $L(x, y)$ не обращается в бесконечность при $y=x$, но обращается в бесконечность его производная по x.

Ключом для решения уравнения (1) с ядром (2) являются представления гипергеометрической функции в виде интеграла от произведения двух функций[1], Нужные нам представления [3] имеют вид

[1] Представления гипергеометрической функции в виде интегралов объясняют, каким образом некоторые сингулярные интегралы могут быть преобразованы в выражения, не содержащие таких интегралов. Остановимся на одном примере. Беря представление (В) для $p=1$, а именно

$$\frac{1}{x^2+y^2} F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{1}{xy}\int_0^x \frac{tdt}{\sqrt{(x^2-t^2)(y^2-t^2)}} \quad (0<x<y);$$

можем написать тождество

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty g(y)\ln\left|\frac{x+y}{x-y}\right| dy=\int_0^x \frac{tdt}{\sqrt{x^2-t^2}}\int_t^\infty \frac{g(y)}{\sqrt{y^2-t^2}}dy,$$

$$(A)\quad \frac{1}{(x^2+y^2)^p} F\left(\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}, \frac{q}{2}; \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \\ = \frac{1}{M_{p,q}} \int_0^\infty \frac{J_{q/2-1}(\lambda x) J_{q/2-1}(\lambda y)}{(xy)^{q/2-1}} \frac{d\lambda}{\lambda^{q-2p-1}},$$

где

$$M_{p,q} = \frac{\Gamma(p)}{2^{q-2p-1}\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}-p\right)},$$

$$0 < 2p < q,$$

а x, y имеют любые вещественные значения;

$$(B)\quad \frac{1}{(x^2+y^2)^p} F\left(\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}, \frac{q}{2}; \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \\ = \frac{1}{N_{p,q}} \frac{1}{(xy)^{q-2}} \int_0^x \frac{t^{2p-1}\,dt}{[(x^2-t^2)(y^2-t^2)]^{1+p-q/2}},$$

где

$$0 < x < y, \quad 0 < 2p < q$$

и

$$N_{p,q} = \frac{\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{q}{2}-p\right)}{2\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}.$$

Кроме этих формул, нам понадобятся формулы обращения Абеля, которые имеют вид:

$$(C_1)\begin{cases} H(x) = \dfrac{2}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_0^x \frac{G(t)\,dt}{(x^2-t^2)^\alpha} \\ G(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_0^x \frac{t\,H(t)\,dt}{(x^2-t^2)^{1-\alpha}} \end{cases} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

где $x > 0$, и

$$(C_2)\begin{cases} H(x) = \dfrac{2}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_x^l \frac{G(t)\,dt}{(t^2-x^2)^\alpha} \\ G(x) = -\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_x^l \frac{t\,H(t)\,dt}{(t^2-x^2)^{1-\alpha}}, \end{cases} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

где $0 < x < l\ (\leqslant \infty)$.

откуда, дифференцируя по x, получаем

$$\int_0^\infty g(y) \frac{y\,dy}{y^2-x^2} = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t\,dt}{\sqrt{x^2-t^2}} \int_t^\infty \frac{g(y)}{\sqrt{y^2-t^2}}\,dy.$$

Теперь перейдем к изложению правил для решения уравнения (1). Наши правила носят формальный характер и не содержат полных условий для их применимости. Однако нетрудно указать достаточные условия для функции $\varphi(x)$, при которых они наверно справедливы.

Первое правило. Если $a \leqslant \infty$, то решение уравнения (1) дается формулой

$$\psi(x)=\frac{x^{q-2}}{\Gamma\left(1+p-\frac{q}{2}\right)}\frac{d}{dx}\int\limits_x^a\frac{tg(t)\,dt}{(t^2-x^2)^{q/2-p}}\qquad (0<x<a),$$

где

$$g(t)=\frac{2\Gamma(p)\sin\pi\left(p-\frac{q}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}t^{1-2p}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{\varphi(s)\,s^{q-1}\,ds}{(t^2-s^2)^{q/2-p}}.$$

Второе правило. Если $a=\infty$ и функция $\varphi(x)$ дифференцируема, то решение уравнения (1) можно представить в виде

$$\psi(x)=$$
$$=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q-p)\sin\pi\left(p-\frac{q}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{q}{2}\right)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty\frac{(xy)^q\varphi'(y)}{(x^2+y^2)^{q-p}}F\left(\frac{q-p}{2},\ \frac{q-p+1}{2},\right.$$
$$\left.\frac{q}{2}+1;\ \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dy, \tag{5}$$

а также в виде

$$\psi(x)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q-p-2)\sin\pi\left(p-\frac{q}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}-1\right)}x^{q-2}\times$$
$$\times\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty\left[y^{q-2}\varphi(y)\right]'\left\{\frac{1}{(x^2+y^2)^{q-p-2}}F\left(\frac{q-p-2}{2},\ \frac{q-p-1}{2},\ \frac{q}{2}-1;\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)-\frac{1}{y^{2q-2p-4}}\right\}dy, \tag{6}$$

причем для справедливости последней формулы, кроме неравенства (3), должны еще выполняться неравенства

$$q>p+2,\ q\geqslant 3. \tag{4}$$

Для оправдания первого правила воспользуемся формулой (B). В силу этой формулы уравнение (1) с ядром (2) можно переписать в виде

$$\varphi(x)=\frac{1}{N_{p,\,q}}\left\{\int\limits_0^x\psi(y)\,\frac{dy}{(xy)^{q-2}}\int\limits_0^y\frac{t^{2p-1}\,dt}{[(x^2-t^2)(y^2-t^2)]^{1+p-q/2}}+\right.$$
$$\left.+\int\limits_x^a\psi(y)\,\frac{dy}{(xy)^{q-2}}\int\limits_0^x\frac{t^{2p-1}\,dt}{[(x^2-t^2)(y^2-t^2)]^{1+p-q/2}}\right\}.$$

Меняя порядок интегрирования, находим, что

$$x^{q-2}\varphi(x)=\frac{1}{N_{p,q}}\int\limits_0^x\frac{t^{2p-1}\,dt}{(x^2-t^2)^{1+p-q/2}}\int\limits_t^a\frac{y^{2-q}\psi(y)}{(y^2-t^2)^{1+p-q/2}}\,dy.$$

Теперь применяя формулы обращения (C_1), получим

$$t^{2p-1}\int\limits_t^a\frac{y^{2-q}\psi(y)}{(y^2-t^2)^{1+p-q/2}}\,dy=$$

$$=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma\left(\frac{q}{2}-p\right)\sin\pi\left(\frac{q}{2}-p\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{s^{q-1}\varphi(s)}{(t^2-s^2)^{q/2-p}}\,ds.$$

Отсюда, применяя формулы обращения (C_2), мы и придем к первому правилу.

Чтобы вывести второе правило, воспользуемся представлением (А) ядра (2). В силу этого представления уравнение (1) с этим ядром при $a=\infty$ принимает вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{M_{p,q}}\int\limits_0^\infty\psi(y)\,dy\int\limits_0^\infty(xy)^{1-q/2}J_{q/2-1}(\lambda x)\,J_{q/2-1}(\lambda y)\,\frac{d\lambda}{\lambda^{q-2p-1}}.$$

Меняя здесь порядок интегрирования и полагая

$$C(\lambda)=\int\limits_0^\infty\frac{J_{q/2-1}(\lambda y)}{y^{q/2-1}}\psi(y)\,dy, \tag{7}$$

найдем, что

$$M_{p,q}\varphi(x)\,x^{q/2-1}=\int\limits_0^\infty C(\lambda)\,J_{q/2-1}(\lambda x)\,\frac{d\lambda}{\lambda^{q-2p-1}}. \tag{8}$$

Таким образом, отыскание функции $\psi(x)$ сводится к двукратному применению формул обращения Ганкеля.

Допустим вначале, что функция $\varphi(x)$ дифференцируема и что произведение

$$x^{\frac{q-1}{2}}\varphi'(x)$$

принадлежит $L^2(0,\ \infty)$. В таком случае

$$x^{\frac{q-1}{2}}\varphi'(x)=\int\limits_0^\infty\sqrt{\lambda x}\,D(\lambda)\,J_{q/2}(\lambda x)\,d\lambda, \tag{9}$$

где $D(\lambda)\in L^2(0,\ \infty)$, а интеграл понимается как l. i. m. Сравнение представлений (8) и (9) показывает, что

$$-M_{p,q}D(\lambda)=C(\lambda)\,\lambda^{\frac{3}{2}+2p-q}.$$

Поэтому

$$C(\lambda) = -M_{p,q}\lambda^{q-2p-1}\int_0^\infty x^{q/2}\varphi'(x)J_{q/2}(\lambda x)\,dx, \tag{10}$$

С другой стороны, из (7) следует, что

$$y^{-q/2}\psi(y) = \int_0^\infty \lambda C(\lambda)J_{q/2-1}(\lambda y)\,d\lambda,$$

откуда

$$x^{-b/2}\int_0^x \psi(y)\,dy = \int_0^\infty C(\lambda)J_{q/2}(\lambda x)\,d\lambda.$$

Подставляя в правую часть этого равенства выражение (10), получаем

$$-x^{-q/2}\int_0^x \psi(y)\,dy = M_{p,q}\int_0^\infty t^{q/2}\varphi'(t)\,dt\int_0^\infty J_{q/2}(\lambda x)J_{q/2}(\lambda t)\frac{d\lambda}{\lambda^{1+2p-q}},$$

откуда и следует равенство (5).

Предположим теперь, что кроме неравенства (3), имеют место неравенства

$$q > p+2, \quad q \geqslant 3, \tag{4}$$

а также, что $\varphi(x)$ дифференцируема и произведение

$$x^{\frac{3-q}{2}}\frac{d}{dx}[x^{q-2}\varphi(x)]$$

принадлежит $L^2(0, \infty)$. В таком случае

$$M_{p,q}x^{1-q/2}\frac{d}{dx}[x^{q-2}\varphi(x)] = \int_0^\infty \sqrt{\lambda}\,E(\lambda)J_{q/2-2}(\lambda x)\,d\lambda, \tag{11}$$

где $E(\lambda)\in L^2(0, \infty)$. Сравнение этого равенства с равенством (8) показывает, что

$$E(\lambda) = C(\lambda)\lambda^{\frac{3}{2}+2p-1}. \tag{12}$$

Сужая вначале класс функций $\varphi(x)$, мы можем принять, что не только $E(\lambda)\in L^2(0, \infty)$, но и $\lambda^{\frac{3}{2}}E(\lambda)\in L^2(0, \infty)$. В таком случае вытекающее из (7) и (12) равенство

$$y^{-q}\psi(y) = \int_0^\infty E(\lambda)\lambda^{q-2p-\frac{1}{2}}y^{-q/2}J_{q/2-1}(\lambda y)\,d\lambda$$

можно проинтегрировать по y, что дает

$$\int_0^x t^{-q}\psi(t)\,dt = x^{2-q/2}\int_0^\infty E(\lambda)\lambda^{q-2p-\frac{3}{2}}\left\{\frac{(x\lambda)^{q/2-2}}{2^{q/2-2}\Gamma\left(\frac{q}{2}-1\right)} - J_{q/2-2}(\lambda x)\right\}d\lambda.$$

Подставляя сюда вместо $E(\lambda)$ его выражение из (11) найдем

$$\int_0^x t^{-q}\psi(t)\,dt=$$

$$=M_{p,q}\,x^{2-q/2}\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda^{1+2p-q}}\left\{\frac{(x\lambda)^{q/2-2}}{2^{q/2-2}\Gamma\left(\frac{q}{2}-1\right)}-\right.$$

$$\left.-J_{q/2-2}(\lambda x)\right\}\int_0^\infty t^{\frac{3-q}{2}}\frac{d}{dt}\left[t^{q-2}\varphi(t)\right]J_{q/2-2}(\lambda t)\,dt.$$

Отсюда и вытекает второе представление решения, указанное во втором правиле.

Остановимся теперь на некоторых примерах, поясняющих изложенное.

В качестве первого примера на применение первого правила рассмотрим уравнение

$$\varphi(x)=\int_0^a\frac{\psi(y)}{|x^2-y^2|^p}\,dy,$$

где $0<p<1$. Чтобы получить решение этого уравнения, надлежит в общих формулах положить $q=p+1$. Таким путем получаем

$$\psi(x)=-\frac{2x^{p-1}\Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}}{\pi\left[\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)\right]^2}\frac{d}{dx}\int_x^a\frac{t^{2-2p}\,dt}{(t^2-x^2)^{\frac{1-p}{2}}}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{\varphi(s)\,s^p\,ds}{(t^2-s^2)^{\frac{1-p}{2}}}.$$

В качестве второго примера возьмем уравнение

$$F(x)=\int_0^a\ln\left|\frac{x+y}{x-y}\right|G(y)\,dy.$$

Решение этого уравнения найдем в виде

$$G(x)=-\frac{2}{\pi^2}\frac{d}{dx}\int_x^a\frac{dt}{\sqrt{t^2-x^2}}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{F(s)\,s\,ds}{\sqrt{t^2-s^2}}.$$

Чтобы проиллюстрировать второе правило, возьмем уравнение

$$(\alpha)\qquad \varphi(x)=\int_0^\infty\frac{1}{2xy}\ln\left|\frac{x+y}{x-y}\right|\psi(y)\,dy.$$

Для отыскания функции $\psi(x)$ воспользуемся формулой (6). Однако она непосредственно не применима, так как у нас $p=1$, $q=3$ и значит не выполнено требование (4). Поэтому мы положим в формуле (6) $q=3$ и будем искать предел при $p\uparrow 1$. Таким образом,

$$\frac{\psi(x)}{x} = \lim_{p \uparrow 1} \frac{\Gamma(1-p)\Gamma(p)}{\pi\Gamma\left(p-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-p\right)} \left[\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{[2y\varphi(y)]'}{y^{2-2p}}\left\{1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)^{1-p}} F\left(\frac{1-p}{2}, \frac{2-p}{2}, \frac{1}{2}; \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\right\} dy\right].$$

В результате получим

$$(\beta) \qquad \frac{\psi(x)}{x} = \frac{1}{\pi^2}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{d}{dy}[2y\varphi(y)] \ln\left|1-\frac{x^2}{y^2}\right| dy.$$

Полагая в формулах (α), (β)

$$\frac{\psi(x)}{x} = \frac{1}{\pi} g(x), \quad \frac{d}{dx}[2x\varphi(x)] = f(x),$$

мы сможем написать следующие соотношения:

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^\infty g(y) \ln\left|\frac{x+y}{x-y}\right| dy$$

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(y) \ln\left|1-\frac{x^2}{y^2}\right| dy.$$

Это — известные формулы обращения Гильберта — Рисса.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Доклады Академии наук СССР, 1955, том 100, стр. 413—416.

2. T. Carleman. Uber die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen. Math. Zeitschrift, 15 (1922).

3. Т. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций. М. 1949.