УДК 517.53

А. А. ГОЛЬДБЕРГ, О. П. СОКОЛОВСКАЯ

О РОСТЕ ПО ЛУЧУ СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ С МАССОЙ, РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НА ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПОЛУОСИ

Пусть $U(z)$ — субгармоническая в $\boldsymbol{C}$ функция с массой Рисса μ, распределенной на отрицательной полуоси без некоторой окрестности нуля. Не уменьшая общности, будем считать дополнительно, что $U(0)=0$. Считаем известными основные понятия и стандартные обозначения теории субгармонических функций [1]. Отметим лишь обозначение $A(r, U)=\inf\{U(z): |z|=r\}$, ρ и λ — порядок и нижний порядок функции U. Для измеримого множества $E\subset \boldsymbol{R}_+$ верхняя и нижняя логарифмическая плотность $\overline{\Lambda}(E)$ и $\underline{\Lambda}(E)$ определяются соответственно как верхний и нижний пределы при $r\to\infty$ выражения $(\ln r)^{-1}\int\limits_{E\bigcap(1,r)} d\ln t$.

Обозначим $\alpha(\sigma)=(\pi\sigma)^{-1}\sin\pi\sigma$.

Для $0<\sigma<1$, $|\theta|\leqslant\pi$, определим следующие подмножества $\boldsymbol{R}_+$:

$$E_1(\sigma, U)=\{r: U(re^{i\theta})-\cos\theta\sigma B(r, U)>0\};$$
$$E_2(\sigma, U)=\{r: \cos\theta\sigma A(r, U)-\cos\pi\sigma U(re^{i\theta})>0\};$$
$$E_3(\sigma, U)=\{r: \cos\theta\sigma N(r, U)-\alpha(\sigma) U(re^{i\theta})>0\}.$$

Здесь будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если* $\rho<\sigma<1$, $|\theta|\leqslant\pi$, *то* $(i=1)$

$$\underline{\Lambda}(E_i(\sigma, U))\geqslant 1-\rho/\sigma. \tag{1}$$

Если $\lambda<\sigma<1$, $|\theta|\leqslant\pi$, *то* $(i=1)$

$$\overline{\Lambda}(E_i(\sigma, U))\geqslant 1-\lambda/\sigma. \tag{2}$$

Теорема 2. *Если* $\rho<\sigma<1/2$, $|\theta|\leqslant\pi$, *то* (1) *выполняется при* $i=2$. *Если* $\lambda<\sigma<1/2$, $|\theta|\leqslant\pi$, *то* (2) *выполняется при* $i=2$.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, приведем такие леммы. Обозначим $\beta(x, \theta)=|1-xe^{i\theta}|^2=1-2x\cos\theta+x^2$.

Лемма 1. *Пусть* $F_\sigma(\theta)=\int\limits_0^1(\cos\theta-t)t^{-\sigma}/\beta(t, \theta)\,d\theta$, $\quad 0\leqslant\sigma<1$, $\pi/3\leqslant\theta<\pi/2$. *Уравнение* $F_\sigma(\theta)=0$ **(3)** *имеет единственный корень* θ_σ, *причем* $\theta_0=\pi/3$, θ_σ — *непрерывная возрастающая функция от* $\sigma\in[0, 1)$ *и* $\theta_\sigma\to\pi/2$ *при* $\sigma\to 1$.

Лемма 2. *Пусть* $0<\sigma\leqslant 1$, $\theta'_\sigma=\pi-\sigma^{-1}\arccos\alpha(\sigma)$. *Тогда* θ'_σ — *непрерывная возрастающая функция от* $\sigma\in(0, 1]$, *причем* $\theta'_0=\theta_{0+}=\pi(1-1/\sqrt{3})$, $\theta'_1=\pi/2$.

Лемма 3. *Пусть* $0<\sigma<1$, θ_σ *и* θ'_0 *определены соответственно в леммах 1 и 2. Тогда* $\theta'_\sigma>\theta_\sigma$ **(4)**.

Чтобы не прерывать изложения, доказательство этих лемм будет приведено в пункте 3°.

Теорема 3. *Если* $\rho<\sigma<1$, $|\theta|\leqslant\pi/2$, *то* (1) *выполняется при* $i=3$. *Если* $\lambda<\sigma<1$, $|\theta|\leqslant\pi/2$, *то* (2) *выполняется при* $i=3$. *Если* $\rho<\sigma<1$, $|\theta-\pi|\leqslant\theta_\sigma$, *то*

$$\overline{\Lambda}(E_3(\sigma, U))\leqslant\rho/\sigma. \tag{5}$$

Если $\lambda<\sigma<1$, $|\theta-\pi|\leqslant\theta_\sigma$, *то*

$$\underline{\Lambda}(E_3(\sigma, U))\leqslant\lambda/\sigma. \tag{6}$$

Из [2] следует, что при $\rho<\sigma<1$ множество $E_1(\sigma, U)$ и при $\rho<\sigma<1/2$ множество $E_2(\sigma, U)$ неограниченные. Из [3] следует, что при $\rho<\sigma<1$ множество $E_3(\sigma, U)$ при $|\theta|\leqslant\pi/2$ неограниченное.

Соотношение (1) при $i=3$, вообще говоря, неверно при $\pi/2<|\theta|\leqslant\pi$, так как для такого θ и σ, достаточно близкого к 1, выполняется $|\theta-\pi|\leqslant\theta_\sigma$, а значит, справедливо (5), что возможно лишь при $\sigma<2\rho$. Аналогично рассуждаем относительно (2) при $i=3$. Вероятно, ограничение $|\theta-\pi|\leqslant\theta_\sigma$, при котором доказаны (5), (6), может быть ослаблено, однако при $\theta=\pi/2$ эти соотношения могут быть неверны при любых ρ, λ, σ. Рассмотрим субгармоническую в $\boldsymbol{C}$

функцию $U(re^{i\theta}) = r^\rho \cos\rho\theta$, $|\theta| \leqslant \pi$, $0 < \rho < 1$. Для нее $N(r) = r^\rho \alpha(\rho)$, $A(r) = r^\rho \cos\pi\rho$, $B(r) = r^\rho$. Масса Рисса для U распределена на отрицательной полуоси; можно добиться того, чтобы при $|z| < 1$ функция $U(z)$ была гармонической, заменив ее в круге гармонической мажорантой. Для наших целей это не имеет значения, и для простоты записей мы сейчас не будем изменять определение U в $\{z : |z| \leqslant 1\}$. Для нашей функции U имеем $\lambda = \rho < \sigma < 1$, $\cos(\pi\sigma/2) \times N(r) - \alpha(\sigma) U(ir) = r^\rho \{\cos(\pi\sigma/2)\alpha(\rho) - \cos(\pi\rho/2)\alpha(\sigma)\} > 0$ для всех r, т. е. $\underline{\Lambda}(E_3(\sigma, U)) = \overline{\Lambda}(E_3(\sigma, U)) = 1$. Используя результат Хеймана [4], можно показать (ср. [5]), что неравенства (1), (2), (5), (6) во всех трех теоремах не могут быть уточнены.

1°. Введем вспомогательные функции ($|\theta| \leqslant \pi$, $0 < \sigma < 1$):

$$\psi_1(x) = \ln|1 + xe^{i\theta}| - \cos\pi\sigma \ln(1 + x);$$
$$\psi_2(x) = \cos\theta\sigma \ln|1 - x| - \cos\pi\sigma \ln|1 + xe^{i\theta}|;$$
$$\psi_3(x) = \cos\theta\sigma \ln^+ x - \alpha(\sigma) \ln|1 + xe^{i\theta}|;$$
$$\psi_4(x) = \ln|1 - xe^{i\theta}| - \cos\sigma(\pi - |\theta|)\{\alpha(\sigma)\}^{-1} \ln^+ x.$$

Заметим, что функции ψ_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ удовлетворяют условиям леммы 1 из [5] или [6], а значит, $\Phi_i'(r) \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ при $r \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, где $\Phi_i(r) = r^\sigma \int\limits_r^\infty \psi_i(t) t^{-1-\sigma} dt$.

Докажем две леммы.

Лемма 4. *Пусть* $0 < \sigma < 1$, $|\theta| \leqslant \theta_\sigma$, *где* θ_σ, $0 < \theta_\sigma < \pi/2$, — *корень уравнения* (3). *Тогда* $\Phi_4'(r) \geqslant 0$, $r \in (0\ \infty)$.

Доказательство. Очевидно, можно ограничиться случаем, когда $0 \leqslant \theta < \pi/2$. Заметим сразу, что $\psi_4(r) = o(r^\sigma)$ при $r \to \infty$, $r \to 0$, $0 < \sigma < 1$, интеграл $\int\limits_0^\infty \psi_4(t) t^{-1-\sigma} dt$ сходится и равен нулю. Исследование знака производной функции $\psi_4(r)$ показывает, что $\psi_4'(r) < 0$ при $r \in (0, \cos\theta)$; $\psi_4'(r) > 0$ при $r \in (\cos\theta, 1)$, а при $r \in (1, \infty)$ имеем $\operatorname{sgn}\psi_4'(r) = \operatorname{sgn} g(r)$, где $g(r) = (1 - (\cos\varphi)/\alpha(\sigma)) r^2 + \cos\theta(2(\cos\varphi)/\alpha(\sigma) - 1) r - (\cos\varphi)/\alpha(\sigma)$, $\varphi = \sigma(\pi - \theta)$. Пусть $(\cos\varphi)/\alpha(\sigma) < 1$, т. е. $0 \leqslant \theta < \theta_\sigma'$ **(7).** Тогда $D = 1 - \sin^2\theta(2(\cos\varphi)/\alpha(\sigma) - 1)^2 \geqslant 1 - \sin^2\theta > 0$. Легко видеть, что меньший корень $g(r)$ отрицательный. Если больший корень $r_0 < 1$, то $g(r) > 0$ при $r > 1$. Тогда $\psi_4'(r) < 0$ при $r \in (0, \cos\theta)$ и $\psi_4'(r) > 0$ при $r \in (\cos\theta, \infty)$. Пусть $\Psi_4(r) = r^{1-\sigma} \times \Phi_4'(r) = \sigma \int\limits_r^\infty \psi_4(t) t^{-1-\sigma} dt - \psi_4(r) r^{-\sigma}$. Учитывая, что $\Psi_4'(r) = -\psi_4'(r) r^{-\sigma}$, $\Psi_4(0) = \Psi_4(\infty) = 0$, получим $\Phi_4'(r) = r^{\sigma-1}\Psi_4(r) > 0$ при $0 < r < \infty$. Если же $r_0 > 1$, то $\psi_4'(r) < 0$ при $r \in (0, \cos\theta) \cup (1, r_0)$ и $\psi_4'(r) > 0$ при $r \in (\cos\theta, 1) \cup (r_0, \infty)$. Чтобы показать, что $\Psi_4(r) \geqslant 0$ при $r \in (0, \infty)$, а значит, и $\Phi_4'(r) \geqslant 0$ при $0 < r < \infty$, достаточно показать, что $\Psi_4(1) \geqslant 0$. Запишем $\Psi_4(1) = \sigma \int\limits_1^\infty \{\ln|1 - te^{i\theta}| - (\cos\varphi)/\alpha(\sigma) \times$

$\times \ln^+ t\} t^{-1-\sigma} dt - \ln|1-e^{i\theta}| = -\sigma \int\limits_0^1 \ln|1-te^{i\theta}| t^{-1-\sigma} dt - \ln|1-e^{i\theta}| = F_\sigma(\theta)$, где $F_\sigma(\theta)$ определено в лемме 1. Если $|1-e^{i\theta}| \leqslant 1$, $|1-re^{i\theta}| \leqslant 1$, $r < 1$, то $\Psi_4(1) \geqslant 0$. Неравенство $|1-e^{i\theta}| \leqslant 1$ выполняется при $|\theta| \leqslant \pi/3$. Если $|\theta| \leqslant \pi/3$ и $r < 1$, то $\beta(r, \theta) \leqslant 1 - r + r^2 < 1$. Поэтому при $|\theta| \leqslant \pi/3$ имеем $\Psi_4(1) > 0$. Так как $\Psi_4(1) = F_\sigma(\theta)$, то $\Psi_4(1) \geqslant 0$ при $0 < \theta \leqslant \theta_\sigma$. Из (7) и леммы 3 следует утверждение леммы 4.

Лемма 5. *Пусть* $0 < \xi < R \leqslant \infty$;

$$H_R(\xi) = \int\limits_0^R \ln(1 + \xi/r)\, dn(r); \quad \alpha_R(z) = \int\limits_0^R \ln|1 + z/r|\, dn(r).$$

При $0 < \sigma < 1$, $|\theta| \leqslant \pi$ *справедливо неравенство*

$$c_{11} \xi^{-\sigma} H_R(\xi) \leqslant \int\limits_\xi^\infty \{\alpha_R(re^{i\theta}) - \cos\theta\sigma B(r, \alpha_R)\} r^{-1-\sigma} dr \leqslant c_{21} \xi^{-\sigma} H_R(\xi).$$

При $0 < \sigma < 1/2$, $|\theta| \leqslant \pi$ *справедливо неравенство*

$$c_{12} \xi^{-\sigma} H_R(\xi) \leqslant \int\limits_\xi^\infty \{\cos\theta\sigma A(r, \alpha_R) - \cos\pi\sigma\alpha_R(re^{i\theta})\} r^{-1-\sigma} dr \leqslant c_{22} \xi^{-\sigma} H_R(\xi).$$

При $0 < \sigma < 1$, $|\theta| \leqslant \pi/2$ *справедливо неравенство*

$$c_{13} \xi^{-\sigma} H_R(\xi) \leqslant \int\limits_\xi^\infty \{\cos\theta\sigma N_R(r) - \alpha(\sigma)\alpha_R(re^{i\theta})\} r^{-1-\sigma} dr \leqslant c_{23} \xi^{-\sigma} H_R(\xi),$$

где $N_R(r) = \int\limits_0^r n_R(t) t^{-1} dt$, $n_R(r) = n(r)$ *при* $0 \leqslant r < R$ *и* $n_R(r) = n(R)$ *при* $R \leqslant r < \infty$, c_{1j}, c_{2j} $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ — *постоянные, зависящие лишь от* σ.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3 из [5] или доказательству леммы 2 из [6].

2°. Доказательства теорем 1—3 дословно повторяют доказательство теоремы 1 в [5, 6]. Новые моменты возникают лишь при доказательстве (5), (6). По техническим соображениям в этом случае удобнее повернуть плоскость и считать, что массы Рисса распределены на положительной полуоси и $|\theta| \leqslant \theta_\sigma$. Введем $E_4(\sigma, U) = \boldsymbol{R}_+ \setminus E_3(\sigma, U) = \{r : U(re^{i\theta}) - \{\alpha(\sigma)\}^{-1} \cos\sigma(\pi - |\theta|) N(r) > 0\}$. Тогда (5) и (6) равносильны соответственно неравенствам (1) и (2) для $i = 4$, которые доказываются, как (1) и (2) для $i = 1, 2, 3$, лишь вместо леммы 3 из [5] или леммы 2 из [6], используем лемму 5 из настоящей статьи.

Этим же методом можно доказать и следующие теоремы.

Пусть $U(z)=\int\limits_0^\infty \{\ln|1+z/t|+\mathrm{Re}(-z/t+z^2/(2t^2)-\cdots+(-1)^p\times$ $\times z^p/(p\,t^p))\}\,dn(t)$ — канонический интеграл рода p для субгармонической функции. Для U, $p<\sigma<p+1$ и $\theta\,(|\theta|\leqslant\pi)$ определим множества:

$$E_5(\sigma, U)=\{r: U(re^{i\theta})-\pi\cos\theta\sigma\,\mathrm{cosec}\,\pi\sigma\, n(r)>0\};$$
$$E_6(\sigma, U)=\{r: U(-r)-\pi\sigma\,\mathrm{ctg}\,\pi\sigma\, N(r)>0\}.$$

Теорема 4. *Если* $\rho<\sigma<p+1$ и θ, $|\theta|\leqslant\pi$, *удовлетворяет условию*

$$\cos\left(p+\frac{1+(-1)^p}{2}\right)\theta<0,\quad \cos\left(p+\frac{1-(-1)^p}{2}\right)\theta>0, \tag{8}$$
$$\cos(n+{}^1/_2)\,\theta\cos\theta\,\sigma\leqslant 0.$$

то (1) *справедливо при* $i=5$. *Если* $p<\lambda<\sigma<p+1$ *и* θ *удовлетворяет* (8), *то* (2) *справедливо при* $i=5$.

Теорема 5. *Если* $p+1/2<\rho<\sigma<p+1$, *то* (1) *выполняется при* $i=6$. *Если* $p+1/2<\lambda<\sigma<p+1$, *то* (2) *выполняется при* $i=6$.

Соотношения (1) и (2) для $i=6$ останутся справедливыми соответственно при $p<\rho<\sigma<p+1/2$ и $p<\lambda<\sigma<p+1/2$, если $\pi\sigma\,\mathrm{ctg}\,\pi\sigma\leqslant(p+1)^{p+1}p^{-p}$.

3°. Доказательство леммы 1.

Из известных теорем анализа следует, что $F_\sigma(\theta)$ — непрерывная функция от $(\theta,\sigma)\in(0,\pi/2)\times[0,1)$ и имеет непрерывные частные производные. Покажем монотонность θ_σ как функции от $\sigma\in[0,1)$. Так как $\frac{\partial}{\partial\theta}F_\sigma(\theta)=-\int\limits_0^1(1-t^2)\,t^{-\sigma}\sin\theta/\beta^2(t,\theta)\,dt<0$, то $F_\sigma(\theta)$ — убывающая функция по $\theta\in(0,\pi/2]$. Очевидно, $F_\sigma(\theta)\to+\infty$ при $\theta\to 0+$, $F_\sigma(\pi/2)<0$. Поэтому существует единственный корень θ_σ на $(0,\pi/2)$ уравнения (3). В то же время, поскольку $F_\sigma(\theta_\sigma)=0$, то

$$\int\limits_0^{\cos\theta_\sigma} t^{-\sigma}(\cos\theta_\sigma-t)/\beta(t,\theta_\sigma)\,dt=\int\limits_{\cos\theta_\sigma}^1 t^{-\sigma}(t-\cos\theta_\sigma)/\beta(t,\theta_\sigma)\,dt. \tag{9}$$

Пусть $\theta_\sigma=\theta^*$, тогда $\frac{\partial}{\partial\sigma}F_\sigma(\theta^*)=\int\limits_0^{\cos\theta^*} t^{-\sigma}|\ln t|(\cos\theta^*-$

$$-t)/\beta(t,\theta^*)\,dt-\int\limits_{\cos\theta^*}^1 t^{-\sigma}|\ln t|(t-\cos\theta^*)/\beta(t,\theta^*)\,dt>$$
$$>|\ln\cos\theta^*|\left\{\int\limits_0^{\cos\theta^*} t^{-\sigma}(\cos\theta^*-t)/\beta(t,\theta^*)\,dt-\right.$$
$$\left.-\int\limits_{\cos\theta^*}^1 t^{-\sigma}(t-\cos\theta^*)/\beta(t,\theta^*)\,dt\right\}=0\quad\text{в силу (9).}$$

Таким образом, $\frac{\partial}{\partial\sigma} F_\sigma(\theta^*) > 0$. Значит,

$$\frac{d\theta_\sigma}{d\sigma} = -\left(\frac{\partial}{\partial\sigma} F_\sigma(\theta^*)\right) \Big/ \left(\frac{\partial}{\partial\theta} F_\sigma(\theta^*)\right) > 0,$$

откуда следует, что θ_σ монотонно возрастает при росте σ. Так как $F_0(\theta) = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)$, то $\theta_0 = \pi/3$. Следовательно, при $\sigma > 0$ выполняется $\theta_\sigma > \pi/3$ (это видно также из того, что при $|\theta| \leqslant \pi/3$, $\sigma > 0$ верно $F_\sigma(\theta) > 0$, как отмечалось при доказательстве леммы 5). При

$$\sigma \to 1 - \cos\theta_\sigma = \left(\int_0^1 t^{1-\sigma}/\beta(t, \theta_\sigma)\, dt\right)\left(\int_0^1 t^{-\sigma}/\beta(t, \theta_\sigma)\, dt\right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 t^{1-\sigma}(1 - t + t^2)^{-1}\, dt\right)\left(\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\sigma}\, dt\right)^{-1} =$$

$$= 2(1-\sigma)\int_0^1 t^{1-\sigma}(1 - t + t^2)^{-1}\, dt \to 0.$$

Откуда следует, что $\theta_\sigma \to \pi/2$ при $\sigma \to 1-$.

Доказательство леммы 2.

Покажем, что θ'_σ — монотонно возрастающая функция от σ. Обозначим $x = \pi\sigma$. Тогда $x \in (0, \pi]$, $\theta'_\sigma = \pi - \sigma^{-1}\arccos\alpha(\sigma) = \pi - (\pi/x) \times \times \arccos(x^{-1}\sin x) = \pi(1 - f(x))$ **(10)**.

Функция $f(x)$ — монотонно убывающая, так как $f'(x) < 0$ при $x \in (0, \pi)$. Действительно, $f'(x) = -x^{-2}\{\arccos(x^{-1}\sin x) + (1 - x^{-2}\sin^2 x)^{-1/2} \times \times x^{-1}(x\cos x - \sin x)\} < 0$, поскольку

$$\varphi(x) = \arccos(x^{-1}\sin x) + (1 - x^{-2}\sin^2 x)^{-1/2} x^{-1}(x\cos x - \sin x) > 0.$$

Последнее неравенство следует из того, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(x) = = -x^{-4}(1 - x^{-2}\sin^2 x)^{-3/2} G(x) > 0$, где $G(x) = x^4\sin x + 2x^3\cos x - - 3x^2\sin x + \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x < 0$. В самом деле, так как при $0 < < x < \pi$ справедливы оценки: $(k = 1, 2, \ldots)$

$$S_{2k}(x) < \sin x < S_{2k+1}(x); \quad C_{2k-1}(x) < \cos x < C_{2k}(x),$$

где $S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} x^{2j-1}/(2j-1)!$, $C_n(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^{2j}/(2j)!$, то

$$G(x) < x^4 S_3(x) + 2x^3 C_4(x) - 3x^2 S_4(x) + \frac{3}{4} S_5(x) -$$

$$-\frac{1}{4} S_6(3x) = -x^9\left\{\frac{1}{135} - \left(\frac{1}{20160} + \frac{2187}{1971200}\right)x^2\right\} <$$

$$< -x^9\left\{\frac{1}{135} - \left(\frac{1}{20160} + \frac{2187}{1971200}\right)\pi^2/4\right\} < 0 \text{ при } 0 < x < \pi/2.$$

Когда же $\pi/2 \leqslant x < \pi$, то $G(x) = g(x) + \sin^3 x < g(x) + 1$, где $g(x) = = x^4\sin x + 2x^3\cos x - 3x^2\sin x$. Но $g(x) < -1$ при $\pi/2 \leqslant x < \pi$, так как $g''(x) = -[(x^2-3/2)^2+15/4]\sin x + 6x^3\cos x < 0$, следовательно, $g'(x) < g'(\pi/2) = \pi(\pi^2/4-3) < 0$, откуда при $\pi/2 \leqslant x < \pi$ получим $g(x) < g(\pi/2) = (\pi/2)^4 - 3(\pi/2)^2 < -1$.

Таким образом, θ'_σ, согласно (10), — монотонно возрастающая функция при $0 < \sigma < 1$. Кроме того, очевидно, что при $\sigma \to 1$, $\theta'_\sigma \to \pi/2$, а при $\sigma \to 0$ $\theta'_\sigma \to \pi(1-1/\sqrt{3})$.

Доказательство леммы 3.

Согласно леммам 1 и 2, $\theta'_0 = \pi(1-1/\sqrt{3})$, $\theta'_0 = \pi/3$, откуда $\theta'_0 > \theta_0$. При $\sigma \to 1$ и θ'_σ, и θ_σ стремятся к $\pi/2$. Покажем, что (4) верно при $0{,}95 \leqslant \sigma < 1$. Для этого найдем $\overline{\theta}'_\sigma$ и $\overline{\theta}_\sigma$ такие, что

$$\theta'_\sigma > \overline{\theta}'_\sigma > \overline{\theta}_\sigma > \theta_\sigma. \tag{11}$$

Оценим θ'_σ следующим образом:

$$\theta'_\sigma = \pi - \sigma^{-1}\arccos\alpha(\sigma) = \pi - \sigma^{-1}(\pi/2 - \arcsin\alpha(\sigma)) >$$
$$> \pi - \pi/(2\sigma) + \alpha(\sigma) = \frac{\pi}{2} - \frac{1-\sigma}{\sigma}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(1-\sigma)\pi}{\pi\sigma} = \overline{\theta}'_\sigma.$$

Тогда $(1-\sigma)^{-1}\cos\overline{\theta}'_\sigma = (1-\sigma)^{-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{1-\sigma}{\sigma} - \frac{\sin(1-\sigma)\pi}{\pi\sigma}\right) < \frac{\pi}{2\sigma} - \frac{\alpha(1-\sigma)}{\sigma} < \frac{\pi}{2\sigma} - \frac{S_2(\pi(1-\sigma))}{\sigma\pi(1-\sigma)} = \pi/(2\sigma) - \sigma^{-1} + \sigma^{-1}\pi^2(1-\sigma)^2/6 < 0{,}60$ при $0{,}95 \leqslant \sigma < 1$ **(12)**. Согласно условию леммы 1, θ_σ удовлетворяет уравнению (3) или, что то же самое,

$$\int_0^1 t^{1-\sigma}(\cos 2\theta - t\cos\theta)/\beta(t,\theta)\,dt + (1-\sigma)^{-1}\cos\theta = 0. \tag{13}$$

Тогда для θ_σ справедливо неравенство

$$(1-\sigma)^{-1}\cos\theta_\sigma > \int_0^1 t^{1-\sigma}(t\cos\theta_\sigma - \cos 2\theta_\sigma)(1-t^2)\,dt =$$
$$= \frac{\cos\theta_\sigma}{3-\sigma} - \frac{\cos 2\theta_\sigma}{2-\sigma} - \frac{\cos\theta_\sigma}{5-\sigma} + \frac{\cos 2\theta_\sigma}{4-\sigma}.$$

Обозначим $\cos\theta_\sigma$ через y. Тогда последнее неравенство примет вид $y^2 - py - 1/2 > 0$, где

$$p = \frac{1}{4}(2-\sigma)(4-\sigma)((1-\sigma)^{-1} - 2(3-\sigma)^{-1}(5-\sigma)^{-1}). \tag{14}$$

Решая это неравенство, получим оценку для положительного корня квадратного трехчлена: $y = (2\sqrt{p^2/4+1/2}+p)^{-1} > (2p+p^{-1})^{-1}$.

Таким образом, $\cos\theta_\sigma = y > (2p+p^{-1})^{-1} = \overline{y} = \cos\overline{\theta}_\sigma$, откуда, учитывая (14) и $(3-\sigma)(5-\sigma)(2-\sigma)^{-1}(4-\sigma)^{-1} \leqslant 8/3$, имеем $(1-\sigma)^{-1} \times \cos\overline{\theta}_\sigma \geqslant \{(2-\sigma)(4-\sigma)/2 - 3(1-\sigma)/8 + (32/3)(1-\sigma)^2(\sigma^2-6\sigma+13)^{-1}\}^{-1} \geqslant \{(2-\sigma)(4-\sigma)/2 + 4(1-\sigma)^2/3\}^{-1} \geqslant 0{,}62$

$$\text{при } 0{,}95 \leqslant \sigma < 1. \tag{15}$$

Из (11), (12) и (15) следует, что (4) верно при $0,95 \leqslant \sigma < 1$. Учитывая монотонность θ'_σ и θ_σ и то обстоятельство, что $\theta'_0 = 1,32508 > \theta_{0,60} = 1,30132$; $\theta'_{0,60} = 1,40503 > \theta_{0,75} = 1,39158$; $\theta'_{0,75} = 1,45360 > \theta_{0,84} = 1,45197$; $\theta'_{0,84} = 1,49015 > \theta_{0,89} = 1,48759$; $\theta'_{0,89} = 1,51311 > \theta_{0,92} = 1,50966$; $\theta'_{0,92} = 1,52784 > \theta_{0,94} = 1,52464$; $\theta'_{0,94} = 1,53807 > \theta_{0,95} = 1,53218$; получаем, что (4) верно при $0 \leqslant \sigma \leqslant 0,95$, а значит, и при $0 < \sigma < 1$.

Список литературы: 1. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980.— 302. 2. *Volkmann L.* Anwendungen einer Methode von Pólya in der Theorie der ganzen Funktionen // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. — 1978/79. — **4**.— P. 299—309. 3. *Островский И. В.* О некоторых асимптотических свойствах целых функций с вещественными отрицательными нулями // Зап. мех.-мат. ф-та Харьк. ун-та и Харьк. мат. об-ва.— 1961.—**28**. — С. 23—32. 4. *Hayman W. K.* Some examples related to the cos πρ-theorem//Math. Essays Dedicated to A. J. Macin tyre. Ohio Univ. Press, Ohio. — 1970. — P.149 — 170. 5. *Соколовская О. П.* Некоторые соотношения для δ-субгармонических и субгармонических функций порядка или нижнего порядка меньше единицы — Л., 1987.—27 с. Деп. в УкрНИИНТИ 31.03.87, № 1092. 6. *Гольдберг А. А., Соколовская О. П.* Некоторые соотношения для мероморфных функций, порядок или нижний порядок которых меньше единицы // Изв. вузов. Математика. — 1987.— № 469. — С. 26—31.

Поступила в редколлегию 18.03.87