

УДК 621.372.8.040.35.017.7

**АНАЛИЗ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОРТОГОНАЛЬНОМ ЛИНЕЙНО-ПОЛЯРИЗОВАННОМ БАЗИСЕ****Н. Н. Горобец, Г. М. Чекалин, Г. Н. Чекалина***Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина**E-mail: Nikolay.N.Gorobets@univer.kharkov.ua**Поступила в редакцию 12 апреля 2011г.*

Решена задача определения поляризационных характеристик – коэффициента эллиптичности, угла ориентации поляризационного эллипса и направления вращения векторов поля в линейно-поляризованном базисе с произвольным углом между компонентами электромагнитной волны. В частном случае ортогонального линейно-поляризованного базиса полученные решения совпадают с известными. Разработан алгоритм построения модели всего множества эллиптически поляризованных волн в виде совокупности пучков гиперболических и эллиптических окружностей.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** электромагнитная волна, напряженность электрического поля, поляризация, гармоника, базис, разложение гармоника, годограф, модель.

Вирішена задача визначення поляризаційних характеристик – коефіцієнта еліптичності, кута орієнтації поляризаційного еліпса та напрямку обертання векторів поля в лінійно-поляризованому базисі з довільним кутом між компонентами електромагнітної хвилі. В окремому випадку ортогонального лінійно-поляризованого базису отримані рішення збігаються з відомими. Розроблений алгоритм побудови моделі всієї множини еліптично-поляризованих хвиль у вигляді сукупності пучків гіперболічних і еліптичних кіл.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** електромагнітна хвиля, напруженість електричного поля, поляризація, гармоніка, базис, розкладання гармоніки, годограф, модель.

We solve the problem of determining the polarization characteristics – coefficient of ellipticity and orientation angle of the polarization ellipse and the direction of rotation of the polarization vectors of linearly polarized basis with arbitrary angle between the components of the electromagnetic wave. In the special case of orthogonal linearly polarized basis obtained solutions coincide with the known one. An algorithm for constructing a model of elliptically polarized waves has been elaborated in this article as the totality of hyperbolic and elliptic circles.

**KEYWORDS:** electromagnetic wave, electric field strength, time-distance curve, harmonic, basis, the expansion of the harmonic, the polarization, model.

**ВВЕДЕНИЕ**

Векторная природа электромагнитных волн количественно описывается через поляризационные характеристики волны – коэффициент эллиптичности  $r$ , угол ориентации поляризационного эллипса  $\beta$  и направление вращения векторов поля. В настоящее время хорошо известны решения задач анализа и синтеза, поляризационных эллипсов в ортогональных линейно-поляризованных, кругополяризованных и эллиптически поляризованных базисах [1]. Эти решения получаются в наиболее простой форме, так как ортогональные компоненты поля в любом ортогональном базисе не интерферируют.

Однако, на практике реальные источники электромагнитного излучения с эллиптической или круговой поляризацией могут быть не взаимно-перпендикулярными. Например, это могут быть скрещенные вибраторные излучатели с произвольным углом между ними, неортогональные крестообразные волноводно-щелевые излучатели, спиральные антенны с кусочно-линейными образующими и т. д. В этих случаях для определения поляризационных характеристик электромагнитной волны необходимо решить задачу анализа и синтеза поляризационного эллипса по неортогональным компонентам поля, что является целью настоящей статьи.

**ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ**

Ставится задача разработки модели всего множества эллиптически поляризованных гармоник.

Конструирование модели осуществляется посредством общего случая разложения гармоника по простейшему линейно-поляризованному базису, анализу ее проекций на оси координат как системы линейных алгебраических уравнений, из условия получения единственного решения которой получаем общее уравнение кривой второго порядка, являющейся уравнением эллипса. Переходя к каноническому

уравнению эллипса путем поворота системы координат на угол  $+\beta$  и выражая параметры эллипса поляризации через полярные параметры ортогонального базиса  $p$  и  $\Delta\psi$ , строим на плоскости модель всего множества эллиптически поляризованных волн.

То есть, решение задачи осуществляется методом векторного описания волны при использовании базисов линейно-поляризованных волн [2].

В произвольной точке пространства электромагнитной волне ставится в соответствие векторная гармоника, т.е. свободный вектор  $\vec{E}_0$ , который описывает ее поляризационное состояние и который имеет физический смысл напряженности электрического поля. Любой вектор в плоскости (в нашем случае в ТЕМ – плоскости) можно записать как сумму двух векторов

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad (1)$$

где  $\vec{E}_1 = \vec{n}_1^0 E_{m1} \cos(\omega t + \psi_1), \quad (2)$

$$\vec{E}_2 = \vec{n}_2^0 E_{m2} \cos(\omega t + \psi_2). \quad (3)$$

$$\vec{n}_1^0 = \vec{x}^0 \cos \beta_1 + \vec{y}^0 \sin \beta_1, \quad (4)$$

$$\vec{n}_2^0 = \vec{x}^0 \cos \beta_2 + \vec{y}^0 \sin \beta_2.$$

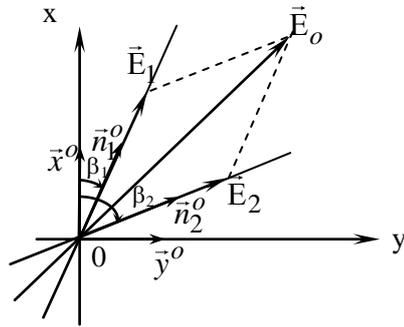


Рис. 1. Разложение гармоники по произвольному линейно-поляризованному базису

Как видно, орты  $\vec{n}_1^0$  и  $\vec{n}_2^0$  от времени не зависят, т.е. не вращаются. Таким образом, мы получили общий случай разложения векторной гармоники по произвольному линейно-поляризованному базису (рис. 1.). Все множество линейно-поляризованных базисов можно разделить

на два подмножества: ортогональные базисы  $\left(\Delta\beta = \frac{\pi}{2}\right)$  и не ортогональные  $\left(\Delta\beta \neq \frac{\pi}{2}\right)$ . Параметрами

линейно-поляризованного базиса являются:

- а) углы ориентации ортов базиса  $\beta_1$  и  $\beta_2$ ;
- в) амплитуды базисных гармоник  $E_{m1}, E_{m2}$ ;
- с) фазы базисных гармоник  $\psi_1, \psi_2$ .

Подставим (4) в (2) и (3), а затем сложим  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  согласно (1)

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{x}^0 \vec{E}_{m1} \cos \beta_1 \cos(\omega t + \psi_1) + \vec{y}^0 \vec{E}_{m1} \sin \beta_1 \cos(\omega t + \psi_1) \\ \vec{E}_2 = \vec{x}^0 \vec{E}_{m2} \cos \beta_2 \cos(\omega t + \psi_2) + \vec{y}^0 \vec{E}_{m2} \sin \beta_2 \cos(\omega t + \psi_2), \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 = \vec{x}^0 \left[ \vec{E}_{m1} \cos \beta_1 \cos(\omega t + \psi_1) + \vec{E}_{m2} \cos \beta_2 \cos(\omega t + \psi_2) \right] + \\ + \vec{y}^0 \left[ \vec{E}_{m1} \sin \beta_1 \cos(\omega t + \psi_1) + \vec{E}_{m2} \sin \beta_2 \cos(\omega t + \psi_2) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

В результате получено разложение гармоники  $\vec{E}_0$  по осям координат, где  $x$  и  $y$  являются проекциями  $\vec{E}_0$  на оси координат:

$$\begin{cases} x = \vec{E}_{m1} \cos \beta_1 \cos(\omega t + \psi_1) + \vec{E}_{m2} \cos \beta_2 \cos(\omega t + \psi_2), \\ y = \vec{E}_{m1} \sin \beta_1 \cos(\omega t + \psi_1) + \vec{E}_{m2} \sin \beta_2 \cos(\omega t + \psi_2). \end{cases} \quad (7)$$

После преобразования (7) получим линейную систему двух уравнений относительно  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  :

$$\begin{cases} x = N_1 \cos \omega t + N_2 \sin \omega t, \\ y = N_3 \cos \omega t + N_4 \sin \omega t, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= E_{m1} \cos \beta_1 \cos \psi_1 + E_{m2} \cos \beta_2 \cos \psi_2, \\ N_2 &= -(E_{m1} \cos \beta_1 \sin \psi_1 + E_{m2} \cos \beta_2 \sin \psi_2), \\ N_3 &= E_{m1} \sin \beta_1 \cos \psi_1 + E_{m2} \sin \beta_2 \cos \psi_2, \\ N_4 &= -(E_{m1} \sin \beta_1 \sin \psi_1 + E_{m2} \sin \beta_2 \sin \psi_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Система (8) имеет единственное решение, условием существования которого является неравенство нулю определителя системы:

$$\Delta_t = \begin{vmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Решая систему (8), получим общее уравнение кривой второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} A &= N_3^2 + N_4^2, \\ B &= -(N_1N_3 + N_2N_4), \\ C &= N_1^2 + N_2^2, \\ D &= E = 0, \\ F &= -(N_1N_4 - N_2N_3)^2 = -\Delta_t^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Выразим коэффициенты уравнения (10) через (11)

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & 0 \\ B & C & 0 \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix} = F\delta = -\Delta_t^2\delta = -\Delta_t^4, \quad (12)$$

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = (N_1N_4 - N_2N_3)^2 = \Delta_t^2, \quad (13)$$

$$S = A + C = N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + N_4^2. \quad (14)$$

$\Delta < 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\Delta S < 0$ . То есть годограф гармоника  $\vec{E}_0$ , описываемый уравнением (10), – эллипс.

Повернем систему координат на угол  $+\beta$ , который определяется коэффициентами полученных выше уравнений по формуле:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\beta &= \frac{2B}{A-C} = 2 \frac{N_1N_3 + N_2N_4}{N_1^2 + N_2^2 - (N_3^2 + N_4^2)} = \\ &= \frac{E_{m1}^2 \sin 2\beta_1 + 2E_{m1}E_{m2} \cos(\psi_1 - \psi_2) \sin(\beta_1 + \beta_2) + E_{m2}^2 \sin 2\beta_2}{E_{m1}^2 \cos 2\beta_1 + 2E_{m1}E_{m2} \cos(\psi_1 - \psi_2) \cos(\beta_1 + \beta_2) + E_{m2}^2 \cos 2\beta_2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Новое каноническое уравнение эллипса поляризации будет:

$$A'x'^2 + C'y'^2 - \delta = 0, \quad (16)$$

где  $A'$  и  $C'$  являются корнями уравнения

$$U^2 - Su + \delta = 0. \quad (17)$$

Корни  $A'$  и  $C'$  имеют вид

$$A' = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4d}}{2}; \quad C' = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4d}}{2}. \quad (18)$$

Из выражения (16) определим уравнение эллипса в отрезках на осях:

$$\frac{x'^2}{\delta/A'} + \frac{y'^2}{\delta/C'} = 1. \quad (19)$$

Отсюда получаем для определения коэффициента эллиптичности:

$$r^2 = \frac{A'}{C'} = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4d}}{S + \sqrt{S^2 - 4d}}. \quad (20)$$

Для упрощения расчетов введем параметр  $R$ :

$$\begin{aligned} R &= \frac{2\sqrt{\delta}}{S} = 2 \frac{\Delta_t}{S} = 2 \frac{(N_1 N_4 - N_2 N_3)}{N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + N_4^2} = \\ &= \frac{2E_{m1} E_{m2} \sin(\psi_2 - \psi_1) \sin(\beta_1 - \beta_2)}{E_{m1}^2 + 2E_{m1} E_{m2} \cos(\psi_2 - \psi_1) \cos(\beta_2 - \beta_1) + E_{m2}^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

С учетом (14) и (21) из (20), получаем:

$$r^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - R^2}}{1 + \sqrt{1 - R^2}}. \quad (22)$$

Коэффициент эллиптичности  $r$  и угол ориентации  $\beta$  волны полностью определяются параметрами базиса

$$p = \frac{E_{m2}}{E_{m1}}, \quad \Delta\psi = \psi_2 - \psi_1, \quad \Delta\beta = \beta_2 - \beta_1.$$

В прикладных задачах электродинамики большую роль играет ортогональный линейно-поляризованный базис, для которого формулы (15) и (21) упрощаются:

$$R = \frac{-2p \sin \Delta\psi}{1 + p^2}, \quad (23)$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2p \cos \Delta\psi}{1 - p^2}. \quad (24)$$

Если параметры волны  $r$  и  $\beta$  известны, а новый координатный базис выбирается направленным по осям эллипса в результате поворота системы координат на угол  $+\beta$ , то в этом случае угол ориентации  $\beta$  относительно большой оси эллипса равен нулю. Определим параметры нового осевого координатного базиса  $p$  и  $\Delta\psi$ , используя выражение (24), которое справедливо для любых  $\beta$ , в том числе и для  $\beta = 0$ . Если  $p \neq 0$ , то  $\cos \Delta\psi = 0$ , т.е.  $\Delta\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ . Из выражения (23) получим

$$|R| = \frac{2p}{1 + p^2}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (22), получим

$$|r| = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - R^2}}{1 + \sqrt{1 - R^2}}} = p. \quad (26)$$

Моделью эллиптически поляризованных гармоник будет плоскость, точки которой являются объектами отображения гармоник  $\vec{E}_{no}$ , а параметрами точек – полярные параметры линейно-поляризованного координатного базиса  $p$  и  $\Delta\psi$  (рис.2).

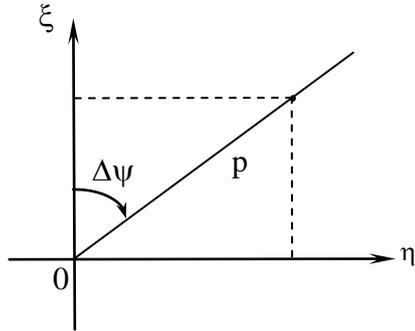


Рис. 2. Модель эллиптически-поляризованных гармоник

Каждая точка соответствует эллиптически поляризованной гармонике с параметрами годографа  $r$  и  $\beta$ , которые однозначно связаны с параметрами базиса  $p$  и  $\Delta\psi$  по формулам (23), (24).

В работе [2] было высказано утверждение о том, что уравнение (23) является уравнением пучка гиперболических окружностей, а уравнение (24) – пучка эллиптических окружностей. Докажем это.

Преобразуем уравнение (23) к виду:

$$R(1 + p^2) = -2p \sin \Delta\psi.$$

Умножим обе части уравнения на  $R$ :

$$R^2 + R^2 p^2 + 2pR \sin \Delta\psi = 0.$$

Перенесем  $R^2$  в правую часть уравнения и прибавим к обеим частям уравнения по единице:

$$p^2 R^2 + 2pR \sin \Delta\psi + 1 = 1 - R^2.$$

Разделим левую и правую части уравнения на  $R^2$ .

$$p^2 + \frac{2p \sin \Delta\psi}{R} + \frac{1}{R^2} = \frac{1 - R^2}{R^2}. \tag{27}$$

Из рис. 2 видно, что

$$\begin{cases} \xi = p \cos \Delta\psi, \\ \eta = p \sin \Delta\psi, \\ p^2 = \xi^2 + \eta^2. \end{cases} \tag{28}$$

Введем обозначения: 
$$\eta_0 = -\frac{1}{R} = \pm \frac{1 + |r|^2}{2|r|}; \tag{29}$$

$$a_\eta = \frac{\sqrt{1 - R^2}}{R} = \frac{1 - |r|}{2|r|}. \tag{30}$$

Осуществляя подстановку (28),(29) и (30) в уравнение (27), получим уравнение

$$\xi^2 + (\eta - \eta_0)^2 = a_\eta^2. \tag{31}$$

А это и есть уравнение пучка гиперболических окружностей [3], который позволит нам получить семейство линий с параметром  $r$ .

В гиперболическом пучке центр каждой окружности радиуса  $a_\eta$  смещается по оси  $\eta$  на  $\pm|\eta_0|$ .

Эти точки являются предельными для данного пучка.

Преобразуем теперь уравнение (24) к виду:

$$(p^2 - 1) \operatorname{tg} 2\beta + 2p \cos \Delta\psi = 0.$$

Умножим и разделим второе слагаемое на  $\cos 2\beta$ :

$$\frac{(p^2 - 1) \sin 2\beta}{\cos 2\beta} + \frac{2p \cos \Delta\psi \cos 2\beta}{\cos 2\beta} = 0.$$

Помножим оба слагаемых левой части уравнения на  $\sin 2\beta$ :

$$\begin{aligned} (p^2 - 1) \sin^2 2\beta + 2p \cos \Delta\psi \sin 2\beta \cos 2\beta &= 0, \\ p^2 \sin^2 2\beta + 2p \cos \Delta\psi \sin 2\beta \cos 2\beta &= \sin^2 2\beta. \end{aligned}$$

Прибавим к обеим частям уравнения  $\cos^2 2\beta$ :

$$p^2 \sin^2 2\beta + 2p \cos \Delta\psi \sin 2\beta \cos 2\beta + \cos^2 2\beta = 1.$$

Помножим и разделим второе слагаемое на  $\sin 2\beta$ :

$$p^2 \sin^2 2\beta + \frac{2p \cos \Delta\psi \sin^2 2\beta \cos 2\beta}{\sin 2\beta} + \cos^2 2\beta = 1.$$

Разделим левую и правую части полученного уравнения на  $\sin^2 2\beta$ :

$$p^2 + 2p \cos \Delta\psi \operatorname{ctg} 2\beta + \operatorname{ctg}^2 2\beta = \frac{1}{\sin^2 2\beta}. \quad (32)$$

Введем обозначения  $\xi_0 = -\operatorname{ctg} 2\beta$ ; (33)

$$a_\xi = \operatorname{cosec} 2\beta = \frac{1}{\sin 2\beta}. \quad (34)$$

Подставив (28), (33) и (34) в (32), получим уравнение:

$$\xi^2 - 2\xi\xi_0 + \xi_0^2 + \eta^2 = a_\xi^2, \text{ т.е.}$$

$$(\xi - \xi_0)^2 + \eta^2 = a_\xi^2. \quad (35)$$

Мы получили уравнение пучка эллиптических окружностей [3]. Точки  $\eta_0 = \pm 1$  являются базисными для пучка эллиптических окружностей, который позволит построить семейство окружностей с параметром  $\beta$ .

### ВЫВОДЫ

Таким образом, решена задача определения коэффициента эллиптичности и угла ориентации поляризационного эллипса в линейно-поляризованном базисе с произвольным углом между компонентами электромагнитной волны.

Полученные результаты можно обобщить на решение наиболее общей задачи анализа поляризационных характеристик электромагнитной волны в произвольном (неортогональном) эллиптически поляризованном базисе. Решение задачи в случае ортогонального эллиптически-поляризованного базиса получено в [1].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канарейкин Д. Б., Павлов М.В., Потехин В.А.. Поляризация радиолокационных сигналов. М.: Сов. радио, 1966, – 440 с.
2. Горобец Н.Н., Давидчевский Ю.И. Направления и методы поляризационного анализа электромагнитных волн. – Харьков: Из-во ХГУ, 1980. – 66с.
3. Аргунов Б. И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости. –М.: Просвещение, 1957. – 267с.