УДК 517.968

Ю. В. ГАНДЕЛЬ

ТЕОРИЯ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ Н. И. АХИЕЗЕРА И ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА КРУГОВОМ ДИСКЕ

1°. Речь идет о теории, развитой в работах [1, 2] и впервые примененной при решении задачи о дифракции электромагнитных волн у кругового отверстия в плоском экране [3].

В настоящей статье метод Н. И. Ахиезера применяется для обоснования решений классических задач математической теории фракции волн на круговом диске, которые приводят к парным интегральным уравнениям двух типов:

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda \, d\lambda = 0, \quad a < r < \infty \tag{1}$$

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) \frac{\lambda \, d\lambda}{\gamma} = f(r), \quad 0 < r < a \tag{2}$$

где $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$, а ветвь радикала выбирается так, что

$$\gamma > 0 \text{ при } \lambda > k \text{ и } \operatorname{Im} \gamma < 0 \text{ при } 0 < \lambda < k; \tag{3}$$

$f(r)$, $0 \leqslant r \leqslant a$ — заданная гладкая функция, а функция $C(\lambda)$, $0 < \lambda < \infty$ подлежит определению) и

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) \frac{\lambda \, d\lambda}{\gamma} = 0, \quad a < r < \infty \tag{4}$$

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda \, d\lambda = f(r), \quad 0 < r < a. \tag{5}$$

Теорема 1. *Функция $C(\lambda)$, найденная по формуле*

$$C(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \cos \gamma s \, ds, \tag{6}$$

где $h(s)$ — решение уравнения Фредгольма

$$h(x) + \frac{i}{\pi} \int_0^a \left\{ \frac{\operatorname{sh} k(x+s)}{x+s} + \frac{\operatorname{sh} k(x-s)}{x-s} \right\} h(s) \, ds =$$

$$= \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x r f(r) \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{x^2 - r^2}}{\sqrt{x^2 - r^2}} \, dr, \tag{7}$$

удовлетворяет парному интегральному уравнению (1)—(2) и выполняется условие

$$\int_0^\infty |C(\lambda)|^2 \frac{\lambda \, d\lambda}{|\gamma|} < \infty. \tag{8}$$

Доказательство. Интегральное уравнение (7) однозначно разрешимо, его решение — гладкую функцию $h(s)$ подставляем в (6) и находим $C(\lambda)$.

Функция

$$C\left(\sqrt{k^2 + t^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \cos ts \, ds \tag{9}$$

является косинус-преобразованием Фурье функции из L_2 и поэтому принадлежит $L^2(0, \infty)$, откуда вытекает выполнение условия (8):

$$\int_0^\infty |C(\lambda)|^2 \frac{\lambda\, d\lambda}{|\gamma|} = \int_0^k \left|C\left(\sqrt{k^2 - t^2}\right)\right|^2 dt + \int_0^\infty \left|C\left(\sqrt{k^2 + t^2}\right)\right|^2 dt < \infty.$$

Покажем, что $C(\lambda)$ удовлетворяет уравнению (1) при любой гладкой функции $h(s)$: для этого, проинтегрировав по частям в (6), представим $C(\lambda)$ в виде

$$C(\lambda) = C_1(\lambda) + C_2(\lambda), \tag{10}$$

где

$$C_1(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, h(a) \frac{\sin a\gamma}{\gamma}; \quad C_2(\lambda) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h'(s) \frac{\sin \gamma s}{\gamma}\, ds,$$

и, используя разрывный интеграл Сонина [2],

$$\int_0^\infty \frac{\sin a\gamma}{\gamma} J_0(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda = \begin{cases} 0 \text{ при } r > a > 0; \\ \dfrac{\operatorname{ch} k\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \ 0 < r < a \end{cases} \tag{11}$$

непосредственно убеждаемся в справедливости утверждения.

Далее подставим $C(\lambda)$ (6) в левую часть уравнения (2), имеем

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) \frac{\lambda\, d\lambda}{\gamma} \equiv \tilde{f}(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a. \tag{12}$$

Остается убедиться, что $\tilde{f}(r) = f(r)$, $0 \leqslant r \leqslant a$.

Применим к обеим частям тождества (12) преобразование Сонина:

$$(Sg)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x r g(r) \frac{\operatorname{ch} k\sqrt{x^2 - r^2}}{\sqrt{x^2 - r^2}}\, dr,$$

изменим порядок интегрирования в левой части тождества (применимость теоремы Фубини следует из (10)), воспользуемся соотношением [2]:

$$\int_0^s J_0(\lambda r) \frac{\operatorname{ch} k\sqrt{s^2 - r^2}}{\sqrt{s^2 - r^2}}\, r\, dr = \frac{\sin \gamma s}{\gamma}$$

и, учитывая выбор ветви радикала $\gamma=\sqrt{\lambda^2-k^2}$ (3) и заменяя переменную интегрирования, преобразуем (12) к виду

$$i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^k C\left(\sqrt{k^2-t^2}\right)\frac{\operatorname{sh} xt}{t}\,dt+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty C\left(\sqrt{k^2+t^2}\right)\frac{\sin xt}{t}\,dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x r\tilde{f}(r)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}}\,dr.$$

Подставляя сюда, вытекающие из (6), выражения для $C\left(\sqrt{k^2-t^2}\right)$, $0<t<k$; $C\left(\sqrt{k^2+t^2}\right)$, $t>0$ и изменяя порядок интегрирования во втором слагаемом (допустимость перемены порядка интегрирования — следствие равенства Парсеваля для функций

$$p(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a h(s)\cos ts\,ds,\quad t>0$$

и

$$q(t)=\frac{\sin xt}{t},\ t>0\ (x>0)$$

и их косинус-преобразований Фурье), а затем, используя известный разрывный интеграл

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ts\frac{\sin xt}{t}\,dt=\begin{cases}1 & \text{при } 0<s<x;\\ 0 & \text{при } s>x>0,\end{cases}$$

получаем

$$\int_0^x h(s)\,ds+\frac{2i}{\pi}\int_0^a h(s)\,ds\int_0^k\frac{\operatorname{sh} tx}{t}\operatorname{ch} ts\,dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x r\tilde{f}(r)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}}\,dr,$$

где правая часть — дифференцируемая функция. Продифференцируем обе части последнего тождества по x. После элементарных преобразований находим

$$h(x)+\frac{i}{\pi}\int_0^a\left\{\frac{\operatorname{sh} k(s+x)}{s+x}+\frac{\operatorname{sh} k(s-x)}{s-x}\right\}h(s)\,ds=$$

$$=\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x r\tilde{f}(r)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}}\,dr.\tag{13}$$

Сравнивая (13) с (7), имеем

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x r\tilde{f}(r)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}}\,dr=$$

$$=\frac{d}{dx}\int_0^x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,rf(r)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}}\,dr,$$

откуда по формулам обращения Сонина [2] получаем

$$\tilde{f}(r)=f(r),\quad 0\leqslant r\leqslant a,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается

Теорема 2. *Функция $C(\lambda)$, найденная по формуле*

$$C(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a h(s)\sin\gamma s\,ds,$$

где $h(s)$ — решение уравнения Фредгольма

$$h(x)=\frac{i}{\pi}\int_0^a\left\{\frac{\operatorname{sh} k(x+s)}{x+s}-\frac{\operatorname{sh} k(x-s)}{x-s}\right\}h(s)\,ds=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x rf(r)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}}\,dr,$$

удовлетворяет системе (4)—(5), причем для $C(\lambda)$ выполняется условие

$$\int_0^\infty|C(\lambda)|^2\frac{\lambda\,d\lambda}{|\gamma|}<\infty.$$

2°. Скалярные задачи дифракции волн на диске состоят в отыскании рассеянного поля $u=u(x, y, z)$, удовлеторяющего следующим условиям:

1) всюду вне диска

$$\Delta u+k^2u=0; \tag{14}$$

2) в каждой конечной области V пространства энергия поля конечна:

$$\iiint_V\{|u|^2+|\operatorname{grad} u|^2\}\,dv<\infty; \tag{15}$$

3) на бесконечности выполняются условия излучения Зоммерфельда:

$$R|u| \leqslant C < \infty, \quad \lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial u}{\partial R} - iku\right) = 0, \tag{16}$$

где $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

4) на диске выполняется некоторое граничное условие, вид которого зависит от свойства диска:

$$\begin{aligned} &\text{А)}\ u|_{\text{на диске}} = f \ \text{(мягкий диск)};\\ &\text{Б)}\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\text{на диске}} = f \ \text{(жесткий диск)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Диск — множество точек $\{(x, y, z) : z = 0,\ x^2 + y^2 < a^2\}$.

В [4] доказаны теоремы существования и единственности решения общей задачи о дифракции волн на плоском экране в связи с построением коротковолновой асимптотики для этих задач, а в [] дано обоснование коротковолновой асимптотики в задаче о дифракции волн на круговом диске.

Метод Н. И. Ахиезера позволяет получить удобное для численного анализа представление решений задач о дифракции на диске и провести его строгое обоснование.

Теорема 3. *Решение аксиально-симметричной краевой задачи (14)—(17)*А *представляется в виде*

$$u(r, z) = \int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\gamma|z|} \frac{\lambda\, d\lambda}{\gamma}, \tag{18}$$

где

$$C(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \cos \gamma s\, ds, \tag{6}$$

а функция $h(s)$ *— решение интегрального уравнения (7).*

Доказательство. Из результатов теоремы 1 следует существование пределов $u(r, +0)$ и $u(r, -0)$, причем эти пределы совпадают и равны $f(r)$ при $0 < r < a$. Таким образом, краевое условие (17) А удовлетворяется в каждой точке диска.

Далее, поскольку интегралы $\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) \frac{\lambda\, d\lambda}{\gamma}$ и $\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) \times \times \lambda\, d\lambda$ — также сходящиеся при $r > a$ (теорема 1), то при $r > a$ непрерывны при $z = 0$ функции $u(r, z)$ и $\frac{\partial u}{\partial z}(r, z)$, а так как функция $u(r, z)$, определенная равенством (18), удовлетворяет уравнению Гельмгольца при $z > 0$ и при $z < 0$, то она удовлетворяет уравнению (14) всюду вне диска.

Далее, чтобы убедиться в выполнении условий излучения (16), подставим представление (6) в (18) и изменим порядок интегрирования. Имеем при $z \gtrless 0$

$$u(r, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s)\,ds \int_0^\infty J_0(\lambda r) \frac{e^{-\gamma(|z|-is)} + e^{\gamma(|z|+is)}}{2} \frac{\lambda\,d\lambda}{\gamma}.$$

Используя интеграл Зоммерфельда

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\gamma(|z| \mp is)} \frac{\lambda\,d\lambda}{\gamma} = \frac{e^{ikR_\mp}}{R_\mp}$$

(ветвь функции $\gamma(\lambda)$ определена условиями (3)), находим

$$u(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \left\{ \frac{e^{ikR_-}}{R_-} + \frac{e^{ikR_+}}{R_+} \right\} h(s)\,ds, \tag{19}$$

где

$$R_\pm = \sqrt{r^2 + (|z| \pm is)^2}, \quad 0 < s < a.$$

Обозначим $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, $r = R\sin\theta$, $z = R\cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. При $z \gtrless 0$ получаем

$$\frac{\partial u}{\partial R} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \left(ik \frac{e^{ikR_-}}{R_-} - \frac{e^{ikR_-}}{R_-^2} \right) \frac{R - is\,|\cos\theta|}{R_-} h(s)\,ds +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \left(ik \frac{e^{ikR_+}}{R_+} - \frac{e^{ikR_+}}{R_+^2} \right) \frac{R + is\,|\cos\theta|}{R_+} h(s)\,ds$$

и, поскольку при $R \to \infty$ и $0 \leqslant s \leqslant a$ $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{R_\pm}{R} = 1$, то из (19) и (20) следует

$$R|u| \leqslant C < \infty \text{ и } \lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial u}{\partial R} - iku\right) = 0.$$

Осталось проверить выполнение условия (15) — конечности энергии поля в любой конечной области, содержащей диск. В силу симметрии поля для этого достаточно показать, что при $h > 0$, $b > a$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} 2\pi \int_\varepsilon^h \int_0^b \left\{ |u|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \right\} r\,dr\,dz < \infty.$$

йствительно, при каждом $z>0$

$$|u|^2 \leqslant \int_0^\infty |C(\lambda)|^2 \frac{\lambda\, d\lambda}{|\gamma|} \int_0^\infty |J_0(\lambda r)|^2 e^{-(\gamma+\bar{\gamma})z} \frac{\lambda\, d\lambda}{|\gamma|} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty |C(\lambda)|^2 \frac{\lambda\, d\lambda}{|\gamma|} \left(2k + \int_{k\sqrt{2}}^\infty |J_0(\lambda r)|^2 e^{-2\gamma z} \frac{\lambda\, d\lambda}{\gamma}\right) \qquad (20)$$

есь использовано представление (18) и неравенство Буняковского.

Интегрируя (20) по z от ε до h, после очевидных преобразований получаем

$$\int_\varepsilon^h |u|^2\, dz \leqslant \int_0^\infty |C(\lambda)|^2 \frac{\lambda\, d\lambda}{|\gamma|} \cdot \left(2kh + \int_{k\sqrt{2}}^\infty |J_0(\lambda r)|^2 e^{-2\gamma\varepsilon} \frac{\lambda\, d\lambda}{2\gamma^2}\right),$$

алее, используя известное соотношение

$$\int_0^x J_0^2(t)\, t\, dt = \frac{x^2}{2}\left(J_0^2(x) + J_1^2(x)\right),$$

ходим

$$\int_\varepsilon^h \int_0^b |u|^2 r\, dr\, dz \leqslant \int_0^\infty |C(\lambda)|^2 \frac{\lambda\, d\lambda}{|\gamma|} \cdot \frac{b^2}{2} \times$$

$$\times \left(2kh + \int_{k\sqrt{2}}^\infty \frac{J_0^2(\lambda b) + J_1^2(\lambda b)}{2} e^{-2\gamma\varepsilon} \frac{\lambda\, d\lambda}{\gamma^2}\right).$$

к что существует предел интеграла

$$\int_\varepsilon^h \int_0^b |u|^2 r\, dr\, dz \text{ при } \varepsilon \to +0.$$

уществование предела интеграла

$\int_\varepsilon^h \int_0^b |\operatorname{grad} u|^2 r\, dr\, dz$ доказывается аналогично, если воспользоваться первой формулой Грина.

Теорема 3 доказана.

Аналогично доказывается соответствующее представление для торой краевой задачи.

Теорема 4. *Решение аксиально-симметричной краевой задачи (14)—(17) Б представляется в виде*

$$u(r, z) = \frac{|z|}{z} \int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\gamma|z|} \frac{\lambda\, d\lambda}{\gamma}, \quad z \gtrless 0,$$

де

$$C(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \sin \gamma s\, ds,$$

а функция $h(s)$ — решение интегрального уравнения, входящ в условие теоремы 2.

Теоремы 3 и 4 позволяют получить удобные для вычислен формулы полей в окрестности ребра диска и в дальней зоне. Та например, поле в дальней зоне дается формулой

$$u(r,\ z) \sim \Phi(\theta) \frac{e^{ikR}}{R},\ R \to \infty,$$

где $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, а

$$\Phi(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \operatorname{ch}(ks \cos\theta)\, ds \text{ (мягкий диск)};$$

$$\Phi(\theta) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \operatorname{sh}(ks \cos\theta)\, ds \text{ (жесткий диск)}.$$

При проведении конкретных вычислений главное — найти приближенное решение соответствующего уравнения Фредгольма. Эффективный приближенный метод решения предложен в [6].

3°. Аксиально-симетричные задачи о дифракции волн на круговом диске (или круговом отверстии в диафрагме), расположенном в трубе, приводят к парным сумматорным уравнениям — дискретным аналогам рассмотренных парных интегральных уравнений.

Теория соответствующих парных рядов Фурье-Бесселя и Дини была разработана в [7—9], причем существенно используется метод Н. И. Ахиезера [1, 2] и некоторые факты из [10].

Сформулируем типичный результат.

Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$ — все положительные ноли функции $J_0(\lambda R)$, $k > 0$, $k \notin \{\lambda_n\}$. Рассматриваются парные сумматорные уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} J_0(\lambda_n r) = f(r),\ 0 \leqslant r < a,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n r) = 0,\ a < r < R,$$

где $f(r)$, $0 \leqslant r \leqslant a$ — заданная гладкая функция, $a < R$, а ветвь радикала $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$ определяется условиями (3). Коэффициенты C_n подлежат определению, причем предполагается, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|C_n|^2}{\lambda_n} < \infty$.

Для C_n найдено представление

$$C_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\lambda_n R)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \cos\left(s \sqrt{\lambda_n^2 - k^2}\right) ds,$$

функция $h(s)$ удовлетворяет интегральному уравнению Фред-
ьма:

$$h(x)+\int_0^a K(x,\ s)\,h(s)\,ds=\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x rf(r)\,\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}}\,dr$$

дром

$$K(x,\ s)=K_1(x,\ s;\ k)+K_2(x,\ s;\ k,\ R),$$

$$K_1(x,\ s;\ k)=\frac{i}{\pi}\left\{\frac{\operatorname{sh} k(x+s)}{x+s}+\frac{\operatorname{sh} k(x-s)}{x-s}\right\}$$

R не зависит, а

$$K_2(x,\ s;\ k,\ R)=-\frac{4}{\pi^2}\int_C\frac{K_0(Rz)}{I_0(Rz)}\times$$

$$\times\operatorname{ch}\left(t\sqrt{z^2+k^2}\right)\operatorname{ch}\left(s\sqrt{z^2+k^2}\right)\frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+k^2}}$$

$z)$ — функция Макдональда, $I_0(z)$ — модифицированная функция
еселя, контур интегрирования состоит из дуги окружности
$= k$ от точки $-ik$ до точки k и луча $z=x>k$).

сок литературы: 1. *Ахиезер Н. И.* О некоторых спаренных интегральных авнениях // Докл. АН СССР, 1954. **98**, № 3. С. 333—336. 2. *Ахиезер Н. И.* еории спаренных интегральных уравнений // Зап. мат. отд. физ.-мат. ф-та рьк. гос. ун-та и Харьк. мат. об-ва. 1957. XXV. С. 5—31. 3. *Ахиезер Н. И.*, *иезер А. Н.* К задаче о дифракции электромагнитных волн у кругового отверя в плоском экране // Докл. АН СССР. 1956. **109**, № 1. С. 53—56. 4. *Марченов. А.*, *Маслов К. В.* Коротковолновое приближение в задачах о дифракции на оском экране // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1966. Вып. 3. 158—182. 5. *Сологуб В. Г.* Коротковолновая асимптотика решения задачи дифракции на круглом диске // Журн. вычислит. мат. и мат. физики. 1972. 2. С. 388—412. 6. *Гандель Ю. В.* О решении одного интегрального уравнения тематической теории дифракции волн // Вестн. Харьк. ун-та. Сер. мех.-мат. 70. **35**. С. 23—28. 7. *Гандель Ю. В.* Об одной паре сумматорных уравнений функциями Бесселя // Вестн. ХГУ, зап. мех.-мат. ф-та и Харьк. мат. об-ва. 67. **33**. С. 115—119. 8. *Гандель Ю. В.* К теории парных рядов Фурье-Бессея // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1970. Вып. 12. С. 59—69. *Гандель Ю. В.* Замечание к теории парных рядов Фурье-Бесселя // Теория нкций, функцион. анализ и их прил. 1975. Вып. 22. С. 35—41. 10. *Sneddon J. N.* Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam, 1966. 0 p.

Поступила в редколлегию 14.12.89