УДК 517.9

М. Г. ЛЮБАРСКИЙ

О ЛОКАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫХ И ЛОКАЛЬНО ОТДЕЛЕННЫХ ОТ НУЛЯ ДВИЖЕНИЯХ В ВЕКТОРНЫХ G-РАССЛОЕНИЯХ (ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЯХ)

Пусть G — топологическая группа, H — ее подгруппа и G/H — однородное пространство левых классов смежности. Один хорошо известный результат Атья [1] состоит в том, что векторное G-расслоение над G/H обладает структурой расслоенного пространства $(G \times V)/ /H \to G/H$ со слоем V, ассоциированного с главным H-расслоением $G \to G/H$. Причем действие группы G сохраняет V-проекцию, т. е. $g(s, v) H = (qs, v) H$ для всех $q, s \in G$ и $v \in V$.

В настоящей работе аналогичное утверждение доказывается для векторного G -расслоения над произвольным минимальным G-пространством в предположении, что движение каждой точки расслоения ограничено и отделено от нуля над достаточно малой окрестностью любой точки базы. Этот результат позволяет перенести на векторные G-расслоения, или в другой терминологии (см. [2]) — на линейные расширения топологических групп преобразований ряд известных теорем о представлениях бикомпактных групп. В этом смысле в работе обобщены теорема об унитарности представления бикомпактной группы и теорема о приводимости представления бикомпактной коммутативной группы. Доказанные утверждения в качестве частных случаев содержат результаты, анонсированные в [3, 4].

1. Пусть X — векторное G-расслоение над G-пространством Y и $p: X \to Y$ — проекция расслоения.

В случае, когда X — метризованное расслоение, движение точки $x \in X$ называют ограниченным (отделенным от нуля) на множестве $S \subset G$, если $\sup\{\| sx\| : s \in S\} < +\infty$ $(\inf\{\| sx \| : s \in S\} > 0)$.

Определение. *Будем говорить, что движение точки $x \in X$ локально ограничено (локально отделено от нуля), если для каждой точки $y \in Y$ найдется такая ее окрестность $U \subset Y$, что движение x ограничено (отделено от нуля) на множестве $\{g \in G : p(gx) \in U\}$.*

Замечание. Так как это определение носит локальный характер, оно не зависит от выбора метрики на X и более того сохраняет свой смысл, если метрик на X не существует. В последнем случае можно использовать локальную метрику, т. е. естественную метрику расслоения-произведения на ограничении $X \mid U$, где U — такая окрестность точки y, что $X \mid U$ тривиально. Если база Y бикомпактна, то на X существует (см. [5]) единственная с точностью до эквивалентности метрика. При этом локальные ограниченность и отделенность от нуля означают соответственно ограниченность и отделенность от нуля на G.

Обозначим через LB (LD) множество всех точек из X, движения которых локально ограничены (локально отделены от нуля). Для удобства к множеству LD причислим все точки, являющиеся нуль-векторами в векторной структуре своего слоя. Следующее утверждение очевидно.

2. **Лемма.** *Каждая точка множества* LB (LD) *входит в него вместе с замыканием своей орбиты.*

3. Пусть V — слой над некоторой точкой $y_V \in Y$ или векторное подпространство этого слоя и пусть X^V — множество всех отображений $V \to X$, наделенное топологией поточечной сходимости. Рассмотрим множество $G_V \subset X^V$, состоящее из ограничений на V всех преобразований из G, и пусть $\overline{G}_V$ — замыкание этого множества в X^V. Зафиксируем на G_V индуцированную топологию. Ясно, что sV — образ V при $s \in G_V$, целиком лежит в некотором слое расслоения X и s — линейное отображение. Проекцию на Y слоя, содержащего sV, обозначим через sy_V.

Пусть H_V — совокупность всех преобразований из $\overline{G}_V$, отображающих V в себя. Тогда для любых $s \in \overline{G}_V$ и $h \in H_V$ определена композиция sh отображений h и s. С помощью теоремы «о повторном пределе» (см. [6]) легко проверяется, что $sh \in \overline{G}_V$. Таким образом, композиция определяет непрерывное отображение $\overline{G}_V \times H_V \to \overline{G}_V$. В частности, H_V — полугруппа. Если H_V — группа, то $\overline{G}_V$ — правое H_V-пространство, и определено расслоение $\overline{G}_V \to \overline{G}_V/H_V$ пространства $\overline{G}_V$ над пространством его H_V-орбит.

4. **Лемма.** *Если выполнено включение $V \subset$ LB $\cap$ LD, то H_V — бикомпактная подгруппа главной линейной группы* GL(V), *и расслоение $\overline{G}_V \to G_V/H_V$ является главным и локально тривиальным.*

Доказательство. Заметим, что подгруппа H_V замкнута в пространстве $L(V)$ линейных отображений V в себя, так как по определению совпадает с пересечением $G_V \cap L(V)$. Из условия $V \subset \mathrm{LB}$ вытекает, что полугруппа H_V ограничена в $L(V)$ и, следовательно, бикомпактна. При выполнении условия $V \subset \mathrm{LD}$ все преобразования из H_V невырождены. Поэтому $H_V \subset \mathrm{GL}(V)$ и для доказательства первого утверждения леммы остается проверить, что H_V вместе с любым своим элементом содержит ему обратный.

Пусть $h \in H_V$. Так как H_V — бикомпактная полугруппа, последовательность $\{h^n : n \in \mathbb{N}\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Это означает, что найдется стремящаяся в бесконечность последовательность натуральных чисел $\{m_n : n \in \mathbb{N}\}$ такая, что $\lim\{h^{m_n} : n \to \infty\} = 1_V$. Тогда $h^{-1} = \lim\{h^{m_n - 1} : n \to \infty\}$ и, поскольку множество H_V замкнуто, $h^{-1} \in H_V$.

При доказательстве второго утверждения леммы X можно считать расслоением-произведением. Действительно, отображение $q : \overline{G}_V / H_V \to Y$, задаваемое формулой $q(sH_V) = sy_V$, непрерывно, поскольку индуцировано непрерывным отображением $Q : \overline{G}_V \to Y$ таким, что $Q(s) = sy_V$. Поэтому если sH_V — орбита произвольной точки $s \in \overline{G}_V$, и U — такая окрестность точки sy_V, что ограничение $X | U$ тривиально, то найдется окрестность $W \subset \overline{G}_V / H_V$ этой орбиты такая, что $q[W] \subset U$.

Итак, можно положить $X = Y \times F$, где F — векторное пространство. Обозначим через L пространство невырожденных линейных отображений $V \to F$. Тогда H_V — пространство $\overline{G}_V$, состоящее благодаря условию $V \subset \mathrm{LD}$ из невырожденных преобразований, можно рассматривать как инвариантное подпространство прямого произведения $L \times Y$, на котором действие группы H_V определено формулой $(A, y)h = (Ah, y)$, где $y \in Y$, Ah — композиция отображений $h \in H_V$ и $A \in L$. Поэтому достаточно проверить, что главным и локально тривиальным является расслоение $L \times Y \to (L \times Y)/H_V$. Так как группа H_V действует только на первом сомножителе, то задача еще упрощается: нужно проверить, что расслоение $L \to L/H_V$ — главное и локально тривиальное. Первое из этих свойств очевидно. Второе следует (см. [5]) из того, что пространство L имеет структуру многообразия, а группа H_V является группой Ли.

5. Будем предполагать далее, что база Y векторного G-расслоения X минимальна, т. е. совпадает с замыканием орбиты любой своей точки.

Пусть, как и выше, $Q : \overline{G}_V \to Y$ — отображение, определенное формулой $Q(s) = sy_V$, и $q : \overline{G}_V / H_V \to Y$ — индуцированное отображение, т. е. такое, что $q(sH_V) = sy_V$.

6. **Лемма.** *Пусть выполнено включение $V \subset \mathrm{LB} \cap \mathrm{LD}$, и для любых преобразований $s_1, s_2 \in \overline{G}_V$ таких, что $s_1 y_V = s_2 y_V$, имеет место равенство $s_1 V = s_2 V$. Тогда $Q : \overline{G}_V \to Y$ — главное, локально тривиальное H_V-расслоение.*

Доказательство. Учитывая предыдущую лемму достаточно доказать, что q — гомеоморфизм.

Из минимальности базы Y следует, что для любой точки $y \in Y$ найдется направленность $\{g_n : n \in N\} \subset G$ такая, что $\lim\{g_n y_V : n \in N\} = y$, а из условия $V \subset$ LB — что эта направленность содержит сходящуюся в пространстве $\overline{G}_V$ поднаправленность. Таким образом, в $\overline{G}_V$ существует преобразование s такое, что $sy_V = y$. Это означает, что q — надъективное отображение.

Пусть $s_1 \in \overline{G}_V$. Векторное подпространство $s_1 V$ слоя над $s_1 y_V$ по лемме 2 лежит в LB. Поэтому к нему применимо проведенное выше рассуждение, показывающее, что найдется преобразование $t \in \overline{G}_{s_1 V}$ такое, что $t(s_1 y_V) = y$. Из теоремы «о повторном пределе» (см. [6]) следует, что $ts_1 \in H_V$. Если $s_2 y_V = s_1 y_V$ для некоторого преобразования $s_2 \in \overline{G}_V$, то по условию $s_2 V = s_1 V$, и тогда аналогично предыдущему $ts_2 \in H_V$. Поэтому $s_1^{-1} s_2 = (ts_1)^{-1}(ts_2) \in H_V$ и, значит, $s_1 H_V = s_2 H_V$. Таким образом, отображение q инъективно.

Непрерывность q уже установлена — она следует из того, что это отображение индуцировано непрерывным отображением Q. Для доказательства непрерывности обратного отображения q^{-1} достаточно установить (см. [6]), что отображение Q замкнуто. Но это свойство Q в случае $V \subset$ LB очевидно.

7. Доказанная лемма позволяет ввести в рассмотрение расслоенное пространство $(\overline{G}_V \times V) / H_V \to Y$ со слоем V, ассоциированное с главным H_V-расслоением $Q : G_V \to Y$. Так как последнее локально тривиально, то это расслоенное пространство с естественным строением векторного пространства V на каждом слое является векторным расслоением. Чтобы установить связь с исходным расслоением X, определим отображение $r : (\overline{G}_V \times V) / H_V \to X$, положив $r((s, v)H_V) = sv$. Ясно, что это отображение индуцировано непрерывным отображением $R : \overline{G}_V \times V \to X$ таким, что $R(s, v) = sv$. Поэтому r непрерывно и для любого $y \in Y$ линейно отображает слой над y расслоенного пространства в слой над y векторного расслоения. Таким образом, r — Y-морфизм векторных расслоений. В условиях последней леммы, когда все преобразования из $\overline{G}_V$ невырождены, Y-морфизм r инъективен. В этом случае (см. [5]) множество значений r, т. е. множество $X_V = \{sv : s \in \overline{G}_V,\ v \in V\}$, является подрасслоением векторного расслоения X. Ясно, что это подрасслоение G-инвариантно и присущая ему структура расслоенного пространства обладает свойством $g(s, v)H_V = (gs, v)H_V$, $g \in G$, $s \in \overline{G}_V$, $v \in V$, где gs — композиция преобразований s и g. Заметим, что определяемое композицией отображение $G \times \overline{G}_V \to \overline{G}_V$ превращает $\overline{G}_V$ в G-пространство, и это G-пространство является минимальным.

Определение. *Пусть $(Z \times V) / H \to Y$ — расслоенное пространство со слоем V, ассоциированное с главным H-расслоением $Z \to Y$, и пусть на пространстве $(Z \times V) / H$ задано действие топологической группы G. Будем говорить, что действие группы G сохраняет*

V-проекцию, если пространство Z является G-пространством, и $g(z,v)\times \times H = (gz, v)H$, $g \in G$, $z \in Z$, $v \in V$. (Отметим, что в этом случае действия групп G и H на Z коммутируют: $g(zh) = (gz)h$, $g \in G$, $z \in Z$, $h \in H$). Если дополнительно G-пространство Z минимально, будем говорить, что действие группы G минимально сохраняет V-проекцию.

Итак, доказано следующее утверждение.

8. **Лемма.** *В условиях предыдущей леммы множество X_V является G-инвариантным подрасслоением векторного G-расслоения X, обладающим структурой локально тривиального расслоенного пространства со слоем V и бикомпактной структурной группой $H \subset \mathrm{GL}(V)$. Индуцированное на X_V действие группы G минимально сохраняет V-проекцию.*

9. **Теорема.** *Пусть $E \subset X$ — такое множество, что ($\dot{I}$) для любого $y \in Y$ пересечение $V_y = E \cap X_y$ является векторным подпространством слоя X_y, ($\dot{I}\dot{I}$) для каждого $x \in E$ замыкание орбиты x лежит в E, ($\dot{I}\dot{I}\dot{I}$) выполнено включение $E \subset \mathrm{LB} \cap \mathrm{LD}$. Тогда E—G-инвариантное подрасслоение векторного G-расслоения X, обладающее такой структурой локально тривиального расслоенного пространства со слоем $V \cong V_y$, $y \in Y$, что его структурная группа $H \subset \mathrm{GL}(V)$ бикомпактна, и индуцированное действие группы G минимально сохраняет V-проекцию.*

Доказательство. Из условия ($\dot{I}\dot{I}$) следует, что для любых $y \in Y$ и $s \in \bar{G}_V$ выполнено включение $sV_y \subset E$, и тогда $sV_y \subset V_{sy}$. Благодаря условию ($\dot{I}\dot{I}\dot{I}$) преобразование s невырождено. Значит, $\dim V_y \leqslant \leqslant \dim V_{sy}$. Заметим теперь, что поскольку пространство Y предполагается минимальным и выполнено условие ($\dot{I}\dot{I}\dot{I}$), множество $\{sy : s \in \in \bar{G}_{Vy}\}$ совпадает с Y. Поэтому из последнего неравенства вытекает, что $\dim V_y$ не зависит от y, а из последнего включения тогда следует, что $sV_y = V_{sy}$. Таким образом пространство $V = V_y$ удовлетворяет условиям лемм 6 и 8, а множество X_V, фигурирующее в последней из них, совпадает с множеством E. Доказываемое утверждение вытекает теперь из леммы 8.

Следствие 1. *Пусть $\mathrm{LB} \subset \mathrm{LD}$. Тогда LB — G-инвариантное подрасслоение векторного G-расслоения X, и на LB существует G-инвариантная метрика.*

Доказательство. Условия ($\dot{I}$) и ($\dot{I}\dot{I}\dot{I}$) теоремы 9 очевидным образом выполнены при $E = \mathrm{LB}$. Условие ($\dot{I}\dot{I}$) выполнено в силу леммы 2. Поэтому LB — G-инвариантное подрасслоение, которое при доказательстве второго утверждения можно рассматривать как расслоенное пространство $(Z \times V)/H \to Y$, обладающее указанными в теореме 9 свойствами.

Согласно теореме об унитарности представления бикомпактной группы на векторном H-пространстве V существует H-инвариантное скалярное произведение $(\cdot\,,\cdot)$. Легко проверяется, что формула $\beta((z, v)H, (z, w)H) = (v, w)$, $z \in Z$, $v, w \in V$, определяет в этом случае метрику на LB. Инвариантность этой метрики относительно сохраняющего V-проекцию действия группы G очевидна.

10. Будем говорить, что векторное G-расслоение неприводимо, если оно не имеет собственное G-инвариантное подрасслоение.

Следствие II. *В условиях следствия I векторное G-расслоение* LB *распадается в прямую сумму неприводимых G-инвариантных подрасслоений.*

Доказательство. Требуется проверить, что если $X_1 \subset \mathrm{LB}$ — G-инвариантное подрасслоение, то существует G-инвариантное подрасслоение $X_2 \subset \mathrm{LB}$ такое, что $\mathrm{LB} = X_1 \oplus X_2$. Но это так, поскольку в качестве X_2 можно выбрать ортогональное дополнение к X_1 в LB относительно G-инвариантной метрики, существующей в силу предыдущего следствия.

11. Доказательству еще одного следствия теоремы 9 предпошлем лемму. Пусть Z — G-пространство, и $z \in Z$. Будем предполагать, что пространство Z регулярно и хаусдорфово. Обозначим через T_z топологию на G поточечной сходимости на множестве, состоящем из одной точки z. Если (G, T_z) — группа G, наделенная топологией T_z, является предкомпактной топологической группой, то точку z называют почти периодической Левитана (п. п. Л.).

Пусть $z \in Z$ — п. п. Л. точка и E_z— совокупность всех $g \in G$ таких, что $gz = z$. Тогда E_z— нормальный делитель группы G, и определена фактор-группа $G_z = (G, T_z) / E_z$. Благодаря проведенной факторизации группа G_z отделима, и тогда ее пополнение G_z^* представляет собой бикомпактную топологическую группу. Отметим, что орбита п. п. Л. точки состоит из п. п. Л. точек, а ее замыкание является минимальным множеством.

12. **Лемма.** *Пусть G-пространство Z состоит из п. п. Л. точек и является минимальным множеством. Тогда Z как G-пространство изоморфно некоторому множеству $Z^* \subset G_z^*$, на котором действие группы G определено как умножение слева. Если для некоторой топологической группы H множество Z является главным правым H-пространством таким, что действия групп G и H коммутируют, то существует изоморфная группе H подгруппа $H^* \subset G_z^*$ такая, что с точностью до изоморфизмов $Z \cong Z^*$ и $H \cong H^*$ действие H на Z совпадает с умножением справа.*

Доказательство. Пусть $z \in Z$. Рассмотрим группу G_z как подпространство пространства всех отображений $z \to Z$, снабженного топологией поточечной сходимости. Замыкание G_z в этом пространстве обозначим через $\overline{G}_z$ и определим действие группы G на $\overline{G}_z$, положив, что gs означает композицию преобразований $s \in G_z$ и $g \in G$. Ясно, что отображение $\overline{G}_z \to Z : s \to sz$, где пространство Z благодаря минимальности совпадает с замыканием орбиты точки z, является изоморфизмом G-пространств. С другой стороны, в случае регулярного пространства Z каноническое вложение $G_z \to G_z^*$ по непрерывности продолжается до вложения $\overline{G}_z \to G_z^*$. При этом определенное на $\overline{G}_z$ действие группы G, очевидно, совпадает с умножением слева.

Первое утверждение леммы доказано. При доказательстве второго можно считать, что Z — подмножество группы $\overline{G}_z^*$, на котором действие группы G определено как умножение слева.

Пусть $s \in Z$ и $h \in H$. Выберем направленность $\{g_n : n \in N\} \subset G_z$, сходящуюся в G_z^* к s. Тогда по условию $g_n^{-1}(sh) = (g_n^{-1}s)h$ для всех $n \in N$. Переходя к пределу, получим $s^{-1}(sh) = (s^{-1}s)h = eh$ или $sh = s(eh)$. Последнее соотношение показывает, что применение преобразования $h \in H$ к $s \in Z$ эквивалентно умножению s на eh справа. Поэтому соответствие $h \to eh$ является морфизмом группы H в группу G_z^*. Благодаря тому, что H-пространство Z — главное, это соответствие инъективно и непрерывно в обе стороны. Таким образом, совокупность $H^* = \{eh : h \in H\}$ является требуемой подгруппой группы G_z^*.

13. Пусть база Y векторного G-расслоения X является регулярным хаусдорфовым пространством. Как и ранее, предполагается, что Y — минимальное G-пространство. Расслоение будем считать комплексным. Обозначим через APL совокупность всех п. п. Л. точек из X.

Следствие III. *Пусть для любой точки $x \in$ APL замыкание ее орбиты содержится в* APL. *Тогда* APL — *G-инвариантное подрасслоение векторного G-расслоения X. Если группа G коммутативна, то* APL *распадается в прямую сумму одномерных, тривиальных, G-инвариантных подрасслоений. Для каждого из них можно указать сечение s и характер χ группы G такие, что $gs(y) = \chi(g)s(gy)$, $g \in G$, $y \in Y$.*

Доказательство. Легко проверяется, что множество APL удовлетворяет условиям ($\dot{I}$) и ($\dot{I}\dot{I}\dot{I}$) теоремы 9. Условие ($\dot{I}\dot{I}$) этой теоремы входит в условия доказываемого утверждения. Поэтому из теоремы 9 следует, что APL — G-инвариантное подрасслоение X, которое при доказательстве второй части следствия можно рассматривать как расслоенное пространство $(Z \times V) / H \to Y$, свойства которого указаны в теореме 9. Из этих свойств, в частности, следует, что G-пространство Z удовлетворяет условиям леммы 12. Действительно, пространство Z минимально и благодаря локальной тривиальности над Y регулярно и хаусдорфово. Кроме того оно, состоит из п. п. Л. точек, поскольку из сохранения V-проекции следует, что топология поточечной сходимости на точке $z \in Z$ совпадает с топологией поточечной сходимости на слое $\{(z, v)H : v \in V,\}$ состоящем из п. п. Л. точек. В силу леммы 12 множество Z можно считать подмножеством бикомпактной топологической группы G_z^* $(z \in Z)$, а группу H — подгруппой G_z^*. Причем действие групп G и H на Z заключается в умножении на элементы этих групп. Порядок сомножителей в данном случае не важен, так как группа G, а значит, и G_z^* коммутативны. Таким образом, если действия групп G и H на G_z^* определить как умножение, то G-пространство APL окажется ограничением на $Y \cong Z/H$ расслоенного пространства $(G_z^* \times V) / H \to G_z^* / H$, на котором действие группы G сохраняет V-проекцию. Поэтому второе утверждение следствия достаточно доказать для введенного расслоенного пространства.

По теореме о приводимости представления бикомпактной коммутативной группы векторное H-пространство V содержит одномерное, H-инвариантное подпространство, и если v — вектор из этого подпространства, то $hv = \chi(h)v$ для всех $h \in H$ и некоторого характера χ группы H. По теореме о продолжении характеров χ можно считать характером группы G_z^*, а тогда и группы G. Определим функцию $u: G_z^* \to V$ формулой $u(t) = \chi^{-1}(t)v$. Тогда $u(th) = h^{-1}u(t)$ для всех $t \in G_z^*$ и $h \in H$. Это означает (см. [5]), что формула $s(y) = (t, u(t))H$, где $y = tH \in G_z^*/H$, определяет сечение расслоенного пространства $(G_z^* \times V)/H \to G_z^*/H$. Так как $gs(y) = g(t, u(t))H = (gt, u(t))H = (gt, \chi(g)u(gt))H = \chi(g)s(gy)$ для всех $y \in G_z^*/H$ и $g \in G$, то определяемое сечением s тривиальное одномерное подрасслоение является G-инвариантным. Согласно предыдущему следствию это означает, что рассматриваемое расслоение распадается в прямую сумму таких подрасслоений. Существование в каждом из них сечения с требуемыми свойствами уже установлено.

Список литературы: 1. *Атья М.* Лекции по К-теории.— М., 1967.— 264 с. 2. *Бронштейн И. У.* Расширения минимальных групп преобразований.— Кишинев, 1975.— 312 с. 3. *Любарский М. Г.* О решениях линейных однородных систем дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Функцион. анализ и его прил.— 1977.— **11**, № 4.— С. 90—91. 4. *Любарский М. Г.* О существовании обобщенного базиса Флоке // Функц. анализ и его прил.— 1984.— **18**, № 3.— С. 88—89. 5. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства.— М., 1970.— 444 с. 6. *Келли Дж. Л.* Общая топология.— М., 1968.— 384 с.

Поступила в редколлегию 08.08.86