УДК 517.535

А. А. ГОЛЬДБЕРГ, М. Н. ШЕРЕМЕТА

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ НА ВСЮ ПЛОСКОСТЬ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ

1°. Пусть $0 < R \leqslant +\infty$, $A(R)$ — класс аналитических в круге $\{z : |z| < R\}$ функций

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \tag{1.1}$$

а (n_p) — возрастающая последовательность натуральных чисел, $n_0 = 0$. Предположим, что $n_{p+1} - n_p = o(\ln n_p)$, $p \to \infty$, а функция $f \in A(1)$ и все ее производные $f^{(n_p)}$ однолистны в $D = \{z : |z| < 1\}$. Тогда [1] f допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость до целой функции, которую обозначим также через f. В [1] доказано также существование последовательности (n_p) и функции $f \in A(1)$ таких, что все $f^{(n_p)}$ однолистны D, а f непродолжаема аналитически на C. Построенная в [1] последовательность (n_p) с таким свойством удовлетворяет условию $n_p \ln n_p = o(n_{p+1})$, $p \to \infty$.

Рассмотрим более общие классы аналитических в D функций. Из доказанных здесь результатов получим более сильные, чем в [1], утверждения и для однолистных функций. Отметим, что в [2] также усиливаются результаты [1], но в другом направлении, за исключением теоремы 3, которая содержится в наших результатах.

Через Λ обозначим класс числовых последовательностей $\lambda = (\lambda_n)$, $n \in N$, с $\lambda_n > 0$ и скажем, что $f \in A_\lambda(1)$, если $f \in A(1)$ и $|a_k| \leqslant \lambda_k |a_1|$ для всех $k \geqslant 2$. В частности, если $\lambda_k = k$, то классу $A_\lambda(1)$ в силу доказанной в [3] гипотезы Бибербаха принадлежат все однолистные в D функции.

Исследуем условия на $\lambda \in \Lambda$ и $f \in A_\lambda(1)$, при выполнении которых f допускает аналитическое продолжение на C. Прежде всего отметим, что если $\lambda_k^{1/k} \to 0$, $k \to \infty$, и $f \in A_\lambda(1)$, то $|a_k|^{1/k} \to 0$, $k \to \infty$, и, значит, $f \in A(\infty)$. Если же $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \lambda_k^{1/k} = \rho \in (0, 1)$ и $f \in A_\lambda(1)$, то f аналитически продолжается через $C = \{z : |z| = 1\}$, но может не продолжаться через $\{z : |z| = 1/\rho\}$. Например, в этом случае функция $f(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \lambda_k z^k$ принадлежит $A(1/\rho)$, но не принадлежит $A(\infty)$. Наконец, если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \lambda_k^{1/k} \geqslant 1$, то без дополнительных условий на f эту функцию, вообще говоря, нельзя аналитически продолжить через C. Такими дополнительными условиями у нас будут служить условия принадлежности классу $A_\lambda(1)$ каждой производной $f^{(n_p)}$, где (n_p) — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел (помимо этого, всюду ниже $n_0 = 0$). При этом последовательность (n_p) не может быть произвольной, на что указывает следующая

Теорема 1. *Для любых последовательностей $\lambda \in \Lambda$ такой, что $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \lambda_k^{1/k} \geqslant 1$, и (n_p), удовлетворяющей условию $n_{p+1}/n_p \to \infty$, $p \to \infty$, существует функция $f \in A(1)$ такая, что $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in Z_+$, а окружность C является естественной границей для f.*

С другой стороны, какова бы ни была последовательность $\lambda \in \Lambda$, из того, что $f^{(n)} \in A_\lambda(1)$ для всех $n \in Z_+$, следует, что $f \in A(\infty)$. Имеет место более сильное утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы для каждых последовательности $\lambda \in \Lambda$ и функции $f \in A(1)$ из условия $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in Z_+$ вытекало, что $f \in A(\infty)$, достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\, (n_{p+1} - n_p) < \infty, \tag{1.2}$$

и необходимо, чтобы

$$\underline{\lim_{p\to\infty}}\, (n_{p+1} - n_p) < \infty. \tag{1.3}$$

Следующая теорема значительно усиливает результаты из [1] для однолистных в D функций.

Теорема 3. *Для того чтобы для каждой последовательности $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяющей условию $\ln \lambda_k \leqslant O(k)$, $k \to \infty$, и каждой* *функции* $f \in A(1)$ *из условия* $f^{(n_p)} \in A(1)$ *для всех* $p \in \mathbf{Z}_+$ *вытекало, что* $f \in A(\infty)$, *достаточно, чтобы*

$$\lim_{p\to\infty} n_{p+1}/n_p = 1, \tag{1.4}$$

и необходимо, чтобы

$$\varliminf_{p\to\infty} n_{p+1}/n_p = 1. \tag{1.5}$$

2°. Доказательство теоремы 1. Прежде всего, докажем следующую простую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$ *и* $m > n$. *Тогда*

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} < \left(\frac{me}{n}\right)^n, \tag{2.1}$$

Действительно, используя формулу Стирлинга

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \exp\left\{\frac{\theta_n}{12n}\right\},\ 0 < \theta_n < 1,$$

нетрудно показать, что

$$C_m^n \leqslant \frac{m^m}{(m-n)^{m-n} n^n} \sqrt{\frac{m}{(m-n)\,n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{1}{12}\right\}.$$

Так как функция $x/(x-n)$ убывающая на $[n+1, +\infty)$, то $m/(m-n)\,n \leqslant (n+1)/n \leqslant 2$ и, значит,

$$C_m^n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left\{\frac{1}{12}\right\} \frac{m^m}{m^{m-n}\,(1-n/m)^{m-n} n^n} <$$

$$< \left(\frac{m}{n}\right)^n \left(1 - \frac{n}{m}\right)^{-(m-n)}. \tag{2.2}$$

Но функция $\psi(x) = -(x-n)\ln(1-n/x)$ возрастающая на $[n+1, \infty)$. Поэтому

$$\left(1 - \frac{n}{m}\right)^{-(m-n)} \leqslant \lim_{x\to+\infty} \exp\psi(x) = e^n,$$

и из (2.2) вытекает (2.1).

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Обозначим $s_k = \ln^+(1/\lambda_k)$. Так как $\varliminf_{k\to\infty} \lambda_k^{1/k} \geqslant 1$, то $0 \leqslant s_k/k \to 0$, $k \to \infty$. Поэтому существует выпуклая оболочка L множества $\{(0, s_k)\}_{k=2}^{\infty}$. Пусть $l(x) = \sup\{y : (x, y) \in L,\ x \geqslant 2\}$. Функция l неотрицательная, неубывающая и вогнутая на $[2, \infty]$. Положим $y_k = l(k)$. Тогда $y_{k+1} \geqslant y_k$, $y_k \geqslant s_k$, $\lambda_k \geqslant \exp(-y_k)$ для всех $k \geqslant 2$ и $0 \leqslant y_k/k \to 0$, $k \to \infty$.

Обозначим $\sigma_p = (n_p+1)/(n_{p+1}+1)$, $u_p = y_{n_{p+1}+1}/(n_{p+1}+1)$. Так как $n_p = O(n_{p+1})$ и $y_p = o(p)$ при $p \to \infty$, то $0 < q = \max\{\sigma_p : p \in \mathbf{Z}_+\} < 1$, $0 < Q = \max\{\sigma_p \ln(e/\sigma_p) + u_p : p \in \mathbf{Z}_+\} < \infty$. Выберем α, $0 < \alpha < 1$, такое, что $\alpha Q + q < 1$. Пусть $t_p = \sigma_p \ln(e/\sigma_p) + u_p + \sigma_p/\alpha$. Так как $t_p \to 0$, $p \to \infty$, то $0 < t_p \leqslant 1$ при $p \geqslant p_0$. Положим $\alpha_p = \alpha$ при $0 \leqslant p \leqslant p_0$ и $\alpha_{p+1} = t_p^{-1/2}$ при $p \geqslant p_0$. Учитывая, что при $p \geqslant p_0$

выполняется $\alpha_{p+1} \geqslant 1 > \alpha$, легко проверить, что при всех $p \in \mathbf{Z}_+$ справедливо неравенство

$$\alpha_{p+1}\{\sigma_p \ln(e/\sigma_p) + u_p\} + \alpha_{p+1}\sigma_p/\alpha_p \leqslant 1. \tag{2.3}$$

Пусть теперь

$$f_1(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^{n_p+1}, \ a_p = \exp\left(-\frac{n_p+1}{\alpha_p}\right). \tag{2.4}$$

Так как $\alpha_p \to \infty$, $p \to \infty$, то функция (2.4) принадлежит классу $A(1)$. Но $n_{p+1}/n_p \to \infty$ $(p \to \infty)$. Поэтому по теореме Адамара о лакунах [4, с. 65] окружность C является естественной границей для функции f_1. Нам осталось показать, что $f_1^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbf{Z}_+$. Поскольку

$$f_1^{(n_p)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n_{p+k}+1)!}{(n_{p+k}-n_p+1)!} a_{p+k} z^{n_{p+k}-n_p+1},$$

то нам нужно доказать, что

$$\frac{(n_{p+k}+1)!}{(n_{p+k}-n_p+1)!} a_{p+k} \leqslant \lambda_{n_{p+k}-n_p+1} (n_p+1)!\, a_p \tag{2.5}$$

для всех $k \in \mathbf{N}$ и $p \in \mathbf{Z}_+$. Взяв в лемме 1 $n = n_p + 1$ и $m = n_{p+k} + 1$, легко получим, что неравенство (2.5) выполняется, если

$$\left(\frac{n_{p+k}+1}{n_p+1} e\right)^{n_p+1} \leqslant \frac{a_p}{a_{p+k}} \lambda_{n_{p+k}-n_p+1} \tag{2.6}$$

для всех $k \in \mathbf{N}$ и $p \in \mathbf{Z}_+$. Так как $\lambda_k \geqslant e^{-y_k}$ и $y_{k+1} \geqslant y_k$ для всех $k \geqslant 2$, то неравенство (2.6) выполняется, если

$$(n_p+1)\ln\left(\frac{n_{p+k}+1}{n_p+1} e\right) + y_{n_{p+k}+1} + \frac{n_p+1}{\alpha_p} - \frac{n_{p+k}+1}{\alpha_{p+k}} \leqslant 0 \tag{2.7}$$

для всех $k \in \mathbf{N}$ и $p \in \mathbf{Z}_+$.

Покажем, что выражение стоящее в левой части неравенства (2.7), убывает с ростом k. Это равносильно тому, что

$$(n_p+1)\ln\frac{n_{p+k+1}+1}{n_{p+k}+1} + y_{n_{p+k+1}+1} - y_{n_{p+k}+1} + \\ + \frac{n_{p+k}+1}{\alpha_{p+k}} - \frac{n_{p+k+1}+1}{\alpha_{p+k+1}} < 0.$$

Так как $y_k \geqslant 0$ для всех $k \geqslant 2$, то последнее неравенство выполняется, если

$$(n_{p+k}+1)\ln\frac{n_{p+k+1}+1}{n_{p+k}+1} + y_{n_{p+k+1}+1} + \frac{n_{p+k}+1}{\alpha_{p+k}} - \frac{n_{p+k+1}+1}{\alpha_{p+k+1}} \leqslant 0.$$

Последнее же неравенство легко следует из (2.3).

Таким образом, неравенство (2.7) выполняется для всех $k \in \mathbf{N}$ и $p \in \mathbf{Z}_+$, если оно выполняется для $k = 1$ и $p \in \mathbf{Z}_+$, т. е. если выполнено неравенство (2.3), справедливость которого мы доказали. Нужная нам функция построена, и тем самым теорема 1 доказана.

3°. Доказательство теоремы 2. Сначала докажем такую лемму.

Лемма 2. *Пусть $\lambda \in \Lambda$ и $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbf{Z}_+$. Тогда*

$$|a_{n_p+m}| \leqslant |a_1| \frac{m!\,\lambda_m}{(n_p+m)!} \prod_{j=1}^{p} (n_j - n_{j-1} + 1)! \prod_{j=1}^{p} \lambda_{n_j - n_{j-1}+1} \quad (3.1)$$

для всех $p \in \mathbf{N}$ и m, $1 \leqslant m \leqslant n_{p+1} - n_p + 1$.

Действительно, поскольку

$$f^{(n_p)}(z) = n_p!\, a_{n_p} + \frac{(n_p+1)!}{1!} a_{n_p+1} z + \cdots + \frac{k!}{(k-n_p)!} a_k z^{k-n_p} + \cdots$$

и $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbf{Z}_+$, то

$$\frac{k!}{(k-n_p)!} |a_k| \leqslant \lambda_{k-p_p} (n_p+1)!\, |a_{n_p+1}| \quad (3.2)$$

для всех $p \in \mathbf{N}$ и $k \geqslant n_p + 1$. Положив в (3.2) $k = n_{p+1} + 1$, имеем

$$\frac{(n_{p+1}+1)!}{(n_{p+1} - n_p + 1)!} |a_{n_{p+1}+1}| \leqslant (n_p + 1)!\, |a_{n_p+1}| \lambda_{n_{p+1} - n_p + 1},$$

откуда

$$|a_{n_{p+1}+1}| \leqslant \frac{(n_p+1)!\,(n_{p+1} - n_p + 1)!}{(n_{p+1} + 1)} |a_{n_p+1}| \lambda_{n_{p+1} - n_p + 1}.$$

Из последнего неравенства легко следует, что

$$|a_{n_p+1}| \leqslant \frac{|a_1|}{(n_p+1)!} \prod_{j=1}^{p} (n_j - n_{j-1} + 1)! \prod_{j=1}^{p} \lambda_{n_j - n_{j-1} + 1}. \quad (3.3)$$

Если же в (3.2) возьмем $k = n_p + m$, то получим неравенство

$$|a_{n_p+m}| \leqslant \frac{(n_p+1)!\, m!}{(n_p+m)!} \lambda_m |a_{n_p+1}|. \quad (3.4)$$

Объединяя неравенства (3.3) и (3.4), получаем неравенство (3.1).

Докажем теорему 2. Если выполнено условие (1.2), т. е. $n_{p+1} - n_p + 1 \leqslant l < \infty$ для всех $p \in \mathbf{Z}_+$, то

$$|a_1|\, m!\, \lambda_m \prod_{j=1}^{p} (n_j - n_{j-1} + 1)! \prod_{j=1}^{p} \lambda_{n_j - n_{j-1} + 1} \leqslant ab^p \leqslant ab^{n_p+m}$$

для всех $p \in N$ и m, $1 \leqslant m \leqslant n_{p+1} - n_p + 1$, где a и b — положительные постоянные, не зависящие от p и m. Поэтому из (3.1) имеем

$$\frac{1}{n_p + m} \ln \frac{1}{|a_{n_p+m}|} \geqslant \ln (n_p + m) + O(1) \to +\infty, \ p \to \infty,$$

т. е. $f \in A(\infty)$. Достаточность условия (1.2) доказана.

Докажем необходимость условия (1.3). Предположим от противного, что $n_{p+1} - n_p \to +\infty$, $p \to \infty$. Тогда множество $\{n_{p+1} - n_p + 1\}$ неограничено. Если $k \in \{n_{p+1} - n_p + 1\}$, через J_k обозначим множество $\{j : n_{p_j+1} - n_{p_j} + 1 = k\}$. Так как $n_{p+1} - n_p \to +\infty$, $p \to \infty$, то множество J_k конечно. Положим

$$\lambda_k^* = \max \left\{ (n_{p_j} + 1) \ln \left(\frac{n_{p_{j+1}} + 1}{n_{p_j} + 1} e \right) : j \in J_k \right\}.$$

Тогда для всех $p \in Z_+$ справедливо неравенство

$$(n_p+1)\ln\left(\frac{n_{p+1}+1}{n_p+1}e\right) \leqslant \lambda^*_{n_{p+1}-n_p+1}. \tag{3.5}$$

Если же $k \in \mathbf{N} \setminus \{n_{p+1}-n_p+1\}$, полагаем $\lambda^*_k = 1$. Выберем положительную непрерывно дифференцируемую на $[1, \infty)$ функцию γ такую, что $\gamma'(x) \geqslant 1$ для всех $x \in [1, \infty)$ и $\gamma(k) \geqslant \lambda^*_k$ для всех $k \in N$, и положим $\lambda_k = \exp \gamma(k)$.

Пусть

$$f_2(z) = \sum_{p=0}^{\infty} z^{n_p+1}. \tag{3.6}$$

Поскольку $n_{p+1}-n_p \to +\infty$, $p \to \infty$, по теореме Фабри [4, с. 80, 89] окружность C является естественной границей для функции (3.6). Чтобы доказать, что $f_2^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in Z_+$, в силу (2.6) нам достаточно показать, что

$$\left(\frac{n_{p+k}+1}{n_p+1}e\right)^{n_p+1} \leqslant \lambda_{n_{p+k}-n_p+1}$$

для всех $p \in Z_+$ и $k \in N$, т. е. что

$$(n_p+1)\ln\left(\frac{n_{p+k}+1}{n_p+1}e\right) \leqslant \gamma(n_{p+k}-n_p+1). \tag{3.7}$$

Так как $n_{p+k}+1 \geqslant n_p+2$ $(k \in N)$ и $\gamma'(x) \geqslant 1$ $(x \geqslant 1)$, то функция $\psi_1(x) = (n_p+1)\ln\dfrac{xe}{n_p+1} - \gamma(x-n_p)$ — убывающая на $[n_p+1, \infty)$. Поэтому (3.7) выполняется, если

$$(n_p+1)\ln\left(\frac{n_{p+1}+1}{n_p+1}e\right) \leqslant \gamma(n_{p+1}-n_p+1).$$

Так как $\gamma(k) \geqslant \lambda^*_k$, последнее неравенство вытекает из (3.5). Таким образом, существуют последовательность $\lambda \in \Lambda$ и функция $f_2 \in A(1)$ такие, что все $f_2^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ и $f_2 \notin A(\infty)$, что невозможно. Теорема 2 доказана.

4°. Доказательство теоремы 3. Достаточность условия (1.4) в теореме 3 мы получим из следующего более сильного утверждения.

Теорема 4. *Пусть* $\lambda \in \Lambda$ *и* $\ln \lambda_k \leqslant O(k)$, $k \to \infty$, *а*

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{n_p} \sum_{j=1}^{p} (n_j - n_{j-1}) \ln\left(\frac{n_j}{n_{j-1}} - 1\right) = -\infty. \tag{4.1}$$

Если $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ *для всех* $p \in Z_+$, *то* $f \in A(\infty)$.

Доказательство. Из условия $\ln \lambda_k \leqslant O(k)$, $k \to \infty$, вытекает существование числа $B > 0$ такого, что $\ln \lambda_{m+1} \leqslant Bm$ для всех $m \in N$ и

$$\sum_{j=1}^{p} \ln \lambda_{n_j - n_{j-1}+1} \leqslant B \sum_{j=1}^{p} (n_j - n_{j-1}) = Bn_p \quad (p \in \mathbf{N}).$$

Далее, используя неравенство $\ln(x+1) \leqslant \ln x + \ln 2$ при $x \geqslant 1$, имеем

$$\sum_{j=1}^{p} (n_j - n_{j-1} + 1) \ln (n_j - n_{j-1} + 1) \leqslant \sum_{j=1}^{p} (n_j - n_{j-1} + 1)\{\ln (n_j - n_{j-1}) + \ln 2\} = \sum_{j=1}^{p} (n_j - n_{j-1}) \ln (n_j - n_{j-1}) + (n_p + p) \ln 2 + \sum_{j=1}^{p} \ln (n_j - n_{j-1}).$$

Поэтому из неравенства (3.1), используя формулу Стирлинга, для всех $p \in \mathbf{N}$ и m, $1 \leqslant m \leqslant n_{p+1} - n_p + 1$, имеем

$$\frac{1}{n_p + m} \ln \frac{1}{|a_{n_p+m}|} \geqslant \frac{1}{n_p + m} \Big\{\ln (n_p + m)! - \ln m! - \ln |a_1| - \ln \lambda_m - \sum_{j=1}^{p} \ln (n_j - n_{j-1} + 1)! - \sum_{j=1}^{p} \ln \lambda_{n_j - n_{j-1}+1}\Big\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n_p + m}\Big\{(n_p + m) \ln (n_p + m) - \left(m + \frac{1}{2}\right) \ln m - (n_p + m) + m - 1 - Bm - \sum_{j=1}^{p}\left(n_j - n_{j-1} + \frac{3}{2}\right) \ln (n_j - n_{j-1} + 1) + \sum_{j=1}^{p} (n_j - n_{j-1} + 1) + O(p) - Bn_p\Big\} \geqslant \frac{1}{n_p + m}\Big\{(n_p + m) \ln (n_p + m) - m \ln m + O(n_p + m) - \sum_{j=1}^{p} (n_j - n_{j-1}) \ln (n_j - n_{j-1}) + \sum_{j=1}^{p} (n_j - n_{j-1} + 1) - \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{p} \ln (n_j - n_{j-1} + 1)\Big\} \geqslant \frac{(n_p + m) \ln (n_p + m) - m \ln m - C_p}{n_p + m} + O(1), \quad p \to \infty, \tag{4.2}$$

где

$$C_p = \sum_{j=1}^{p} (n_j - n_{j-1}) \ln (n_j - n_{j-1}).$$

Обозначим

$$\Phi(x) = \frac{(n_p + x) \ln (n_p + x) - x \ln x - C_p}{n_p + x}, \quad x \geqslant 1.$$

Легко видеть, что функция Φ имеет на $[1, \infty]$ единственную точку экстремума $x_* = \exp\{C_p/n_p\}$, являющуюся точкой максимума. Поэтому

$$\min\{\Phi(x): 1 \leqslant x \leqslant n_{p+1}-n_p+1\} = \min\{\Phi(1),\ \Phi(n_{p+1}-n_p+1)\},$$

и из (4.2) для всех m, $1 \leqslant m \leqslant n_{p+1}-n_p+1$, получаем неравенство

$$\frac{1}{n_p+m}\ln\frac{1}{|a_{n_p+m}|} \geqslant \min\left\{\frac{(n_p+1)\ln(n_p+1)-C_p}{n_p+1},\right.$$
$$\left.\frac{(n_{p+1}+1)\ln(n_{p+1}+1)-(n_{p+1}-n_p+1)\ln(n_{p+1}-n_p+1)-C_p}{n_{p+1}+1}\right\}+O(1) \geqslant$$
$$\geqslant \min\{\ln n_p - C_p/n_p,\ \ln n_{p+1} - C_{p+1}/n_{p+1}\} + O(1),\ p\to\infty. \quad (4.3)$$

Далее,

$$\sum_{j=2}^{p}(n_j-n_{j-1})\ln n_{j-1} \leqslant \sum_{j=2}^{p}\int_{n_{j-1}}^{n_j}\ln x dx = \int_{n_1}^{n_p}\ln x dx \leqslant$$
$$\leqslant n_p\ln n_p - n_1\ln n_1 \leqslant n_p \ln n_p.$$

Поэтому в силу условия (4.1) выполняется соотношение

$$\ln n_p - \frac{1}{n_p}\sum_{j=1}^{p}(n_j-n_{j-1})\ln(n_j-n_{j-1}) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{n_p}\sum_{j=2}^{p}(n_j-n_{j-1})(\ln n_{j-1} - \ln(n_j-n_{j-1})) =$$
$$= -\frac{1}{n_p}\sum_{j=2}^{p}(n_j-n_{j-1})\ln\left(\frac{n_j}{n_{j-1}}-1\right) \to +\infty,\ p\to\infty. \quad (4.4)$$

Из (4.3) и (4.4) вытекает, что $\frac{1}{k}\ln\frac{1}{|a_k|}\to+\infty$, $k\to\infty$, т. е. $f\in A(\infty)$, и теорема 4 доказана.

Достаточность условия (1.4) в теореме 3 вытекает из теоремы 4 в силу известной теоремы Штольца [5, п. 33].

Докажем необходимость условия (1.5). Допустим, что (1.5) не выполняется. Тогда можем считать, что $(n_{p+1}+1)/(n_p+1)\geqslant q>1$, $p\in\mathbf{Z}_+$. Положим

$$\lambda_k = \exp\left\{\frac{\ln q+1}{q-1}(k-1)\right\},\ k\in\mathbf{N},$$

и рассмотрим функцию

$$f_3(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^{n_p+1},\ a_p = \exp\{-(n_p+1)q^{-p}\}. \quad (4.5)$$

Так как $q>1$, то $f_3\in A(1)$ и по теореме Адамара о лакунах f_3 непродолжима на $\boldsymbol{C}$. Покажем, что все $f_3^{(n_p)}\in A_\lambda(1)$. Как при доказательстве теоремы 1, достаточно доказать неравенство (2.6) для всех $k\in\mathbf{N}$ и $p\in\mathbf{Z}_+$, т. е. в силу выбора последовательности λ достаточно показать, что имеет место неравенство

$$\left(\frac{n_{p+k}+1}{n_p+1}e\right)^{n_p+1} a_{p+k} \leqslant a_p \exp\left\{\frac{\ln q+1}{q-1}(n_{p+k}-n_p)\right\},$$

которое равносильно неравенству

$$\frac{\ln q+1}{q-1}\left(\frac{n_{p+k}+1}{n_p+1}-1\right)+\frac{n_{p+k}+1}{(n_p+1)\,q^{p+k}}-\ln\frac{n_{p+k}+1}{n_p+1}\geqslant 1+q^{-p} \quad (4.6)$$

для всех $k\in\mathbf{N}$ и $p\in\mathbf{Z}_+$. Так как $(n_{p+k}+1)/(n_p+1)\geqslant q^k$, $k\in\mathbf{N}$, и функция

$$\psi_2(x)=\frac{\ln q+1}{q-1}(x-1)+\frac{x}{q^{p+k}}-\ln x$$

возрастающая на $[q,\ \infty)$, то неравенство (4.6) выполняется, если

$$\frac{\ln q+1}{q-1}(q^k-1)+\frac{q^k}{q^{k+p}}-k\ln q\geqslant 1+\frac{1}{q^p}.$$

Последнее неравенство очевидно, и, таким образом, мы приходим к противоречию. Теорема 3 доказана.

5°. *Замечания.* 1. В теореме 4 условие (4.1) можно заменить более слабым условием

$$\lim_{p\to\infty}\left\{\ln n_p-\frac{1}{n_p}\sum_{j=1}^{p}(n_j-n_{j-1})\ln(n_j-n_{j-1})\right\}=+\infty, \qquad (5.1)$$

как видно из доказательства теоремы 4 (см. (4.4)). Если $n_{p+1}=O(n_p)$, $p\to\infty$, то легко показать, что условия (4.1) и (5.1) равносильны.

2. В связи с теоремой 1 возникает естественный вопрос: не будет ли условие (1.4) или более слабое условие $n_{p+1}=O(n_p)$, $p\to\infty$, в условиях теоремы 3 необходимым, помимо (1.5). Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующий

Пример. Обозначим $m_k=2^{2^k}$, и пусть $\{n_j\}=\mathbf{N}\diagdown\bigcup\limits_{k=2}^{\infty}(m_k,\ km_k)$. Если теперь $km_k\leqslant n_p\leqslant m_{k+1}$, то

$$\ln n_p-\frac{1}{n_p}\sum_{j=1}^{p}(n_j-n_{j-1})\ln(n_j-n_{j-1})=$$

$$=\ln n_p-\frac{1}{n_p}\sum_{j=2}^{k}m_j(j-1)\ln\{m_j(j-1)\}\geqslant\ln(km_k)-$$

$$-\frac{1}{km_k}\left\{m_k(k-1)\ln(m_k(k-1))+\sum_{j=2}^{k-1}m_j(j-1)\ln(m_j(j-1))\right\}=$$

$$=\ln\frac{k}{k-1}+2^k\frac{\ln 2}{k}+\frac{1}{k}\ln(k-1)-$$

$$-\frac{1}{k}\sum_{j=2}^{k-1}\frac{j-1}{2^{2^k-2^j}}\left(2^j\ln 2+\ln(j-1)\right)\geqslant 2^k\frac{\ln 2}{k}+o(1)-$$

$$-\frac{1}{m_{k-1}}\sum_{j=2}^{k-1}2^{j+1}\ln 2=2^k\frac{\ln 2}{k}+o(1)\to+\infty,\ k\to\infty.$$

Поэтому выполняется (5.1) и из предыдущего замечания следует что $f \in A(\infty)$. В то же время для последовательности (n_p) выполняется соотношение $\overline{\lim_{p\to\infty}}\, n_{p+1}/n_p = \infty$.

3. Остается открытым вопрос, можно ли в условиях теоремы заменить нижний предел верхним.

Список литературы: *1. Shah S. M., Trimble S. Y.* Univalent functions with univalent derivatives, III // J. Math. Mech. 1969/70. **19.** P. 451—460. 2. *Кирьяцкий Е. Г.* Об одном признаке целой функции // Лит. мат. сб.— 1989. **29**, № 3. С. 485—491. 3. *Branges L. de.* A proof of the Bieberbach conjecture // Acta math. 1985. **154**, № 1, 2. P. 137—152. 4. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М., 1967. 240 с. 5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. М., 1969. 610 с.

Поступила в редколлегию 17.03.90