МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

А. М. Вишнякова
О. О. Заварзіна

# ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Навчальний посібник

Харків – 2024

УДК 51: 512.642 (512.643, 512.644)
В 55

**Рецензенти:**

**Є. О. Севостьянов** – завідувач кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики фізико-математичного факультету Житомирського державного університету імені Івана Франка, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;

**Є. О. Каролінський** – доцент кафедри фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

*Затверджено до друку рішенням Вченої ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 17 від 2 жовтня 2023 року )*

**Вишнякова А. М.**

В 55 Лінійна алгебра : навчальний посібник / А. М. Вишнякова, О. О. Заварзіна. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2024. – 160 с.

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал з тем «Лінійні простори», «Алгебра матриць», «Системи лінійних рівнянь», «Лінійні оператори у скінченновимірних лінійних просторах», «Простори Евкліда», «Лінійні оператори в евклідових просторах», а також розділ «Типові вправи», що містить певну кількість задач з повними розв'язками. Посібник призначений для студентів, що вивчають курс «Лінійна алгебра», і викладачів, що його викладають.

**УДК 51: 512.642 (512.643, 512.644)**

© Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 2024
© Вишнякова А. М., Заварзіна О. О., 2024
© Дончик І. М., макет обкладинки, 2024

---

Навчальне видання

**Вишнякова** Анна Марківна
**Заварзіна** Олеся Олегівна

**ЛІНІЙНА АЛГЕБРА**

Навчальний посібник

Коректор *О. В. Анцибора*
Комп’ютерне верстання *О. О. Заварзіна*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 6,4. Наклад 100 пр. Зам. № 69/23.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна

# ЗМІСТ

**Перелік умовних позначень** . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
**Вступ** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
**Розділ 1. Лінійні простори** . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9
1.1 **Означення лінійного простору** . . . . . . . . . . . . . . . . 9
1.2 **Лінійно незалежні та лінійно залежні системи векторів** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
1.3 **Максимальні лінійно незалежні системи векторів** . . 16
1.4 **Підпростори лінійного простору** . . . . . . . . . . . . 24
1.5 **Лінійна оболонка системи векторів** . . . . . . . . . 26
1.6 **Сума і перетин лінійних підпросторів** . . . . . . . . . 28
1.7 **Пряма сума підпросторів. Пряме доповнення підпростору** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31
**Розділ 2. Операції над матрицями** . . . . . . . . . . . . . 33
2.1 **Додавання та множення матриць. Обернена матриця** 33
2.2 **Ранг матриці. Теорема про ранг матриці** . . . . . . . 40
**Розділ 3. Системи лінійних рівнянь** . . . . . . . . . . . 45
3.1 **Розв'язок систем лінійних рівнянь. Теорема Кронекера–Капеллі. Правило Крамера** . . . . . . . . 45
3.2 **Системи однорідних лінійних рівнянь. Зв'язок між розв'язками неоднорідної і відповідної однорідної систем лінійних рівнянь** . . . . . . . . . . . . . . . . 53
**Розділ 4. Лінійні оператори в скінченновимірних лінійних просторах** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
4.1 **Координати вектора в базисі. Перетворення координат вектора при зміні базису** . . . . . . . . . . 60

4.2 Означення лінійного оператора. Матриця лінійного оператора у заданому базисі. Дії над операторами і їхніми матрицями . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65

4.3 Образ і ядро лінійного оператора . . . . . . . . . . . 70

4.4 Перетворення матриці лінійного оператора при зміні базису . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 73

4.5 Власні числа та власні вектори лінійного оператора 74

4.6 Лінійна незалежність власних векторів, які відповідають різним власним числам. Визначник Вандермонда . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 78

4.7 Діагоналізовність лінійних операторів. Власні підпростори. Алгебраїчна і геометрична кратності власного числа . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 84

Розділ 5. Евклідові простори . . . . . . . . . . . . . . . 90

5.1 Скалярний добуток та його властивості . . . . . . . . 90

5.2 Нерівність Коші–Буняковського . . . . . . . . . . . . . 92

5.3 Норма вектора . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 94

5.4 Ортонормовані системи векторів та ортонормовані базиси . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 96

5.5 Ортогональне доповнення до підпростору . . . . . . 100

Розділ 6. Лінійні оператори в евклідових просторах . . . 102

6.1 Лінійні функціонали в евклідових просторах . . . . . 102

6.2 Спряжений лінійний оператор і його властивості . . 103

6.3 Самоспряжені лінійні оператори у евклідових просторах . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 107

6.4 Унітарні лінійні оператори у евклідових просторах . 113

6.5 Спектральна теорема для унітарних лінійних операторів у комплексному евклідовому просторі . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 115

6.6 **Унітарні лінійні оператори у двовимірному дійсному евклідовому просторі** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 117
6.7 **Спектральна теорема для унітарних лінійних операторів у дійсному евклідовому просторі** . . . . . 121
6.8 **Нормальні лінійні оператори у евклідових просторах** 127
**Розділ 7. Типові вправи** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 132
7.1 **Лінійні простори та лінійна незалежність** . . . . . . . . 132
7.2 **Ранг матриці** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 136
7.3 **Системи лінійних рівнянь** . . . . . . . . . . . . . . . . . 138
7.4 **Лінійні простори (продовження)** . . . . . . . . . . . . 141
7.5 **Обернена матриця** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 148
7.6 **Лінійні оператори** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 151
7.7 **Власні числа та вектори лінійних операторів** . . . . . 155
**Література** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 160

## Перелік умовних позначень

$A_e$ – матриця лінійного оператора $A : L \to L$ в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ лінійного простору $L$.

$B^t$ – матриця, яка є транспонованою до матриці $B$.

$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел.

$C[0,1]$ – множина дійсних неперервних функцій на відрізку $[0,1]$.

$\deg P$ – степінь многочлена $P$.

$\det A$ – детермінант квадратної матриці $A$.

$\dim L$ – розмірність лінійного простору $L$.

$F[x]$ – множина многочленів від змінної $x$ над полем $F$.

$F_n[x]$ – множина многочленів від змінної $x$ над полем $F$ зі степенями не більшими за $n$.

$\operatorname{Im} A$ – образ оператора $A$.

$\operatorname{Ker} A$ – ядро оператора $A$.

$\operatorname{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – лінійна оболонка системи векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$\operatorname{Mat}(m \times n, F)$ – множина матриць розміру $m \times n$ з елементами з поля $F$.

$M_{i_1 i_2 \cdots i_r}^{j_1 j_2 \cdots j_r}$ – мінор матриці, сформований рядками $i_1, i_2, \cdots i_r$ та стовпчиками $j_1, j_2, \cdots j_r$, тобто визначник підматриці, яка міститься на перетині рядків з номерами $i_1, i_2, \cdots i_r$ та стовпчиків з номерами $j_1, j_2, \cdots j_r$.

$M'{}_{i_1 i_2 \cdots i_r}^{j_1 j_2 \cdots j_r}$ – доповнювальний мінор до мінору $M_{i_1 i_2 \cdots i_r}^{j_1 j_2 \cdots j_r}$ матриці, тобто визначник матриці, яка утворюється з даної матриці після викреслення рядків з номерами $i_1, i_2, \cdots i_r$ та стовпчиків з номерами $j_1, j_2, \cdots j_r$.

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел.

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел.

$\mathbb{R}^+$ – множина дійсних невід'ємних чисел.

$\operatorname{rank}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – ранг системи векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$\operatorname{tr} A$ – слід оператора $A$.

$T^*$ – лінійний оператор, який є спряженим до лінійного оператора $T$ у евклідовому просторі.

$T|_L$ – звуження лінійного оператора $T$ на інваріантний лінійний підпростір $L$.

$U < L$ – підмножина $U$ лінійного простору $L$ є підпростором лінійного простору $L$.

$U + V$ – сума лінійних підпросторів $U$ і $V$.

$U \oplus V$ – пряма сума лінійних підпросторів $U$ і $V$.

$U \cap V$ – перетин лінійних підпросторів $U$ і $V$.

$V^{\perp}$ – ортогональне доповнення лінійного підпростору $V$ евклідового простору $E$.

$\|x\|$ – норма елемента $x$ евклідового простору $E$.

$x_e$ – стовпець координат вектора $x \in L$ в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ лінійного простору $L$.

$\langle x, y \rangle$ – скалярний добуток елементів $x$ та $y$ евклідового простору $E$.

$\overline{z}$ – комплексно спряжений елемент до елемента $z \in \mathbb{C}$.

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел.

$\chi_A(\lambda)$ – характеристичний многочлен лінійного оператора $A$.

## Вступ

Матеріали даного навчального посібника за змістом і впорядкуванням майже повністю відповідають першій частині курсу «Лінійна алгебра, який вже більше двадцяти років читається у другому семестрі першого курсу для студентів спеціальностей «Математика» і «Прикладна математика» (а зараз ще і «Середня освіта") на факультеті математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Перші шість розділів містять теоретичний матеріал з тем «Лінійні простори", «Алгебра матриць», «Системи лінійних рівнянь», «Лінійні оператори у скінченновимірних лінійних просторах», «Простори Евкліда», «Лінійні оператори в евклідових просторах». Сьомий розділ – практичний, він складається з деяких типових задач з повними розв'язками. Перші практичні заняття курсу традиційно присвячені вивченню визначників, але з цієї теми вже є посібники, які містять всі необхідні матеріали. Тому цю тему не включено до розділу "Типові вправи". Так само до посібника не включені задачі, які відповідають розділам «Евклідові простори» та «Лінійні оператори в евклідових просторах», тому що ці задачі, зазвичай, розв'язуються вже у другій частині курсу «Лінійна алгебра» на другому курсі.

Автори глибоко вдячні доценту кафедри фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна Є. О. Каролінському за цінні зауваження і пропозиції, які покращили текст посібника.

# Розділ 1

# Лінійні простори

## 1.1 Означення лінійного простору

**Означення 1.1.** Нехай задані довільне поле $F$ і непорожня множина $L \neq \emptyset$, і нехай виконуються наступні твердження.

I. На множині $L$ задана бінарна операція $+ : L \times L \to L$, яка називається додаванням, і ця операція має наступні властивості.

1. Асоціативність: для довільних $a, b, c \in L$ виконується $(a+b)+c = a+(b+c)$.

2. Комутативність: для довільних $a, b \in L$ виконується $a+b = b+a$.

3. Існує нейтральний елемент за додаванням: існує $\mathbf{0} \in L$, такий, що для довільного $a \in L$ виконується $a + \mathbf{0} = a$.

4. У кожного елемента $L$ існує обернений за додаванням (його називають протилежним): для довільного $a \in L$ існує $b \in L$, такий, що $a + b = \mathbf{0}$.

II. Задане відображення $\cdot : F \times L \to L$, яке називається множенням на скаляр, і це відображення має наступні властивості.

5. Для довільних $\alpha, \beta \in F$ і $x \in L$ виконується $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ (тут $\alpha\beta$ – добуток елементів $\alpha$ і $\beta$ в полі $F$).

6. Для довільних $\alpha, \beta \in F$ і $x \in L$ виконується $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.

7. Для довільних $x, y \in L$ і $\alpha \in F$ виконується $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

8. Для довільного $x \in L$ виконується $1 \cdot x = x$ (тут $1 \in F$ – нейтральний елемент поля $F$ за множенням).

Тоді множина $L$ із заданими операціями додавання і множення на скаляр називається **лінійним** (або **векторним) простором над полем** $F$.

Елементи лінійного простору $L$ називають **векторами**, а елементи поля $F$ – **скалярами** (або числами). Нейтральний елемент простору $L$ за

додаванням (ми його позначаємо $\mathbf{0}$) називають **нульовим вектором**.

Ми спочатку доведемо деякі наслідки з аксіом лінійного простору, а потім наведемо приклади.

**Наслідок 1.2.** *Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$. Нехай $0 \in F$ – нейтральний елемент поля за додаванням, і задано довільний елемент $x \in L$. Тоді виконується рівність $0 \cdot x = \mathbf{0}$.*

*Доведення.* Ми маємо

$$0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x. \qquad (*)$$

Оскільки $0 \cdot x \in L$, то існує $y \in L$, такий що $0 \cdot x + y = \mathbf{0}$. Додамо вектор $y$ до обох частин рівності $(*)$. Ми маємо $\mathbf{0} = 0 \cdot x + y = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + y = 0 \cdot x + (0 \cdot x + y) = 0 \cdot x + \mathbf{0} = 0 \cdot x$. Тобто $0 \cdot x = \mathbf{0}$. □

**Наслідок 1.3.** *Нехай $\alpha \in F$ – довільний елемент поля. Тоді виконується рівність $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.*

Доведіть цю властивість самостійно.

**Наслідок 1.4.** *Якщо для деяких $\alpha \in F$ і $x \in L$ виконується $\alpha \cdot x = \mathbf{0}$, то $\alpha = 0$ або $x = \mathbf{0}$.*

*Доведення.* Припустимо, що $\alpha \neq 0$. Треба довести, що тоді $x = \mathbf{0}$. З того, що $\alpha \neq 0$, випливає (аксіома поля), що існує такий $\alpha^{-1} \in F$, що $\alpha^{-1}\alpha = 1$. Тому ми маємо $\mathbf{0} = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0} = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = (\alpha^{-1}\alpha) \cdot x = 1 \cdot x = x$. Тобто $x = \mathbf{0}$. □

**Наслідок 1.5** (єдиність нульового вектора)**.** *Нехай існує $\mathbf{0}_1 \in L$, такий, що для довільного $x \in L$ виконується $x + \mathbf{0}_1 = x$. Тоді $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}$.*

*Доведення.* Ми маємо $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}$. Перша рівність випливає з означення вектора $\mathbf{0}$, остання – вектора $\mathbf{0}_1$. □

**Наслідок 1.6** (єдиність протилежного вектора)**.** *Нехай $x \in L$ – довільний вектор. Нехай є два вектори $y, z \in L$, такі, що $x + y = \mathbf{0}$ і $x + z = \mathbf{0}$. Тоді $y = z$.*

*Доведення.* Ми маємо $z = z+\mathbf{0} = z+(x+y) = (z+x)+y = (x+z)+y = \mathbf{0}+y = y$. □

**Наслідок 1.7.** *Нехай* $-1 \in F$ *– такий елемент поля* $F$*, що* $(-1)+1 = 0$*, і нехай* $x \in L$ *– довільний вектор. Тоді протилежним до вектора* $x$ *є вектор* $(-1)\cdot x$*.*

*Доведення.* Ми маємо $(-1)\cdot x + x = (-1)\cdot x + 1\cdot x = ((-1)+1)\cdot x = 0\cdot x = \mathbf{0}$. Тобто вектор $(-1)\cdot x$ є протилежним для $x$, а ми вже довели єдиність протилежного. □

Відзначимо, що, як і при множенні чисел, крапку як знак множення у випадку множення скаляра на вектор часто опускають і пишуть $\alpha x$ замість $\alpha \cdot x$.

**Приклад 1.8.** В певному сенсі головний приклад лінійного простору для нашого курсу. Пізніше, в теоремі 4.2, ми пояснимо, чому цей приклад є таким важливим. Нехай $F$ – довільне поле і $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо множину

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F \right\},$$

тобто множину стовпців висоти $n$, елементами яких є скаляри із поля $F$. На множині $F^n$ задамо операції додавання і множення на елементи $F$ наступним чином:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

і

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}$$

для довільних $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \lambda \in F$. Тобто додавання стовпців і множення стовпця на скаляр проводиться покоординатно.

Перевірте, що множина $F^n$ із заданими операціями додавання і множення на скаляри з $F$ є лінійним простором над полем $F$.

**Приклад 1.9.** Розглянемо множину дійсних неперервних функцій на відрізку: $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \;:\; f -$ неперервна функція$\}$. На цій множині розглянемо звичайні операції додавання функцій і множення функцій на дійсні числа. Перевірте, що множина $C[0,1]$ із заданими операціями додавання і множення на скаляри з $\mathbb{R}$ є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$.

**Приклад 1.10.** Нехай $F$ – довільне поле. Розглянемо множину $F[x]$ многочленів від змінної $x$ над полем $F$. На цій множині розглянемо звичайні операції додавання многочленів і множення многочленів на скаляри з поля $F$. Перевірте, що множина $F[x]$ із заданими операціями додавання і множення на скаляри з $F$ є лінійним простором над полем $F$.

**Приклад 1.11.** Нехай $F$ – довільне поле і $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо множину $F_n[x] = \{P \in F[x] \;:\; \deg P \leqslant n\}$ многочленів від змінної $x$ над полем $F$ зі степенями, не більшими за $n$. На цій множині розглянемо звичайні операції додавання многочленів і множення многочленів на скаляри з поля $F$. Перевірте, що множина $F_n[x]$ із заданими операціями додавання і множення на скаляри з $F$ є лінійним простором над полем $F$.

**Означення 1.12.** Нехай $L_1$ і $L_2$ – два лінійні простори над одним і тим самим полем $F$. Бієктивне відображення $T : L_1 \to L_2$ називається **ізоморфізмом** просторів $L_1$ і $L_2$, якщо для довільних векторів $x, y \in L_1$ і довільних скалярів $\alpha, \beta \in F$ виконується $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.

**Вправа 1.13.** Нехай $L_1$ і $L_2$ – два лінійні простори над полем $F$, $T : L_1 \to L_2$ – ізоморфізм. Оскільки $T$ – бієктивне відображення, то існує обернене відображення $T^{-1} : L_2 \to L_1$. Доведіть, що обернене відображення $T^{-1}$ має наступну властивість: для довільних векторів $u, v \in$

$L_2$ і довільних скалярів $\alpha, \beta \in F$ виконується $T^{-1}(\alpha u + \beta v) = \alpha T^{-1}(u) + \beta T^{-1}(v)$. Тобто обернене відображення $T^{-1}$ також є ізоморфізмом.

**Означення 1.14.** Два лінійні простори $L_1$ і $L_2$ над полем $F$ називаються **ізоморфними**, якщо існує ізоморфізм $T : L_1 \to L_2$.

**Приклад 1.15.** Нехай $F$ – довільне поле і $n \in \mathbb{N}$. Нехай $L_1 = F_n[x]$ і $L_2 = F^{n+1}$. Розглянемо відображення $T : L_1 \to L_2$, таке, що

$$T(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in F.$$

Перевірте, що відображення $T$ є ізоморфізмом просторів $L_1$ і $L_2$, тобто ці два простори є ізоморфними.

## 1.2 Лінійно незалежні та лінійно залежні системи векторів

Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$.

**Означення 1.16.** Нехай задані довільне $n \in \mathbb{N}$, довільна система з $n$ векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ і довільна система з $n$ скалярів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$. Вектор $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \in L$ називається **лінійною комбінацією** векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. У випадку, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, лінійна комбінація називається тривіальною (вона дорівнює нульовому вектору $\mathbf{0}$).

**Означення 1.17.** Система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ називається **лінійно незалежною**, коли з того, що їхня лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору, випливає, що ця лінійна комбінація є тривіальною: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Тобто система векторів є лінійно незалежною, коли ТІЛЬКИ тривіальна їхня лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору (якщо лінійна комбінація є нетривіальною, тобто якщо хоча б один з коефіцієнтів не дорівнює нулю, то лінійна комбінація не дорівнює нульовому вектору).

**Зауваження 1.18.** Із означення випливає, що порожня система векторів (яка не містить жодного вектора) є лінійно незалежною.

**Означення 1.19.** Система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ називається **лінійно залежною**, коли вона не є лінійно незалежною, тобто коли існує нетривіальна лінійна комбінація цих векторів, яка дорівнює нульовому вектору: $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n = \mathbf{0}$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in F$, причому існує $j = 1, 2, \ldots, n$, такий, що $\beta_j \neq 0$.

**Твердження 1.20.** *Система з одного вектора $x \in L$ є лінійно незалежною тоді і тільки тоді, коли цей вектор є ненульовим: $x \neq \mathbf{0}$.*

*Доведення.* Якщо $x = \mathbf{0}$, то ця система із одного вектора є лінійно залежною, тому що існує нетривіальна лінійна комбінація, яка дорівнює нульовому вектору: $1 \cdot x = \mathbf{0}$. Якщо $x \neq \mathbf{0}$, то ця система із одного вектора є лінійно незалежною, тому що, як було доведено, $\alpha x = \mathbf{0}, x \neq \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0$. □

**Твердження 1.21.** *Якщо система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ є лінійно незалежною, то жоден з цих векторів не є нульовим: для довільного $j = 1, 2, \ldots, n$ виконується $x_j \neq \mathbf{0}$. Еквівалентно, якщо система векторів містить нульовий вектор, то вона є лінійно залежною.*

*Доведення.* Нехай існує таке $j = 1, 2, \ldots, n$, що $x_j = \mathbf{0}$. Тоді існує нетривіальна лінійна комбінація цих векторів, яка дорівнює нульовому вектору, а саме $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_{j-1} + 1 \cdot x_j + 0 \cdot x_{j+1} + \ldots + 0 \cdot x_n = \mathbf{0}$. Тобто ця система векторів є лінійно залежною. □

**Твердження 1.22.** *Система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один з цих векторів є лінійною комбінацією решти, тобто коли існує таке $j = 1, 2, \ldots, n$ і такі скаляри $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{j-1}, \gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_n \in F$, що виконується $x_j = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_{j-1} x_{j-1} + \gamma_{j+1} x_{j+1} + \ldots + \gamma_n x_n$ (в цьому випадку кажуть, що вектор $x_j$ виражається через решту векторів).*

*Доведення.* За означенням, система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли існує нетривіальний набір скалярів $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in F$, тобто такий, що існує $j = 1, 2, \ldots, n$, для якого $\beta_j \neq 0$, а лінійна комбінація векторів з цими коефіцієнтами дорівнює нульовому вектору: $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n = \mathbf{0}$. Остання рівність є еквівалентною наступній $\beta_j x_j = -\beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \ldots - \beta_{j-1} x_{j-1} - \beta_{j+1} x_{j+1} - \ldots - \beta_n x_n$. Оскільки $\beta_j \neq 0$, то існує елемент $\beta_j^{-1} \in F$ такий, що $\beta_j^{-1}\beta_j = 1$. Тобто ми маємо: $\beta_j^{-1}\beta_j x_j = -\beta_j^{-1}\beta_1 x_1 - \beta_j^{-1}\beta_2 x_2 - \ldots - \beta_j^{-1}\beta_{j-1} x_{j-1} - \beta_j^{-1}\beta_{j+1} x_{j+1} - \ldots - \beta_j^{-1}\beta_n x_n$. Оскільки $\beta_j^{-1}\beta_j x_j = 1 \cdot x_j = x_j$, то, вводячи позначення $\gamma_1 = -\beta_j^{-1}\beta_1, \gamma_2 = -\beta_j^{-1}\beta_2, \ldots, \gamma_{j-1} = -\beta_j^{-1}\beta_{j-1}, \gamma_{j+1} = -\beta_j^{-1}\beta_{j+1}, \ldots, \gamma_n = -\beta_j^{-1}\beta_n$, ми маємо $x_j = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_{j-1} x_{j-1} + \gamma_{j+1} x_{j+1} + \ldots + \gamma_n x_n$. □

**Твердження 1.23.** *Нехай система векторів* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ *є лінійно незалежною. Тоді для довільного* $j = 1, 2, \ldots, n$ *система векторів* $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ *також є лінійно незалежною. Тобто якщо із лінійно незалежної системи векторів прибрати довільний вектор, то нова система також буде лінійно незалежною.*

*Доведення.* Для перевірки лінійної незалежності нової системи векторів розглянемо довільну їх лінійну комбінацію, яка дорівнює нульовому вектору. Тобто нехай набір скалярів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{j-1}, \gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_n \in F$ є таким, що $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_{j-1} x_{j-1} + \gamma_{j+1} x_{j+1} + \ldots + \gamma_n x_n = \mathbf{0}$. Запишемо це у вигляді $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_{j-1} x_{j-1} + 0 \cdot x_j + \gamma_{j+1} x_{j+1} + \ldots + \gamma_n x_n = \mathbf{0}$. Це є лінійною комбінацією початкової системи векторів $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n$, яка за умовою є лінійно незалежною. Тому усі коефіцієнти цієї лінійної комбінації дорівнюють нулю: $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{j-1} = 0 = \gamma_{j+1} = \ldots = \gamma_n = 0$. Тобто $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{j-1} = \gamma_{j+1} = \ldots = \gamma_n = 0$. Ми довели, що система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ є лінійно незалежною. □

**Твердження 1.24.** *Нехай система векторів* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ *є лінійно залежною. Тоді для довільного* $y \in L$ *система векторів*

*$x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ також є лінійно залежною. Тобто якщо до лінійно залежної системи векторів додати довільний вектор, то нова система також буде лінійно залежною.*

Доведіть цю властивість лінійно залежних систем векторів самостійно.

**Задача 1.25.** Нехай $L$ – лінійний простір над полем $\mathbb{R}$, $x, y \in L$ – лінійно незалежна система векторів. Доведіть, що система векторів $x + y, x - y \in L$ також є лінійно незалежною.

## 1.3 Максимальні лінійно незалежні системи векторів

Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$.

**Означення 1.26.** Система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ називається **максимальною лінійно незалежною** системою векторів, якщо виконуються наступні дві властивості:

1. Ця система векторів є лінійно незалежною.

2. Для довільного $y \in L$ система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ є лінійно залежною.

Тобто максимальна лінійно незалежна система векторів є лінійно незалежною, а при додаванні довільного вектора вона стає лінійно залежною.

**Означення 1.27.** Лінійний простір називається **скінченновимірним**, якщо в ньому існує скінченна максимальна лінійно незалежна система векторів.

**Означення 1.28.** Максимальна лінійно незалежна система векторів у просторі $L$ називається **базисом** простору $L$.

**Зауваження 1.29.** Із означення випливає, що порожня система векторів є базисом лінійного простору, який складається лише з нульового вектора. Тобто якщо $L = \{\mathbf{0}\}$, то $\emptyset$ є базисом простору $L$. Тому нульовий лінійний простір $L = \{\mathbf{0}\}$ є скінченновимірним, бо в ньому існує скінченна

максимальна лінійно незалежна система векторів (ця система містить нуль векторів).

Із означення базису випливає наступне твердження.

**Твердження 1.30.** *Нехай система векторів* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *є базисом лінійного простору* $L$. *Тоді для довільного* $x \in L$ *існує єдиний впорядкований набір чисел* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$, *такий, що* $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$.

*Доведення.* Система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є максимальною лінійно незалежною системою в $L$, тобто ця система є лінійно незалежною, а при додаванні довільного вектора вона стає лінійно залежною. Нехай $x$ – довільний вектор простору $L$. Тоді $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$ є лінійно залежною системою, тобто існує її нетривіальна лінійна комбінація, яка дорівнює нульовому вектору: $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n + \beta_{n+1} x = \mathbf{0}$, $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1} \in F$, і існує $j = 1, 2, \ldots, n+1$, такий, що $\beta_j \neq 0$. Якщо $\beta_{n+1} = 0$, то $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n = \mathbf{0}$, звідки $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$ із лінійної незалежності системи $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Це суперечить нетривіальності набору $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$. Тому $\beta_{n+1} \neq 0$, і ми маємо $x = -\frac{\beta_1}{\beta_{n+1}} x_1 - \frac{\beta_2}{\beta_{n+1}} x_2 - \ldots - \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} x_n$. Позначаючи $\alpha_j = -\frac{\beta_j}{\beta_{n+1}}$ для $j = 1, 2, \ldots, n$, ми отримуємо потрібне зображення.

Доведемо єдиність. Нехай для деякого вектора $x \in L$ існують два зображення у вигляді лінійних комбінацій векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ : $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ і $x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_n x_n$. Тоді $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_n x_n$, тобто $(\alpha_1 - \gamma_1) x_1 + (\alpha_2 - \gamma_2) x_2 + \ldots + (\alpha_n - \gamma_n) x_n = \mathbf{0}$. Із лінійної незалежності системи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ отримуємо $\alpha_1 - \gamma_1 = \alpha_2 - \gamma_2 = \ldots = \alpha_n - \gamma_n = 0$, тобто $\alpha_1 = \gamma_1, \alpha_2 = \gamma_2, \ldots, \alpha_n = \gamma_n$. □

Доведіть самостійно обернене твердження.

**Твердження 1.31.** *Нехай задана система векторів* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$. *Припустимо, що для довільного* $x \in L$ *існує єдиний впорядкований*

*набір чисел* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$, *такий, що* $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$. *Тоді система* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *є базисом простору* $L$.

Наступна лема відіграватиме фундаментальну роль у подальшому.

**Лема 1.32** (Гаусс). *Нехай задані довільне* $n \in \mathbb{N}$ *і довільна система з* $n$ *векторів* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$. *Нехай задані* $n+1$ *векторів простору* $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1} \in L$, *кожен з яких є лінійною комбінацією векторів* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ :

$$y_1 = \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \ldots + \gamma_{1n}x_n$$

$$y_2 = \gamma_{21}x_1 + \gamma_{22}x_2 + \ldots + \gamma_{2n}x_n$$

$$\vdots$$

$$y_n = \gamma_{n1}x_1 + \gamma_{n2}x_2 + \ldots + \gamma_{nn}x_n$$

$$y_{n+1} = \gamma_{n+1,1}x_1 + \gamma_{n+1,2}x_2 + \ldots + \gamma_{n+1,n}x_n.$$

*Тут* $\gamma_{ij} \in F,\ 1 \leqslant i \leqslant n+1,\ 1 \leqslant j \leqslant n$ *– довільні скаляри. Тоді система векторів* $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ *є лінійно залежною.*

*Доведення.* Ми будемо проводити доведення індукцією за $n$.

1. База індукції $n = 1$. Тобто заданий вектор $x \in L$ і два вектори $y_1, y_2$, які є його лінійними комбінаціями: $y_1 = \alpha x,\ y_2 = \beta x,\ \alpha, \beta \in F$. Якщо $\alpha = 0$, то $y_1 = \mathbf{0}$, і система $y_1, y_2$ є лінійно залежною. Якщо $\alpha \neq 0$, то існує $\alpha^{-1} \in F$, таке, що $\alpha^{-1}\alpha = 1$. Тоді розглянемо нетривіальну лінійну комбінацію векторів $y_1, y_2 : -\beta\alpha^{-1}y_1 + 1 \cdot y_2 = -\beta\alpha^{-1}\alpha x + 1 \cdot \beta x = -\beta x + \beta x = \mathbf{0}$. Ми знайшли нетривіальну лінійну комбінацію векторів $y_1, y_2$, яка дорівнює нульовому вектору. Тому система векторів $y_1, y_2$ є лінійно залежною. Базу індукції доведено.

2. Індуктивний перехід. Нехай твердження леми є доведеним для довільних $n-1$ вектора $(n = 2, 3, \ldots)$. Доведемо твердження для довільних $n$ векторів. Нехай задані довільні $n$ векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$. Нехай задані $n+1$ векторів простору $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1} \in L$, кожен з яких є лінійною комбінацією векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ :

$$y_1 = \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \ldots + \gamma_{1n}x_n$$

$$y_2 = \gamma_{21}x_1 + \gamma_{22}x_2 + \ldots + \gamma_{2n}x_n$$

$$\vdots$$

$$y_n = \gamma_{n1}x_1 + \gamma_{n2}x_2 + \ldots + \gamma_{nn}x_n$$

$$y_{n+1} = \gamma_{n+1,1}x_1 + \gamma_{n+1,2}x_2 + \ldots + \gamma_{n+1,n}x_n.$$

Якщо $\gamma_{11} = \gamma_{21} = \ldots = \gamma_{n+1,1} = 0$, то $n$ векторів $y_1, y_2, \ldots, y_n$ є лінійними комбінаціями $n-1$ вектора $x_2, x_3 \ldots, x_n$. Тобто, за індуктивним припущенням, вектори $y_1, y_2, \ldots, y_n$ є лінійно залежними, звідки вектори $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ є лінійно залежними.

Припустимо тепер, що серед чисел $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{n+1,1}$ є принаймні одне, яке не дорівнює нулю. Не зменшуючи загальності, ми припустимо, що $\gamma_{11} \neq 0$.

Ми будемо множити перше рівняння на числа і додавати до усіх наступних рівнянь так, щоб в отриманих сумах рівнянь не було вектора $x_1$. Розглянемо довільне $j = 2, 3, \ldots, n+1$ і обчислимо

$$y_j - \gamma_{j1}\gamma_{11}^{-1}y_1 = \gamma_{j1}x_1 + \gamma_{j2}x_2 + \ldots + \gamma_{j1n}x_n -$$

$$\gamma_{j1}\gamma_{11}^{-1}(\gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \ldots + \gamma_{1n}x_n).$$

Зводячи подібні, ми отримуємо

$$y_j - \gamma_{j1}\gamma_{11}^{-1}y_1 = (\gamma_{j2} - \gamma_{j1}\gamma_{11}^{-1}\gamma_{12})x_2 + (\gamma_{j3} - \gamma_{j1}\gamma_{11}^{-1}\gamma_{13})x_3$$

$$+ \ldots + (\gamma_{jn} - \gamma_{j1}\gamma_{11}^{-1}\gamma_{1n})x_n =: \delta_{j2}x_2 + \delta_{j3}x_3 + \ldots + \delta_{jn}x_n$$

(в останній рівності ми використовуємо позначення $\delta_{jk} = \gamma_{jk} - \gamma_{j1}\gamma_{11}^{-1}\gamma_{1k} \in F$, $j = 2, 3 \ldots, n+1$, $k = 2, 3, \ldots, n)$. Тобто ми отримали такі нові рівняння

$$y_2 - \gamma_{21}\gamma_{11}^{-1}y_1 = \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \ldots + \delta_{2n}x_n$$

$$y_3 - \gamma_{31}\gamma_{11}^{-1}y_1 = \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \ldots + \delta_{3n}x_n$$

$$\vdots$$

$$y_{n+1} - \gamma_{n+1,1}\gamma_{11}^{-1}y_1 = \delta_{n+1,2}x_2 + \delta_{n+1,3}x_3 + \ldots + \delta_{n+1,n}x_n.$$

Таким чином, ми отримали набір з $n$ векторів $y_2 - \gamma_{21}\gamma_{11}^{-1}y_1, y_3 - \gamma_{31}\gamma_{11}^{-1}y_1, \ldots, y_{n+1} - \gamma_{n+1,1}\gamma_{11}^{-1}y_1$, кожен з яких є лінійною комбінацією

$n-1$ вектора $x_2, x_3, \ldots, x_n$. За індуктивним припущенням, $n$ векторів $y_2 - \gamma_{21}\gamma_{11}^{-1}y_1, y_3 - \gamma_{31}\gamma_{11}^{-1}y_1, \ldots, y_{n+1} - \gamma_{n+1,1}\gamma_{11}^{-1}y_1$ є лінійно залежними. Тому існує нетривіальний набір чисел $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{n+1} \in F$, тобто такий, що для деякого $k = 2, 3, \ldots, n+1$ виконується $\beta_k \neq 0$, і при цьому $\beta_2(y_2 - \gamma_{21}\gamma_{11}^{-1}y_1) + \beta_3(y_3 - \gamma_{31}\gamma_{11}^{-1}y_1) + \ldots + \beta_{n+1}(y_{n+1} - \gamma_{n+1,1}\gamma_{11}^{-1}y_1) = \mathbf{0}$. Зводячи подібні в останній рівності і позначаючи відповідний коефіцієнт при $y_1$ через $\alpha$, ми отримуємо

$$\alpha y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 + \ldots + \beta_{n+1} y_{n+1} = \mathbf{0}.$$

Ми отримали нетривіальну лінійну комбінацію векторів $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$, яка дорівнює нульовому вектору. Тому система векторів $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ є лінійно залежною. □

**Наслідок 1.33.** *Нехай задана лінійно незалежна система векторів* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ *і базис* $y_1, y_2, \ldots, y_m \in L$, $n, m \in \mathbb{N}$. *Тоді* $n \leqslant m$.

Тобто кількість векторів в довільній лінійно незалежній системі не може бути більшою, ніж в базисі.

*Доведення.* Система векторів $y_1, y_2, \ldots, y_m$ є максимальною лінійно незалежною, зокрема для довільного $j = 1, 2, \ldots, n$ система $y_1, y_2, \ldots, y_m, x_j$ є лінійно залежною. Тому існує нетривіальний набір чисел $\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{mj}, \beta_{m+1,j} \in F$, тобто такий, що для деякого $k = 1, 2, \ldots, m+1$ виконується $\beta_{kj} \neq 0$, і при цьому $\beta_{1j}y_1 + \beta_{2j}y_2 + \ldots + \beta_{mj}y_m + \beta_{m+1,j}x_j = \mathbf{0}$.

Якщо $\beta_{m+1,j} = 0$, то ми маємо лінійну комбінацію векторів $y_1, y_2, \ldots, y_m$, яка дорівнює нульовому вектору: $\beta_{1j}y_1 + \beta_{2j}y_2 + \ldots + \beta_{mj}y_m = \mathbf{0}$. Оскільки вектори $y_1, y_2, \ldots, y_m$ є лінійно незалежними, то всі коефіцієнти дорівнюють нулю: $\beta_{1j} = \beta_{2j} = \ldots = \beta_{mj} = 0$ і $\beta_{m+1,j} = 0$. Це є протиріччям з нетривіальністю набору $\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{mj}, \beta_{m+1,j}$. Тому $\beta_{m+1,j} \neq 0$, і існує такий $\beta_{m+1,j}^{-1} \in F$, що $\beta_{m+1,j}^{-1}\beta_{m+1,j} = 1$. Для довільного $j = 1, 2, \ldots, n$ ми маємо

$$\beta_{m+1,j}x_j = -\beta_{1j}y_1 - \beta_{2j}y_2 - \ldots - \beta_{mj}y_m,$$

або

$$x_j = -\beta_{m+1,j}^{-1}\beta_{1j}y_1 - \beta_{m+1,j}^{-1}\beta_{2j}y_2 - \ldots - \beta_{m+1,j}^{-1}\beta_{mj}y_m.$$

Тому кожен із векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є лінійною комбінацією векторів $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Якщо $n > m$, то за лемою 1.32 ми отримуємо, що система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є лінійно залежною. Але за умовою система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є лінійно незалежною, звідки $n \leqslant m$. □

**Наслідок 1.34.** *Якщо $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ і $y_1, y_2, \ldots, y_m \in L$, де $n, m \in \mathbb{N}$, – два базиси, то $n = m$.*

Доведіть цей наслідок самостійно.

Ми бачимо, що кількість векторів у максимальній лінійно незалежній системі векторів є інваріантом простору (однакова в усіх таких системах).

**Означення 1.35.** Кількість векторів в максимальній лінійно незалежній системі простору $L$ називається **розмірністю** простору $L$ і позначається $\dim L$. Позначення походить від англійського dimension – розмірність.

**Зауваження 1.36.** Для нульового лінійного простору $L = \{\mathbf{0}\}$ виконується $\dim L = 0$.

**Приклад 1.37.** Нехай $F$ – довільне поле, $n \in \mathbb{N}$ – довільне натуральне число. Розглянемо лінійний простір $F^n$ і в ньому наступний набір з $n$ векторів:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ у вектора $e_j$ координата з номером $j$ дорівнює одиниці, інші координати дорівнюють нулю).

Ми доведемо, що система векторів $e_1, e_2, \ldots, e_n$ є базисом простору $F^n$, тобто $\dim F^n = n$.

Перевіримо лінійну незалежність цієї системи. Нехай

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \mathbf{0},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$. Маємо

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки маємо $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Тобто система векторів $e_1, e_2, \ldots, e_n$ є лінійно незалежною.

Перевіримо, що система векторів $e_1, e_2, \ldots, e_n$ є максимальною лінійно незалежною системою. Нехай $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$ – довільний вектор простору ($x_j \in F$ для всіх $j = 1, 2, \ldots, n$). Перевіримо, що система векторів $e_1, e_2, \ldots, e_n, x$ є лінійно залежною. Дійсно, ми маємо нетривіальну лінійну комбінацію цих векторів, яка дорівнює нульовому вектору, а саме

$$1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \ldots - x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, система векторів $e_1, e_2, \ldots, e_n$ є базисом простору $F^n$, тобто $\dim F^n = n$.

**Задача 1.38.** Нехай $F$ – довільне поле, $n \in \mathbb{N}$ – довільне натуральне число. Розглянемо лінійний простір $F^n$ і в ньому наступний набір з $n$ векторів:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots, u_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(для кожного $j = 1, 2, \dots, n$ у вектора $u_j$ перші $j$ координат дорівнюють одиниці, інші координати дорівнюють нулю).

Доведіть, що система векторів $u_1, u_2, \dots, u_n$ є базисом простору $F^n$.

**Приклад 1.39.** Розглянемо лінійний простір $L = \mathbb{R}[x]$ дійсних многочленів від змінної $x$. Розглянемо нескінченну систему векторів $(x^k)_{k=0}^{\infty}$ в цьому просторі. Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ скінченна система векторів $(x^k)_{k=0}^{n}$ простору $L$ є лінійно незалежною (перевірте це!). Тому в цьому просторі немає скінченної максимальної лінійно незалежної системи векторів, цей простір не є скінченновимірним (кажуть, що розмірність простору $\mathbb{R}[x]$ дорівнює нескінченності).

**Теорема 1.40** (про доповнення лінійно незалежної системи векторів до базису простору)**.** *Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n = \dim L \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \dots, x_m \in L$ – лінійно незалежна система векторів, при цьому $m < n$. Тоді існують вектори $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n \in L$, такі, що $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ є базисом простору $L$.*

*Доведення.* Система векторів $x_1, x_2, \dots, x_m$ є лінійно незалежною, але вона не є максимальною лінійно незалежною системою, бо кожна максимальна лінійно незалежна система векторів в $L$ містить $n$ векторів, а $m < n$. Тому існує вектор $x_{m+1} \in L$, такий що система векторів $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}$ є лінійно незалежною. Міркуючи аналогічно, ми оберемо потрібні вектори $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$. □

Доведіть самостійно наступне просте твердження.

**Твердження 1.41.** *Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n = \dim L \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_m \in L$ – лінійно незалежна система векторів, $m < n$. Нехай $x \notin \mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Тоді система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_m, x$ є лінійно незалежною.*

## 1.4 Підпростори лінійного простору

Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$.

**Означення 1.42.** Непорожня підмножина простору $U \subset L$, $U \neq \emptyset$, називається **лінійним підпростором** простору $L$, якщо $U$ є лінійним простором з введеними в $L$ операціями додавання і множення на скаляр. Той факт, що $U$ є лінійним підпростором $L$, ми будемо позначати так: $U < L$.

**Твердження 1.43.** *Нехай $U \subset L$, $U \neq \emptyset$. Множина $U$ є лінійним підпростором простору $L$ тоді і тільки тоді, коли виконуються дві властивості:*

1. *Для довільних $x, y \in U$ виконується $x + y \in U$.*
2. *Для довільних $x \in U$ і $\lambda \in F$ виконується $\lambda x \in U$.*

*Доведення.* Якщо $U$ є лінійним підпростором $L$, то $U$ є лінійним простором над полем $F$, тому на $U$ задані операції додавання і множення на скаляри з $F$, тобто властивості 1 і 2 виконуються.

Треба довести обернене твердження. Нехай $U \subset L$, $U \neq \emptyset$, і нехай виконуються властивості 1 і 2.

Властивість 1 означає, що на $U$ задана операція додавання (тобто що та операція додавання, яка задана на множині $L$, є заданою і на $U$: сума векторів з $U$ належить до $U$). Оскільки операція додавання є асоціативною і комутативною на всій множині $L$, то вона, зокрема, є асоціативною і комутативною на множині $U$. Оскільки $U \neq \emptyset$, то існує вектор $z \in U$. Тоді $0 \cdot z = \mathbf{0} \in U$, тобто, із властивості 2, нульовий вектор належить до $U$. Крім того, для довільного $y \in U$ маємо $(-1) \cdot y \in U$, тобто протилежний вектор

до кожного вектора $U$ належить $U$. Виконуються всі потрібні властивості додавання.

Властивість 2 означає, що на $U$ задана операція множення векторів на скаляри з поля $F$.

Усі 4 аксіоми множення вектора на скаляр виконуються для довільних векторів з $L$ і довільних скалярів з $F$, зокрема вони виконуються для довільних векторів з $U$ і довільних скалярів з $F$. Тому множина $U$ сама є лінійним простором над полем $F$ відносно операцій, які є введеними в $L$. □

**Зауваження 1.44.** Твердження 1.43 можна сформулювати еквівалентним чином. Нехай $U \subset L$, $U \neq \emptyset$. Множина $U$ є лінійним підпростором простору $L$ тоді і тільки тоді, коли для довільних $x, y \in U$ і довільних $\lambda, \mu \in F$ виконується $\lambda x + \mu y \in U$.

В подальшому ми будемо використовувати наступне просте твердження.

**Твердження 1.45.** *Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $\dim L = n \in \mathbb{N}$. Нехай $U < L$ і виконується $\dim U = \dim L$. Тоді $U = L$.*

*Доведення.* Нам дано, що $U \subset L$, треба довести обернене включення. За умовою $\dim U = n$, оберемо якийсь базис підпростору $U$. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n \in U$ – базис $U$. Оскільки $U \subset L$, система векторів $e_1, e_2, \ldots, e_n$ належить до $L$. Оскільки ця система є лінійно незалежною і складається з $n$ векторів, а $n = \dim L$, то $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис $L$. Нехай $x \in L$ – довільний вектор простору $L$. Цей вектор можна розкласти за базисом, тобто існують скаляри $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$, такі що $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$. Але $e_1, e_2, \ldots, e_n \in U$, а $U$ є лінійним простором, тому лінійна комбінація векторів з $U$ належить до $U$, тобто $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n \in U$. Ми довели, що $L \subset U$, звідки $U = L$. □

## 1.5 Лінійна оболонка системи векторів

Як завжди, у нас $L$ – лінійний простір над полем $F$. Нехай $m \in \mathbb{N}$ і задані вектори $x_1, x_2, \ldots, x_m \in L$.

**Означення 1.46. Лінійною оболонкою** векторів $x_1, x_2, \ldots, x_m$ називається множина

$$\mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m \ : \ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in F\}.$$

Тобто лінійна оболонка системи векторів – це множина лінійних комбінацій цих векторів.

**Твердження 1.47.** *Нехай задані вектори* $x_1, x_2, \ldots, x_m \in L$. *Тоді* $\mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} < L$, *тобто* $\mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ *є лінійним підпростором* $L$.

*Доведення.* 1. Нехай задані довільні вектори $y, z \in \mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Тоді існують два набори скалярів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in F$ і $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in F$, такі, що виконується $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m$, $z = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m$. Звідси маємо

$$\begin{aligned} y + z &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) x_1 + (\alpha_2 + \beta_2) x_2 + \ldots + (\alpha_m + \beta_m) x_m \\ &\in \mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}. \end{aligned}$$

2. Нехай задані довільні $y \in \mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ і $\lambda \in F$. Тоді існує набір скалярів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in F$, такий, що $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m$, тому

$$\lambda y = \lambda \alpha_1 x_1 + \lambda \alpha_2 x_2 + \ldots + \lambda \alpha_m x_m \in \mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}.$$

Ми довели, що $\mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} < L$. □

Для відповіді на питання про розмірність лінійної оболонки нам потрібне поняття рангу системи векторів.

Нехай $m \in \mathbb{N}$ і задані вектори $x_1, x_2, \ldots, x_m \in L$.

**Означення 1.48.** **Рангом** системи векторів $x_1, x_2, \ldots, x_m \in L$ називається кількість елементів у найбільшій лінійно незалежній підмножині множини $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Ранг системи векторів позначається $\mathrm{rank}\ \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Позначення походить від англійського rank – ранг.

**Теорема 1.49.** *Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $m \in \mathbb{N}$ і $x_1, x_2, \ldots, x_m \in L$. Тоді*

$$\dim \mathrm{Lin}\ \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = \mathrm{rank}\ \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}.$$

*Доведення.* Позначимо $r := \mathrm{rank}\ \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$

1. Нехай $r = 0$. Тоді маємо ланцюг еквівалентних тверджень:

$$r = 0 \Leftrightarrow x_1 = \mathbf{0}, x_2 = \mathbf{0}, \ldots, x_m = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{Lin}\ \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim \mathrm{Lin}\ \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = 0.$$

2. Нехай $r \in \mathbb{N}$. Не зменшуючи загальності, ми будемо вважати, що $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – лінійно незалежні. Тоді для кожного $j = r+1, r+2, \ldots, m$ система $x_1, x_2, \ldots, x_r, x_j$ є лінійно залежною. Звідси для кожного $j = r+1, r+2, \ldots, m$ знайдуться скаляри $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{rj} \in F$, такі, що

$$x_j = \alpha_{1j}x_1 + \alpha_{2j}x_2 \ldots + \alpha_{rj}x_r.$$

Розглянемо довільний вектор $y \in \mathrm{Lin}\ \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Маємо:

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m =$$

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_r x_r +$$

$$\beta_{r+1}(\alpha_{1,r+1}x_1 + \alpha_{2,r+1}x_2 + \ldots + \alpha_{r,r+1}x_r) +$$

$$\beta_{r+2}(\alpha_{1,r+2}x_1 + \alpha_{2,r+2}x_2 + \ldots + \alpha_{r,r+2}x_r) + \ldots +$$

$$\beta_m(\alpha_{1,m}x_1 + \alpha_{2,m}x_2 + \ldots + \alpha_{r,m}x_r).$$

Після приведення подібних і перепозначення коефіцієнтів маємо

$$y = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_r x_r.$$

Тобто кожен вектор з лінійної оболонки є лінійною комбінацією векторів $x_1, x_2, \dots, x_r$. За лемою 1.32, серед векторів лінійної оболонки не більше за $r$ лінійно незалежних. Вектори $x_1, x_2, \dots, x_r$ – лінійно незалежні, тобто вони є базисом лінійної оболонки.

Ми довели, що

$$\dim \mathrm{Lin}\ \{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \mathrm{rank}\ \{x_1, x_2, \dots, x_m\}.$$

□

## 1.6 Сума і перетин лінійних підпросторів

Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $U < L, V < L$.

**Означення 1.50. Сумою лінійних підпросторів** $U$ і $V$ називається множина

$$U + V = \{x = u + v\ :\ u \in U, v \in V\}.$$

**Перетином лінійних підпросторів** $U$ і $V$ називається множина

$$U \cap V = \{x \in L\ :\ x \in U \wedge x \in V\}.$$

**Твердження 1.51.** *Нехай $U < L, V < L$. Тоді $U + V < L, U \cap V < L$.*

*Доведення.* 1. Оскільки $U \neq \emptyset$ і $U \neq \emptyset$, то $U + V \neq \emptyset$.

Нехай $x, y \in U + V, \lambda, \mu \in F$. Маємо $x, y \in U + V \Leftrightarrow$ існують такі $u_1, u_2 \in U, v_1, v_2 \in V$, що $x = u_1 + v_1, y = u_2 + v_2$. Звідки отримуємо $\lambda x + \mu y = \lambda u_1 + \lambda v_1 + \mu u_2 + \mu v_2 = (\lambda u_1 + \mu u_2) + (\lambda v_1 + \mu v_2) \in U + V$.

2. Оскільки $\mathbf{0} \in U$ і $\mathbf{0} \in V$, то $\mathbf{0} \in U \cap V$, тобто $U \cap V \neq \emptyset$.

Нехай $x, y \in U \cap V, \lambda, \mu \in F$. Маємо $x, y \in U$ і $x, y \in V \Rightarrow \lambda x + \mu y \in U$ і $\lambda x + \mu y \in V \Rightarrow \lambda x + \mu y \in U \cap V$. □

**Задача 1.52.** Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $U < L, V < L$. Тоді $U \cup V < L \Leftrightarrow U \subset V$ або $V \subset U$.

**Задача 1.53.** Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, поле $F$ містить нескінченну кількість елементів, $n \in \mathbb{N}$, $U_1 < L, U_2 < L, \dots, U_n < L$. Тоді

$$\cup_{j=1}^{n} U_j < L \Leftrightarrow \exists k = 1, 2, \dots, n : \quad U_k = \cup_{j=1}^{n} U_j.$$

Уточніть це твердження, вказавши зв'язок між числом $n$ і кількістю елементів в полі $F$, при якому виконується остання еквівалентність.

**Теорема 1.54** (формула Грассмана). *Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n = \dim L \in \mathbb{N}$, $U < L, V < L$. Тоді*

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim U \cap V.$$

*Доведення.* Розглянемо $U \cap V < L$. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – базис $U \cap V$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$, при цьому, якщо $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$, то $m = 0$ і система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_m$ є порожньою). Тобто $\dim(U \cap V) = m$. Система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – лінійно незалежна система в $U \cap V < U$. Доповнимо її до базису $U$. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_k$ – базис $U$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Тобто $\dim U = m + k$. Система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – лінійно незалежна система в $U \cap V < V$. Доповнимо її до базису $V$. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_m, z_1, z_2, \ldots, z_l$ – базис $V$ ($l = 0, 1, 2, \ldots$). Тобто $\dim V = m + l$.

Ми доведемо, що $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_k, z_1, z_2, \ldots, z_l$ – базис $U + V$. Тобто $\dim(U + V) = m + k + l$. Якщо ми це доведемо, то отримуємо

$$\dim(U + V) = m + k + l = (m + k) + (m + l) - m$$

$$= \dim U + \dim V - \dim(U \cap V),$$

тобто доведемо формулу Грассмана.

Перевіримо, що система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_k$, $z_1, z_2, \ldots, z_l$ є лінійно незалежною. Нехай

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_k y_k + \qquad (1.1)$$
$$\gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \ldots + \gamma_l z_l = \mathbf{0}.$$

Перепишемо останню рівність у вигляді $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_k y_k = -\gamma_1 z_1 - \gamma_2 z_2 - \ldots - \gamma_l z_l$. Ліва частина рівності є вектором з підпростору $U$ (розкладена за базисом $U$), права частина рівності є вектором з підпростору $V$ (розкладена за базисом $V$). Тобто обидві частини (які є рівними) є вектором перетину $U \cap V$. Розкладемо

ліву частину за базисом перетину:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_k y_k =$$

$$\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \ldots + \delta_m x_m \Leftrightarrow$$

$$(\alpha_1 - \delta_1)x_1 + (\alpha_2 - \delta_2)x_2 + \ldots + (\alpha_m - \delta_m)x_m + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_k y_k = \mathbf{0}.$$

Оскільки $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_k$ – лінійно незалежні (базис $U$), то усі коефіцієнти дорівнюють нулю, зокрема $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$.

Підставляючи в (7.4), отримуємо

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \ldots + \alpha_m x_m + \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \ldots + \gamma_l z_l = \mathbf{0}.$$

Оскільки $x_1, x_2, \ldots, x_m, z_1, z_2, \ldots, z_l$ – лінійно незалежні (базис $V$), то усі коефіцієнти дорівнюють нулю:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_l = 0.$$

Ми довели, що система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_k,\ z_1, z_2, \ldots, z_l$ є лінійно незалежною.

Доведемо, що ця система є базисом $U + V$. Оберемо довільне $w \in U + V$. Тоді $w = u + v$, де $u \in U, v \in V$. Маємо

$$u = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m + \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \ldots + \mu_k y_k;$$

$$v = \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \ldots + \nu_m x_m + \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \ldots + \xi_l z_l,$$

де $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_k, \nu_1, \ldots, \nu_m, \xi_1, \ldots, \xi_l \in F$.

Звідки

$$w = u + v = (\lambda_1 + \nu_1)x_1 + (\lambda_2 + \nu_2)x_2 + \ldots + (\lambda_m + \nu_m)x_m +$$

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \ldots + \mu_k y_k + \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \ldots + \xi_l z_l,$$

або

$$1 \cdot w - (\lambda_1 + \nu_1)x_1 - \ldots - (\lambda_m + \nu_m)x_m - \mu_1 y_1 - \ldots - \mu_k y_k - \xi_1 z_1 - \ldots - \xi_l z_l = \mathbf{0},$$

тобто система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_k,\ z_1, z_2, \ldots, z_l, w$ є лінійно залежною. Ми довели, що система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_k$, $z_1, z_2, \ldots, z_l$ є базисом $U + V$. □

## 1.7 Пряма сума підпросторів. Пряме доповнення підпростору

Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $U < L, V < L$.

**Означення 1.55.** Нехай $U < L, V < L$, $W = U + V$. Підпростір $W$ називається **прямою сумою** підпросторів $U$ і $V$, якщо для довільного $w \in W$ існує єдина пара $(u, v), u \in U, v \in V$, така, що $w = u + v$. Позначення прямої суми: $W = U \oplus V$.

**Означення 1.56.** Підпростір $V$ називається **прямим доповненням** підпростору $U$, якщо $U \oplus V = L$.

**Твердження 1.57.** *Нехай $U < L, V < L$, $W = U + V$. Сума підпросторів $U$ і $V$ є прямою сумою тоді і тільки тоді, коли $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.*

*Доведення.* Доведемо необхідність. Нехай $W = U \oplus V$. Треба довести, що $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. Нехай $z \in U \cap V$. Тоді $z = z + \mathbf{0}, z \in U, \mathbf{0} \in V$, і $z = \mathbf{0} + z, \mathbf{0} \in U, z \in V$. Із єдиності пари отримуємо $z = \mathbf{0}$.

Доведемо достатність. Нехай $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. Оскільки $W = U + V$, то для довільного $w \in W$ існує пара $(u, v), u \in U, v \in V$, така, що $w = u + v$. Доведемо єдиність цієї пари. Нехай $w \in W$, $w = u_1 + v_1, w = u_2 + v_2$, де $u_1, u_2 \in U, v_1, v_2 \in V$. Маємо $u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \Rightarrow u_1 - u_2 = v_2 - v_1$. Вектор в лівій частині рівності належить до $U$, в правій – до $V$. Тобто $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \in U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. Робимо висновок, що $u_1 = u_2, v_1 = v_2$. □

Таким чином, запис $W = U \oplus V$ означає, що $W = U + V$ і $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.

**Твердження 1.58** (існування прямого доповнення). *Нехай* $\dim L = n \in \mathbb{N}$ *і* $U < L$. *Тоді існує* $V < L$, *таке, що* $U \oplus V = L$.

*Доведення.* Якщо $U = \{\mathbf{0}\}$, то можемо взяти $V = L$. Якщо $U = L$, то можемо взяти $V = \{\mathbf{0}\}$. У випадку $1 \leqslant \dim U < \dim L$ розглянемо $x_1, x_2, \dots, x_m$ – довільний базис $U$ і доповнимо його до базису $L$. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ – базис $L$. Позначимо $V := \operatorname{Lin} \{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n\} < L$. Доведемо, що $U \oplus V = L$.

Для кожного $x \in L$ маємо розкладання за базисом $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m) + (\alpha_{m+1} x_{m+1} + \alpha_{m+2} x_{m+2} + \ldots + \alpha_n x_n) =: u + v$, де за означенням $u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m \in U$, $v = \alpha_{m+1} x_{m+1} + \alpha_{m+2} x_{m+2} + \ldots + \alpha_n x_n \in V$. Тобто $U + V = L$.

Нехай

$$z \in U \cap V \Leftrightarrow z \in U \wedge z \in V \Leftrightarrow$$

$$z = \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \ldots + \nu_m x_m \wedge z = \nu_{m+1} x_{m+1} + \nu_{m+2} x_{m+2} + \ldots + \nu_n x_n,$$

де $\nu_1, \ldots, \nu_n \in F$. Отже, $\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \ldots + \nu_m x_m - \nu_{m+1} x_{m+1} - \nu_{m+2} x_{m+2} - \ldots - \nu_n x_n = \mathbf{0}$. Оскільки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – базис $L$, тобто лінійно незалежна система, маємо $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_n = 0$, отже, $z = \mathbf{0}$, і $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. Ми отримали $U \oplus V = L$. $\square$

# Розділ 2

# Операції над матрицями

## 2.1 Додавання та множення матриць. Обернена матриця

Нехай $F$ – довільне поле, $m, n \in \mathbb{N}$ – довільні числа. Позначимо через $\mathrm{Mat}(m \times n, F)$ множину матриць розміру $m \times n$ з елементами з поля $F$.

Якщо $A, B \in \mathrm{Mat}(m \times n, F)$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n}}$ $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n}}$ то визначено додавання таких матриць:

$$C = A + B, \quad C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n}} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Очевидно, що операція додавання матриць фіксованого розміру є асоціативною, комутативною, має нейтральний елемент (нульову матрицю, тобто матрицю з усіма нульовими елементами) і у кожної матриці є обернена за додаванням. Тобто $\mathrm{Mat}(m \times n, F)$ є абелевою групою за додаванням.

Якщо $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F)$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n}}$ $\lambda \in F$, то задана операція множення матриці на число з поля:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m.\\ j=1,\dots,n}}$$

Перевірте, що множина матриць $\mathrm{Mat}(m \times n, F)$ з операціями додавання і множення на число є лінійним простором, і знайдіть розмірність цього простору.

Нехай задані числа $n, m, k \in \mathbb{N}$ і задані дві матриці $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F)$ і $B \in \mathrm{Mat}(n \times k, F)$, тобто кількість стовпців у матриці $A$ дорівнює кількості рядків у матриці $B$.

**Означення 2.1. Добутком двох матриць** $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F)$ і $B \in \mathrm{Mat}(n \times k, F)$ називається матриця $C = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times k, F)$, така, що

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, k.$$

Пишуть $C = AB$, або $C = A \cdot B$.

Властивості множення матриць.

1. Нехай задані три довільні матриці $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F)$, $B \in \mathrm{Mat}(n \times k, F)$, $C \in \mathrm{Mat}(k \times t, F)$, $m, n, k, t \in \mathbb{N}$. Тоді

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Зокрема множення квадратних матриць фіксованого розміру є асоціативним. Проведіть детальне доведення цієї властивості.

2. Нехай $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F)$ і $B \in \mathrm{Mat}(n \times k, F)$. Чи є правильним, що $A \cdot B = B \cdot A$? По-перше, якщо існує $B \cdot A$, то $k = m$, тобто $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F)$, $B \in \mathrm{Mat}(n \times m, F)$. По-друге, $A \cdot B \in \mathrm{Mat}(m \times m, F)$, а $B \cdot A \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$, тобто, якщо ці матриці є рівними, то $n = m$, тобто досліджувати питання комутативності множення матриць має сенс тільки для квадратних матриць.

Легко перевірити, що для $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ множення як операція на множині $\mathrm{Mat}(n \times n, F)$ не є комутативним.

Наведемо приклад для $n = 2$. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Тоді ми маємо

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix},$$

і

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Наведіть самостійно аналогічний приклад для довільного $n \geqslant 3$.

3. Нейтральний елемент для операції множення на множині

квадратних матриць $\mathrm{Mat}(n \times n, F)$. Легко перевірити, що матриця

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$$

є нейтральним елементом для множення на $\mathrm{Mat}(n \times n, F)$, тобто для довільної $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ виконується $A \cdot I = I \cdot A = A$.

Перевіримо це. Нехай $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ – довільна матриця розміру $n \times n$ з елементами з поля $F$. Нехай $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n := A \cdot I$. Зафіксуємо довільні $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Оскільки $j$-й стовпчик матриці $I$ має нулі на усіх місцях окрім $j$-го (а на $j$-му місці $j$-го стовпчика стоїть одиниця), ми маємо

$$b_{ij} = a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \ldots + a_{i,j-1} \cdot 0 + a_{ij} \cdot 1 +$$

$$a_{i,j+1} \cdot 0 + \ldots + a_{in} \cdot 0 = a_{ij}.$$

Тобто $b_{ij} = a_{ij}$ для усіх $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, звідки $B = A \cdot I = A$. Аналогічно перевіряємо, що для довільної $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ виконується $I \cdot A = A$.

4. Після дослідження питання про існування нейтрального елемента нам потрібно дослідити питання, чи для кожного елемента множини $\mathrm{Mat}(n \times n, F)$ є обернений за множенням. Але поки що ми не можемо відповісти на це питання, ми відповімо на нього пізніше.

**Теорема 2.2** (про визначник добутку матриць)**.** *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ *і* $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ *– довільні матриці. Тоді*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

*Доведення.* Нехай $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ і $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ – довільні матриці розміру $n \times n$ з елементами з поля $F$. Ми маємо

$$\det(A \cdot B) =$$

$$\det\begin{pmatrix} \sum_{i_1=1}^n a_{1,i_1}b_{i_1,1} & \sum_{i_1=1}^n a_{1,i_1}b_{i_1,2} & \cdots & \sum_{i_1=1}^n a_{1,i_1}b_{i_1,n} \\ \sum_{i_2=1}^n a_{2,i_2}b_{i_2,1} & \sum_{i_2=1}^n a_{2,i_2}b_{i_2,2} & \cdots & \sum_{i_2=1}^n a_{2,i_2}b_{i_2,n} \\ \sum_{i_3=1}^n a_{3,i_3}b_{i_3,1} & \sum_{i_3=1}^n a_{3,i_3}b_{i_3,2} & \cdots & \sum_{i_3=1}^n a_{3,i_3}b_{i_3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i_n=1}^n a_{n,i_n}b_{i_n,1} & \sum_{i_n=1}^n a_{n,i_n}b_{i_n,2} & \cdots & \sum_{i_n=1}^n a_{n,i_n}b_{i_n,n} \end{pmatrix}.$$

Ми бачимо, що кожен рядок матриці, у якої обчислюємо визначник, є сумою $n$ рядків. Ми знаємо, що визначник матриці є лінійною функцією по кожному з рядків. Розкладемо визначник в суму визначників за кожним рядком окремо, і ми отримуємо наступне.

$$\det\begin{pmatrix} \sum_{i_1=1}^n a_{1,i_1}b_{i_1,1} & \sum_{i_1=1}^n a_{1,i_1}b_{i_1,2} & \cdots & \sum_{i_1=1}^n a_{1,i_1}b_{i_1,n} \\ \sum_{i_2=1}^n a_{2,i_2}b_{i_2,1} & \sum_{i_2=1}^n a_{2,i_2}b_{i_2,2} & \cdots & \sum_{i_2=1}^n a_{2,i_2}b_{i_2,n} \\ \sum_{i_3=1}^n a_{3,i_3}b_{i_3,1} & \sum_{i_3=1}^n a_{3,i_3}b_{i_3,2} & \cdots & \sum_{i_3=1}^n a_{3,i_3}b_{i_3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i_n=1}^n a_{n,i_n}b_{i_n,1} & \sum_{i_n=1}^n a_{n,i_n}b_{i_n,2} & \cdots & \sum_{i_n=1}^n a_{n,i_n}b_{i_n,n} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{i_1=1}^n\sum_{i_2=1}^n\sum_{i_3=1}^n\cdots\sum_{i_n=1}^n \det\begin{pmatrix} a_{1,i_1}b_{i_1,1} & a_{1,i_1}b_{i_1,2} & \cdots & a_{1,i_1}b_{i_1,n} \\ a_{2,i_2}b_{i_2,1} & a_{2,i_2}b_{i_2,2} & \cdots & a_{2,i_2}b_{i_2,n} \\ a_{3,i_3}b_{i_3,1} & a_{3,i_3}b_{i_3,2} & \cdots & a_{3,i_3}b_{i_3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,i_n}b_{i_n,1} & a_{n,i_n}b_{i_n,2} & \cdots & a_{n,i_n}b_{i_n,n} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{i_1=1}^n\sum_{i_2=1}^n\sum_{i_3=1}^n\cdots\sum_{i_n=1}^n a_{1,i_1}a_{2,i_2}a_{3,i_3}\cdot\ldots\cdot a_{n,i_n}\det\begin{pmatrix} b_{i_1,1} & b_{i_1,2} & \cdots & b_{i_1,n} \\ b_{i_2,1} & b_{i_2,2} & \cdots & b_{i_2,n} \\ b_{i_3,1} & b_{i_3,2} & \cdots & b_{i_3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i_n,1} & b_{i_n,2} & \cdots & b_{i_n,n} \end{pmatrix}.$$

Відзначимо, що якщо серед індексів $i_1, i_2, \ldots, i_n$ є два рівні, то у матриці будуть два однакові рядки, тобто визначник такої матриці дорівнює нулю, і цей доданок у сумі дорівнює нулю. Тобто достатньо розглядати тільки ті доданки, у яких всі індекси серед $i_1, i_2, \ldots, i_n$ є різними, тобто ці індекси

утворюють деяку перестановку набору $1, 2, \ldots, n$. Тому ми маємо

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_3=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{1,i_1}a_{2,i_2}a_{3,i_3}\cdot\ldots\cdot a_{n,i_n}\det\begin{pmatrix} b_{i_1,1} & b_{i_1,2} & \cdots & b_{i_1,n}\\ b_{i_2,1} & b_{i_2,2} & \cdots & b_{i_2,n}\\ b_{i_3,1} & b_{i_3,2} & \cdots & b_{i_3,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{i_n,1} & b_{i_n,2} & \cdots & b_{i_n,n}\end{pmatrix} =$$

$$\sum_{\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n\end{pmatrix}\in S_n} a_{1,i_1}a_{2,i_2}a_{3,i_3}\cdot\ldots\cdot a_{n,i_n}\det\begin{pmatrix} b_{i_1,1} & b_{i_1,2} & \cdots & b_{i_1,n}\\ b_{i_2,1} & b_{i_2,2} & \cdots & b_{i_2,n}\\ b_{i_3,1} & b_{i_3,2} & \cdots & b_{i_3,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{i_n,1} & b_{i_n,2} & \cdots & b_{i_n,n}\end{pmatrix}.$$

Переставимо рядки в матриці $\begin{pmatrix} b_{i_1,1} & b_{i_1,2} & \cdots & b_{i_1,n}\\ b_{i_2,1} & b_{i_2,2} & \cdots & b_{i_2,n}\\ b_{i_3,1} & b_{i_3,2} & \cdots & b_{i_3,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{i_n,1} & b_{i_n,2} & \cdots & b_{i_n,n}\end{pmatrix}$ так, щоб вони йшли у природному порядку: спочатку перший, потім другий і так далі. При кожній перестановці двох рядків визначник множиться на $-1$, тому після вказаної перестановки рядків визначник буде множитися на знак перестановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n\end{pmatrix}$. Ми отримуємо

$$\sum_{\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n\end{pmatrix}\in S_n} a_{1,i_1}a_{2,i_2}a_{3,i_3}\cdot\ldots\cdot a_{n,i_n}\det\begin{pmatrix} b_{i_1,1} & b_{i_1,2} & \cdots & b_{i_1,n}\\ b_{i_2,1} & b_{i_2,2} & \cdots & b_{i_2,n}\\ b_{i_3,1} & b_{i_3,2} & \cdots & b_{i_3,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{i_n,1} & b_{i_n,2} & \cdots & b_{i_n,n}\end{pmatrix} =$$

$$\sum_{\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n\end{pmatrix}\in S_n} \operatorname{sign}\sigma\cdot a_{1,i_1}a_{2,i_2}a_{3,i_3}\cdot\ldots\cdot a_{n,i_n}\cdot\det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n\end{pmatrix}\in S_n} \operatorname{sign}\sigma\cdot a_{1,i_1}a_{2,i_2}a_{3,i_3}\cdot\ldots\cdot a_{n,i_n}\cdot\det B =$$

$$= \det A\cdot\det B.$$

Ми довели, що $\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B$. □

**Твердження 2.3.** *Нехай* $A\in\operatorname{Mat}(n\times n, F)$ *– довільна матриця розміру* $n\times n$ *з елементами з поля* $F$*. Тоді*

1. *Якщо існує* $B\in\operatorname{Mat}(n\times n, F)$*, така, що* $A\cdot B = I$*, то* $\det A\neq 0$.
2. *Якщо існує* $C\in\operatorname{Mat}(n\times n, F)$*, така, що* $C\cdot A = I$*, то* $\det A\neq 0$.

*Доведення.* Маємо

$$A\cdot B = I\ \Rightarrow \det(A\cdot B) = \det I = 1\ \Rightarrow$$

$$\det A\cdot\det B = 1\ \Rightarrow\ \det A\neq 0.$$

Пункт 2 доводиться аналогічно. □

Тобто якщо у матриці визначник дорівнює нулю, то у неї немає ані правої, ані лівої оберненої.

**Теорема 2.4.** *Нехай* $A\in\operatorname{Mat}(n\times n, F)$, $\det A\neq 0$*. Тоді існує* $A^{-1}\in\operatorname{Mat}(n\times n, F)$*, така, що*

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I.$$

*Доведення.* Позначимо через $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{i,j=1}^n$ – матрицю, елементи якої знаходяться за формулами

$$\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}M'\,{}^{i}_{j},\quad i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$$

(нагадуємо, що, як завжди, через $M'\,{}^{i}_{j}$ позначаємо визначник матриці, яка виходить з матриці $A$ після викреслювання рядка з номером $j$ і стовпця з номером $i$). Матриця $\widetilde{A}$ називається приєднаною до матриці $A$.

Обчислимо добутки матриць $A \cdot \widetilde{A}$, $\widetilde{A} \cdot A$.

Ми маємо

$$A \cdot \widetilde{A} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}M'\,{}^{1}_{1} & (-1)^{1+2}M'\,{}^{1}_{2} & \cdots & (-1)^{1+n}M'\,{}^{1}_{n} \\ (-1)^{2+1}M'\,{}^{2}_{1} & (-1)^{2+2}M'\,{}^{2}_{2} & \cdots & (-1)^{2+n}M'\,{}^{2}_{n} \\ (-1)^{3+1}M'\,{}^{3}_{1} & (-1)^{3+2}M'\,{}^{3}_{2} & \cdots & (-1)^{3+n}M'\,{}^{3}_{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n+1}M'\,{}^{n}_{1} & (-1)^{n+}M'\,{}^{n}_{2} & \cdots & (-1)^{n+n}M'\,{}^{n}_{n} \end{pmatrix}.$$

Матриці ми множимо за правилом «рядок на стовпець». Для того, щоб знайти елемент добутку за номером $ij$, треба $i$-й рядок матриці $A$ помножити на $j$-й стовпець матриці $\widetilde{A}$. Відзначимо, що в стовпці номер $j$ матриці $\widetilde{A}$ містяться алгебраїчні доповнення до $j$-го рядка матриці $A$.

Нагадаємо наступні властивості визначників:

$$\sum_{k=0}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}M'\,{}^{k}_{i} = \det A,$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k}M'\,{}^{k}_{j} = 0, \quad \forall j \neq i.$$

Таким чином, ми бачимо, що $A \cdot \widetilde{A} = \det A \cdot I$. Аналогічно ми перевіряємо, що $\widetilde{A} \cdot A = \det A \cdot I$.

Це спостереження дає можливість побудувати обернену матрицю для матриці $A$ у випадку, коли $\det A \neq 0$. А саме, нехай $A^{-1} = (\beta_{ij})_{i,j=1}^{n}$,

$$\beta_{ij} = \frac{1}{\det A}(-1)^{i+j}M'\,{}^{i}_{j}, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Ми маємо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. □

**Теорема 2.5.** *Нехай* $A, B, C \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$.

*1. Якщо* $A \cdot B = I$, *то* $B = A^{-1}$.

*2. Якщо* $C \cdot A = I$, *то* $C = A^{-1}$.

*Доведення.* Якщо $A \cdot B = I$, то маємо $A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot I \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot B = A^{-1} \Rightarrow I \cdot B = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$. Пункт 2 доводиться аналогічно. $\square$

## 2.2 Ранг матриці. Теорема про ранг матриці

**Означення 2.6.** Нехай $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F)$, $m, n \in \mathbb{N}$. **Стовпцевим рангом** матриці $A$ називається ранг системи її стовпців $A^1, A^2, \ldots, A^n$, тобто найбільша кількість лінійно незалежних стовпців.

**Означення 2.7.** Нехай $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F)$, $m, n \in \mathbb{N}$. **Рядковим рангом** матриці $A$ називається ранг системи її рядків $A_1, A_2, \ldots, A_m$, тобто найбільша кількість лінійно незалежних рядків.

**Означення 2.8.** Нехай $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F)$, $m, n \in \mathbb{N}$. **Детермінантним рангом** матриці $A$ називається найвищий серед порядків ненульових мінорів матриці $A$.

**Теорема 2.9** (про ранг матриці). *Нехай $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F)$, $m, n \in \mathbb{N}$. Тоді стовпцевий, рядковий і детермінантний ранги матриці $A$ збігаються. Їхнє спільне значення називається рангом матриці $A$ і позначається* $\mathrm{rank}\ A$.

*Доведення.* Позначимо $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$. Якщо один із рангів матриці $A$ дорівнює нулю, то, очевидно, матриця $A$ є нульовою, тому інші два ранги теж дорівнюють нулю. Розглянемо випадок ненульової матриці, і позначимо її детермінантний ранг через $r := \mathrm{rank}\ A \in \mathbb{N}$.

Той факт, що детермінантний ранг матриці дорівнює $r$, означає, що є якийсь мінор порядку $r$ матриці $A$, який не дорівнює нулю, а усі мінори матриці $A$ порядків, строго більших за $r$, дорівнюють нулю.

Не зменшуючи загальності, вважаємо, що ненульовий мінор сформований рядками $1, 2, \ldots, r$ і стовпцями $1, 2, \ldots, r$, тобто

$$D := \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Нескладно перевірити, що з цього випливає, що перші $r$ стовпців $A^1, A^2, \ldots, A^r$ є лінійно незалежними і перші $r$ рядків $A_1, A_2, \ldots, A_r$ є лінійно незалежними. Дійсно, припустимо, що стовпці $A^1, A^2, \ldots, A^r$ є лінійно залежними. Тоді один із цих стовпців є лінійною комбінацією інших. Тобто існує $j = 1, 2, \ldots, r$, і існують числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_r$, такі, що

$$A^j = \alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_{j-1} A^{j-1} + \alpha_{j+1} A^{j+1} + \ldots + \alpha_r A^r.$$

Розглянемо невироджену матрицю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}.$$

Її визначник не зміниться, якщо ми до $j$-го стовпця додамо таку лінійну комбінацію інших стовпців: $-\alpha_1 A^1 - \alpha_2 A^2 - \ldots - \alpha_{j-1} A^{j-1} - \alpha_{j+1} A^{j+1} - \ldots - \alpha_r A^r$. Але після такого додавання $j$-й стовпець буде дорівнювати нулю, тобто отримуємо, що $D = 0$. Це суперечить припущенню, що $D \neq 0$.

Отже, ми довели, що стовпчики $A^1, A^2, \ldots, A^r$ є лінійно незалежними. Аналогічно доводимо, що рядки $A_1, A_2, \ldots, A_r$ є лінійно незалежними.

Тобто ми довели, що стовпцевий ранг матриці $\geqslant r$, також рядковий ранг матриці $\geqslant r$. Залишилося довести, що обидва ці ранги дорівнюють $r$.

Розглянемо довільні $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тоді ми маємо

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3r} & a_{3j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{pmatrix} = 0 \tag{2.1}$$

(до матриці, сформованої першими $r$ рядками і першими $r$ стовпцями матриці $A$, додали рядок з номером $i$ і стовпець з номером $j$).

Пояснимо виконання рівності (2.1). Якщо $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, то (2.1) виконується, бо в матриці є два однакові рядки. Якщо $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, то (2.1) виконується, бо в матриці є два однакові стовпці. Якщо ж $i \in \{r+1, r+2, \ldots, m\}$, $j \in \{r+1, r+2, \ldots, n\}$, то (2.1) виконується, бо детермінантний ранг матриці $A$ дорівнює $r$ (матриця, від якої беремо визначник у формулі (2.1), є мінором матриці $A$ порядку $r+1$).

Розкладемо визначник з лівої частині формули (2.1) по останньому рядку. Відзначимо, що алгебраїчні доповнення елементів останнього рядка (доповнювальні мінори зі знаками) не залежать від номера рядка $i$, а тільки від номера стовпця $j$, а для останнього елемента останнього рядка це доповнення не залежить і від $j$, воно дорівнює $D$.

Тому ми маємо формулу

$$a_{i1}B_1(j) + a_{i2}B_2(j) + \ldots + a_{ir}B_r(j) + a_{ij}D = 0$$

(тут $B_1(j), B_2(j), \ldots, B_r(j) \in F$ – деякі числа, які залежать тільки від $j$). Оскільки $D \neq 0$, з останньої формули ми отримуємо

$$a_{ij} = a_{i1}C_1(j) + a_{i2}C_2(j) + \ldots + a_{ir}C_r(j). \tag{2.2}$$

Ми довели наступне твердження: для довільних $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ знайдуться числа $C_1(j), C_2(j), \ldots, C_r(j) \in F$, які залежать тільки від $j$, такі, що виконується (2.2).

Зафіксуємо довільне $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ і запишемо детально формулу

(2.2) для усіх $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Ми маємо

$$a_{1j} = a_{11}C_1(j) + a_{12}C_2(j) + \ldots + a_{1r}C_r(j).$$

$$a_{2j} = a_{21}C_1(j) + a_{22}C_2(j) + \ldots + a_{2r}C_r(j).$$

$$a_{3j} = a_{31}C_1(j) + a_{32}C_2(j) + \ldots + a_{3r}C_r(j).$$

$$\vdots$$

$$a_{mj} = a_{m1}C_1(j) + a_{m2}C_2(j) + \ldots + a_{mr}C_r(j).$$

Тобто для довільного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ знайдуться числа $C_1(j), C_2(j), \ldots, C_r(j) \in F$, такі, що виконується рівність

$$A^j = C_1(j)A^1 + C_2(j)A^2 + \ldots + C_r(j)A^r.$$

Іншими словами, $A^1, A^2, \ldots, A^n \in \mathrm{Lin}\ \{A^1, A^2, \ldots, A^r\}$, тобто ранг системи стовпців матриці $A$ не є більшим за розмірність лінійної оболонки перших $r$ стовпців, тобто не є більшим за $r$. При цьому стовпці $A^1, A^2, \ldots, A^r$ є лінійно незалежними, тобто стовпцевий ранг матриці $A$ дорівнює $r$.

Аналогічно (розкладаючи визначник з лівої частині формули (2.1) по останньому стовпцю) ми доведемо, що рядковий ранг матриці $A$ дорівнює $r$. □

Простим наслідком теореми про ранг матриці є наступне твердження.

**Наслідок 2.10.** *Нехай* $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$, $n \in \mathbb{N}$ *і нехай* $\det A = 0$. *Тоді рядки матриці $A$ є лінійно залежними і стовпці матриці $A$ є лінійно залежними.* □

**Зауваження 2.11.** При доведенні останньої теореми ми довели наступне твердження, яке можна використовувати для обчислення рангу матриці (це твердження також дає еквівалентне означення детермінантного рангу матриці). Нехай $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F)$, $m, n \in \mathbb{N}$, і $1 \leqslant r \leqslant \min(m, n)$. Припустимо, що у матриці $A$ є ненульовий мінор порядку $r$, а саме $M^{j_1 j_2 \cdots j_r}_{i_1 i_2 \cdots i_r} \neq 0$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant m$, $1 \leqslant j_1 < j_2 <$

$\ldots < j_r \leqslant n$. Припустимо також, що усі оточуючі його мінори дорівнюють нулю, тобто для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ і довільного $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ виконується $M^{j_1 j_2 \cdots j_r j}_{i_1 i_2 \cdots i_r i} = 0$. Тоді ранг цієї матриці дорівнює $r$. Дивись вправу 7.4 щодо цього методу оточення мінорів.

**Задача 2.12.** Нехай $A, B \in \mathrm{Mat}(m \times n, F)$ – дві задані матриці, $m, n \in \mathbb{N}$. Доведіть, що

$$\mathrm{rank}\ (A + B) \leqslant \mathrm{rank}\ \ A + \mathrm{rank}\ \ B.$$

**Задача 2.13.** Нехай $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F), B \in \mathrm{Mat}(n \times k, F)$ – дві задані матриці, $m, n, k \in \mathbb{N}$. Доведіть, що

$$\mathrm{rank}\ (A \cdot B) \leqslant \max(\mathrm{rank}\ \ A, \mathrm{rank}\ \ B).$$

# Розділ 3

# Системи лінійних рівнянь

## 3.1 Розв'язок систем лінійних рівнянь. Теорема Кронекера–Капеллі. Правило Крамера

Нехай $F$ – довільне поле, $m, n \in \mathbb{N}$ – довільні числа. Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.1}$$

Тут $a_{ij} \in F, i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n, b_1, b_2, \ldots, b_m \in F$ – задані числа, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$ – невідомі.

Запишемо систему (3.1) у матричному вигляді. Введемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m \times n, F),$$

ця матриця називається **матрицею системи** (3.1).

Введемо ще два стовпці

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times 1, F), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m \times 1, F).$$

Стовпець $X$ називається **стовпцем невідомих** системи (3.1), стовпець $B$ називається **стовпцем правих частин** системи (3.1). У нових позначеннях систему (3.1) можна записати у вигляді

$$AX = B.$$

**Означення 3.1.** Стовпець $X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in F^n$ називається **розв'язком системи** (3.1), якщо $AX_0 = B$.

**Означення 3.2.** Система (3.1) називається **сумісною**, якщо у неї є розв'язок. Система (3.1) називається несумісною, якщо у неї немає розв'язків.

**Означення 3.3.** Система (3.1) називається **визначеною**, якщо вона має єдиний розв'язок. Система (3.1) називається невизначеною, якщо вона має більше за один розв'язок.

**Теорема 3.4** (Кронекер–Капеллі). *Нехай задана система лінійних рівнянь* $AX = B$, *де* $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F), X \in \mathrm{Mat}(n \times 1, F), B \in \mathrm{Mat}(m \times 1, F)$. *Ця система є сумісною тоді і тільки тоді, коли*

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

*Доведення.* Нехай система є сумісною, тобто існує $X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in F^n$ – розв'язок системи. Ми маємо

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \ldots + a_{1n}x_n^0 = b_1 \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \ldots + a_{2n}x_n^0 = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1^0 + a_{m2}x_2^0 + \ldots + a_{mn}x_n^0 = b_m \end{cases}.$$

Останню систему рівностей можна записати інакше:

$$x_1^0\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2^0\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n^0\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ми бачимо, що стовпчик $B$ належить до лінійної оболонки стовпчиків $A^1, A^2, \ldots, A^n$, тому

$$\mathrm{Lin}\,\{A^1, A^2, \ldots, A^n\} = \mathrm{Lin}\,\{A^1, A^2, \ldots, A^n, B\} \;\Rightarrow$$

$$\dim\big(\mathrm{Lin}\,\{A^1, A^2, \ldots, A^n\}\big) = \dim\big(\mathrm{Lin}\,\{A^1, A^2, \ldots, A^n, B\}\big) \;\Rightarrow$$

$$\mathrm{rank}\,\big(A^1, A^2, \ldots, A^n\big) = \mathrm{rank}\,\big(A^1, A^2, \ldots, A^n, B\big)\,.$$

Ми довели, що, якщо система є сумісною, то виконується

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

(в даному випадку ми використовували стовпцевий ранг матриць).

Припустимо тепер, що

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Поглянемо на ранги обох матриць як на стовпцеві ранги. Ми маємо

$$\mathrm{rank}\,\big(A^1, A^2, \ldots, A^n\big) = \mathrm{rank}\,\big(A^1, A^2, \ldots, A^n, B\big) \;\Rightarrow$$

$$\dim\big(\mathrm{Lin}\,\{A^1, A^2, \ldots, A^n\}\big) = \dim\big(\mathrm{Lin}\,\{A^1, A^2, \ldots, A^n, B\}\big)\,.$$

Але

$$\mathrm{Lin}\,\{A^1, A^2, \ldots, A^n\} \subset \mathrm{Lin}\,\{A^1, A^2, \ldots, A^n, B\},$$

і у цих просторів розмірності є рівними, тобто (дивись твердження 1.45)

$$\mathrm{Lin}\,\{A^1, A^2, \ldots, A^n\} = \mathrm{Lin}\,\{A^1, A^2, \ldots, A^n, B\}.$$

З цього ми маємо

$$B \in \mathrm{Lin}\,\{A^1, A^2, \ldots, A^n\} \;\Rightarrow$$

$$\exists \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in F:$$

$$\mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

З останньої рівності ми отримуємо, що $X_0 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ є розв'язком нашої системи рівнянь, тобто наша система рівнянь є сумісною. □

**Теорема 3.5** (правило Крамера). *Нехай* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ *– невироджена матриця, тобто* $\det A \neq 0$, *і нехай* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times 1, F)$ *– довільний стовпець. Тоді система лінійних рівнянь* $AX = B$ *є визначеною, тобто має єдиний розв'язок*

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix},$$

*при цьому для кожного* $j = 1, 2, \ldots, n$ *маємо формулу*

$$x_j^0 = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

*де*

$$\Delta = \det A,\ \ \Delta_j = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,j-1} & b_3 & a_{3,j+1} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

*Доведення.* Ми маємо систему рівнянь $AX = B$, і нам дано, що $\det A \neq 0$, тобто що існує обернена матриця $A^{-1}$. Припустимо, що $X_0$ – розв'язок системи, тобто $AX_0 = B$. Помножимо цю рівність зліва на $A^{-1}$, ми отримуємо $A^{-1} \cdot (AX_0) = A^{-1} \cdot B$, тобто $(A^{-1} \cdot A) \cdot X_0 = A^{-1} \cdot B$, або $I \cdot X_0 = A^{-1} \cdot B$, звідки $X_0 = A^{-1} \cdot B$. Тобто ми перевірили, що якщо розв'язок системи існує, то він дорівнює $A^{-1} \cdot B$.

Перевіримо, що $X_0 = A^{-1} \cdot B$ дійсно є розв'язком системи. Ми маємо

$$AX_0 = A \cdot (A^{-1} \cdot B) = (A \cdot A^{-1}) \cdot B = I \cdot B = B.$$

Тобто наша система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок $X_0 = A^{-1} \cdot B$. Для отримання формул треба скористатися формулами для елементів оберненої матриці. Нехай $A^{-1} = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$, тоді ми маємо

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\det A}(-1)^{i+j} M'{}^{\,i}_{\,j}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Якщо

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B,$$

то для обчислення $x_j^0$ треба рядок $j$ матриці $A^{-1}$ помножити на стовпець $B$, і ми отримуємо

$$x_j^0 = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} M'{}^{\,j}_{\,k} b_k = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

(тут для обчислення визначника $\Delta_j$ використовуємо формулу розкладання по $j$-му стовпцю). □

Розглянемо систему лінійних рівнянь $AX = B$, де $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F), X \in \mathrm{Mat}(n \times 1, F), B \in \mathrm{Mat}(m \times 1, F)$. Будемо вважати, що ця система є сумісною, тобто виконується умова теореми Кронекера–Капеллі

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Проведемо дослідження щодо можливої кількості розв'язків цієї системи лінійних рівнянь.

1. Нехай $\operatorname{rank} A = 0$. Це означає, що матриця $A$ є нульовою, і стовпець $B$ є нульовим. В такому випадку довільний вектор $X \in F^n$ є розв'язком системи.

2. Припустимо тепер, що $\operatorname{rank} A = r \in \mathbb{N}$, і ранг розширеної матриці системи теж дорівнює $r$. Подивимось на ранги обох матриць як на рядкові ранги. Маємо: існують $r$ рядків матриці $A$, які є лінійно незалежними, а довільний інший рядок матриці $A$ є лінійною комбінацією цих $r$ рядків. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що перші $r$ рядків матриці $A$ є лінійно незалежними. З цього випливає, що перші $r$ рядків розширеної матриці є лінійно незалежними (поясніть це!). І, оскільки ранг розширеної матриці дорівнює $r$, ми отримуємо, що кожен рядок розширеної матриці з номером $r+1, r+2, \dots, m$ є лінійною комбінацією перших $r$ рядків розширеної матриці системи. Тобто кожне рівняння за номером $r+1, r+2, \dots, m$ нашої системи лінійних рівнянь є лінійною комбінацією перших $r$ рівнянь.

Ми довели, що кожний розв'язок системи з перших $r$ рівнянь є розв'язком нашої початкової системи, і навпаки, тобто ми можемо розв'язувати систему з перших $r$ рівнянь і отримаємо усі розв'язки нашої системи.

Маємо нову систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \tag{3.2}$$

з новою матрицею системи

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(r \times n, F)$$

і новим стовпцем правих частин $\tilde{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(r \times 1, F)$.

Ми знаємо, що

$$\mathrm{rank}\ \tilde{A} = \mathrm{rank} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} & b_r \end{pmatrix} = r.$$

Тобто в матриці $\tilde{A}$ є $r$ лінійно незалежних стовпців (зокрема, $r \leqslant n$). Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що перші $r$ стовпців матриці $\tilde{A}$ є лінійно незалежними.

Можливі два випадки.

1. Випадок $r = n$. У цьому випадку система лінійних рівнянь (3.2) є системою $r$ рівнянь з $r$ невідомими, і ранг матриці системи дорівнює $r$.

Оскільки rank $\tilde{A}$ дорівнює $r$, $\tilde{A} \in \mathrm{Mat}(r \times r, F)$, то $\det \tilde{A} \neq 0$, тому, за правилом Крамера, система має єдиний розв'язок.

2. Випадок $r < n$. При цьому ми вважаємо, що саме перші $r$ стовпців

матриці $\tilde{A}$ є лінійно незалежними. Запишемо систему (3.2) у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{3.3}$$

Оскільки у матриці $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{pmatrix}$ стовпці є лінійно незалежними, то $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{pmatrix} \neq 0$. Будемо розглядати змінні $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ як параметри системи. Тоді за правилом Крамера для довільного набору значень параметрів $x_{r+1} = \lambda_{r+1}, x_{r+2} = \lambda_{r+2}, \ldots, x_n = \lambda_n$ (тут $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n \in F$ – довільні числа) існує єдиний стовпчик $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(r \times 1, F)$, такий що

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times 1, F)$$

є розв'язком початкової системи.

Таким чином, для системи лінійних рівнянь $AX = B$, де $A \in \mathrm{Mat}(m \times$

$n, F), X \in \mathrm{Mat}(n \times 1, F), B \in \mathrm{Mat}(m \times 1, F)$, можливим є один з трьох наступних випадків:

1. Система є несумісною, тобто не має розв'язків (коли ранг розширеної матриці системи не дорівнює рангу системи).

2. Система є визначеною, тобто має єдиний розв'язок (коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу системи і дорівнює кількості невідомих).

3. Система є сумісною і невизначеною (коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу системи і є строго меншим за кількість невідомих). У випадку, коли поле $F$ містить нескінченну кількість елементів, система має нескінченну кількість розв'язків. При цьому множина розв'язків системи залежить від $n - r$ довільних параметрів (тут $r$ – ранг матриці системи, $n$ – кількість невідомих).

## 3.2 Системи однорідних лінійних рівнянь. Зв'язок між розв'язками неоднорідної і відповідної однорідної систем лінійних рівнянь

**Означення 3.6.** Система лінійних рівнянь називається **однорідною**, якщо вектор правих частин є нульовим вектором, тобто система має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

**Твердження 3.7.** *Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь $AX = O$, де $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F), X \in \mathrm{Mat}(n \times 1, F)$ і $O \in \mathrm{Mat}(m \times 1, F)$ – нульовий стовпець. Позначимо через $U = \{X \in F^n \ : \ AX = O\} \subset F^n$ – множину розв'язків системи. Тоді $U < F^n$.*

*Доведення.* Нехай $X_1, X_2 \in U$, це означає, що $AX_1 = O$ і $AX_2 = O$. Тоді для довільних $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ виконується $A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 AX_1 + \alpha_2 AX_2 = \alpha_1 \cdot O + \alpha_2 \cdot O = O$, тобто $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \in U$. □

**Теорема 3.8.** *Дана система лінійних однорідних рівнянь* $AX = O$, *де* $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F), X \in \mathrm{Mat}(n \times 1, F)$ *і* $O \in \mathrm{Mat}(m \times 1, F)$ *– нульовий стовпець. Позначимо через* $U = \{X \in F^n \ : \ AX = O\} < F^n$ *– множину розв'язків системи. Тоді* $\dim U = n - \mathrm{rank}\ A$.

*Доведення.* Позначимо через $r$ ранг матриці $A$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що перші $r$ рівнянь системи є лінійно незалежними. Тоді наша система рівнянь є еквівалентною наступній

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

новій системі рівнянь з новою матрицею системи

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(r \times n, F).$$

Ранг матриці $\tilde{A}$ дорівнює $r$ (рядки матриці $\tilde{A}$ є лінійно незалежними), тобто в цій матриці є $r$ лінійно незалежних стовпців (зокрема, $r \leqslant n$). Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що перші $r$ стовпців матриці $\tilde{A}$ є лінійно незалежними.

Можливі два випадки.

1. Випадок $r = n$. У цьому випадку наша система лінійних рівнянь є системою $r$ рівнянь з $r$ невідомими, і ранг матриці системи дорівнює $r$. Оскільки $\mathrm{rank}\ \tilde{A}$ дорівнює $r$, $\tilde{A} \in \mathrm{Mat}(r \times r, F)$, то $\det \tilde{A} \neq 0$, тому за правилом Крамера система має єдиний розв'язок. Очевидно, що цей розв'язок є нульовим $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times 1, F)$. Тому множина розв'язків $U = \{\mathbf{0}\}$, отже, $\dim U = 0 = n - r$.

2. Випадок $r < n$. Не зменшуючи загальності, ми вважаємо, що саме перші $r$ стовпців матриці $\tilde{A}$ є лінійно незалежними. Запишемо систему рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}. \qquad (3.4)$$

Оскільки у матриці $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{pmatrix}$ стовпці є лінійно незалежними, то $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{pmatrix} \neq 0$. Будемо розглядати змінні $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ як параметри системи. Тоді за правилом Крамера для довільного набору значень параметрів $x_{r+1} = \lambda_{r+1}, x_{r+2} = \lambda_{r+2}, \ldots, x_n = \lambda_n$ (тут $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n \in F$ – довільні числа) існує єдиний стовпчик $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(r \times 1, F)$, такий, що

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times 1, F)$$

є розв'язком системи (3.4).

У нас є $n-r$ незалежних параметрів. Розглянемо $n-r$ різних наборів параметрів:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тобто для кожного $j = r+1, r+2, \ldots, n$ розглянемо значення параметрів $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 0, \ldots, x_{j-1} = 0, x_j = 1, x_{j+1} = 0, \ldots, x_n = 0$, і для такого набору знайдемо єдиний набір значень $x_1, x_2, \ldots, x_r$, який є розв'язком останньої системи (3.4).

Ми знайшли $n-r$ розв'язків системи рівнянь:

$$X_{r+1} = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \vdots \\ \beta_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_{r+2} = \begin{pmatrix} \beta_{12} \\ \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, X_n = \begin{pmatrix} \beta_{1n} \\ \beta_{2n} \\ \vdots \\ \beta_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ми доведемо, що система $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_n$ векторів є базисом підпростору $U$.

Перевіримо лінійну незалежність цієї системи. Нехай

$$\mu_{r+1}X_{r+1} + \mu_{r+2}X_{r+2} + \ldots + \mu_n X_n = \mathbf{0},$$

де $\mu_{r+1}, \mu_{r+2}, \ldots, \mu_n \in F$. Маємо

$$\mu_{r+1}\begin{pmatrix}\beta_{11}\\ \beta_{21}\\ \vdots\\ \beta_{r1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \mu_{r+2}\begin{pmatrix}\beta_{12}\\ \beta_{22}\\ \vdots\\ \beta_{r2}\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + \ldots + \mu_n\begin{pmatrix}\beta_{1n}\\ \beta_{2n}\\ \vdots\\ \beta_{rn}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\ *\\ \vdots\\ *\\ \mu_{r+1}\\ \mu_{r+2}\\ \vdots\\ \mu_{n-1}\\ \mu_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

звідки маємо $\mu_{r+1} = \mu_{r+2} = \ldots = \mu_n = 0$. Тобто система векторів $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_n \in U$ є лінійно незалежною.

Нехай $Y = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix} \in U$ – довільний розв'язок системи.

Нехай

$$Z := \gamma_{r+1}X_{r+1} + \gamma_{r+2}X_{r+2} + \ldots + \gamma_n X_n \in U,$$

тобто

$$Z = \gamma_{r+1}\begin{pmatrix}\beta_{11}\\ \beta_{21}\\ \vdots\\ \beta_{r1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \gamma_{r+2}\begin{pmatrix}\beta_{12}\\ \beta_{22}\\ \vdots\\ \beta_{r2}\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + \ldots + \gamma_n\begin{pmatrix}\beta_{1n}\\ \beta_{2n}\\ \vdots\\ \beta_{rn}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\ *\\ \vdots\\ *\\ \gamma_{r+1}\\ \gamma_{r+2}\\ \vdots\\ \gamma_{n-1}\\ \gamma_n\end{pmatrix}.$$

Як бачимо, є два розв'язки системи рівнянь $Y \in U$ і $Z \in U$, у яких збігаються значення параметрів $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. За правилом Крамера,

для довільного вибору параметрів існує єдиний розв'язок системи, у якого $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ дорівнюють вибраним значенням параметрів. Отже, $Y = Z$, тобто $Y \in \mathrm{Lin}\ \{X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_n\}$. Ми довели, що система векторів $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_n$ є базисом підпростору $U$, звідки $\dim U = n - r$. $\square$

Розглянемо систему лінійних рівнянь $AX = B$, де $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F), X \in \mathrm{Mat}(n \times 1, F), B \in \mathrm{Mat}(m \times 1, F)$. Відповідною до цієї системи однорідною системою лінійних рівнянь називається система $AX = O$, де $O \in \mathrm{Mat}(m \times 1, F)$ (тобто стовпець правих частин ми замінили нульовим стовпцем).

Ми вивчимо зв'язок між розв'язками цих двох систем.

**Твердження 3.9.** *Нехай $X_1, X_2$ – два розв'язки системи $AX = B$. Тоді $(X_1 - X_2)$ є розв'язком системи $AX = O$.*

*Доведення.* Маємо $A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = O$. $\square$

**Твердження 3.10.** *Нехай $X_0$ – розв'язок системи $AX = B$, $Y_0$ – розв'язок системи $AX = O$. Тоді $(X_0 + Y_0)$ є розв'язком системи $AX = B$.*

*Доведення.* Маємо $A(X_0 + Y_0) = AX_0 + AY_0 = B + O = B$. $\square$

Нехай система $AX = B$ є сумісною, позначимо через $X_0$ один з розв'язків системи (так званий частковий розв'язок), позначимо через $U$ множину розв'язків системи: $U = \{X \in F^n \ : \ AX = B\}$. Множину розв'язків системи називають загальним розв'язком.

Розглянемо відповідну однорідну систему $AX = O$, позначимо через $V$ множину розв'язків однорідної системи: $V = \{X \in F^n \ : \ AX = O\}$. Тобто $V$ – загальний розв'язок однорідної системи.

Ми довели наступну формулу:

$$U = X_0 + V.$$

Кажуть, що загальним розв'язком неоднорідної системи лінійних рівнянь є частковий розв'язок цієї системи плюс загальний розв'язок відповідної однорідної системи.

**Задача 3.11.** Нехай $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F)$ – задана матриця. Доведіть, що умова, що для довільного $B \in \mathrm{Mat}(m \times 1, F)$ система лінійних рівнянь $AX = B$ є сумісною (тут $X \in \mathrm{Mat}(n \times 1, F)$), виконується тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{rank}\ A = m$. Доведіть, що умова, що для довільного $B \in \mathrm{Mat}(m \times 1, F)$ система лінійних рівнянь $AX = B$ є визначеною (тут $X \in \mathrm{Mat}(n \times 1, F)$), виконується тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{rank}\ A = m$ і $m = n$.

# Розділ 4

# Лінійні оператори в скінченновимірних лінійних просторах

## 4.1 Координати вектора в базисі. Перетворення координат вектора при зміні базису

Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n := \dim L \in \mathbb{N}$. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис $L$. Тоді для кожного вектора $x \in L$ існує єдиний впорядкований набір чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$, такий, що $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$ (дивись твердження 1.30).

**Означення 4.1.** Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$, такі, що $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$, називають **координатами** вектора $x$ в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Всюди далі в нашому курсі ми будемо використовувати наступне позначення

$$x_e := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$$

(тобто $x_e$ – стовпець координат вектора $x$ в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$).

**Теорема 4.2.** *Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n := \dim L \in \mathbb{N}$. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис $L$. Розглянемо відображення $A : L \to F^n$, яке задається формулою $A(x) = x_e$. Тоді $A$ є бієкцією, при цьому*

$$\forall x, y \in L, \forall \lambda, \mu \in F \quad A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y),$$

*тобто відображення $A$ є ізоморфізмом просторів $L$ і $F^n$.*

Доведіть це просте твердження самостійно.

**Твердження 4.3.** *Нехай $L_1$ і $L_2$ – два лінійні простори над полем $F$, які є ізоморфними, і нехай $T : L_1 \to L_2$ – ізоморфізм. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$*

*– базис простору $L_1$. Тоді $Te_1, Te_2, \ldots, Te_n$– базис простору $L_2$. Зокрема ізоморфні простори мають однакову розмірність.*

Доведіть самостійно це твердження. З останнього твердження випливає такий наслідок.

**Наслідок 4.4.** *Нехай $L_1$ і $L_2$ – два лінійні простори над полем $F$, і нехай $\dim L_1 \neq \dim L_2$. Тоді простори $L_1$ і $L_2$ не є ізоморфними. Зокрема простори $F^n$ і $F^m$ не є ізоморфними при $n \neq m$.* □

Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис $L$ («старий базис»). Нехай є ще один базис $L : u_1, u_2, \ldots, u_n$ («новий базис»). Ми хочемо дослідити, як змінюються координати вектора при переході від старого базису до нового.

Розкладемо вектор $u_1$ за старим базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Маємо

$$u_1 = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \ldots + t_{n1}e_n.$$

(зверніть увагу на нумерацію коефіцієнтів!).

Розкладемо вектор $u_2$ за старим базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Маємо

$$u_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \ldots + t_{n2}e_n$$

Для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$, продовжуючи цю процедуру, розкладемо вектор $u_j$ за старим базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Ми маємо

$$u_1 = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \ldots + t_{n1}e_n,$$

$$u_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \ldots + t_{n2}e_n,$$

$$u_3 = t_{13}e_1 + t_{23}e_2 + \ldots + t_{n3}e_n,$$

$$\vdots$$

$$u_n = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \ldots + t_{nn}e_n.$$

Введемо матрицю

$$T_{e\to u} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ця матриця називається матрицею переходу від базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ до базису $u_1, u_2, \ldots, u_n$ (для побудови цієї матриці ми для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ розкладаємо вектор $u_j$ за старим базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$ і координати записуємо у $j$-й стовпець матриці переходу).

Нехай $x \in L$ – довільний вектор, нехай $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$, тобто $x_e := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Нехай $x = y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_nu_n$, тобто $x_u := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Ми маємо

$$x = y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_nu_n =$$

$$y_1(t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \ldots + t_{n1}e_n)+$$

$$y_2(t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \ldots + t_{n2}e_n)+$$

$$y_3(t_{13}e_1 + t_{23}e_2 + \ldots + t_{n3}e_n) + \ldots +$$

$$y_n(t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \ldots + t_{nn}e_n).$$

Зведемо подібні доданки в цій формулі і отримаємо

$$x = (t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + t_{13}y_3 + \ldots + t_{1n}y_n)e_1+$$

$$(t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + t_{23}y_3 + \ldots + t_{2n}y_n)e_2+$$

$$(t_{31}y_1 + t_{32}y_2 + t_{33}y_3 + \ldots + t_{3n}y_n)e_3+$$

$$\vdots$$

$$+(t_{n1}y_1 + t_{n2}y_2 + t_{n3}y_3 + \ldots + t_{nn}y_n)e_n.$$

Ми отримали наступну важливу формулу.

**Твердження 4.5.** *Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ і $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – два базиси простору $L$. Тоді для довільного $x \in L$ виконується*

$$x_e = T_{e \to u} x_u.$$

□

Перевіримо, що матриця переходу від базису до базису завжди є невиродженою (тобто її визначник не дорівнює нулю). Нехай $T_{u\to e}$ – матриця переходу від базису $u_1, u_2, \ldots, u_n$ до базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тоді, за доведеним, для довільного $x \in L$ виконується

$$x_e = T_{e\to u} x_u$$

і

$$x_u = T_{u\to e} x_e.$$

Підставляючи другу формулу в першу, отримуємо, що для довільного $x \in L$ виконується

$$x_e = T_{e\to u} T_{u\to e} x_e.$$

В якості довільного вектора в останній формулі будемо обирати базисні вектори $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Оберемо довільне $j = 1,\, 2, \ldots, n$ і підставимо $x = e_j$, при цьому ми знаємо, що

$$(e_j)_e := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(в цьому стовпці одиниця стоїть на місці $j$).

Тому ми отримуємо, що для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = T_{e \to u} T_{u \to e} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо ми введемо позначення $T_{e \to u} T_{u \to e} = (\lambda_{ij})_{i,j=1}^{n}$, то для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ ми маємо рівність

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \lambda_{2j} \\ \vdots \\ \lambda_{j-1,j} \\ \lambda_{jj} \\ \lambda_{j+1,j} \\ \vdots \\ \lambda_{nj} \end{pmatrix}.$$

Тобто для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ ми маємо: $j$-й стовпець матриці $T_{e \to u} T_{u \to e}$ збігається з $j$-м стовпцем одиничної матриці $I$, звідки

$$T_{e \to u} T_{u \to e} = I.$$

Таким чином, матриця переходу від базису до базису має обернену матрицю, тобто вона є невиродженою, при цьому $(T_{e \to u})^{-1} = T_{u \to e}$.

Ми довели також ще одне твердження: якщо матриця $T_{e \to u}$ є матрицею переходу від базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ до базису $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то матрицею зворотнього переходу від базису $u_1, u_2, \ldots, u_n$ до базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ буде обернена матриця: $T_{u \to e} = T_{e \to u}^{-1}$.

## 4.2 Означення лінійного оператора. Матриця лінійного оператора у заданому базисі. Дії над операторами і їхніми матрицями

Нехай $L_1$ і $L_2$ – два лінійні простіри над одним і тим самим полем $F$.

**Означення 4.6.** Відображення $A : L_1 \to L_2$ називається **лінійним оператором** з $L_1$ в $L_2$, якщо для довільних $x, y \in L_1$ і довільних $\alpha, \beta \in F$ виконується $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$.

**Задача 4.7.** Доведіть, що якщо $A : L_1 \to L_2$ – лінійний оператор, то $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (тут в лівій частині рівності $\mathbf{0}$ – це нульовий вектор простору $L_1$, а в правій частині $\mathbf{0}$ – це нульовий вектор простору $L_2$).

В нашому курсі ми будемо вивчати виключно лінійні оператори, які діють в одному просторі, тобто вивчати випадок, коли $L_1 = L_2$.

Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис $L$. Застосуємо лінійний оператор $A$ до вектора $e_1$, отримуємо деякий вектор простору $L$, розкладемо його за базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Маємо

$$A(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 + \ldots + a_{n1}e_n$$

(зверніть увагу на нумерацію коефіцієнтів!). Застосуємо лінійний оператор $A$ до вектора $e_2$, отримуємо деякий вектор простору $L$, розкладемо його за базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Маємо

$$A(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 + \ldots + a_{n2}e_n.$$

Аналогічно, для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ ми застосуємо лінійний оператор $A$ до вектора $e_j$, отримуємо деякий вектор простору $L$, розкладемо його за базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$, тобто ми маємо

$$A(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 + \ldots + a_{n1}e_n$$

$$A(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 + \ldots + a_{n2}e_n$$

$$A(e_3) = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3 + \ldots + a_{n3}e_n$$

$$\vdots$$

$$A(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + a_{3n}e_3 + \ldots + a_{nn}e_n.$$

**Означення 4.8.** Введемо матрицю

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ця матриця називається **матрицею лінійного оператора** $A$ в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (для побудови цієї матриці ми для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ розкладаємо вектор $A(e_j)$ за базисом $e_1$, $e_2, \ldots, e_n$ і координати записуємо у $j$-й стовпець матриці лінійного оператора).

Розглянемо довільний $x \in L$, розкладемо його за базисом $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$ і розглянемо образ цього вектора під дією оператора $A$. Ми маємо (з урахуванням лінійності оператора $A$):

$$A(x) = A(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) =$$

$$x_1A(e_1) + x_2A(e_2) + \ldots + x_nA(e_n) =$$

$$x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 + \ldots + a_{n1}e_n)+$$

$$x_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 + \ldots + a_{n2}e_n)+$$

$$x_3(a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3 + \ldots + a_{n3}e_n)+$$

$$\vdots$$

$$x_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + a_{3n}e_3 + \ldots + a_{nn}e_n) =$$

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n)e_1+$$

$$(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n)e_2+$$

$$(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n)e_3+$$

$$\vdots$$

$$(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n)e_n.$$

Таким чином, ми довели наступне твердження.

**Твердження 4.9.** *Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор, $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис $L$. Для довільного $x \in L$ виконується*

$$(Ax)_e = A_e x_e$$

*(стовпець координат образу вектора $x$ під дією оператора $A$ в базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$ є добутком матриці оператора $A$ в цьому базисі на стовпець координат вектора $x$ в цьому базисі).* □

Беручи до уваги формулу $(Ax)_e = A_e x_e$, зазвичай пишуть $Ax$ замість $A(x)$.

**Теорема 4.10.** *Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \dots, e_n$ – довільний базис $L$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ – довільна матриця. Задамо відображення $C : L \to L$ наступним чином:*

$$\forall x \in L \quad (C(x))_e = Bx_e$$

*(ця формула для кожного $x \in L$ задає набір координат його образу $C(x)$, знаючи координати, ми обчислимо і сам вектор $C(x)$). Тоді відображення $C$ є лінійним оператором в просторі $L$, і його матриця $C_e = B$.*

*Доведення.* Лінійність відображення є очевидною. Дійсно, нехай $x, y \in L$ – довільні вектори, і $\alpha, \beta \in F$ – довільні скаляри. Тоді за властивостями координат маємо

$$(\alpha x + \beta y)_e = \alpha x_e + \beta y_e,$$

тому

$$(C(\alpha x + \beta y))_e = B(\alpha x + \beta y)_e = B(\alpha x_e + \beta y_e) = \alpha B x_e + \beta B y_e =$$

$$\alpha(C(x))_e + \beta(C(y))_e.$$

Якщо у векторів однакові координати в базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$, то ці вектори є рівними, тобто

$$C(\alpha x + \beta y) = \alpha(C(x)) + \beta(C(y)).$$

Ми довели, що $C$ – лінійний оператор в $L$.

Знайдемо матрицю цього оператора в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Для довільного $j = 1, 2, \ldots, n$ розкладаємо вектор $C(e_j)$ за базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$ і координати записуємо у $j$-й стовпець матриці лінійного оператора. Маємо

$$(C(e_j))_e = B(e_j)_e = B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{j-1,j} \\ b_{jj} \\ b_{j+1,j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

(у стовпці координат $(e_j)_e$ одиниця стоїть на місці $j$).

Тобто для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ стовпець з номером $j$ матриці оператора збігається з $j$-м стовпцем матриці $B$. Тому $C_e = B$. □

Далі розглянемо дії над операторами і їхніми матрицями.

1. Нехай $A : L \to L$ – лінійний оператор, $\lambda \in F$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис $L$. Задамо відображення $\lambda A : L \to L$ наступним чином: для довільного $x \in L$ означимо $(\lambda A)(x) = \lambda A(x)$. Тоді відображення $\lambda A$ є лінійним оператором і $(\lambda A)_e = \lambda A_e$. (Доведіть це).

2. Нехай $A, B : L \to L$ – два лінійних оператори, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис $L$. Задамо відображення $A + B : L \to L$ наступним чином: для довільного $x \in L$ означимо $(A + B)(x) = A(x) + B(x)$. Тоді відображення $A + B$ є лінійним оператором і $(A + B)_e = A_e + B_e$. (Доведіть це).

3. Нехай $A, B : L \to L$ – два лінійних оператори, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис $L$. Задамо відображення $AB : L \to L$ наступним чином: для довільного $x \in L$ означимо $(AB)(x) = A(B(x))$ (у випадку лінійних операторів їхню композицію називають добутком і позначають значком множення). Тоді відображення $AB$ є лінійним оператором і $(AB)_e = A_e \cdot B_e$.

*Доведення.* Нехай $x, y \in L$ – довільні вектори, і $\alpha, \beta \in F$ – довільні

скаляри. Тоді ми маємо

$$(AB)(\alpha x + \beta y) = A(B(\alpha x + \beta y)) = A(\alpha B(x) + \beta B(y)) =$$

$$\alpha A(B(x)) + \beta A(B(y)) = \alpha(AB)(x) + \beta(AB)(y).$$

Тобто відображення $AB$ є лінійним оператором.

Знайдемо його матрицю в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Позначимо $A_e = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ і $B_e = (b_{ij})_{i,j=1}^n$. Виберемо довільне $j = 1, 2, \ldots, n$. За означенням матриці оператора ми маємо

$$(AB)(e_j) = A(B(e_j)) = A(b_{1j}e_1 + b_{2j}e_2 + \ldots + b_{nj}e_n) =$$

$$b_{1j}A(e_1) + b_{2j}A(e_2) + \ldots + b_{nj}A(e_n) =$$

$$b_{1j}(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n) +$$

$$b_{2j}(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n) +$$

$$b_{3j}(a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + \ldots + a_{n3}e_n) +$$

$$\vdots$$

$$+b_{nj}(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n) =$$

$$(a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \ldots + a_{1n}b_{nj})e_1 +$$

$$(a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \ldots + a_{2n}b_{nj})e_2 +$$

$$(a_{31}b_{1j} + a_{32}b_{2j} + \ldots + a_{3n}b_{nj})e_3 +$$

$$\vdots$$

$$(a_{n1}b_{1j} + a_{n2}b_{2j} + \ldots + a_{nn}b_{nj})e_n.$$

Тобто, для довільного $j$, $j$-й стовпець матриці оператора $(AB)$ в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ дорівнює

$$(AB)_e^j = \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \ldots + a_{1n}b_{nj} \\ a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \ldots + a_{2n}b_{nj} \\ a_{31}b_{1j} + a_{32}b_{2j} + \ldots + a_{3n}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{n1}b_{1j} + a_{n2}b_{2j} + \ldots + a_{nn}b_{nj} \end{pmatrix} = (A_e \cdot B_e)^j.$$

Тобто ми довели, що $(AB)_e = A_e \cdot B_e$. $\square$

4. Нехай $I : L \to L$ – тотожне відображення, тобто для довільного $x \in L$ виконується $I(x) = x$, і нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – довільний базис $L$. Тоді $I$ – лінійний оператор, а його матриця в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ дорівнює одиничній матриці $I_e = I$. (Доведіть це). Увага: ми використовуємо одну й ту саму букву $I$ для тотожного відображення і для одиничної матриці.

5. Нехай $A : L \to L$ – лінійний оператор, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис $L$. Нехай лінійний оператор $A$ є оборотним, тобто існує лінійний оператор $A^{-1} : L \to L$, такий, що $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Тоді $(A^{-1})_e = (A_e)^{-1}$, тобто матриця оберненого оператора в заданому базисі є оберненою матрицею до матриці оператора в цьому базисі. (Доведіть це).

## 4.3 Образ і ядро лінійного оператора

Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $A : L \to L$ – лінійний оператор.

**Означення 4.11.** **Ядром** лінійного оператора $A$ називається

$$\operatorname{Ker} A = \{x \in L \;:\; A(x) = \mathbf{0}\}.$$

Позначення походить від англійського kernel – ядро.

**Означення 4.12.** **Образом** лінійного оператора $A$ називається

$$\operatorname{Im} A = \{y \in L \;:\; \text{існує } x \in L, \text{ такий що } A(x) = y\}.$$

Позначення походить від англійського image – образ.

**Твердження 4.13.** *Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Тоді* $\operatorname{Ker} A < L$ *і* $\operatorname{Im} A < L$.

*Доведення.* 1. Нехай $x, y \in \operatorname{Ker} A$, $Ax = \mathbf{0}, Ay = \mathbf{0}$. Нехай $\alpha, \beta \in F$. Тоді $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \beta \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \alpha x + \beta y \in \operatorname{Ker} A$. Отже $\operatorname{Ker} A < L$.

2. Нехай $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A$, тобто існують такі $x_1, x_2 \in L$, що $A(x_1) = y_1, A(x_2) = y_2$. Нехай $\alpha_1, \alpha_2 \in F$. Тоді $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \;\Rightarrow\; \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \operatorname{Im} A$. Отже, $\operatorname{Im} A < L$. □

За означенням образу, лінійний оператор $A$ є сюр'єктивним тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Im} A = L$.

**Твердження 4.14.** *Лінійний оператор $A$ є ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли* $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$.

*Доведення.* Нехай лінійний оператор $A$ є ін'єктивним. Припустимо, що $x \in \operatorname{Ker} A$, тобто $A(x) = \mathbf{0}$. Тоді маємо $A(x) = \mathbf{0} = A(\mathbf{0}) \Rightarrow x = \mathbf{0}$. Отже $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$.

Припустимо, що $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$. Нехай $x, y \in L$ такі, що $A(x) = A(y)$. Тоді $A(x - y) = A(x) - A(y) = \mathbf{0}$, тобто $x - y \in \operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow x = y$. Отже, $A$ – ін'єктивний лінійний оператор. □

**Теорема 4.15.** *Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис простору $L$, $A_e$ – матриця лінійного оператора $A$ в цьому базисі. Тоді*

$$\dim(\operatorname{Im} A) = \operatorname{rank}\ A_e, \quad \dim(\operatorname{Ker} A) = n - \operatorname{rank}\ A_e,$$

*зокрема*

$$\dim(\operatorname{Im} A) + \dim(\operatorname{Ker} A) = \dim L.$$

З твердження цієї теореми випливає, що ранг матриці лінійного оператора не залежить від вибору базису.

*Доведення.* Ми маємо $\operatorname{Im} A = \{A(x) : x \in L\}$. Нехай $x \in L$ – довільний вектор. Тоді цей вектор можна розкласти за базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$ : $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$, $x_j \in F$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Тоді ми маємо $A(x) = A(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = x_1A(e_1) + x_2A(e_2) + \ldots + x_nA(e_n)$, тобто для довільного $x \in L$ виконується $A(x) \in \operatorname{Lin}\ \{A(e_1), A(e_2), \ldots, A(e_n)\}$, іншими словами,

$$\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Lin}\ \{A(e_1), A(e_2), \ldots, A(e_n)\}.$$

Розглянемо довільний вектор $y \in \operatorname{Lin}\ \{A(e_1), A(e_2), \ldots, A(e_n)\}$, $y = \mu_1A(e_1) + \mu_2A(e_2) + \ldots + \mu_nA(e_n)$, $\mu_j \in F$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Тоді $y = A(\mu_1e_1 +$

$\mu_2 e_2 + \ldots + \mu_n e_n)$, тобто $y \in \operatorname{Im} A$. Ми довели, що

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Lin}\ \{A(e_1), A(e_2), \ldots, A(e_n)\}.$$

Звідки

$$\dim(\operatorname{Im} A) = \dim(\operatorname{Lin}\ \{A(e_1), A(e_2), \ldots, A(e_n)\})$$
$$= \operatorname{rank}\ \{A(e_1), A(e_2), \ldots, A(e_n)\}.$$

Для обчислення рангу перейдемо до координатного запису векторів. Нам відомо, що $(A(e_1))_e = A_e^1, (A(e_2))_e = A_e^2, \ldots,\ (A(e_n))_e = A_e^n$. Тобто ранг системи векторів $A(e_1), A(e_2), \ldots, A(e_n)$ дорівнює стовпцевому рангу матриці оператора $A_e$. Отже,

$$\dim(\operatorname{Im} A) = \operatorname{rank}\ A_e.$$

Припустимо, що $x \in \operatorname{Ker} A$, тобто $A(x) = \mathbf{0}$. Запишемо цю рівність в координатах:

$$(A(x))_e = (\mathbf{0})_e \ \Leftrightarrow A_e x_e = (\mathbf{0})_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо ми введемо позначення $A_e = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ і $x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (тут $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі координати вектора $x$), то маємо наступну рівність

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто ми маємо систему $n$ лінійних однорідних рівнянь з $n$ невідомими, матриця цієї системи рівнянь дорівнює $A_e$. Як ми довели раніше, розмірність підпростору розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь дорівнює $n - \operatorname{rank}\ A_e$. □

Простим наслідком формули $\dim(\operatorname{Im} A) + \dim(\operatorname{Ker} A) = \dim L$ з останньої теореми є такий важливий факт.

**Твердження 4.16.** *Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Лінійний оператор $A$ є ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли він є сюр'єктивним.*

*Доведення.* Лінійний оператор $A$ є ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$. Ми маємо $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker}\ A = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}\ A = n \Leftrightarrow \operatorname{Im}\ A = L$. Лінійний оператор $A$ є сюр'єктивним тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Im}\ A = L$. □

## 4.4 Перетворення матриці лінійного оператора при зміні базису

Нехай $A : L \to L$ – лінійний оператор. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис $L$ («старий базис»). Нехай є ще один базис $L : u_1, u_2, \ldots, u_n$ («новий базис»). Ми хочемо дослідити, як змінюється матриця лінійного оператора при переході від старого базису до нового.

Для довільного вектора $x \in L$ ми маємо $(A(x))_e = A_e x_e$ і $(A(x))_u = A_u x_u$. Позначимо через $T_{e\to u} = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ – (невироджену) матрицю переходу від базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ до базису $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Тоді для кожного $x \in L$ ми маємо $x_e = T_{e\to u} x_u, \quad x_u = T_{e\to u}^{-1} x_e$. Ми отримуємо

$$(A(x))_e = A_e x_e \ \Rightarrow\ T_{e\to u}^{-1}(A(x))_e = T_{e\to u}^{-1} A_e x_e \ \Leftrightarrow\ (A(x))_u = T_{e\to u}^{-1} A_e x_e$$

$$\Rightarrow\ (A(x))_u = T_{e\to u}^{-1} A_e T_{e\to u} x_u = (T_{e\to u}^{-1} A_e T_{e\to u}) x_u.$$

Як ми довели раніше (дивись 4.10), з цього випливає, що

$$A_u = T_{e\to u}^{-1} A_e T_{e\to u}.$$

Остання важлива формула є формулою перетворення матриці лінійного оператора при зміні базису.

Знайдемо зв'язок між визначниками матриць оператора $A$ в різних базисах. Ми маємо

$$\det A_u = \det\left(T_{e\to u}^{-1} A_e T_{e\to u}\right) = \det T_{e\to u}^{-1} \cdot \det A_e \cdot \det T_{e\to u} =$$

$$\det A_e \cdot \det T_{e\to u}^{-1} \cdot \det T_{e\to u} = \det A_e \cdot \det(T_{e\to u}^{-1} T_{e\to u}) \det A_e \cdot \det I = \det A_e.$$

Ми довели, що визначник матриці лінійного оператора не залежить від вибору базису. Це дає змогу сформулювати таке означення.

**Означення 4.17. Детермінантом (визначником)** лінійного оператора $A$ називається визначник матриці оператора у деякому базисі простору $L$. Детермінант лінійного оператора $A$ позначається $\det A$.

## 4.5 Власні числа та власні вектори лінійного оператора

Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор.

Поставимо запитання: чи існує $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – базис простору $L$, в якому матриця лінійного оператора $A$ буде мати вигляд

$$A_u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}? \tag{4.1}$$

Тобто ми намагаємося знайти базис простору, в якому матриця лінійного оператора буде діагональною.

Нехай матриця лінійного оператора має вигляд (4.1). За означенням матриці лінійного оператора, ми запишемо дію оператора на базисні вектори $u_1, u_2, \ldots, u_n$ :

$$A(u_1) = \lambda_1 u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + \ldots + 0 \cdot u_n = \lambda_1 u_1$$

$$A(u_2) = 0 \cdot u_1 + \lambda_2 u_2 + 0 \cdot u_3 + \ldots + 0 \cdot u_n = \lambda_2 u_2$$

$$A(u_3) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \lambda_3 u_3 + +0 \cdot u_4 + \ldots + 0 \cdot u_n = \lambda_3 u_3$$

$$\vdots$$

$$A(u_n) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + \ldots + 0 \cdot u_{n-1} + \lambda_n u_n = \lambda_n u_n.$$

Тобто якщо матриця лінійного оператора в деякому базисі є діагональною, то кожен вектор цього базису оператор множить на деяке число.

Оскільки нульовий вектор не може входити до базису простору, ми будемо шукати усі ненульові вектори простору $L$, які під дією лінійного оператора $A$ множаться на деяке число.

**Означення 4.18.** Вектор $x \in L, x \neq \mathbf{0}$ називається **власним вектором** лінійного оператора $A$, якщо існує $\lambda \in F$, таке, що $A(x) = \lambda x$. При цьому $\lambda$ називається **власним числом** оператора $A$ (тобто $\lambda \in F$ називається власним числом оператора $A$, якщо існує вектор $x \in L, x \neq \mathbf{0}$, такий, що $A(x) = \lambda x$).

Будемо шукати власні числа і власні вектори оператора $A$. Розглянемо рівняння $A(x) = \lambda x$, де $A$ – заданий лінійний оператор, $x \in L$ – невідомий ненульовий вектор, $\lambda \in F$ – невідоме число.

Виберемо $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – довільний базис простору $L$ і перейдемо до координатного запису:

$$A(x) = \lambda x \;\Leftrightarrow\; (A(x))_e = (\lambda x)_e \;\Leftrightarrow$$

$$A_e x_e = \lambda x_e \;\Leftrightarrow\; (A_e - \lambda I)x_e = \mathbf{0}_e.$$

Введемо позначення: $A_e = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ – відома матриця оператора $A$ в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (тут $x_1, x_2, \ldots, x_n$– невідомі координати вектора $x$) і отримаємо наступну рівність

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто ми отримали систему $n$ лінійних однорідних рівнянь від $n$ змінних, яка залежить від параметра $\lambda$, і ми шукаємо ненульові розв'язки цієї системи.

Питання: в якому випадку така система лінійних однорідних рівнянь має ненульовий розв'язок?

Як ми довели раніше, розмірність простору розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь з $n$ невідомими дорівнює $n-r$, де $r$ – ранг матриці системи рівнянь. Тобто розмірність простору розв'язків є більшою за нуль тоді і тільки тоді, коли $r < n$. Оскільки матриця системи має розмір $n \times n$, то $r < n$ тоді і тільки тоді, коли визначник матриці системи дорівнює нулю (ми використовуємо детермінантний ранг матриці). Тобто ми довели наступне важливе твердження.

**Твердження 4.19.** *Система $n$ лінійних однорідних рівнянь від $n$ змінних, яка залежить від параметра $\lambda$, вигляду $A_e x_e = \lambda x_e$, має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли*

$$\det(A_e - \lambda I) = 0.$$

□

У нас була система рівнянь з невідомим вектором $x$ і невідомим скаляром $\lambda$, ми звели її до рівняння з невідомим $\lambda$. Дослідимо це рівняння.

Позначимо через

$$\chi_A(\lambda) = \det(A_e - \lambda I) = \tag{4.2}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Функція $\chi_A(\lambda)$ є многочленом від $\lambda$, тобто $\chi_A(\lambda) \in F[\lambda]$, $\deg \chi_A(\lambda) = n$.

Функція $\chi_A(\lambda)$ є детермінантом лінійного оператора $A - \lambda I$, тому вона не залежить від вибору базису простору.

**Означення 4.20.** Функцію $\chi_A(\lambda)$ називають **характеристичним многочленом** лінійного оператора $A$. Рівняння $\chi_A(\lambda) = 0$ називають **характеристичним рівнянням** лінійного оператора $A$.

Характеристичний многочлен лінійного оператора не залежить від вибору базису простору.

Зауважимо, що оскільки характеристичний многочлен лінійного оператора має степінь $n = \dim L$, він має не більше за $n$ коренів в $F$ з урахуванням кратності.

Обчислимо деякі коефіцієнти характеристичного многочлена лінійного оператора. Для цього будемо використовувати формулу (4.2).

Очевидно, що старший коефіцієнт характеристичного многочлена (коефіцієнт при $\lambda^n$) дорівнює $(-1)^n$. Тобто характеристичний многочлен має вигляд

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + b_1\lambda + b_0.$$

Коефіцієнт $b_0 = \chi_A(0) = \det A$, як і усі інші коефіцієнти характеристичного многочлена, він не залежить від вибору базису.

Знайдемо коефіцієнт $b_{n-1}$. Будемо обчислювати визначник $\det(A - \lambda I)$ за означенням визначника (як суму по всіх підстановках доданків елементів матриці ...) і шукати ті доданки, які містять $\lambda^{n-1}$. Усі елементи матриці

$(A-\lambda I)$, які не стоять на головній діагоналі, не містять $\lambda$. А кожен елемент головної діагоналі матриці $(A-\lambda I)$ містить $\lambda$ у першому степені. Тобто якщо доданок, який входить у визначник, містить $\lambda^{n-1}$, то $n-1$ елементів матриці взято з головної діагоналі матриці $(A-\lambda I)$. Звідки останній, $n$-й елемент, теж обирається з головної діагоналі. Отже, коефіцієнт при $\lambda^{n-1}$ у $\det(A-\lambda I)$ – це коефіцієнт при $\lambda^{n-1}$ у добутку елементів головної діагоналі:

$$(a_{11}-\lambda)\cdot(a_{22}-\lambda)\cdot(a_{33}-\lambda)\cdot\ldots\cdot(a_{nn}-\lambda).$$

Нескладно перевірити, що коефіцієнт при $\lambda^{n-1}$ у цьому добутку дорівнює

$$b_{n-1}=(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+a_{33}+\ldots+a_{nn}).$$

Як і всі інші коефіцієнти характеристичного многочлена, він не залежить від вибору базису.

**Означення 4.21.** Нехай $A:L\to L$ – лінійний оператор, $\dim L=n$. **Слідом** лінійного оператора називається коефіцієнт при $\lambda^{n-1}$ в характеристичному многочлені, помножений на $(-1)^{n-1}$, тобто $\operatorname{tr}A=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\ldots+a_{nn}$, тут $A_e=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ – матриця оператора $A$ в деякому базисі $e_1,e_2,\ldots,e_n$ (як ми перевірили, слід оператора не залежить від вибору базису). Позначення походить від англійського trace – слід.

## 4.6 Лінійна незалежність власних векторів, які відповідають різним власним числам. Визначник Вандермонда

**Теорема 4.22.** *Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n:=\dim L\in\mathbb{N}$, $A:L\to L$ – лінійний оператор. Нехай $k\in\mathbb{N},1\leqslant k\leqslant n$, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k\in F$ – попарно різні власні числа оператора $A$, тобто $\forall j=1,2,\ldots,k\quad \chi_A(\lambda_j)=0$, і $\lambda_i\neq\lambda_j$ при $i\neq j$ (тут $i,j\in\{1,2,\ldots,k\}$). Нехай $x_1,x_2,\ldots,x_k\in L$ – відповідні власні вектори оператора $A$, тобто $\forall j=1,2,\ldots,k\quad A(x_j)=\lambda_jx_j$ і $x_j\neq\mathbf{0}$. Тоді вектори $x_1,x_2,\ldots,x_k$ є лінійно незалежними.*

Для доведення цієї теореми нам знадобиться формула для обчислення визначника спеціального вигляду, так званого визначника Вандермонда.

Нехай $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ – задані числа. Розглянемо визначник матриці розміру $n \times n$ наступного вигляду

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \ldots & \alpha_n^3 \\ & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Цей визначник називається **визначником Вандермонда**.

**Теорема 4.23.** *Нехай $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ – задані числа. Тоді виконується формула*

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

*Доведення.* Будемо проводити доведення індукцією по $n$.

1. База індукції $n = 2$. Маємо

$$V(\alpha_1, \alpha_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Твердження теореми доведено.

2. Індуктивний перехід $n - 1 \rightsquigarrow n, n \geqslant 3$. Припустимо, що $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} (\alpha_j - \alpha_i)$. Ми маємо

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \ldots & \alpha_n^3 \\ & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \alpha_3^{n-2} & \ldots & \alpha_n^{n-2} \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Зробимо наступні перетворення матриці, які не змінюють її визначник, у вказаній послідовності (кроки пронумеровано):

1. Помножимо рядок номер $(n-1)$ на $(-\alpha_n)$ і додамо до рядка номер $n$.

2. Помножимо рядок номер $(n-2)$ на $(-\alpha_n)$ і додамо до рядка номер $(n-1)$.

3. Помножимо рядок номер $(n-3)$ на $(-\alpha_n)$ і додамо до рядка номер $(n-2)$.

$\dots$

$n-2$. Помножимо рядок номер 2 на $(-\alpha_n)$ і додамо до рядка номер 3.

$n-1$. Помножимо рядок номер 1 на $(-\alpha_n)$ і додамо до рядка номер 2.

Ми маємо

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) :=$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 - \alpha_n & \dots & \alpha_{n-1} - \alpha_n & 0 \\ \alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_n & \dots & \alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-1}\alpha_n & 0 \\ \alpha_1^3 - \alpha_1^2\alpha_n & \dots & \alpha_{n-1}^3 - \alpha_{n-1}^2\alpha_n & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-2} - \alpha_1^{n-3}\alpha_n & \dots & \alpha_{n-1}^{n-2} - \alpha_{n-1}^{n-3}\alpha_n & 0 \\ \alpha_1^{n-1} - \alpha_1^{n-2}\alpha_n & \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} - \alpha_{n-1}^{n-2}\alpha_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкриємо останній визначник за останнім стовпцем, отримуємо

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) :=$$

$$(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_n & \alpha_2 - \alpha_n & \dots & \alpha_{n-1} - \alpha_n \\ \alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_n & \alpha_2^2 - \alpha_2\alpha_n & \dots & \alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-1}\alpha_n \\ \alpha_1^3 - \alpha_1^2\alpha_n & \alpha_2^3 - \alpha_2^2\alpha_n & \dots & \alpha_{n-1}^3 - \alpha_{n-1}^2\alpha_n \\ & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-2} - \alpha_1^{n-3}\alpha_n & \alpha_2^{n-2} - \alpha_2^{n-3}\alpha_n & \dots & \alpha_{n-1}^{n-2} - \alpha_{n-1}^{n-3}\alpha_n \\ \alpha_1^{n-1} - \alpha_1^{n-2}\alpha_n & \alpha_2^{n-1} - \alpha_2^{n-2}\alpha_n & \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} - \alpha_{n-1}^{n-2}\alpha_n \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} \alpha_1-\alpha_n & \alpha_2-\alpha_n & \dots & \alpha_{n-1}-\alpha_n \\ \alpha_1(\alpha_1-\alpha_n) & \alpha_2(\alpha_2-\alpha_n) & \dots & \alpha_{n-1}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \\ \alpha_1^2(\alpha_1-\alpha_n) & \alpha_2^2(\alpha_2-\alpha_n) & \dots & \alpha_{n-1}^2(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \\ & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-3}(\alpha_1-\alpha_n) & \alpha_2^{n-3}(\alpha_2-\alpha_n) & \dots & \alpha_{n-1}^{n-3}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \\ \alpha_1^{n-2}(\alpha_1-\alpha_n) & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_n) & \dots & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+n}(\alpha_1-\alpha_n)(\alpha_2-\alpha_n)\dots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{n-1}^2 \\ & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-3} & \alpha_2^{n-3} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-3} \\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+n}(\alpha_1-\alpha_n)(\alpha_2-\alpha_n)\dots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(\alpha_j-\alpha_i).$$

В останній рівності ми використали індуктивне припущення.

Тому ми маємо

$$V(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) =$$

$$(-1)^{1+n}(\alpha_1-\alpha_n)(\alpha_2-\alpha_n)\dots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(\alpha_j-\alpha_i) =$$

$$(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\dots(\alpha_n-\alpha_{n-1})\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(\alpha_j-\alpha_i) =$$

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\alpha_j-\alpha_i).$$

□

**Наслідок 4.24.** *Якщо числа $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in F$ є попарно різними, то $V(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\neq 0$.* □

Повернемось тепер до доведення теореми про лінійну незалежність власних векторів лінійного оператора, які відповідають різним власним числам.

*Доведення.* Припустимо, що

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k = \mathbf{0},$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in F$. Застосуємо оператор $A$ до обох частин рівняння:

$$A(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k) = \beta_1 A x_1 + \beta_2 A x_2 + \ldots + \beta_k A x_k =$$

$$\beta_1 \lambda_1 x_1 + \beta_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k x_k = A(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

тобто

$$\beta_1 \lambda_1 x_1 + \beta_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k x_k = \mathbf{0}.$$

Застосуємо оператор $A$ до обох частин останньої рівності:

$$A(\beta_1 \lambda_1 x_1 + \beta_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k x_k) =$$

$$\beta_1 \lambda_1 A x_1 + \beta_2 \lambda_2 A x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k A x_k =$$

$$\beta_1 \lambda_1^2 x_1 + \beta_2 \lambda_2^2 x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k^2 x_k = A(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

тобто

$$\beta_1 \lambda_1^2 x_1 + \beta_2 \lambda_2^2 x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k^2 x_k = \mathbf{0}.$$

Аналогічно, послідовно застосовуючи оператор, ми отримаємо таку систему рівностей:

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k = \mathbf{0},$$

$$\beta_1 \lambda_1 x_1 + \beta_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k x_k = \mathbf{0},$$

$$\beta_1 \lambda_1^2 x_1 + \beta_2 \lambda_2^2 x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k^2 x_k = \mathbf{0},$$

$$\vdots$$

$$\beta_1 \lambda_1^{k-2} x_1 + \beta_2 \lambda_2^{k-2} x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k^{k-2} x_k = \mathbf{0},$$

$$\beta_1 \lambda_1^{k-1} x_1 + \beta_2 \lambda_2^{k-1} x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k^{k-1} x_k = \mathbf{0}.$$

Введемо позначення $y_j := \beta_j x_j \in L,\ 1 \leqslant j \leqslant k$. В нових позначеннях запишемо останню систему рівностей:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_k = \mathbf{0},$$

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_k y_k = \mathbf{0},$$

$$\lambda_1^2 y_1 + \lambda_2^2 y_2 + \ldots + \lambda_k^2 y_k = \mathbf{0},$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1^{k-2} y_1 + \lambda_2^{k-2} y_2 + \ldots + \lambda_k^{k-2} y_k = \mathbf{0},$$

$$\lambda_1^{k-1} y_1 + \lambda_2^{k-1} y_2 + \ldots + \lambda_k^{k-1} y_k = \mathbf{0}.$$

Запишемо останню систему рівностей у координатах. Для цього виберемо деякий базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ і введемо позначення

$$y_j = y_{1j} e_1 + y_{2j} e_2 + \ldots + y_{nj} e_n, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Зафіксуємо довільне $s = 1, 2, \ldots, n$ і запишемо рівність $s$-х координат в кожній з попередніх $k$ рівностей. Ми отримуємо

$$y_{s1} + y_{s2} + \ldots + y_{sk} = 0,$$

$$\lambda_1 y_{s1} + \lambda_2 y_{s2} + \ldots + \lambda_k y_{sk} = 0,$$

$$\lambda_1^2 y_{s1} + \lambda_2^2 y_{s2} + \ldots + \lambda_k^2 y_{sk} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1^{k-2} y_{s1} + \lambda_2^{k-2} y_{s2} + \ldots + \lambda_k^{k-2} y_{sk} = 0,$$

$$\lambda_1^{k-1} y_{s1} + \lambda_2^{k-1} y_{s2} + \ldots + \lambda_k^{k-1} y_{sk} = 0.$$

Таким чином, набір чисел $y_{s1}, y_{s2}, \ldots, y_{sk}$ задовольняє лінійній однорідній системі $k$ рівнянь з $k$ невідомими, а визначник цієї системи рівнянь є визначником Вандермонда $V(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$.

За умовою теореми, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ є попарно різними, звідки $V(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \neq 0$. За правилом Крамера, ця система має єдиний розв'язок, отже,

$$y_{s1} = y_{s2} = \ldots = y_{sk} = 0.$$

Оскільки $s = 1, 2, \ldots, n$ – довільне число, ми отримуємо, що усі координати усіх векторів дорівнюють нулю, отже,

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_k = \mathbf{0}.$$

Але $y_j := \beta_j x_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$, а за умовою теореми $x_j \neq \mathbf{0}$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Отже, $\beta_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant k$, тобто вектори $x_1, x_2, \ldots, x_k$ є лінійно незалежними. □

## 4.7 Діагоналізовність лінійних операторів. Власні підпростори. Алгебраїчна і геометрична кратності власного числа

**Означення 4.25.** Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Лінійний оператор $A$ називається **діагоналізовним**, якщо існує $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – базис простору $L$, в якому матриця лінійного оператора $A$ має діагональний вигляд, тобто

$$A_u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що якщо матриця лінійного оператора має вказаний діагональний вигляд, то

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n).$$

Зокрема характеристичний многочлен діагоналізовного оператора має $n = \dim L$ коренів у полі $F$ з урахуванням кратності.

**Твердження 4.26.** *Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ – попарно різні власні числа оператора $A$, тобто для довільного $j = 1, 2, \ldots, n$ виконується $\chi_A(\lambda_j) = 0$ і $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ (тут $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Тоді оператор $A$ є діагоналізовним.*

*Доведення.* Це твердження є простим наслідком попередньої теореми про лінійну незалежність власних векторів, які відповідають різним власним числам.

Зафіксуємо довільне $j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Оскільки $\chi_A(\lambda_j) = 0$, існує вектор $x_j \in L$, $x_j \neq \mathbf{0}$, такий, що $Ax_j = \lambda_j x_j$. За умовою, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – попарно різні власні числа, тому із попередньої теореми вектори $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є лінійно незалежними. Тобто $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – базис простору $L$. Обчислимо матрицю оператора $A$ в цьому базисі. Ми маємо

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 = \lambda_1 x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_{n-1} + 0 \cdot x_n,$$

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2 = 0 \cdot x_1 + \lambda_2 x_2 + 0 \cdot x_3 + \ldots + 0 \cdot x_n,$$

$$\vdots$$

$$Ax_n = \lambda_n x_n = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_{n-1} + \lambda_n x_n.$$

Таким чином,

$$A_x = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

тобто оператор $A$ є діагоналізовним. □

Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Нехай $\lambda_0 \in F$, $\chi(\lambda_0) = 0$, – власне число оператора $A$.

**Означення 4.27.** Підпростір

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) = \{x \in L \ : \ (A - \lambda_0 I)x = \mathbf{0}\} = \{x \in L \ : \ Ax = \lambda_0 x\}$$

називається **власним підпростором**, який відповідає власному числу $\lambda_0$.

Тобто власний підпростір, який відповідає власному числу $\lambda_0$, складається з векторів, які під дією оператора помножуються на число $\lambda_0$ (в тому числі, в нього входить і нульовий вектор). Відзначимо, що, оскільки $\chi(\lambda_0) = 0$, маємо $\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I)) \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

**Означення 4.28.** Нехай $\lambda_0 \in F$ – власне число оператора $A$. **Алгебраїчною кратністю** власного числа $\lambda_0$ називається кратність кореня $\lambda_0$ в характеристичному многочлені оператора $\chi_A(\lambda) \in F[\lambda]$.

**Означення 4.29.** Нехай $\lambda_0 \in F$ – власне число оператора $A$. **Геометричною кратністю** власного числа $\lambda_0$ називається розмірність відповідного власного підпростору: $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I))$.

**Теорема 4.30.** *Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Нехай $\lambda_0 \in F$, $\chi(\lambda_0) = 0$ – власне число оператора $A$. Тоді геометрична кратність власного числа $\lambda_0$ є меншою або рівною алгебраїчній кратності власного числа $\lambda_0$.*

*Доведення.* Позначимо через $k$, $1 \leqslant k \leqslant n$ геометричну кратність власного числа $\lambda_0$, тобто $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I)) = k$. Нехай вектори $u_1, u_2, \ldots, u_k$ є базисом $\mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I)$.

Доповнимо систему векторів $u_1, u_2, \ldots, u_k$ до базису простору: нехай $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$ – базис $L$. Запишемо матрицю оператора $A$ в цьому базисі. Оберемо довільне $j$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Оскільки $u_j \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I)$, маємо

$$Au_j = \lambda_0 u_j = 0 \cdot u_1 + \ldots + 0 \cdot u_{j-1} + \lambda_0 u_j + 0 \cdot u_{j+1} + \ldots + 0 \cdot u_n.$$

Таким чином, матриця оператора $A$ в цьому базисі має наступний вигляд

$$A_u = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{1,k+2} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{2,k+2} & \ldots & a_{2n} \\ & & & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_0 & a_{k+1,k+2} & \ldots & a_{k+1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{k+2,k+2} & \ldots & a_{k+2,n} \\ & & & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{n-1,k+2} & \ldots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{n,k+2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

тобто перші $k$ стовпчиків відповідають діагональній матриці з числом $\lambda_0$ на головній діагоналі.

Таким чином (оскільки матриця є блоково-трикутною), ми маємо

$$\chi_A(\lambda) = \det(A_u - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^k \nu(\lambda),$$

де $\nu(\lambda) \in F[\lambda]$. Ми довели, що кратність кореня $\lambda_0$ у характеристичному многочлені (який не залежить від вибору базису) є не меншою за $k$. Тобто геометрична кратність власного числа $\lambda_0$ є меншою або рівною алгебраїчній кратності цього власного числа. □

**Твердження 4.31.** *Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Тоді оператор $A$ є діагоналізовним тоді і тільки тоді, коли одночасно виконуються наступні два твердження.*

*1. Характеристичний многочлен лінійного оператора розкладається в добуток лінійних множників, тобто*

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k}, \tag{4.3}$$

*де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in F$ – попарно різні числа, $m_1, m_2, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$.*

*2. Для кожного кореня характеристичного многочлена $\lambda_j, 1 \leqslant j \leqslant k$ геометрична кратність дорівнює алгебраїчній кратності.*

*Доведення.* Нехай лінійний оператор $A$ є діагоналізовним. Це означає, що існує базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ простору $L$, в якому матриця оператора $A$ має вигляд

$$A_e = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu_n \end{pmatrix},$$

де $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in F$ не обов'язково попарно різні. Тому ми маємо $\chi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \mu_n)$, або, збираючи разом однакові множники, можемо записати $\chi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$, де

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in F$ – попарно різні числа, $m_1, m_2, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$. Для кожного $j = 1, 2, \ldots, k$ число $\lambda_j$ з'являється на діагоналі матриці $A_e$ рівно $m_j$ разів, тому є $m_j$ різних базисних векторів, які є власними векторами оператора $A$ із власним числом $\lambda_j$. Лінійна оболонка цих векторів має розмірність $m_j$, вона є підпростором власного простору $\mathrm{Ker}(A - \lambda_j I)$. Тому геометрична кратність кореня $\lambda_j$ є більшою або рівною алгебраїчній кратності $m_j$. Ми довели, що більшою вона не може бути, тому геометрична кратність кореня $\lambda_j$ дорівнює алгебраїчній кратності $m_j$.

Припустимо тепер, що виконуються умови 1 і 2 твердження, тобто характеристичний многочлен оператора $A$ має вигляд (4.3), і для кожного $j = 1, 2, \ldots, k$ маємо $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda_j I)) = m_j$. Для кожного $j = 1, 2, \ldots, k$ виберемо базис підпростору $\mathrm{Ker}(A - \lambda_j I)$, позначимо його $e_{1,j}, e_{2,j}, \ldots, e_{m_j,j}$. Тоді для кожного $s = 1, 2, \ldots, m_j$ маємо $A(e_{s,j}) = \lambda_j e_{s,j}$. Розглянемо систему векторів $e_{1,1}, e_{2,1}, \ldots, e_{m_1,1}, e_{1,2}, e_{2,2}, \ldots, e_{m_2,2}, \ldots, e_{1,k}, e_{2,k}, \ldots, e_{m_k,k}$. Оскільки $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, ця система складається з $n$ векторів. Перевіримо, що ці $n$ векторів є базисом простору $L$. Припустимо, що лінійна комбінація цих векторів дорівнює нульовому вектору:

$$\begin{gathered}\alpha_{1,1}e_{1,1} + \alpha_{2,1}e_{2,1} + \ldots + \alpha_{m_1,1}e_{m_1,1} + \alpha_{1,2}e_{1,2} + \alpha_{2,2}e_{2,2} + \ldots \\ + \alpha_{m_2,2}e_{m_2,2} + \ldots + \alpha_{1,k}e_{1,k} + \alpha_{2,k}e_{2,k} + \ldots + \alpha_{m_k,k}e_{m_k,k} = \mathbf{0},\end{gathered} \tag{4.4}$$

де $\alpha_{s,j} \in F, 1 \leqslant j \leqslant k, 1 \leqslant s \leqslant m_j$. Для кожного $j = 1, 2, \ldots, k$ позначимо $y_j := \alpha_{1,j}e_{1,j} + \alpha_{2,j}e_{2,j} + \ldots + \alpha_{m_j,j}e_{m_j,j} \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_j I)$. Із рівності (4.4) маємо $y_1 + y_2 + \ldots + y_k = \mathbf{0}$. Для кожного $j = 1, 2, \ldots, k$ вектор $y_j$ є або власним вектором оператора $A$, який відповідає власному числу $\lambda_j$, або є нульовим вектором. Оскільки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in F$ – попарно різні числа, а власні вектори лінійного оператора, які відповідають різним власним числам, є лінійно незалежними, з рівності $y_1 + y_2 + \ldots + y_k = \mathbf{0}$ отримуємо $y_1 = y_2 = \ldots = y_k = \mathbf{0}$. Тому для кожного $j = 1, 2, \ldots, k$ маємо $\alpha_{1,j}e_{1,j} + \alpha_{2,j}e_{2,j} + \ldots + \alpha_{m_j,j}e_{m_j,j} = \mathbf{0}$. Але вектори $e_{1,j}, e_{2,j}, \ldots, e_{m_j,j}$ утворюють базис підпростору $\mathrm{Ker}(A - \lambda_j I)$, тому вони є лінійно незалежними, звідки $\alpha_{1,j} = \alpha_{2,j} = \ldots = \alpha_{m_j,j} = 0$. Ми довели, що з (4.4) випливає, що для кожного $j =$

$1, 2, \ldots, k$ і кожного $s = 1, 2, \ldots, m_j$ виконується $\alpha_{s,j} = 0$. Отже, система $n$ векторів $e_{1,1}, e_{2,1}, \ldots, e_{m_1,1}, e_{1,2}, e_{2,2}, \ldots, e_{m_2,2}, \ldots, e_{1,k}, e_{2,k}, \ldots, e_{m_k,k}$ є лінійно незалежною, тому вона є базисом простору $L$. Ми довели, що у просторі $L$ є базис, який складається з власних векторів оператора $A$, тому оператор $A$ є діагоналізовним. $\square$

# Розділ 5

# Евклідові простори

## 5.1 Скалярний добуток та його властивості

Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, при цьому $F = \mathbb{R}$ або $F = \mathbb{C}$.

**Означення 5.1.** Відображення $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon L \times L \to F$ називається **скалярним добутком** в $L$, якщо виконуються наступні три аксіоми:

1. Для кожного $x \in L$ виконується $\langle x, x \rangle \geqslant 0$, при цьому якщо $\langle x, x \rangle = 0$, то $x = \mathbf{0}$. (Мається на увазі, що скалярний добуток $\langle x, x \rangle$ є дійсним невід'ємним числом.) Ця аксіома називається додатною визначеністю.

2. Для довільних $x, y \in L$ виконується $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (тут риска зверху означає комплексне спряження). Ця аксіома називається ермітовою симетрією.

3. Для довільних $x_1, x_2, y \in L$ і довільних $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ виконується $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$. Ця аксіома називається лінійністю за першим аргументом.

**Означення 5.2.** Лінійний простір, на якому заданий скалярний добуток, називається **евклідовим простором** (нагадуємо, що це лінійний простір над полем $F = \mathbb{R}$ або $F = \mathbb{C}$).

Далі будемо позначати евклідів простір буквою $E$ (замість $L$).

Наведемо властивості скалярного добутку.

1. Нехай $x \in E$ – довільний вектор, тоді $\langle \mathbf{0}, x \rangle = \langle x, \mathbf{0} \rangle = 0$.

*Доведення.* Ми маємо $\langle \mathbf{0}, x \rangle = \langle 1 \cdot \mathbf{0} + 1 \cdot \mathbf{0}, x \rangle = 1 \cdot \langle \mathbf{0}, x \rangle + 1 \cdot \langle \mathbf{0}, x \rangle = 2\langle \mathbf{0}, x \rangle \;\Rightarrow\; \langle \mathbf{0}, x \rangle = 0$. Також маємо $\langle x, \mathbf{0} \rangle = \overline{\langle \mathbf{0}, x \rangle} = \overline{0} = 0$. □

2. Нехай $x, y_1, y_2 \in E$ –довільні вектори і $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ – довільні скаляри. Тоді $\langle x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \overline{\langle \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, x \rangle} = \overline{\alpha_1 \langle y_1, x \rangle + \alpha_2 \langle y_2, x \rangle} = \overline{\alpha_1}\,\overline{\langle y_1, x \rangle} + \overline{\alpha_2}\,\overline{\langle y_2, x \rangle} = \overline{\alpha_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle x, y_2 \rangle$.

Ця властивість називається напівлінійністю. Тобто у випадку дійсного поля скалярний добуток є лінійною функцією і по першому, і по другому

аргументах, а у випадку комплексного поля скаляри з другого аргументу виносяться із комплексним спряженням (!).

**Приклад 5.3.** Нехай $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}^n$, задамо скалярний добуток наступною формулою

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Нескладно перевірити, що ця формула задає скалярний добуток (зробіть це!).

**Приклад 5.4.** Нехай $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{C}^n$, задамо скалярний добуток наступною формулою

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \ldots + x_n \overline{y_n}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Нескладно перевірити, що ця формула задає скалярний добуток (зробіть це!).

**Зауваження 5.5.** Якщо кажуть «евклідів простір $\mathbb{R}^n$», то мається на увазі, що скалярний добуток задається формулою з прикладу 5.3. Якщо кажуть «евклідів простір $\mathbb{C}^n$», то мається на увазі, що скалярний добуток задається формулою з прикладу 5.4. Якщо лінійні простори $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$ потрібно розглянути з якимось іншим скалярним добутком, то потрібно обов'язково вказати, що розглядається нестандартний скалярний добуток.

**Приклад 5.6.** Нехай $C[0,1]$ – простір дійсних неперервних функцій на відрізку $[0,1]$, задамо скалярний добуток наступною формулою

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx, \quad f, g \in C[0,1].$$

Нескладно перевірити, що ця формула задає скалярний добуток (зробіть це!).

**Приклад 5.7.** Нехай $E = \mathbb{R}^2$, задамо (нестандартний!) скалярний добуток наступною формулою

$$\prec \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \succ = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Нескладно перевірити, що ця формула задає скалярний добуток (зробіть це!).

## 5.2 Нерівність Коші–Буняковського

**Теорема 5.8** (нерівність Коші–Буняковського). *Нехай $E$ – евклідів простір. Тоді для довільних $x, y \in E$ виконується*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

*(в правій частині стоять невід'ємні корені з дійсних невід'ємних чисел).*

*Доведення.* Якщо $y = \mathbf{0}$, то нерівність виконується ($0 \leqslant 0$). Оберемо довільні $x, y \in E$, при цьому $y \neq \mathbf{0}$. Для довільного $\lambda \in F$ із першої аксіоми скалярного добутку випливає

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geqslant 0.$$

Ми маємо

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x + \lambda y\rangle + \langle \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + \overline{\lambda}\langle x, y\rangle +$$

$$\lambda\langle y, x\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}\ (\lambda\langle y, x\rangle) + \lambda\overline{\lambda}\langle y, y\rangle \geqslant 0.$$

Розглянемо окремо випадки $F = \mathbb{R}$ і $F = \mathbb{C}$.

1. Нехай $F = \mathbb{R}$. Тоді остання нерівність буде мати вигляд:

$$\langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \geqslant 0.$$

Вказана нерівність виконується для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли

$$D = 4(\langle x, y\rangle)^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leqslant 0 \ \Rightarrow\ |\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Для випадку дійсного простору нерівність Коші–Буняковського доведено.

2. Нехай $F=\mathbb{C}$. Ми довели наступну нерівність:

$$\langle x,x\rangle + 2\mathrm{Re}\ (\lambda\langle y,x\rangle) + \lambda\overline{\lambda}\langle y,y\rangle \geqslant 0.$$

Нехай $\langle y,x\rangle = r(\cos\psi + i\sin\psi),\ r\geqslant 0, \psi\in\mathbb{R}$. Будемо обирати $\lambda$ у вигляді $\lambda = t(\cos(-\psi)+i\sin(-\psi))$, де $t\in\mathbb{R}$. Ми маємо

$$2\mathrm{Re}\ (\lambda\langle y,x\rangle) = 2\mathrm{Re}\ (t(\cos(-\psi)+i\sin(-\psi))\cdot r(\cos\psi+i\sin\psi)) =$$
$$2rt\mathrm{Re}\ ((\cos(-\psi)+i\sin(-\psi))\cdot(\cos\psi+i\sin\psi)) =$$
$$2rt\mathrm{Re}\ (\cos 0 + i\sin 0) = 2rt,$$

крім того

$$\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 = |t|^2 = t^2.$$

Отже, ми отримуємо

$$\langle x,x\rangle + 2rt + \langle y,y\rangle t^2 \geqslant 0$$

для довільного $t\in\mathbb{R}$. Остання нерівність виконується для довільного $t\in\mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли

$$D = 4r^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leqslant 0\ \Rightarrow$$
$$r = |\langle y,x\rangle| = |\langle x,y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}.$$

Отже, і у випадку комплексного простору нерівність Коші–Буняковського доведено. □

**Питання 5.9.** *Коли у нерівності Коші–Буняковського досягається рівність?*

**Приклад 5.10.** Нехай $n\in\mathbb{N},\ E=\mathbb{R}^n$. Тоді для довільних наборів дійсних чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_n\in\mathbb{R}$ виконується

$$|x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n| \leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2}.$$

**Приклад 5.11.** Нехай $n\in\mathbb{N},\ E=\mathbb{C}^n$. Тоді для довільних наборів комплексних чисел $z_1,z_2,\ldots,z_n,\ w_1,w_2,\ldots,w_n\in\mathbb{C}$ виконується

$$|z_1w_1+z_2w_2+\ldots+z_nw_n| \leqslant$$
$$\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2+\ldots+|z_n|^2}\cdot\sqrt{|w_1|^2+|w_2|^2+\ldots+|w_n|^2}.$$

**Приклад 5.12.** Нехай $C[0,1]$ – простір дійсних неперервних функцій на відрізку $[0,1]$ зі скалярним добутком, що визначений у Прикладі 5.6 вище. Тоді для довільних неперервних функцій $f, g \in C[0,1]$ виконується

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)dx\right| \leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 g^2(x)dx}.$$

## 5.3 Норма вектора

Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, при цьому $F = \mathbb{R}$ або $F = \mathbb{C}$.

**Означення 5.13.** Відображення $\|\cdot\|: \ L \to [0;+\infty) \subset \mathbb{R}$ називається **нормою** в $L$, якщо виконуються наступні три аксіоми:

1. Для довільного $x \in L$ виконується $\|x\| = 0 \ \Rightarrow \ x = \mathbf{0}$.

2. Для довільних $x \in L$ і $\lambda \in F$ виконується $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

3. Для довільних $x, y \in L$ виконується $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ (ця нерівність називається **нерівністю трикутника**).

Відзначимо, що з аксіоми 2 випливає, що $x = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \|x\| = 0$.

**Приклад 5.14.** Нехай $n \in \mathbb{N}, \ L = \mathbb{R}^n$. Задамо норму наступним чином:

$$\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

Перевірте, що це є нормою.

**Приклад 5.15.** Нехай $n \in \mathbb{N}, \ L = \mathbb{R}^n$. Задамо норму наступним чином:

$$\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Перевірте, що це є нормою.

**Приклад 5.16.** Нехай $n \in \mathbb{N}$, $L = \mathbb{R}^n$. Задамо норму наступним чином:

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|).$$

Перевірте, що це є нормою.

**Теорема 5.17.** *Нехай $E$ – евклідів простір. Тоді формула $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in E$ задає норму в $E$. Ця норма називається* **нормою, породженою скалярним добутком**.

*Доведення.* Треба перевірити виконання трьох аксіом норми.

1. Оскільки для довільного $x \in E$ виконується $\langle x, x\rangle \geqslant 0$, то $\|x\| \geqslant 0$. Якщо $\|x\| = 0$, то $\langle x, x\rangle = 0$ і, за аксіомою скалярного добутку, $x = \mathbf{0}$.

2. Для довільних $x \in L$ і $\lambda \in F$ виконується $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\|x\|$.

3. Для довільних $x, y \in L$ виконується

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Тобто $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Ми довели, що формула $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ задає норму в просторі $E$. □

В подальшому ми в усіх евклідових просторах завжди використовуємо норму, яка породжена скалярним добутком.

Відзначимо, що в евклідовому просторі скалярний добуток можна виразити через норму. А саме, виконується наступне твердження.

**Твердження 5.18.** *1. Нехай $E$ – дійсний евклідів простір. Тоді для довільних векторів $x, y \in E$ виконується*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2). \tag{5.1}$$

*2. Нехай $E$ – комплексний евклідів простір. Тоді для довільних векторів $x, y \in E$ виконується*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) + i\cdot\frac{1}{2}(\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2). \quad (5.2)$$

*Доведення.* 1. Нехай $E$ – дійсний евклідів простір. Тоді для довільних векторів $x, y \in E$ ми маємо

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle =$$

$$\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2,$$

звідки отримуємо потрібну формулу (5.1).

2. Нехай $E$ – комплексний евклідів простір. Тоді, як і в попередньому випадку, обчислення $\|x+y\|^2$ для довільних векторів $x, y \in E$ (з урахуванням того, що $\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} = 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle$) дає

$$\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

Підставимо в останню формулу замість вектора $y$ вектор $iy$. Враховуючи те, що $\mathrm{Re}\,\langle x, iy\rangle = \mathrm{Re}\,(-i\langle x, y\rangle) = \mathrm{Im}\,\langle x, y\rangle$ і $\|iy\| = |i|\|y\| = \|y\|$, маємо

$$\mathrm{Im}\,\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

Знаючи дійсну і уявну частини комплексного числа $\langle x, y\rangle$, ми отримуємо потрібну формулу (5.2). □

## 5.4 Ортонормовані системи векторів та ортонормовані базиси

Нехай $E$ – евклідів простір.

**Означення 5.19.** Вектори $x, y \in E$ називаються **ортогональними**, якщо $\langle x, y\rangle = 0$.

**Твердження 5.20.** *Нехай $E$ – евклідів простір, $x_1, x_2, \ldots, x_m \in E$ – попарно ортогональні ненульові вектори, тобто $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ при $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, і $x_j \neq \mathbf{0}$ при всіх $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Тоді вектори $x_1, x_2, \ldots, x_m$ є лінійно незалежними.*

*Доведення.* Нехай $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_m x_m = \mathbf{0}$. Оберемо довільне $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ і помножимо попередню рівність скалярно на $x_j$. Ми маємо

$$\langle \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_m x_m, x_j \rangle = \langle \mathbf{0}, x_j \rangle = 0 \;\Rightarrow$$

$$\mu_1 \langle x_1, x_j \rangle + \mu_2 \langle x_2, x_j \rangle + \ldots + \mu_m \langle x_m, x_j \rangle = 0 \;\Rightarrow \mu_j \langle x_j, x_j \rangle = 0.$$

Оскільки за умовою $x_j \neq \mathbf{0}$, ми отримуємо $\langle x_j, x_j \rangle \neq 0$, отже, $\mu_j = 0$ при усіх $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Ми довели, що вектори $x_1, x_2, \ldots, x_m$ є лінійно незалежними. □

**Означення 5.21.** Система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_m \in E$ називається **ортонормованою**, якщо $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ при $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ і $\langle x_j, x_j \rangle = 1$ при усіх $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ (тобто ці вектори є попарно ортогональними і норма кожного вектора дорівнює одиниці).

Ми довели, що ортонормовані системи є лінійно незалежними. Тепер ми хочемо побудувати ортонормований базис евклідового простору.

**Теорема 5.22** (процес ортогоналізації Грама–Шмідта)**.** *Нехай $E$ – евклідів простір, і система векторів $y_1, y_2, \ldots, y_m \in E$ є лінійно незалежною. Тоді існує ортонормована система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_m \in E$, така, що для кожного $j = 1, 2, \ldots, m$ виконується* $\mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2, \ldots, y_j\} = \mathrm{Lin}\ \{u_1, u_2, \ldots, u_j\}$.

*Доведення.* Ми приведемо алгоритм побудови потрібної ортонормованої системи.

1. Для $j = 1$. Нам потрібно побудувати вектор $u_1$, такий, що $\|u_1\| = 1$ і $\mathrm{Lin}\ \{y_1\} = \mathrm{Lin}\ \{u_1\}$. Покладемо $u_1 = \dfrac{y_1}{\|y_1\|}$ (оскільки $y_1, y_2, \ldots, y_m$ є лінійно незалежними, то $y_1 \neq \mathbf{0}$, звідки $\|y_1\| \neq 0$). Ми маємо $\|u_1\| = \dfrac{1}{\|y_1\|} \cdot \|y_1\| = 1$. Крім того, $\mathrm{Lin}\ \{y_1\} = \{\alpha y_1 \ :\ \alpha \in F\} = \{\alpha \|y_1\| \cdot u_1 \ :\ \alpha \in F\ \} = \{\beta u_1 \ :\ \beta \in F\ \} = \mathrm{Lin}\ \{u_1\}$.

2. Отже, вектор $u_1$ вже побудовано. Нам потрібно побудувати вектор $u_2$, такий, що $\langle u_2, u_1 \rangle = 0$, $\|u_2\| = 1$ і $\mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2\} = \mathrm{Lin}\ \{u_1, u_2\}$. Покладемо $\tilde{u_2} = y_2 + \lambda u_1$ і будемо обирати $\lambda \in F$ із умови $\langle \tilde{u_2}, u_1 \rangle = 0$. Ми маємо

$\langle \tilde{u}_2, u_1\rangle = \langle y_2 + \lambda u_1, u_1\rangle = \langle y_2, u_1\rangle + \lambda\langle u_1, u_1\rangle = \langle y_2, u_1\rangle + \lambda = 0$, звідки маємо $\lambda = -\langle y_2, u_1\rangle$. Зафіксуємо це значення $\lambda$. Відзначимо, що $\tilde{u}_2 = y_2 + \lambda \frac{y_1}{\|y_1\|} \neq \mathbf{0}$ (нетривіальна лінійна комбінація лінійно незалежних векторів $y_1, y_2$). Покладемо $u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|}$. Очевидно, що $\langle u_2, u_1\rangle = 0$, $\|u_2\| = 1$. Крім того, ми маємо $u_1 \in \mathrm{Lin}\ \{y_1\} \subset \mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2\}$, $u_2 \in \mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2\}$. Звідки отримуємо $\mathrm{Lin}\ \{u_1, u_2\} \subset \mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2\}$. А оскільки вектори $u_1, u_2$ є лінійно незалежними (як ортонормована система), ми отримуємо $\mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2\} = \mathrm{Lin}\ \{u_1, u_2\}$.

3. Нехай вже побудовані вектори $u_1, u_2, \ldots, u_s$, $s < m$, вони утворюють ортонормовану систему, і для кожного $j = 1, 2, \ldots, s$ виконується $\mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2, \ldots, y_j\} = \mathrm{Lin}\ \{u_1, u_2, \ldots, u_j\}$. Нам потрібно побудувати вектор $u_{s+1}$. Покладемо $\tilde{u}_{s+1} = y_{s+1} + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_s u_s$ і будемо обирати $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in F$ із наступної системи умов: для кожного $j = 1, 2, \ldots, s$ виконується $\langle \tilde{u}_{s+1}, u_j\rangle = 0$. Ми маємо

$$\langle \tilde{u}_{s+1}, u_j\rangle = \langle y_{s+1} + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_s u_s, u_j\rangle =$$

$$\langle y_{s+1}, u_j\rangle + \lambda_1\langle u_1, u_j\rangle + \lambda_2\langle u_2, u_j\rangle + \ldots + \lambda_s\langle u_s, u_j\rangle =$$

$$\langle y_{s+1}, u_j\rangle + \lambda_j = 0.$$

Отже, для кожного $j = 1, 2, \ldots, s$ покладемо $\lambda_j = -\langle y_{s+1}, u_j\rangle$. Тобто для кожного $j = 1, 2, \ldots, s$ виконується $\langle \tilde{u}_{s+1}, u_j\rangle = 0$.

Ми маємо: $u_1 \in \mathrm{Lin}\ \{y_1\}, u_2 \in \mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2\}, \ldots, u_s \in \mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$, звідки отримуємо $\tilde{u}_{s+1} \in \mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2, \ldots, y_s, y_{s+1}\}$. При цьому за побудовою $\tilde{u}_{s+1} \neq \mathbf{0}$ (як нетривіальна лінійна комбінація лінійно незалежних векторів $y_1, y_2, \ldots, y_s, y_{s+1}$). Покладемо $u_{s+1} = \frac{\tilde{u}_{s+1}}{\|\tilde{u}_{s+1}\|}$. Тоді для кожного $j = 1, 2, \ldots, s$ виконується $\langle u_{s+1}, u_j\rangle = 0$ і $\|u_{s+1}\| = 1$, тобто $u_1, u_2, \ldots, u_s, u_{s+1}$ – ортонормована система векторів. За побудовою ми маємо

$$u_1, u_2, \ldots, u_s, u_{s+1} \in \mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2, \ldots, y_s, y_{s+1}\} \ \Rightarrow$$

$$\mathrm{Lin}\ \{u_1, u_2, \ldots, u_s, u_{s+1}\} \subset \mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2, \ldots, y_s, y_{s+1}\}.$$

Оскільки система векторів $u_1, u_2, \dots, u_s, u_{s+1}$ є ортонормованою системою, вона є лінійно незалежною системою векторів, звідки

$$\mathrm{Lin}\ \{u_1, u_2, \dots, u_s, u_{s+1}\} = \mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2, \dots, y_s, y_{s+1}\}.$$

Тобто за $m$ кроків ми побудуємо потрібну ортонормовану систему векторів. □

Простим наслідком теореми Грама–Шмідта є наступне твердження.

**Твердження 5.23.** *Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$. Тоді існує $u_1, u_2, \dots, u_n$ – ортонормований базис $E$.*

Для доведення твердження потрібно взяти довільний базис простору $E$ і провести процес ортогоналізації.

**Твердження 5.24.** *Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $u_1, u_2, \dots, u_n$ – ортонормований базис $E$. Тоді для кожного вектора $x \in E$ виконується $x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j$.*

*Доведення.* Нехай $x \in E$ – довільний вектор. Розкладемо його за базисом $u_1, u_2, \dots, u_n$. Ми маємо $x = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n$, де $x_1, \dots, x_n \in F$. Для довільного $j = 1, 2, \dots, n$ помножимо цю рівність скалярно на $u_j$, отримуємо

$$\langle x, u_j \rangle = \langle x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n, u_j \rangle = x_1\langle u_1, u_j \rangle +$$

$$x_2\langle u_2, u_j \rangle + \ldots + x_n\langle u_n, u_j \rangle = x_j.$$

□

**Задача 5.25.** Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $v_1, v_2, \dots, v_n$ – деякий базис $E$. Припустимо, що для кожного вектора $x \in E$ виконується $x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle v_j$. Тоді $v_1, v_2, \dots, v_n$ – ортонормований базис $E$.

**Твердження 5.26.** *Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $u_1, u_2, \dots, u_n$ – ортонормований базис $E$. Нехай $x, y \in E$ – довільні*

*вектори, позначимо* $x_u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y_u = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. *Тоді* $\langle x, y\rangle = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \ldots + x_n\overline{y}_n$.

*Доведення.*

$$\langle x, y\rangle = \langle x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n, y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_nu_n\rangle =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle x_iu_i, y_ju_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\overline{y}_j\langle u_i, u_j\rangle = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \ldots + x_n\overline{y}_n.$$

□

## 5.5 Ортогональне доповнення до підпростору

Нехай $E$ – евклідів простір, $U < E$ – підпростір $E$.

**Означення 5.27. Ортогональним доповненням** до $U$ називається $U^{\perp} = \{x \in E \ : \ \forall y \in U \ \langle x, y\rangle = 0\} \subset E$.

**Твердження 5.28.** *Нехай $E$ – евклідів простір, $U < E$. Тоді $U^{\perp} < E$.*

*Доведення.* Нехай $x_1, x_2 \in U^{\perp}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in F$. Для довільного $y \in U$ маємо

$$\langle \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2, y\rangle = \alpha_1\langle x_1, y\rangle + \alpha_2\langle x_2, y\rangle = 0.$$

Отже, $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 \in U^{\perp}$. □

**Теорема 5.29.** *Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, і $U < E$. Тоді $U \oplus U^{\perp} = E$.*

*Доведення.* Якщо $U = \{\mathbf{0}\}$, то, очевидно, $U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}^{\perp} = E$, тому виконується $U \oplus U^{\perp} = \{\mathbf{0}\} \oplus E = E$.

Якщо $U = E$, то $U^{\perp} = E^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ (доведіть це!), тому виконується $U \oplus U^{\perp} = E \oplus \{\mathbf{0}\} = E$.

Припустимо тепер, що $\dim U = m,\ 1 \leqslant m < n$. Виберемо $e_1, e_2, \ldots, e_m$ – довільний базис $U$. Доповнимо його до базису всього простору, нехай

$e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$ – базис $E$. Проведемо процес ортогоналізації над системою векторів $e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$ і отримаємо ортонормовану систему векторів $u_1, u_2, \ldots, u_n$, таку, що для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ виконується $\text{Lin } \{e_1, e_2, \ldots, e_j\} = \text{Lin } \{u_1, u_2, \ldots, u_j\}$. Зокрема $U = \text{Lin } \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} = \text{Lin } \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, тобто $u_1, u_2, \ldots, u_m$ – ортонормований базис $U$.

Позначимо через $V := \text{Lin } \{u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_n\}$, тоді нам відомо, що $U \oplus V = E$. Доведемо, що $V = U^{\perp}$. Нехай $x \in U^{\perp}$– довільний вектор $U^{\perp}$, розкладемо його за базисом простору: $x = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n$, $x_1, \ldots, x_n \in F$. Тоді для довільного $y \in U$ маємо $\langle x, y\rangle = 0$. Оскільки для довільного $j = 1, 2, \ldots, m$ маємо $u_j \in U$, ми отримуємо

$$\langle x, u_j\rangle = \langle x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n, u_j\rangle =$$

$$x_1\langle u_1, u_j\rangle + x_2\langle u_2, u_j\rangle + \ldots + x_n\langle u_n, u_j\rangle = x_j = 0$$

для усіх $j = 1, 2, \ldots, m$. Тобто $x = x_{m+1}u_{m+1} + x_{m+2}u_{m+2} + \ldots + x_nu_n \in V$. Ми довели, що $U^{\perp} \subset V$.

Доведемо обернене включення. Нехай $x \in V$ – довільний вектор $V$. Тоді, за означенням $V$, маємо $x = x_{m+1}u_{m+1} + x_{m+2}u_{m+2} + \ldots + x_nu_n$, де $x_{m+1}, x_{m+2} \ldots, x_n \in F$. Розглянемо довільний $y \in U$, тоді $y = y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_mu_m$, де $y_1, y_2 \ldots, y_m \in F$. Оскільки $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – ортонормований базис $E$, ми маємо $\langle x, y\rangle = \langle x_{m+1}u_{m+1} + x_{m+2}u_{m+2} + \ldots + x_nu_n, y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_mu_m\rangle = 0$, тобто $x \in U^{\perp}$. Отже, $V \subset U^{\perp}$.

Ми довели, що $U^{\perp} = V$, звідки $U \oplus U^{\perp} = E$. □

Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$. Сформулюємо декілька властивостей ортогонального доповнення.

1. $E^{\perp} = \{\mathbf{0}\}, \{\mathbf{0}\}^{\perp} = E$.
2. $(U^{\perp})^{\perp} = U$ для довільного $U < E$.
3. $(U + V)^{\perp} = U^{\perp} \cap V^{\perp}$ для довільних $U, V < E$.
4. $(U \cap V)^{\perp} = U^{\perp} + V^{\perp}$ для довільних $U, V < E$.

Доведіть ці властивості самостійно.

# Розділ 6

# Лінійні оператори в евклідових просторах

## 6.1 Лінійні функціонали в евклідових просторах

Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$.

**Означення 6.1.** Функція $f\colon L \to F$ називається **лінійним функціоналом** в $L$, якщо для довільних $x_1, x_2 \in L$ і довільних $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ виконується $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$.

Таким чином, лінійний функціонал є лінійним оператором із лінійного простору $L$ в одновимірний лінійний простір $F$.

**Теорема 6.2** (про загальний вигляд лінійного функціонала в евклідовому просторі). *Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $f : E \to F$ – лінійний функціонал в $E$. Тоді існує єдиний $y \in E$, такий, що для довільного $x \in E$ виконується $f(x) = \langle x, y\rangle$. І навпаки, для довільного $z \in E$ функція $f : E \to F$, яка задається формулою $f(x) = \langle x, z\rangle$, є лінійним функціоналом в $E$.*

*Доведення.* Той факт, що для довільного $z \in E$ функція $f : E \to F$, яка задається формулою $f(x) = \langle x, z\rangle$, є лінійним функціоналом в $E$, є очевидним (доведіть це). Нехай $f : E \to F$ – лінійний функціонал в $E$. Нехай $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – ортонормований базис простору $E$. Будемо шукати потрібний вектор $y \in E$ у вигляді $y = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_n u_n$, де $y_1, y_2, \ldots, y_n \in F$ – невідомі координати вектора $y$. Нехай $x \in E$ – довільний вектор, розкладемо його за базисом $u_1, u_2, \ldots, u_n$, нехай $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n$, де $x_1, \ldots, x_n \in F$. Тоді маємо

$$f(x) = f(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n) =$$

$$x_1 f(u_1) + x_2 f(u_2) + \ldots + x_n f(u_n)$$

і

$$\langle x, y\rangle = \langle x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n, y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_n u_n\rangle =$$

$$x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \ldots + x_n\overline{y}_n$$

за формулою скалярного добутку векторів через їх координати в ортонормованому базисі. Тоді рівність $f(x) = \langle x, y\rangle$ буде виконуватись для довільного $x \in E$, якщо покладемо $y_1 = \overline{f(u_1)}, y_2 = \overline{f(u_2)}, \ldots, y_n = \overline{f(u_n)}$. Тобто ми довели існування потрібного вектора $y$.

Доведемо єдиність. Нехай є вектор $y \in E$, такий, що для будь-якого $x \in E$ виконується $f(x) = \langle x, y\rangle$, а також є ще один вектор $z \in E$, такий, що для будь-якого $x \in E$ виконується $f(x) = \langle x, z\rangle$. Тоді ми маємо

$$\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle \quad \forall x \in E \;\Rightarrow \langle x, y - z\rangle = 0 \quad \forall x \in E.$$

Покладемо $x = y - z$. Тоді ми маємо $\langle y - z, y - z\rangle = 0 \;\Rightarrow\; y - z = \mathbf{0} \;\Rightarrow$ $y = z$. Єдиність доведено. □

## 6.2 Спряжений лінійний оператор і його властивості

**Теорема 6.3.** *Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор. Тоді існує єдиний лінійний оператор $A^* : E \to E$, такий, що*

$$\forall x, y \in E : \quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle.$$

*Такий лінійний оператор $A^*$ називається* **спряженим** *до оператора $A$.*

*Доведення.* Зафіксуємо довільний вектор $y \in E$. Розглянемо функцію $f_y : E \to F$, яка задається формулою $f_y(x) = \langle Ax, y\rangle$. Перевіримо, що $f_y$ – лінійний функціонал в $E$.

Для довільних $x_1, x_2 \in E,\; \alpha_1, \alpha_2 \in F$ виконується

$$f_y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \langle A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), y\rangle = \langle \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2, y\rangle =$$

$$\alpha_1\langle Ax_1, y\rangle + \alpha_2\langle Ax_2, y\rangle = \alpha_1 f_y(x_1) + \alpha_2 f_y(x_2).$$

Тобто $f_y$ – лінійний функціонал в $E$. З теореми про загальний вигляд лінійного функціонала в евклідовому просторі існує єдиний вектор

простору, такий, що дія лінійного функціоналу виражається через скалярний добуток з цим вектором. Цей єдиний вектор простору залежить від обраного вектора $y$, ми позначимо цей вектор $A^*(y) \in E$. Більш детально

$$\forall y \in E \;\; \exists!\; A^*(y) \in E: \; \forall x \in E \quad f_y(x) = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle.$$

Ми перевіримо, що відображення $y \to A^*(y)$ є лінійним оператором в $E$.

Нехай $y_1, y_2 \in E$ – довільні вектори, $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ – довільні числа. Тоді з означення $A^*(y)$ ми маємо

$$\exists!\; A^*(y_1) \in E: \; \forall x \in E \quad \langle Ax, y_1\rangle = \langle x, A^*(y_1)\rangle,$$

$$\exists!\; A^*(y_2) \in E: \; \forall x \in E \quad \langle Ax, y_2\rangle = \langle x, A^*(y_2)\rangle.$$

З цих двох рівностей випливає

$$\langle Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\rangle = \overline{\alpha}_1\langle Ax, y_1\rangle + \overline{\alpha}_2\langle Ax, y_2\rangle =$$

$$\overline{\alpha}_1\langle x, A^*(y_1)\rangle + \overline{\alpha}_2\langle x, A^*(y_2)\rangle = \langle x, \alpha_1 A^*(y_1)\rangle + \langle x, \alpha_2 A^*(y_2)\rangle =$$

$$\langle x, \alpha_1 A^*(y_1) + \alpha_2 A^*(y_2)\rangle, \forall x \in E.$$

Тобто вектор $\alpha_1 A^*(y_1) + \alpha_2 A^*(y_2)$ має наступну властивість: для довільного $x \in E$ виконується $\langle Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\rangle = \langle x, \alpha_1 A^*(y_1) + \alpha_2 A^*(y_2)\rangle$. З єдиності вектора $A^*(y)$ випливає, що $A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^*(y_1) + \alpha_2 A^*(y_2)$.

Ми довели, що відображення $y \to A^*(y)$ є лінійним оператором в $E$. Таким чином, ми довели, що існує лінійний оператор $A^* : E \to E$, такий, що

$$\forall x, y \in E: \quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle.$$

Доведемо єдиність такого оператора. Нехай існує ще лінійний оператор $A^{\#} : E \to E$, такий, що

$$\forall x, y \in E: \quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^{\#} y\rangle.$$

Тоді

$$\forall x, y \in E: \quad \langle x, A^* y\rangle = \langle x, A^{\#} y\rangle \;\Rightarrow\; \langle x, A^* y - A^{\#} y\rangle = 0.$$

Нехай $y \in E$ – довільний вектор, покладемо $x = A^*y - A^{\#}y$. Ми маємо

$$\langle A^*y - A^{\#}y, A^*y - A^{\#}y \rangle = 0 \;\Rightarrow\; A^*y - A^{\#}y = \mathbf{0}.$$

Тобто для довільного $y \in E$ виконується $A^*y = A^{\#}y$, що означає $A^* = A^{\#}$. Єдиність доведено. □

Наведемо властивості спряжених операторів.

1. $I^* = I$, оскільки $\forall x, y \in E : \quad \langle Ix, y \rangle = \langle x, Iy \rangle$.

2. Для довільних лінійних операторів $A, B$ виконується

$$(A + B)^* = A^* + B^*$$

(доведіть це!).

3. Для довільних лінійних операторів $A, B$ виконується

$$(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*.$$

Для довільних $x, y \in E$ ми маємо

$$\langle (A \cdot B)x, y \rangle = \langle A(Bx), y \rangle = \langle Bx, A^*y \rangle = \langle x, B^*A^*y \rangle.$$

4. Для довільного лінійного оператора $A$ і довільного скаляра $\lambda \in F$ виконується

$$(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$$

(доведіть це!).

5. Для довільного лінійного оператора $A$ виконується

$$(A^*)^* = A.$$

Для довільних $x, y \in E$ ми маємо $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$, або $\langle x, A^*y \rangle = \langle Ax, y \rangle$. Тобто ми маємо $\overline{\langle x, A^*y \rangle} = \overline{\langle Ax, y \rangle}$, звідки $\langle A^*y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$. Оскільки остання рівність виконується для довільних $x, y \in E$, із означення спряженого оператора маємо $(A^*)^* = A$.

**Твердження 6.4.** *Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор. Тоді виконується*

$$\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}, \quad \operatorname{Im} A^* = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}.$$

*Доведення.* Доведемо першу з цих властивостей. Нехай $x \in E$ – довільний вектор простору, $y \in \operatorname{Ker} A^*$ – довільний вектор $\operatorname{Ker} A^*$. Ми маємо

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle x, \mathbf{0}\rangle = 0,$$

тобто

$$y \in \{Ax \ : \ x \in E\}^{\perp} \ \Leftrightarrow \ y \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}.$$

Ми довели, що $\operatorname{Ker} A^* \subset (\operatorname{Im} A)^{\perp}$.

Нехай $z \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}$ – довільний вектор $(\operatorname{Im} A)^{\perp}$. Це означає, що

$$\forall y \in \operatorname{Im} A \quad \langle y, z\rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ \forall x \in E \quad \langle Ax, z\rangle = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in E \quad \langle x, A^*z\rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ A^*z = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ z \in \operatorname{Ker} A^*.$$

Ми довели, що $(\operatorname{Im} A)^{\perp} \subset \operatorname{Ker} A^*$, тобто $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$.

Друга із властивостей є наслідком першої і рівності $(A^*)^* = A$. Дійсно, розглянемо лінійний оператор $B = A^*$. Тоді маємо $B^* = (A^*)^* = A$. Ми хочемо довести рівність $\operatorname{Im} B = (\operatorname{Ker} B^*)^{\perp}$, яка є еквівалентною наступній: $(\operatorname{Im} B)^{\perp} = \operatorname{Ker} B^*$. Останню рівність ми довели вище. □

**Теорема 6.5.** *Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормований базис $E$, позначимо через $A_e = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $A_e^* = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1}^n$. Тоді*

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \tilde{a}_{ij} = \overline{a}_{ji},$$

*тобто*

$$A_e^* = \overline{A_e}^t.$$

*Доведення.* Оберемо довільні $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ми маємо

$$\langle Ae_i, e_j\rangle = \langle e_i, A^*e_j\rangle \ \Leftrightarrow \ \langle a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \ldots + a_{ni}e_n, e_j\rangle =$$

$$\langle e_i, \tilde{a}_{1j}e_1 + \tilde{a}_{2j}e_2 + \ldots + \tilde{a}_{nj}e_n\rangle \ \Rightarrow \ a_{ji} = \overline{\tilde{a}}_{ij}.$$

□

Таким чином, якщо матриця оператора $A$ задана в ортонормованому базисі, то, щоб побудувати матрицю оператора $A^*$, треба матрицю $A$ транспонувати і взяти комплексне спряження до кожного елемента. Таку операцію над матрицями (транспонування і взяття комплексного спряження до кожного елемента) позначають зірочкою (тобто якщо $B \in \mathrm{Mat}\,(n \times n, F)$, де $F = \mathbb{R}$ або $F = \mathbb{C}$, то $B^* = \overline{B}^t$).

## 6.3 Самоспряжені лінійні оператори у евклідових просторах

**Означення 6.6.** Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор. Лінійний оператор називається **самоспряженим**, якщо $A^* = A$, тобто якщо для довільних $x, y \in E$ виконується

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

Питання: якщо матриця лінійного оператора виписана в ортонормованому базисі, то з якої властивості матриці випливає самоспряженість лінійного оператора?

**Твердження 6.7.** *Нехай $E$ – комплексний евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор, $A^* = A$. Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ – власне число оператора $A$, тобто $\chi_A(\lambda_0) = 0$. Тоді $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.*

*Доведення.* Нам відомо, що $\chi_A(\lambda_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \exists x_0 \in E, x_0 \neq \mathbf{0} :\; Ax_0 = \lambda_0 x_0$. Звідки отримуємо

$$\langle Ax_0, x_0 \rangle = \langle x_0, Ax_0 \rangle \;\Leftrightarrow\; \langle \lambda_0 x_0, x_0 \rangle = \langle x_0, \lambda_0 x_0 \rangle \;\Leftrightarrow$$

$$\lambda_0 \langle x_0, x_0 \rangle = \overline{\lambda}_0 \langle x_0, x_0 \rangle \;\Rightarrow\; \lambda_0 = \overline{\lambda}_0 \;\Rightarrow\; \lambda_0 \in \mathbb{R}.$$

□

**Твердження 6.8.** *Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор, $A^* = A$. Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ – власні числа оператора $A$, тобто $\chi_A(\lambda_1) = 0, \chi_A(\lambda_2) = 0$. Нехай $x_1, x_2 \in E, x_1 \neq \mathbf{0}, x_2 \neq \mathbf{0}$ – відповідні власні вектори оператора $A$, тобто $Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2$. Тоді виконується $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.*

*Доведення.* Ми маємо $\langle Ax_1, x_2\rangle = \langle x_1, Ax_2\rangle \Rightarrow \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2\rangle \Rightarrow \lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle \Rightarrow \langle x_1, x_2\rangle = 0$, оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$. □

**Означення 6.9.** Нехай $L$ – лінійний простір над полем $F$, $A\colon L \to L$ – лінійний оператор, $U < L$. Підпростір $U$ називається **інваріантним** для оператора $A$, якщо $A\colon U \to U$, тобто для довільного $u \in U$ виконується $A(u) \in U$.

**Твердження 6.10.** *Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A\colon E \to E$ – лінійний оператор, $A^* = A$. Нехай $U < E$ – інваріантний підпростір для оператора $A$, тобто $A\colon U \to U$. Тоді $U^\perp$ також є інваріантним підпростором для оператора $A$, тобто $A\colon U^\perp \to U^\perp$.*

*Доведення.* Розглянемо довільний $x \in U^\perp$. Тоді для кожного $y \in U$ ми маємо $\langle x, y\rangle = 0$. З цього отримуємо $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = 0$, оскільки за умовою $Ay \in U$. Тобто $A\colon U^\perp \to U^\perp$. □

**Теорема 6.11** (спектральна теорема для самоспряжених лінійних операторів в комплексному евклідовому просторі)**.** *Нехай $E$ – комплексний евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор. Умова $A^* = A$ виконується тоді і тільки тоді, коли існує ортонормований базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ простору $E$, такий, що*

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

*при цьому $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.*

*Доведення.* 1. Припустимо, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормований базис простору $E$, такий, що матриця оператора $A$ в цьому базисі має вигляд (6.1), при цьому $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Оскільки цей базис є ортонормованим, то для того, щоб побудувати матрицю $A_e^*$ в цьому базисі, треба матрицю

$A_e$ транспонувати і кожен елемент матриці комплексно спрягти. Матриця $A_e$ є симетричною, тобто вона не змінюється при транспонуванні. Крім того, матриця $A_e$ є дійсною, тобто вона не змінюється при комплексному спряженні. Ми отримали $A_e^* = A_e$, тобто $A^* = A$.

2. Припустимо, що $A^* = A$. Будемо доводити теорему індукцією по $n = \dim E$.

2.1. База індукції $n = 1$. Оберемо довільний $e_1$ – ортонормований базис $E$. Нехай $A_e = (\lambda_1)$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, тобто $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. Оскільки $A^* = A$, маємо $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Базу індукції доведено.

2.2. Індуктивний перехід $n-1 \rightsquigarrow n$, $n = 2, 3, \ldots$ Тобто ми вважаємо, що для евклідових просторів розмірності $n-1$ теорема виконується. Нехай $\dim E = n$, $A : E \to E$ – лінійний оператор, $A^* = A$. Ми маємо $\chi_A(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, $\deg \chi_A = n \in \mathbb{N}$. Тобто, з основної теореми алгебри, існує $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, таке, що $\chi_A(\lambda_1) = 0$. Звідси існує $e_1 \in E$, $\|e_1\| = 1$, такий, що $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. Оскільки $A^* = A$, маємо $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Розглянемо $L = \mathrm{Lin}\ \{e_1\} < E$, $\dim L = 1$. Тоді для довільного $x \in L$ маємо $x = \alpha e_1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, звідки $Ax = A(\alpha e_1) = \alpha A e_1 = \alpha \lambda_1 e_1 \in L$.

Тобто $A : L \to L$, а оскільки $A^* = A$, з доведеного раніше ми маємо $A : L^\perp \to L^\perp$, $\dim L^\perp = n - 1$. Розглянемо оператор $A$ на підпросторі $L^\perp$, позначимо його $A|_{L^\perp} : L^\perp \to L^\perp$, при цьому для довільного $x \in L^\perp$ виконується $A|_{L^\perp} x = Ax$. Тоді $A|_{L^\perp}^* = A|_{L^\perp}$ (поясніть це!). За індуктивним припущенням, існує $e_2, e_3, \ldots, e_n$ – ортонормований базис $L^\perp$, такий, що для довільного $j = 2, 3, \ldots, n$ виконується $A|_{L^\perp}(e_j) = A(e_j) = \lambda_j e_j$, де $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Тоді за побудовою $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормований базис простору $E$, такий, що

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

при цьому $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

□

Ми хочемо довести аналогічну теорему для самоспряжених лінійних операторів у дійсному евклідовому просторі. Для цього нам потрібно довести, що кожен дійсний самоспряжений оператор має власний вектор.

**Теорема 6.12.** *Нехай $E$ – дійсний евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор, $A^* = A$. Тоді існують вектор $x_0 \in E, x_0 \neq \mathbf{0}$ і число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, такі, що $Ax_0 = \lambda_0 x_0$.*

*Доведення.* Нехай $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – ортонормований базис $E$. Запишемо матрицю оператора $A$ в цьому базисі, нехай $A_u = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Розглянемо комплексний евклідів простір $\mathbb{C}^n$ і оберемо в ньому ортонормований базис $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$. Задамо лінійний оператор $B : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ за допомогою матриці $A_u$, а саме $(Bx)_v = A_u x_v$ для довільного $x \in \mathbb{C}^n$.

Ми вже перевіряли раніше, що заданий таким чином оператор є лінійним оператором, а його матрицею в базисі $v_1, v_2, \ldots, v_n$ є $B_v = A_u$. Нагадаємо, що $A_u$ є дійсною матрицею, і, оскільки $A^* = A$, а базис $u_1, u_2, \ldots, u_n$ є ортонормованим, маємо $A_u^t = A_u$. Тобто оскільки $\overline{B}_v^t = B_v$, а базис $v_1, v_2, \ldots, v_n$ є ортонормованим, маємо $B^* = B$.

Ми маємо $\chi_B(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, $\deg \chi_B = n \in \mathbb{N}$. Тобто, з основної теореми алгебри, існує $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, таке, що $\chi_B(\lambda_0) = 0$. Звідси існує $z_0 \in \mathbb{C}^n$, $z_0 \neq \mathbf{0}$, такий, що $Bz_0 = \lambda_0 z_0$. Оскільки $B^* = B$, маємо $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Запишемо умову $Bz_0 = \lambda_0 z_0$ в координатах. Ми маємо

$$(Bz_0)_v = (\lambda_0 z_0)_v \;\Rightarrow\; B_v(z_0)_v = \lambda_0 (z_0)_v \;\Rightarrow\; A_u(z_0)_v = \lambda_0 (z_0)_v.$$

Введемо позначення для стовпця $(z_0)_v$: нехай $(z_0)_v = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, де

$z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, або $(z_0)_v = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}$, де $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Оскільки вектор $z_0 \neq \mathbf{0}$, маємо: існує $j = 1, 2, \ldots, n : x_j \neq 0$ або $y_j \neq 0$. Ми отримали

$$A_u \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки $A_u$ є дійсною матрицею, відділяючи дійсну і уявну частини в останній рівності, ми маємо

$$A_u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A_u \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Як було відзначено, один із стовпців $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ є ненульовим. Не зменшуючи загальності, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, при цьому $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Повернемося до нашого дійсного евклідового простору $E$. Розглянемо в ньому вектор $x_0 = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n \in E$, тобто $(x_0)_u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Тоді

$$A_u\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_0\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow Ax_0 = \lambda_0 x_0,\ x_0 \neq \mathbf{0}.$$

□

З цієї теореми ми отримуємо спектральну теорему для самоспряжених лінійних операторів у дійсному евклідовому просторі.

**Теорема 6.13** (спектральна теорема для самоспряжених лінійних операторів у дійсному евклідовому просторі)**.** *Нехай $E$ – дійсний евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор. Умова $A^* = A$ виконується тоді і тільки тоді, коли існує ортонормований базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ простору $E$, такий, що*

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Доведення теореми проводиться так само, як і у випадку комплексного простору, з використанням теореми про існування власного вектора у самоспряженого лінійного оператора у дійсному евклідовому просторі.

**Задача 6.14.** Нехай $L$ – лінійний простір над полем $\mathbb{R}$, $n = \dim L \in \mathbb{N}$ і $A : L \to L$ – лінійний оператор. Нехай існує деякий базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ лінійного простору $L$, в якому матриця оператора $A$ є симетричною: $A_e = A_e^t$. Доведіть, що оператор $A$ є діагоналізовним.

**Задача 6.15.** Нехай $L$ – лінійний простір над полем $\mathbb{R}$, $n = \dim L \in \mathbb{N}$ і $A : L \to L$ – лінійний оператор. В якому випадку можна ввести у просторі $L$ скалярний добуток таким чином, щоб лінійний оператор $A$ у отриманому евклідовому просторі був самоспряженим?

## 6.4 Унітарні лінійні оператори у евклідових просторах

**Означення 6.16.** Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $U : E \to E$ – лінійний оператор. Оператор $U$ називається **унітарним**, якщо $UU^* = U^*U = I$.

Таким чином, унітарний лінійний оператор – це оборотний лінійний оператор, для якого обернений оператор є його спряженим оператором.

**Теорема 6.17.** *Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $U : E \to E$ – лінійний оператор. Тоді наступні три умови є еквівалентними:*

*1. $UU^* = U^*U = I$, тобто оператор $U$ є унітарним.*

*2. Для довільних $x, y \in E$ виконується $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$.*

*3. Для довільних $x \in E$ виконується $\|Ux\| = \|x\|$.*

*Доведення.* 1 $\Rightarrow$ 2. Нехай $UU^* = U^*U = I$, тоді для довільних $x, y \in E$ виконується $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, Iy\rangle = \langle x, y\rangle$.

2 $\Rightarrow$ 3. Нехай для довільних $x, y \in E$ виконується $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$. Оберемо довільний $x \in E$ і покладемо $y = x$. Ми маємо $\langle Ux, Ux\rangle = \langle x, x\rangle$, тобто $\|Ux\| = \|x\|$.

3 $\Rightarrow$ 2. Для довільних $z \in E$ виконується $\|Uz\| = \|z\|$. Ми знаємо (дивись твердження 5.18), що скалярний добуток векторів можна обчислити, знаючи норми векторів.

Нехай $E$ – дійсний евклідів простір, $x, y \in E$ – довільні вектори. Скористуємось формулою 5.1 твердження 5.18 для векторів $x, y$ і для векторів $Ux, Uy$, ми маємо

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

і

$$\langle Ux, Uy\rangle = \frac{1}{2}(\|Ux+Uy\|^2 - \|Ux\|^2 - \|Uy\|^2).$$

За умовою $\|x+y\| = \|U(x+y)\| = \|Ux+Uy\|, \|x\| = \|Ux\|, \|y\| = \|Uy\|$, тому маємо $\langle x, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle$ для довільних $x, y \in E$.

Нехай $E$ – комплексний евклідів простір, $x, y \in E$ – довільні вектори. Скористуємось формулою 5.2 твердження 5.18 для векторів $x, y$ і для векторів $Ux, Uy$, ми маємо

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) + i\cdot\frac{1}{2}(\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

і

$$\langle Ux, Uy\rangle = \frac{1}{2}(\|Ux+Uy\|^2 - \|Ux\|^2 - \|Uy\|^2) + i\cdot\frac{1}{2}(\|Ux+iUy\|^2 - \|Ux\|^2 - \|Uy\|^2).$$

За умовою $\|x+y\| = \|U(x+y)\| = \|Ux+Uy\|, \|x+iy\| = \|U(x+iy)\| = \|Ux+iUy\|, \|x\| = \|Ux\|, \|y\| = \|Uy\|$, тому маємо $\langle x, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle$ для довільних $x, y \in E$.

$2 \Rightarrow 1$. Нехай для довільних $x, y \in E$ виконується $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$. Ми маємо

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, y\rangle \ \Rightarrow\ \langle Ix, y\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle$$

для довільних $x, y \in E$. Ми отримали, що $U^*U = I^* = I$.

Оскільки простір $E$ є скінченновимірним, ми маємо $U^*U = I \Leftrightarrow UU^* = U^*U = I$ (поясніть це!). □

**Твердження 6.18.** *Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $U : E \to E$ – лінійний оператор, $UU^* = U^*U = I$. Нехай $\lambda_0 \in F$ – власне число $U$, тобто $\chi_U(\lambda_0) = 0$. Тоді $|\lambda_0| = 1$.*

*Доведення.* Ми маємо $\chi_U(\lambda_0) = 0$, звідки існує $x_0 \in E, x_0 \neq \mathbf{0}$, такий, що $Ux_0 = \lambda_0 x_0$, а оскільки $\|Ux_0\| = \|x_0\|$, то отримуємо $\|\lambda_0 x_0\| = \|x_0\|$. Тому маємо $|\lambda_0|\|x_0\| = \|x_0\|$, звідки $|\lambda_0| = 1$. □

**Твердження 6.19.** *Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор. Нехай $V < E$ – підпростір, який є інваріантним для оператора $A$, тобто $A : V \to V$. Тоді $V^\perp$ є інваріантним для оператора $A^*$, тобто $A^* : V^\perp \to V^\perp$.*

*Доведення.* Нехай $x \in V^\perp, y \in V$ – довільні вектори. Тоді ми маємо

$$\langle A^*x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = 0,$$

тому що за умовою для довільного $y \in V$ виконується $Ay \in V$. Тобто для довільного $x \in V^{\perp}$ виконується $A^*x \in V^{\perp}$. □

Простим наслідком є наступне твердження.

**Твердження 6.20.** *Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор. Нехай $V < E$ – підпростір, який є інваріантним і для оператора $A$, і для оператора $A^*$, тобто $A : V \to V$, $\quad A^* : V \to V$. Тоді $V^{\perp}$ є також інваріантним і для оператора $A$, і для оператора $A^*$, тобто $A : V^{\perp} \to V^{\perp}$, $\quad A^* : V^{\perp} \to V^{\perp}$.* □

## 6.5 Спектральна теорема для унітарних лінійних операторів у комплексному евклідовому просторі

**Теорема 6.21** (спектральна теорема для унітарних лінійних операторів у комплексному евклідовому просторі). *Нехай $E$ – комплексний евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $U : E \to E$ – лінійний оператор. Умова $UU^* = U^*U = I$ виконується тоді і тільки тоді, коли існує ортонормований базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ простору $E$, такий, що*

$$U_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

*при цьому $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_n| = 1$.*

*Доведення.* 1. Припустимо, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормований базис простору $E$, такий, що матриця оператора $U$ в цьому базисі має вигляд (6.2), при цьому $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_n| = 1$. Оскільки цей базис є ортонормованим, щоб побудувати матрицю $U_e^*$, треба матрицю $U_e$ транспонувати і кожен елемент матриці комплексно спрягти. Отже, ми

маємо

$$U_e^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda}_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{\lambda}_n \end{pmatrix}.$$

З цього ми отримуємо

$$U_e U_e^* = U_e^* U_e = \begin{pmatrix} \lambda_1\overline{\lambda}_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\overline{\lambda}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\overline{\lambda}_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n\overline{\lambda}_n \end{pmatrix} = I,$$

оскільки для кожного $j = 1, 2, \dots, n$ маємо $\lambda_j\overline{\lambda}_j = |\lambda_j|^2 = 1$. Ми довели, що $UU^* = U^*U = I$.

2. Припустимо, що $UU^* = U^*U = I$. Будемо доводити теорему індукцією по $n = \dim E$.

2.1. База індукції $n = 1$. Оберемо довільний $e_1$ – ортонормований базис $E$. Нехай $U_e = (\lambda_1)$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, тобто $Ue_1 = \lambda_1 e_1$. З $UU^* = U^*U = I$ маємо $|\lambda_1| = 1$. Базу індукції доведено.

2.2. Індуктивний перехід $n - 1 \rightsquigarrow n$, $n = 2, 3, \dots$ Тобто ми вважаємо, що для евклідових просторів розмірності $n-1$ теорема виконується. Нехай $\dim E = n$, $U : E \to E$ – лінійний оператор, $UU^* = U^*U = I$. Ми маємо $\chi_U(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, $\deg \chi_U = n \in \mathbb{N}$. Тобто, з основної теореми алгебри, існує $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, таке, що $\chi_U(\lambda_1) = 0$. Звідси існує $e_1 \in E, \|e_1\| = 1$, такий, що $Ue_1 = \lambda_1 e_1$. З $UU^* = U^*U = I$ маємо $|\lambda_1| = 1$. Крім того, $Ue_1 = \lambda_1 e_1 \Rightarrow U^*Ue_1 = U^*(\lambda_1 e_1) \Rightarrow Ie_1 = \lambda_1 U^*(e_1) \Rightarrow U^*(e_1) = \dfrac{1}{\lambda_1} e_1 = \overline{\lambda}_1 e_1$.

Розглянемо $L = \mathrm{Lin}\ \{e_1\} < E$, $\dim L = 1$. Тоді для довільного $x \in L$ маємо $x = \alpha e_1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, звідки $Ux = U(\alpha e_1) = \alpha U e_1 = \alpha\lambda_1 e_1 \in L$. Крім того, $U^*x = U^*(\alpha e_1) = \alpha U^* e_1 = \alpha\overline{\lambda}_1 e_1 \in L$. Таким чином, $U : L \to L$ і $U^* : L \to L$. За попередньою теоремою, $U : L^\perp \to L^\perp$ і $U^* : L^\perp \to L^\perp$.

Розглянемо звуження оператора $U$ на підпростір $L^{\perp}$, тобто $U|_{L^{\perp}} : L^{\perp} \to L^{\perp}$, і для кожного $x \in L^{\perp}$ виконується $U|_{L^{\perp}}x = Ux$. Відзначимо, що цей оператор є унітарним $U|_{L^{\perp}} \cdot U|_{L^{\perp}}^* = U|_{L^{\perp}}^* \cdot U|_{L^{\perp}} = I$ (поясніть це!), а $\dim L^{\perp} = n-1$. За індуктивним припущенням, існує $e_2, e_3, \ldots, e_n$ – ортонормований базис $L^{\perp}$, такий, що для кожного $j = 2, 3, \ldots, n$ виконується $Ue_j = \lambda_j e_j$, де $|\lambda_j| = 1$. Тоді $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ – ортонормований базис $E$, такий, що для кожного $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ виконується $Ue_j = \lambda_j e_j$, де $|\lambda_j| = 1$.

Тобто ми отримали, що

$$U_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

і при цьому $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_n| = 1$.

□

Опис унітарних операторів у дійсному евклідовому просторі є більш складним. Ми опишемо спочатку унітарні лінійні оператори у двовимірному дійсному евклідовому просторі.

## 6.6 Унітарні лінійні оператори у двовимірному дійсному евклідовому просторі

Нехай $E = \mathbb{R}^2$ – евклідів простір, $U : E \to E$ – лінійний оператор, $UU^* = U^*U = I$.

Нехай $e_1, e_2 \in E$ – ортонормований базис $E$, $U_e = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – матриця оператора в цьому базисі. Запишемо умову $UU^* = U^*U = I$ мовою матриць, беручи до уваги те, що базис є ортонормованим. Ми маємо

$$U_e U_e^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тобто ми маємо систему з чотирьох рівнянь

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ ca + db = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}.$$

Добре відомо, що $a^2 + b^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; \exists \varphi \in \mathbb{R} : a = \cos\varphi, b = \sin\varphi$. Також $c^2 + d^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; \exists \psi \in \mathbb{R} : d = \cos\psi, c = \sin\psi$. Підставимо це у друге рівняння. Ми маємо

$$\cos\varphi \cdot \sin\psi + \sin\varphi \cdot \cos\psi = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin(\varphi + \psi) = 0$$

$$\Leftrightarrow\; \varphi + \psi = \pi k,\; k \in \mathbb{Z}.$$

Розглянемо два випадки.

1. Нехай $\varphi + \psi = 2\pi m,\; m \in \mathbb{Z}$, тобто $\psi = 2\pi m - \varphi$.

Тоді ми отримуємо $a = \cos\varphi, b = \sin\varphi, d = \cos\psi = \cos(2\pi m - \varphi) = \cos\varphi, c = \sin\psi = \sin(2\pi m - \varphi) = -\sin\varphi$. Тобто матриця оператора $U$ має вигляд $U_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Отже, оператор $U$ є оператором повороту на кут $-\varphi$ в направленні від $e_1$ до $e_2$.

2. Нехай $\varphi + \psi = \pi + 2\pi m,\; m \in \mathbb{Z}$, тобто $\psi = \pi + 2\pi m - \varphi$. Тоді ми отримуємо $a = \cos\varphi, b = \sin\varphi, d = \cos\psi = \cos(\pi + 2\pi m - \varphi) = -\cos\varphi, c = \sin\psi = \sin(\pi + 2\pi m - \varphi) = \sin\varphi$. Тобто матриця оператора $U$ має вигляд $U_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$.

З'ясуємо, що це за оператор.

По-перше, знайдемо власні числа цього оператора. Маємо

$$\chi_{U_e}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi - \lambda & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$\lambda^2 - \lambda(\cos\varphi - \cos\varphi) - (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \lambda^2 - 1.$$

Тобто наш оператор має два різні власні числа $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = -1$. Звідси наш оператор є діагоналізовним в базисі з власних векторів. Оскільки

наш оператор є унітарним, ці вектори є ортогональними. Тобто існує ортонормований базис $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$U_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Це оператор симетрії відносно осі Lin $\{v_1\}$.

**Задача 6.22.** Знайдіть вектори $v_1, v_2$ (вони залежать від $\varphi$).

Отже, ми довели наступне твердження.

**Твердження 6.23.** *Нехай $E$ – дійсний евклідів простір,* $\dim E = 2$, $U : E \to E$ *– лінійний оператор. Тоді умова $UU^* = U^*U = I$ виконується тоді і тільки тоді, коли існує $e_1, e_2 \in E$ – ортонормований базис $E$, в якому матриця оператора $U$ має один із наступних двох виглядів*

$$U_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \textit{або} \quad U_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

*де* $\varphi \in \mathbb{R}$. □

Для отримання загального опису унітарних лінійних операторів у дійсному евклідовому просторі нам потрібна також наступна теорема.

**Теорема 6.24.** *Нехай $L$ – дійсний лінійний простір,* $n = \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ *– лінійний оператор. Тоді існує $V < L$, таке, що $A : V \to V$ і при цьому* $\dim V = 1$ *або* $\dim V = 2$.

Тобто теорема стверджує, що у кожного лінійного оператора в ненульовому дійсному лінійному просторі є інваріантний підпростір розмірності один або два.

*Доведення.* Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис простору $L$, і нехай $A_e = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ – матриця оператора $A$ в цьому базисі ($a_{ij} \in \mathbb{R}$). Розглянемо характеристичний многочлен оператора $\chi_A(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$. Тоді виконується одна із наступних двох можливостей.

1. Існує дійсний корінь многочлена $\chi_A$, тобто існує $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, таке, що $\chi_A(\lambda_0) = 0$. Тоді існує власний вектор оператора $A$, який відповідає

власному числу $\lambda_0$: існує $x_0 \in L, x_0 \neq \mathbf{0}$, такий, що $Ax_0 = \lambda_0 x_0$. Покладемо $V = \mathrm{Lin}\{x_0\} < L, \dim V = 1$. Для довільного $y \in V$ ми маємо $y = \alpha x_0, \alpha \in \mathbb{R}$, тому $Ay = A(\alpha x_0) = \alpha A(x_0) = \alpha \lambda_0 x_0 \in V$. Тобто в цьому випадку ми знайшли інваріантний підпростір оператора $A$ розмірності 1.

2. Не існує дійсних коренів многочлена $\chi_A$. Розглянемо $\chi_A$ як комплексний многочлен. Оскільки $\deg \chi_A = n \in \mathbb{N}$, то існує комплексний корінь цього многочлена: існує $z_0 \in \mathbb{C}$, такий, що $\chi_A(z_0) = 0$. Розглянемо комплексний лінійний простір $\mathbb{C}^n$ і в ньому деякий базис $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{C}^n$. Розглянемо лінійний оператор в $\mathbb{C}^n$, який в базисі $w_1, w_2, \ldots, w_n$ задається матрицею $A_e$, а саме лінійний оператор $B : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, такий, що $(Bx)_w = A_e x_w$ для довільного $x \in \mathbb{C}^n$. Раніше ми доводили, що задане таким чином відображення є лінійним оператором, і маємо $B_w = A_e$. Тоді $\chi_B(\lambda) = \chi_A(\lambda)$, зокрема $\chi_B(z_0) = 0$. Тому існує власний вектор оператора $B$, який відповідає власному числу $z_0$: існує $y_0 \in \mathbb{C}^n, y_0 \neq \mathbf{0}$, такий, що $By_0 = z_0 y_0$. Позначимо $z_0 = a_0 + ib_0, a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ і $y_0 = (\alpha_1 + i\beta_1)w_1 + (\alpha_2 + i\beta_2)w_2 + \ldots + (\alpha_n + i\beta_n)w_n$, де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, і виконується $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_n^2 \neq 0$ (оскільки $y_0 \neq \mathbf{0}$). Ми маємо

$$A_e \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 \\ \alpha_2 + i\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + i\beta_n \end{pmatrix} = (a_0 + ib_0) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 \\ \alpha_2 + i\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + i\beta_n \end{pmatrix}.$$

Враховуючи те, що матриця $A_e$ є дійсною, із останньої рівності, відділяючи дійсну і уявну частини, ми отримуємо

$$A_e \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = a_0 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - b_0 \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

і

$$A_e \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = b_0 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + a_0 \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \qquad (6.4)$$

Повернемося тепер до нашого дійсного простору $L$. Розглянемо два вектори $u := \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n \in L$ і $v := \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n \in L$. Із умови $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_n^2 \neq 0$ маємо: $u \neq \mathbf{0}$ або $v \neq \mathbf{0}$. Із рівностей (6.3) і (6.4) ми отримуємо

$$Au = a_0 u - b_0 v, \quad Av = b_0 u + a_0 v.$$

Позначимо через $V := \mathrm{Lin}\{u, v\} < L$. Тоді маємо $\dim V = \mathrm{rank}\{u, v\} \in \{1, 2\}$. Перевіримо інваріантність підпростору $V$. Розглянемо довільний $x \in V$, тоді для деяких $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ виконується $x = \gamma u + \delta v$, тому ми маємо $Ax = A(\gamma u + \delta v) = \gamma Au + \delta Av = \gamma(a_0 u - b_0 v) + \delta(b_0 u + a_0 v) = (\gamma a_0 + \delta b_0)u + (-\gamma b_0 + \delta a_0)v \in V$, тобто $A : V \to V$.

Зауважимо, що насправді у випадку, коли не існує дійсних коренів многочлена $\chi_A$, розмірність інваріантного підпростору $V$ не може дорівнювати одиниці. Доведіть це. □

## 6.7 Спектральна теорема для унітарних лінійних операторів у дійсному евклідовому просторі

**Теорема 6.25** (спектральна теорема для унітарних лінійних операторів у дійсному евклідовому просторі). *Нехай $E$ – дійсний евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $U : E \to E$ – лінійний оператор. Умова $UU^* = U^*U = I$ виконується тоді і тільки тоді, коли існує ортонормований базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ простору $E$, такий, що*

$$U_e = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \ddots & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \vdots & & & & \ddots & & & & & \vdots & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & \vdots & & & & & \vdots & & & \ddots & & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \cos\varphi_m & -\sin\varphi_m \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sin\varphi_m & \cos\varphi_m
\end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

*Таким чином, в деякому ортонормованому базисі матриця унітарного оператора має блочно-діагональний вигляд, кожен із блоків має розмір* $1 \times 1$ *або* $2 \times 2$. *Є* $k$ *блоків розміру* $1 \times 1$, *в котрих стоїть число* $1$ *(*$k$ *може бути від* $0$, *коли таких блоків немає, до* $n$, *коли в матриці є тільки* $1$ *на діагоналі), є* $l$ *блоків розміру* $1 \times 1$, *в котрих стоїть число* $-1$ *(*$l$ *може бути від* $0$, *коли таких блоків немає, до* $n$, *коли в матриці є тільки* $-1$ *на діагоналі), і є* $m$ *блоків розміру* $2 \times 2$, *в котрих стоять матриці операторів повороту на деякі кути (*$m$ *може бути від* $0$, *коли таких блоків немає, до* $n/2$, *коли в матриці є тільки блоки поворотів). Тут* $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m \in \mathbb{R}$, *при цьому для довільного* $j = 1, 2, \dots, m$ *виконується* $\varphi_j \neq \pi s, s \in \mathbb{Z}$, *і* $k + l + 2m = n$.

**Зауваження 6.26.** Якщо для деякого $j = 1, 2, \dots, m$ виконується $\varphi_j = \pi s, s \in \mathbb{Z}$, то матриця повороту на такий кут має вигляд $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, тобто такий блок можна переставити вище, до блоків розміру $1 \times 1$.

*Доведення.* 1. Нехай $e_1, e_2, \dots, e_n$ – ортонормований базис простору $E$, такий, що матриця оператора $U_e$ має вказаний вигляд. Оскільки цей базис є ортонормованим, щоб побудувати матрицю $U_e^*$, треба матрицю $U_e$ транспонувати (і кожен елемент матриці комплексно спрягти, але дійсні

числа не змінюються при спряженні). Матриці $U_e$ і $U_e^*$ мають блочно-діагональний вигляд, при цьому розміри усіх блоків у них однакові. При множенні таких матриць треба послідовно помножити усі блоки (перевірте це). Але $1 \cdot 1 = 1$, $(-1) \cdot (-1) = 1$, а також

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ми довели, що $UU^* = U^*U = I$, тобто оператор $U$ є унітарним.

2. Припустимо, що $UU^* = U^*U = I$. Будемо проводити доведення індукцією по $n = \dim E$.

2.1. База індукції $n = 1$. Оберемо довільний $e_1$ – ортонормований базис $E$. Нехай $U_e = (\lambda_0)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, тобто $Ue_1 = \lambda_0 e_1$. З $UU^* = U^*U = I$ маємо $|\lambda_0| = 1$, звідки $\lambda_0 = 1$ або $\lambda_0 = -1$. Базу індукції доведено.

2.2. Індуктивний перехід $n-1 \rightsquigarrow n$, $n = 2, 3, \ldots$ Тобто ми вважаємо, що для евклідових просторів розмірності $n-1$ теорема виконується. Нехай $\dim E = n$, $U : E \to E$ – лінійний оператор, $UU^* = U^*U = I$. Скористаємося теоремою про існування інваріантного підпростору у дійсного лінійного оператора. Існує підпростір $V < E$, $\dim V \in \{1, 2\}$, такий, що $U : V \to V$.

2.2.1. Розглянемо випадок, коли $\dim V = 1$, і оберемо $e_1$ – ортонормований базис $V$. Маємо $Ue_1 \in V$, отже, $Ue_1 = \lambda_1 e_1$ для деякого $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Оскільки оператор $U$ є унітарним, маємо $\lambda_1 = 1$ або $\lambda_1 = -1$. Відзначимо, що з того, що $Ue_1 = \lambda_1 e_1$, випливає $e_1 = Ie_1 = U^*Ue_1 = U^*(\lambda_1 e_1) = \lambda_1 U^*(e_1)$, тобто $U^*(e_1) = \frac{1}{\lambda_1} e_1 = \lambda_1 e_1$, оскільки $\lambda_1 = \pm 1$. Таким чином, підпростір $V$ є інваріантним і для оператора $U$, і для оператора $U^*$: $U : V \to V$, $\quad U^* : V \to V$. Ми доводили раніше (дивись твердження 6.20), що якщо підпростір є інваріантним і для оператора, і для його спряженого, то ортогональне доповнення цього підпростору також є інваріантним і для оператора, і для його спряженого, отже, $U : V^\perp \to V^\perp$, $\quad U^* : V^\perp \to V^\perp$,

при цьому $\dim V^{\perp} = n-1$. Оскільки рівність $UU^*x = U^*Ux = x$ виконується для довільного $x \in E$, то вона виконується і для довільного $x \in V^{\perp}$. Тому $U|_{V^{\perp}}$ – обмеження оператора $U$ на підпростір $V^{\perp}$, – також є унітарним оператором. За індуктивним припущенням існує $e_2, e_3, \dots, e_n$ – ортонормований базис $V^{\perp}$, в якому матриця оператора $U|_{V^{\perp}}$ має вигляд (6.5). Тобто матриця $(U|_{V^{\perp}})_e$ має блочно-діагональний вигляд, є $k_1$ блоків розміру $1 \times 1$, в котрих стоїть число 1 ($0 \leqslant k_1 \leqslant n-1$), є $l_1$ блоків розміру $1 \times 1$, в котрих стоїть число $-1$ ($0 \leqslant l_1 \leqslant n-1$), і є $m_1$ блоків розміру $2 \times 2$, в котрих стоять матриці операторів повороту на деякі кути, усі кути не є цілими кратними $\pi$ ($0 \leqslant 2m_1 \leqslant n-1$). Розглянемо $e_1, e_2, \dots, e_n$ – ортонормований базис $E$. В цьому базисі матриця оператора $U$ буде мати блочно-діагональний вигляд: $U_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & O \\ O & (U|_{V^{\perp}})_e \end{pmatrix}$. Якщо $\lambda_1 = 1$, то ми отримали потрібний вигляд матриці оператора з $k = k_1 + 1, l = l_1, m = m_1$. Якщо $\lambda_1 = -1$, то треба поміняти місцями базисні вектори з номерами 1 і $k_1 + 2$, і ми отримаємо потрібний вигляд матриці оператора з $k = k_1, l = l_1 + 1, m = m_1$. Тобто у випадку, коли $\dim V = 1$, ми знайшли ортонормований базис, в якому матриця оператора має вигляд (6.5).

2.2.2. Розглянемо випадок, коли $\dim V = 2$. Якщо у оператора $U$ існує власний вектор у підпросторі $V$, тобто існує вектор $e_1 \in V$, $\|e_1\| = 1$, такий, що $Ue_1 = \lambda_1 e_1$, $\lambda_1 = \pm 1$, тоді розглянемо підпростір $V_1 = \mathrm{Lin}\,\{e_1\} < E$, для якого $U : V_1 \to V_1$, і застосуємо міркування з пункту 2.2.1. Припустимо, що у оператора $U$ не існує власних векторів у підпросторі $V$. Оскільки рівність $UU^*x = U^*Ux = x$ виконується для довільного $x \in E$, то вона виконується і для довільного $x \in V$. Тому $U|_V$ – обмеження оператора $U$ на підпростір $V$, – також є унітарним оператором. Скористуємося отриманим вище описом унітарних операторів у двовимірному дійсному евклідовому просторі. Існує $e_{n-1}, e_n$ – ортонормований базис підпростору $V$, у якому матриця оператора $U|_V$ має вигляд $(U|_V)_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix}$ для деякого $\varphi_0 \in \mathbb{R}, \varphi_0 \neq \pi s, s \in \mathbb{Z}$. Тобто ми маємо $Ue_{n-1} =$

$\cos\varphi_0 e_{n-1} + \sin\varphi_0 e_n, \quad Ue_n = -\sin\varphi_0 e_{n-1} + \cos\varphi_0 e_n$. Застосуємо до обох рівностей оператор $U^*$, враховуючи $U^*U = I$, маємо $e_{n-1} = \cos\varphi_0 U^* e_{n-1} + \sin\varphi_0 U^* e_n, \quad e_n = -\sin\varphi_0 U^* e_{n-1} + \cos\varphi_0 U^* e_n$. Помножимо першу рівність на $\cos\varphi_0$, а другу на $-\sin\varphi_0$ і додамо, отримаємо $U^* e_{n-1} = \cos\varphi_0 e_{n-1} - \sin\varphi_0 e_n$. Тепер помножимо першу рівність на $\sin\varphi_0$, а другу на $\cos\varphi_0$ і додамо, отримаємо $U^* e_n = \sin\varphi_0 e_{n-1} + \cos\varphi_0 e_n$. Ми бачимо, що $U^* : V \to V$. Таким чином, підпростір $V$ є інваріантним і для оператора $U$, і для оператора $U^*$. Ми доводили раніше (дивись твердження 6.20), що якщо підпростір є інваріантним і для оператора, і для його спряженого, то ортогональне доповнення цього підпростору також є інваріантним і для оператора, і для його спряженого, отже, $U : V^\perp \to V^\perp, \quad U^* : V^\perp \to V^\perp$, при цьому $\dim V^\perp = n - 2$. Оскільки рівність $UU^*x = U^*Ux = x$ виконується для довільного $x \in E$, то вона виконується і для довільного $x \in V^\perp$. Тому $U|_{V^\perp}$ – обмеження оператора $U$ на підпростір $V^\perp$, – також є унітарним оператором. За індуктивним припущенням існує $e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}$ – ортонормований базис $V^\perp$, в якому матриця оператора $U|_{V^\perp}$ має вигляд (6.5). Тобто матриця $(U|_{V^\perp})_e$ має блочно-діагональний вигляд, є $k_1$ блоків розміру $1 \times 1$, в котрих стоїть число 1 $(0 \leqslant k_1 \leqslant n-2)$, є $l_1$ блоків розміру $1 \times 1$, в котрих стоїть число $-1$ $(0 \leqslant l_1 \leqslant n-2)$, і є $m_1$ блоків розміру $2 \times 2$, в котрих стоять матриці операторів повороту на деякі кути, усі кути не є цілими кратними $\pi$ $(0 \leqslant 2m_1 \leqslant n-2)$. Розглянемо $e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n$ – ортонормований базис $E$. В цьому базисі матриця оператора $U$ буде мати блочно-діагональний вигляд: $U_e = \begin{pmatrix} (U|_{V^\perp})_e & O & O \\ O & \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ O & \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix}$. Тобто ми отримали потрібний вигляд матриці оператора з $k = k_1, l = l_1, m = m_1 + 1$. Отже, і у випадку, коли $\dim V = 2$, ми знайшли ортонормований базис, в якому матриця оператора має вигляд (6.5). □

**Приклад 6.27.** Застосуємо попередню теорему для отримання опису унітарних операторів у евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$. Згідно з теоремою, для кожного унітарного оператора $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ знайдеться ортонормований

базис $e_1, e_2, e_3$, у якому матриця оператора має один із наступних шести видів.

1. $U_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, тобто $U$ – одиничний оператор: $Ux = x$ для усіх $x \in \mathbb{R}^3$.

2. $U_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, тобто $U$ – оператор симетрії відносно площини $\mathrm{Lin}\,\{e_1, e_2\}$.

3. $U_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, тобто $U$ – оператор симетрії відносно прямої $\mathrm{Lin}\,\{e_1\}$.

4. $U_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, тобто $U$ – це «мінус одиничний» оператор: $Ux = -x$ для усіх $x \in \mathbb{R}^3$.

5. $U_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, тобто $U$ – оператор повороту відносно прямої $\mathrm{Lin}\,\{e_1\}$ на кут $\varphi$ у напрямку від $e_2$ до $e_3$.

6. $U_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, тобто $U$ – композиція оператора повороту відносно прямої $\mathrm{Lin}\,\{e_1\}$ на кут $\varphi$ у напрямку від $e_2$ до $e_3$ і оператора симетрії відносно площини $\mathrm{Lin}\,\{e_2, e_3\}$.

Таким чином, ми отримали наступне твердження.

**Твердження 6.28.** *Нехай* $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *– унітарний оператор і* $\det U = 1$. *Тоді оператор* $U$ *є оператором повороту відносно деякої прямої.*

□

## 6.8 Нормальні лінійні оператори у евклідових просторах

**Означення 6.29.** Нехай $E$ – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $T : E \to E$ – лінійний оператор. Оператор $T$ називається **нормальним**, якщо $TT^* = T^*T$, тобто якщо оператор комутує зі своїм спряженим.

Зауважимо, що кожен самоспряжений оператор $A : E \to E,\ A = A^*$ є нормальним і кожен унітарний оператор $U : E \to E$, $UU^* = U^*U = I$ є нормальним. Тобто поняття нормального оператора є узагальненням і поняття самоспряженого оператора, і поняття унітарного оператора.

Ми отримаємо опис нормальних лінійних операторів у комплексному евклідовому просторі. Для цього нам потрібна наступна лема.

**Лема 6.30.** *Нехай $L$ – комплексний лінійний простір, $n = \dim L \in \mathbb{N}$, $A, B : L \to L$ – два лінійні оператори, і ці оператори комутують: $AB = BA$. Тоді у цих операторів є спільний власний вектор: існує такий $x_0 \in L, x_0 \neq \mathbf{0}$, що $Ax_0 = \lambda_0 x_0,\ Bx_0 = \mu_0 x_0$, де $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{C}$.*

*Доведення.* Розглянемо $\chi_A(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ – характеристичний многочлен оператора $A$. За основною теоремою алгебри цей многочлен має комплексний корінь: існує $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, таке, що $\chi_A(\lambda_0) = 0$. Розглянемо власний підпростір оператора $A$, який відповідає власному числу $\lambda_0$: $L_1 := \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I) = \{x \in L\ :\ Ax = \lambda_0 x\} < L$. Оскільки $\chi_A(\lambda_0) = 0$, ми маємо $\dim L_1 \geqslant 1$. Перевіримо, що цей підпростір є інваріантним для оператора $B$, тобто $B : L_1 \to L_1$. Для довільного $x \in L_1$ ми маємо $ABx = BAx = B(\lambda_0 x) = \lambda_0 Bx$. Тобто вектор $Bx$ під дією оператора $A$ множиться на $\lambda_0$, отже, $Bx \in L_1 = \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I)$. Розглянемо $B|_{L_1}$ – звуження оператора $B$ на підпростір $L_1$ і характеристичний многочлен цього оператора $\chi_{B|_{L_1}}(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$. За основною теоремою алгебри цей многочлен має комплексний корінь: існує $\mu_0 \in \mathbb{C}$, таке, що $\chi_{B|_{L_1}}(\mu_0) = 0$. Отже, у просторі $L_1$ існує власний вектор оператора $B|_{L_1}$, який відповідає

власному числу $\mu_0$: існує $x_0 \in L_1, x_0 \neq \mathbf{0}$, такий, що $B|_{L_1}(x_0) = B(x_0) = \mu_0 x_0$. Оскільки $L_1 = \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I)$, маємо $A(x_0) = \lambda_0 x_0$. □

Питання: чи виконується твердження цієї леми для комутуючих лінійних операторів у дійсному лінійному просторі?

Тепер ми можемо отримати опис нормальних лінійних операторів у комплексному евклідовому просторі.

**Теорема 6.31** (спектральна теорема для нормальних лінійних операторів у комплексному евклідовому просторі)**.** *Нехай $E$ – комплексний евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $T : E \to E$ – лінійний оператор. Умова $TT^* = T^*T$ виконується тоді і тільки тоді, коли існує ортонормований базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ простору $E$, такий, що*

$$T_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{6.6}$$

*де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.*

*Доведення.* 1. Припустимо, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормований базис простору $E$, такий, що матриця оператора $T$ в цьому базисі має вигляд (6.6), де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Оскільки цей базис є ортонормованим, щоб побудувати матрицю $T_e^*$, треба матрицю $T_e$ транспонувати і кожен елемент матриці комплексно спрягти. Отже, ми маємо

$$T_e^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda}_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \overline{\lambda}_n \end{pmatrix}.$$

З цього ми отримуємо

$$T_eT_e^* = T_e^*T_e = \begin{pmatrix} \lambda_1\overline{\lambda}_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\overline{\lambda}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\overline{\lambda}_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n\overline{\lambda}_n \end{pmatrix}.$$

Ми довели, що $TT^* = T^*T$.

2. Припустимо, що $TT^* = T^*T$. Будемо доводити теорему індукцією по $n = \dim E$.

2.1. База індукції $n = 1$. Оберемо довільний $e_1$ – ортонормований базис $E$. Нехай $T_e = (\lambda_1)$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ (у одновимірному просторі матриця довільного оператора у довільному базисі є діагональною). Базу індукції доведено.

2.2. Індуктивний перехід $n-1 \rightsquigarrow n$, $n = 2, 3, \dots$ Тобто ми вважаємо, що для евклідових просторів розмірності $n-1$ теорема виконується. Нехай $\dim E = n$, $T : E \to E$ – лінійний оператор, $TT^* = T^*T$. За попередньою лемою, у операторів $T$ і $T^*$ існує спільний власний вектор. Тобто існує $e_1 \in E, \|e_1\| = 1$, такий, що $Te_1 = \lambda_1 e_1, T^*e_1 = \mu_1 e_1$, де $\lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{C}$.

Розглянемо $L = \mathrm{Lin}\ \{e_1\} < E$, $\dim L = 1$. Тоді для довільного $x \in L$ маємо $x = \alpha e_1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, звідки $Tx = T(\alpha e_1) = \alpha T e_1 = \alpha\lambda_1 e_1 \in L$. Крім того, $T^*x = T^*(\alpha e_1) = \alpha T^* e_1 = \alpha\mu_1 e_1 \in L$. Таким чином, $T : L \to L$ і $T^* : L \to L$. Ми доводили раніше (дивись твердження 6.20), що якщо підпростір є інваріантним і для оператора, і для його спряженого, то ортогональне доповнення цього підпростору також є інваріантним і для оператора, і для його спряженого. Отже, $T : L^\perp \to L^\perp$ і $T^* : L^\perp \to L^\perp$.

Розглянемо звуження оператора $T$ на підпростір $L^\perp$, тобто $T|_{L^\perp} : L^\perp \to L^\perp$, такий, що для довільного $x \in L^\perp$ виконується $T|_{L^\perp}x = Tx$. Відзначимо, що цей оператор є нормальним $T|_{L^\perp} \cdot T|_{L^\perp}^* = T|_{L^\perp}^* \cdot T|_{L^\perp}$ (поясніть це!), а $\dim L^\perp = n-1$. За індуктивним припущенням, існує $e_2, e_3, \dots, e_n$ – ортонормований базис $L^\perp$, такий, що для кожного $j = 2, 3, \dots, n$ виконується $Te_j = \lambda_j e_j$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Тоді $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$

– ортонормований базис $E$, такий, що для кожного $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ виконується $Te_j = \lambda_j e_j$. Тобто ми отримали, що

$$T_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

□

**Задача 6.32.** Нехай $L$ – лінійний простір над полем $\mathbb{C}$, $n = \dim L \in \mathbb{N}$ і $T : L \to L$ – лінійний оператор. В якому випадку можна ввести у просторі $L$ скалярний добуток таким чином, щоб лінійний оператор $T$ у отриманому евклідовому просторі був нормальним?

**Задача 6.33.** Нехай $E$ – евклідів простір над полем $\mathbb{C}$, $n = \dim E \in \mathbb{N}$ і $T : E \to E$ – нормальний лінійний оператор, тобто $TT^* = T^*T$. Доведіть, що існують два лінійні оператори: унітарний лінійний оператор $U : E \to E$, $UU^* = U^*U = I$ і самоспряжений лінійний оператор $A : E \to E$, $A = A^*$, такі, що $T = UA$. Чи єдиним чином можна обрати таку пару унітарного і самоспряженого лінійних операторів?

Опис нормальних лінійних операторів у дійсному евклідовому просторі є більш складним (про це свідчить опис унітарних лінійних операторів у дійсному евклідовому просторі). Ми залишаємо читачеві отримати цей опис самостійно за тією ж схемою, за якою був отриманий опис унітарних лінійних операторів у дійсному евклідовому просторі.

**Задача 6.34.** Нехай $E = \mathbb{R}^2$ – евклідів простір і $T : E \to E$ – нормальний лінійний оператор, тобто $TT^* = T^*T$. Нехай $e_1, e_2 \in E$ – ортонормований базис $E$, $T_e = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – матриця оператора в цьому базисі. Розв'яжіть матричне рівняння $T_e T_e^* = T_e^* T_e$ і знайдіть опис

нормальних лінійних операторів у двовимірному дійсному евклідовому просторі.

**Задача 6.35.** Сформулюйте і доведіть спектральну теорему для нормальних лінійних операторів у дійсному евклідовому просторі.

# Розділ 7

# Типові вправи

## 7.1 Лінійні простори та лінійна незалежність

**Вправа 7.1.** Чи є наступні вектори у просторі $\mathbb{R}^4$ лінійно незалежними?

а) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$

*Розв'язок.* Запишемо лінійну комбінацію цих векторів, прирівняємо її до нульового вектора і з'ясуємо, чи можуть якісь з коефіцієнтів лінійної комбінації бути відмінними від нуля. Маємо

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

або

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \\ -\alpha - 2\gamma = 0 \\ 3\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 5\gamma = 0. \end{cases}$$

Додамо до другого рівняння перше, а до четвертого – перше, помножене на (-2). Мета цього перетворення – позбавитися від $\alpha$ у другому і четвертому рівняннях. Маємо

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \\ 2\beta + 2\gamma = 0 \\ 3\beta + 3\gamma = 0 \\ -3\beta - 3\gamma = 0. \end{cases}$$

Друге, третє і четверте рівняння виявилися еквівалентними. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Додамо до першого рівняння друге, помножене на (-2). Отримаємо

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \alpha = -2\gamma \\ \beta = -\gamma. \end{cases}$$

Ця система має нетривіальний (тобто такий, що складається не лише з нулів) розв'язок: $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -1$. Отже, вектори є лінійно залежними.

б) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

*Розв'язок.* Прирівняємо до нульового вектора лінійну комбінацію цих векторів і отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3\beta + 4\gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\gamma = 0. \end{cases}$$

Виражаємо з четвертого рівняння $\alpha$ й підставляємо у друге і третє:

$$\begin{cases} 3\beta + 4\gamma = 0 \\ -\beta - 3\gamma = 0 \\ 2\beta - \gamma = 0 \\ \alpha = -2\gamma. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо, що $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Отже, вектори є лінійно незалежними.

**Вправа 7.2.** Чи є лінійним підпростором простору $\mathbb{R}^3$ множина векторів вигляду $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$?

*Розв'язок 1.* Оскільки $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 2 \end{pmatrix}$, а $2 \neq 1$, то дана множина не є лінійним підпростором.

*Розв'язок 2.* Зауважимо, що нульовий вектор належить будь-якому лінійному підпростору, але даній множині нуль не належить, тому вона не може бути лінійним підпростором.

**Вправа 7.3.** Чи є множина $L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_5 = 2x_1, x_3 + x_4 = 0 \right\}$ лінійним підпростором простору $\mathbb{R}^5$? Якщо так, знайдіть його базис і розмірність.

*Розв'язок.* Враховуючи умови $x_5 = 2x_1$ і $x_3 + x_4 = 0$, запишемо

довільний вектор підпростору $L$ у вигляді $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ -x_3 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$, де $x_1, x_3$ – довільні дійсні числа. Перевіримо замкненість множини $L$ відносно операцій додавання і множення на скаляр.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ -x_3 \\ 2x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_3 \\ -y_3 \\ 2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \\ x_3 + y_3 \\ -(x_3 + y_3) \\ 2(x_1 + y_1) \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що отриманий вектор належить до $L$. Отже, $L$ замкнена відносно додавання. Розглянемо множення на скаляр.

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ -x_3 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \\ \alpha x_3 \\ -\alpha x_3 \\ 2\alpha x_1 \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що отриманий вектор належить до $L$, отже, ми перевірили замкненість $L$ відносно множення на скаляр. Таким чином, $L$ – лінійний підпростір простору $\mathbb{R}^5$.

Знайдемо базис $L$.

Ми маємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ -x_3 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

тобто кожен вектор підпростору $L$ є лінійною комбінацією векторів

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, що вектори $e_1, e_2$ утворюють базис підпростору $L$. Зазначимо, що вектор у лівій частині рівності 7.1 дорівнює нулю тільки якщо $x_1 = x_3 = 0$, тобто тільки коли лінійна комбінація у правій частині рівності 7.1 тривіальна. Отже, вектори $e_1$ та $e_2$ є лінійно незалежними, і будь-який вектор з $L$ можна подати у вигляді лінійної комбінації $e_1$ і $e_2$. Таким чином, $e_1, e_2$ – базис підпростору $L$, $\dim L = 2$.

## 7.2 Ранг матриці

Щоб знайти детермінантний ранг матриці за означенням, треба послідовно шукати ненульові мінори першого, другого, $\ldots, n$-го порядку. Це доволі кропітка робота, але є більш простий **метод оточення мінорів**. Знаходимо ненульовий мінор першого порядку. Далі розглядаємо лише ті мінори другого порядку, які містять в собі знайдений мінор першого порядку. Якщо всі такі мінори дорівнюють нулю, то ранг дорівнює одиниці. Якщо хоча б один з мінорів другого порядку ненульовий, то розглядаємо лише ті мінори третього порядку, в яких він міститься, і т.д. Можливість шукати ранг матриці таким чином випливає із доведення теореми про ранг матриці (дивись зауваження 2.11 до теореми про ранг матриці).

**Вправа 7.4.** Знайдіть ранг матриці методом оточення мінорів

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 8 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 14 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язок.* Знайдемо ненульовий мінор першого порядку, наприклад,

$$M_1^1 = a_{11} = 2 \neq 0.$$

Розглянемо мінори другого порядку, що містять $M_1^1$, і подивимось, чи є серед них такий, що не дорівнює нулю. Маємо:

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,\ M_{13}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,\ M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Тепер розглянемо лише ті мінори матриці $A$, що містять $M_{12}^{13}$.

$$M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ M_{123}^{134} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0,\ M_{123}^{135} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & 5 & 14 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки всі такі мінори виявилися рівними нулю, то $\operatorname{rank} A = 2$.

**Вправа 7.5.** Знайдіть ранг наступної матриці за допомогою елементарних перетворень:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язок.* Знайдемо рядковий ранг за допомогою таких перетворень:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2 \to A_2 + (-A_1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2 \leftrightarrow A_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[A_4 \to A_4 - 5A_1]{\substack{A_2 \to A_2 - 2A_1 \\ A_3 \to A_3 - 4A_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -13 & -9 & -7 \\ 0 & 3 & -20 & -13 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3 \to A_3 - 2A_2]{A_4 \to A_4 - A_2 - A_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця має східчастий вигляд. Легко перевірити, що ненульові рядки у східчастій матриці лінійно незалежні (зробіть це!). Тому рядковий ранг дорівнює 3 (три ненульові рядки).

## 7.3 Системи лінійних рівнянь

**Вправа 7.6.** Дослідіть сумісність системи лінійних рівнянь, знайдіть загальний розв'язок і один частковий розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 14x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 12 \\ 9x_1 + 15x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 12 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}.$$

*Розв'язок.* Записуємо розширену матрицю системи та за допомогою елементарних перетворень приводимо її до східчастого вигляду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 14 & 6 & 2 & 12 \\ 9 & 15 & 6 & 6 & 12 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[A_1 \to A_1/2]{A_2 \to A_2/3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{A_1 \to A_1 + (-1)A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{A_1 \to A_1 \times (-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3 \to A_3 + (-9)A_1]{A_2 \to A_2 + (-3)A_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 22 & 10 & -2 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{A_3 \to A_3 + (-2)A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Бачимо, що $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A} = 2$, тому система сумісна. Оскільки $\operatorname{rank} A = 2$, знайдеться ненульовий мінор другого порядку. Наприклад

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

За допомогою елементарних перетворень зробимо відповідну підматрицю одиничною.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & \boxed{1} & -2 \\ \boxed{0} & 11 & 5 & \boxed{-1} & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{A_1 \to A_1 + A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 9 & 4 & \boxed{0} & 8 \\ \boxed{0} & 11 & 5 & \boxed{-1} & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{A_2 \to -A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 9 & 4 & \boxed{0} & 8 \\ \boxed{0} & -11 & -5 & \boxed{1} & -10 \end{array}\right).$$

Змінні поділяються на дві групи: залежні (ті, які виражаються через інші), та незалежні (ті, через які виражаються інші). Зауважимо, що розподіл на залежні та незалежні змінні може бути різним, але кількість залежних та незалежних змінних завжди однакова. Кількість залежних змінних дорівнює рангу матриці, кількість незалежних змінних дорівнює загальному числу змінних мінус ранг матриці системи. Ми отримали одиничну матрицю розміру $2 \times 2$ у першому та четвертому стовпчиках. Тому перша та четверта змінні будуть залежними, а друга і третя – незалежними. Запишемо систему рівнянь, що відповідає цій матриці:

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 4x_3 \qquad = 8 \\ \quad - 11x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \end{cases}$$

Ця система еквівалентна вихідній системі. Далі виражаємо ті невідомі, що відповідають одиничному мінору через інші:

$$\begin{cases} x_1 = 8 - 9x_2 - 4x_3 \\ x_4 = 11x_2 + 5x_3 - 10 \end{cases}$$

Цими формулами дається загальний розв'язок системи, якщо вважати, що $x_2$ та $x_3$ приймають всі значення з поля $F$. Але прийнято загальний розв'язок записувати у векторній формі:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 9x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 11x_2 + 5x_3 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Це і є остаточна відповідь.

Вираз

$$x_2 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

є загальним розв'язком однорідної системи рівнянь (тобто вихідної системи, в якій у правій частині всіх рівнянь стоять нулі). Вектори

$$\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ і } \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

– це базис підпростору розв'язків однорідної системи. Вектор

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

– частковий розв'язок неоднорідної системи рівнянь (перевірте це!).

**Вправа 7.7.** Розв'яжіть систему лінійних рівнянь за правилом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 = -4. \end{cases}$$

*Розв'язок.* Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -13 \neq 0,$$

то

$$x_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{18}{13},$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{53}{13},$$

$$x_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \frac{15}{13}.$$

## 7.4 Лінійні простори (продовження)

Раніше ми зрозуміли, що лінійний підпростір може бути описаний за допомогою базису. Ще один спосіб задавати лінійний підпростір – за допомогою систем лінійних рівнянь.

**Вправа 7.8.** Знайдіть систему лінійних рівнянь, яка задає лінійний підпростір, натягнутий на дану систему векторів у просторі $\mathbb{R}^4$ :

$$a_1 = (1, -1, 1, 0),\ a_2 = (1, 1, 0, 1),\ a_3 = (0, -2, 1, -1).$$

*Розв'язок 1.* Маємо підпростір

$$L = \operatorname{Lin}\{a_1, a_2, a_3\}.$$

Помітимо одразу, що $a_3 = a_1 - a_2$, а $a_1$ і $a_2$ лінійно незалежні. Тому насправді

$$L = \operatorname{Lin}\{a_1, a_2\} = \{x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2\ :\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

Зауважимо, що $\dim L = 2$. Нехай $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in L$ – довільний вектор.

Координати довільного вектора $x$ задаються системою лінійних рівнянь відносно невідомих $\alpha_i$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x_1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = x_2 \\ \alpha_1 = x_3 \\ \alpha_2 = x_4. \end{cases}$$

Знайдемо умови сумісності даної системи рівнянь. Для цього приведемо

розширену матрицю системи до східчастого вигляду.

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3 \to A_3 + (-1)A_1]{A_2 \to A_2 + A_1} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_1 + x_2 \\ 0 & -1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow{A_2 \to A_2/2}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ 0 & -1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 \to A_4 + (-1)A_2]{A_3 \to A_3 + A_2} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 + \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ 0 & 0 & x_4 - \dfrac{x_1 + x_2}{2} \end{array}\right).$$

Очевидно, що ранг матриці системи дорівнює двом. Згідно з теоремою Кронекера–Капеллі, ця система є сумісною тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи теж дорівнює двом. А це виконується за умови:

$$\begin{cases} x_3 - x_1 + \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 0 \\ x_4 - \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 0. \end{cases}$$

Тому лінійний простір задається системою рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

*Розв'язок 2.* Розглянемо рівняння

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0.$$

Якщо $a_1$ і $a_2$ задовольняють це рівняння, то будь-яка їхня лінійна комбінація теж його задовольняє. Тобто умови на $\lambda_i$ наступні:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \end{cases}.$$

У матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 1 & 1 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Тобто $L$ – це простір розв'язків системи

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Увага! Строго кажучи, $L$ – це підпростір простору розв'язків цієї системи. Рівність досягається через рівність розмірностей підпростору і охоплюючого простору. Зауважимо, що відповіді у двох варіантах розв'язку записані по-різному, але вони еквівалентні.

Розглянемо у деякому сенсі обернену задачу.

**Вправа 7.9.** Лінійний підпростір простору $\mathbb{R}^4$ складається із векторів $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, координати яких задовольняють наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Знайдіть базис підпростору.

*Розв'язок.* Знайдемо загальний розв'язок даної системи рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1 \to A_1 + (-1)A_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3 \to A_3 + 4A_1]{A_2 \to A_2 + 3A_1}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 21 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3 \to A_3 + (-3)A_2]{A_1 \to -A_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2 \to A_2/7}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1 \to A_1 + A_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & \boxed{0} & -2/7 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & 5/7 \end{pmatrix}.$$

Задана система рівнянь еквівалентна системі

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - \dfrac{2}{7}x_4 = 0 \\ x_3 + \dfrac{5}{7}x_4 = 0. \end{cases}$$

Незалежні змінні – $x_2$ та $x_4$, залежні змінні – $x_1$ та $x_3$. Маємо:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + \dfrac{2}{7}x_4 \\ x_3 = -\dfrac{5}{7}x_4, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + \dfrac{2}{7}x_4 \\ x_2 \\ -\dfrac{5}{7}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_4}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Отже, базис лінійного підпростору розв'язків заданої однорідної системи має вигляд

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, розмірність підпростору розв'язків однорідної системи рівнянь дорівнює числу невідомих мінус ранг матриці. В нашому випадку це $4 - 2 = 2$.

**Вправа 7.10.** Знайдіть базиси суми та перетину лінійних підпросторів простору $\mathbb{R}^3$ :

$$L_1 = \text{Lin}\{a_1, a_2, a_3\},\ L_2 = \text{Lin}\{b_1, b_2, b_3\},$$

де

$$a_1 = (2, 4, 2),\ b_1 = (2, 3, -1),$$

$$a_2 = (1, 1, -1),\ b_2 = (1, 2, 2),$$

$$a_3 = (1, 3, 3),\ b_3 = (1, 1, -3).$$

*Розв'язок.* Відповідно до означення суми лінійних підпросторів

$$L_1 + L_2 = \{x = u + v \ : \ u \in L_1, v \in L_2\} =$$

$$\{x = u + v \ : \ u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3, \ v = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3, \ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 \ : \ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}\} =$$

$$\mathrm{Lin}\,\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}.$$

Базис $L_1 + L_2$ – це максимальна лінійно незалежна система векторів із $L_1 + L_2$. Для того, щоб її знайти, приведемо матрицю, в рядках якої знаходяться вектори $a_i$, $b_i$, до східчастого вигляду.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1 \to A_1/2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A_i \to A_i + (-1)A_1, \\ i = 2,3,5,6}]{A_4 \to A_4 + (-2)A_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[A_6 \to A_6 + (-A_2)]{\substack{A_3 \to A_3 + A_2, \\ A_4 \to A_4 + (-A_2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_6 \to -A_6/2]{\substack{A_i \to -A_i, \\ i = 2,4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[i=5,6]{A_i \to A_i + (-A_4),} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки ми отримали три ненульові рядки у східчастому вигляді матриці, то $\dim(L_1 + L_2) = 3$. Базисом суми підпросторів $L_1 + L_2$ є ці три ненульові рядки:

$$e_1 = (1, 2, 1)$$

$$e_2 = (0, 1, 2)$$

$$e_3 = (0, 0, 1).$$

Якщо ми хочемо, щоб базис складався з векторів $a_i, b_i$, то треба при зведенні матриці до східчастого вигляду не змінювати порядок рядків, а

в якості базису взяти ті вектори з $a_i, b_i$, на місці яких при зведенні ми отримали ненульові рядки. В нашому випадку базис $L_1 + L_2$ – це вектори $a_1, a_2, b_1$.

Знайдемо базис перетину підпросторів $L_1 \cap L_2$. Відповідно до означення

$$L_1 \cap L_2 = \{x \in L \ : \ x \in L_1 \wedge x \in L_2\} =$$

$$\{x \in L \ : \ x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 \wedge x = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3, \ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}\}.$$

Запишемо систему лінійних рівнянь, яку задовольняють $\alpha_i, \beta_i$. Для цього порівняємо відповідні координати рівних векторів $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ та $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3$. Ми маємо

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ 4\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 3\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = -\beta_1 + 2\beta_2 - 3\beta_3. \end{cases}$$

Ми отримали систему лінійних рівнянь відносно невідомих $\alpha_i, \beta_i$. Запишемо матрицю цієї системи, але спочатку перенесемо доданки з правої частини рівнянь у ліву. Розв'яжемо однорідну систему.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3 \to A_3 + (-A_1)]{A_2 \to A_2 + (-2)A_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[A_3 \to A_3 + (-2)A_2, A_2 \to -A_2]{A_1 \to A_1 + A_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_2 \to A_2 + A_3]{A_1 \to A_1 + A_3}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{0} & 2 & \boxed{0} & -2 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & -1 & \boxed{0} & -1 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1 \to A_1/2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 1 & \boxed{0} & -1 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & -1 & \boxed{0} & -1 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отримали систему

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 - \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Незалежні змінні – $\alpha_3, \beta_2, \beta_3$, залежні – $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$. Маємо:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 + \beta_2 - \beta_3 \\ \alpha_2 = \alpha_3 + \beta_2 - \beta_3 \\ \beta_1 = \beta_2 - 2\beta_3. \end{cases}$$

Знайдемо загальний вигляд вектора з перетину $L_1 \cap L_2$.

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 = (\beta_2 - 2\beta_3) b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 = \beta_2 (b_1 + b_2) +$$

$$\beta_3(-2b_1 + b_3) = \beta_2 \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + \beta_3 \left( -2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\beta_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = (\beta_2 - \beta_3) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, базис підпростору $L_1 \cap L_2$ – це вектор $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

У попередньому прикладі базис перетину $L_1 \cap L_2$ можна було б знайти, підставляючи у вираз $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ ті вирази для $\alpha_1$ та $\alpha_2$, що ми знайшли.

Перевіримо, що виконується формула Грассмана. З приведення перших трьох рядків матриці, що складалася з шести рядків, до східчастого вигляду бачимо, що $\dim L_1 = 2$. Окремо знайдемо $\dim L_2$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2 \leftrightarrow A_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3 \to A_3 + (-A_1)]{A_2 \to A_2 + (-2)A_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_3 \to A_3 + (-A_2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки ненульових рядків два, то $\dim L_2 = 2$. Тоді

$$\dim(L_1 + L_2) = 3 = 2 + 2 - 1 = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

## 7.5 Обернена матриця

**Вправа 7.11.** Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть обернену матрицю.

*Розв'язок.*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -3 & -5 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Існує ще один спосіб знаходження оберненої матриці – метод Гаусса. Опишемо цей алгоритм. За означенням ми повинні знайти матрицю $X$, таку, що $AX = I$. Якщо помножити матрицю на кожен стовпчик матриці $X$ окремо, то для $i$-го стовпця $X^i$ невідомих коефіцієнтів матриці $X$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ми отримуємо систему рівнянь $AX^i = I^i$, де $I^i$ – це $i$-й стовпчик одиничної матриці $I$. Зазначимо, що матриця системи для всіх цих систем рівнянь однакова – це матриця $A$, а стовпці правих частин різні. Розв'яжемо системи $AX^i = I^i$ для всіх $I^i$ одночасно. Для цього до матриці $A$ розміру $n \times n$ припишемо справа одиничну матрицю $I$ того ж порядку:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right).$$

Ми отримали так звану розширену матрицю розміру $n \times 2n$. За допомогою елементарних перетворень з рядками розширеної матриці $(A|I)$ зробимо так, щоб на місці матриці $A$ опинилася матриця $I$. Тоді на місці матриці $I$ з'явиться матриця $A^{-1}$: $(I|A^{-1})$.

**Вправа 7.12.** Знайдіть матрицю $A^{-1}$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язок.* Маємо:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_2 \to A_2 + (-2)A_1]{A_3 \to A_3 + (-3)A_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_3 \leftrightarrow A_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{A_3 \to A_3 + (-3)A_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_1 \to A_1 + (-2)A_3]{A_2 \to A_2 + 2A_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -13 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & -2 & 6 \\ 11 & 2 & -5 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Перевірте самостійно, що $AA^{-1} = I$.

Зверніть увагу на те, в якій послідовності ми виконуємо елементарні перетворення. Спочатку ми повинні на якомусь місці отримати одиницю (у нашому прикладі цього спеціально робити не довелося). Потім переставити рядки так, щоб одиниця опинилася на головній діагоналі. Потім ми множимо рядок з одиницею на відповідні коефіцієнти і додаємо до інших рядків так, щоб усі інші елементи стовпчика з одиницею стали нулями. Потім отримуємо одиницю в іншому стовпчику і повторюємо процедуру, але так, щоб не зіпсувати стовпчики, які ми вже перетворили. Ще раз зауважимо, що всі елементарні перетворення здійснюються з рядками **розширеної** матриці.

**Вправа 7.13.** Знайдіть $A^{-1}$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язок.* Ми маємо

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[i=2,3,\dots,n.]{A_i \to A_i + A_1,}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_1 \to A_1 - \sum_{i=2}^{n} A_i}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2-n & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[i=1,2,\dots,n.]{A_i \to A_i \times (-1),}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} n-2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 7.6 Лінійні оператори

**Вправа 7.14.** Оператор $A$ в $\mathbb{R}^2$ здійснює послідовно центральну симетрію та проєкцію на вісь $Ox_1$. Перевірте, що $A$ – це лінійний оператор, знайдіть його ядро, образ, перевірте формулу з теореми 4.15. Знайдіть матрицю оператора в базисі з ортів координатних осей.

*Розв'язок.* При центральній симетрії вектор $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ переходить у вектор $\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$, а вектор $\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ при проекції на вісь $Ox_1$ – у вектор $\begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тому

$$A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, що $A$ – це лінійний оператор.

$$A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = A\left(\begin{pmatrix} x_1+z_1 \\ x_2+z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_1-z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + A\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right);$$

$$A\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = A\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right).$$

Знайдемо ядро $A$.

$$\operatorname{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon Ax = \mathbf{0}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Таким чином, ядро оператора збігається з віссю $Ox_2$. Зрозуміло, що $\dim \operatorname{Ker} A = 1$, а базис $\operatorname{Ker} A$ – це, наприклад, вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо образ оператора $A$.

$$\operatorname{Im} A = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon A\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ де } x_1 \text{ – довільне дійсне число} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{де } y_1 \text{ – довільне дійсне число} \right\}.$$

Таким чином, $\operatorname{Im} A$ збігається з віссю $Ox_1$, $\dim \operatorname{Im} A = 1$, базис $\operatorname{Im} A$ – це, наприклад, вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Зрозуміло, що

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2 = 1 + 1 = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A.$$

Знайдемо матрицю оператора $A$ в базисі $e_1, e_2$, де $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Для цього знайдемо образи векторів $e_1, e_2$ під дією оператора $A$.

$$Ae_1 = A\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2.$$

$$Ae_2 = A\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2.$$

Координати векторів $Ae_1$ та $Ae_2$ в базисі $e_1, e_2$ записуємо в стовпчики матриці $A_e$:

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Вправа 7.15.** Оператор заданий матрицею в деякому базисі

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть його ядро та образ, базиси ядра та образу, перевірте формулу з теореми 4.15.

*Розв'язок.* Ядро складається з розв'язків системи

$$A_e \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3 \to A_3 + (-2)A_1]{A_2 \to A_2 + A_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_2 \to -A_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3 \to A_3 + A_2]{A_1 \to A_1 + A_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & -2 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

базис $\operatorname{Ker} A$: $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\dim \operatorname{Ker} A = 1$.

Нагадаємо, що

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Lin}\{A^1, A^2, A^3\},$$

де $A^1, A^2, A^3$ – стовпці матриці $A$. Тому для знаходження базису $\operatorname{Im} A$ серед стовпців матриці  знайдемо лінійно незалежні.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[A^3 \to A^3 + A^1]{A^2 \to A^2/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A^3 \to A^3 + A^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, базис образу $A$ – це, наприклад,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ та } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ а } \dim \operatorname{Im} A = 2.$$

Бачимо, що

$$\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

**Вправа 7.16.** Матриця оператора $A$ в базисі $e_1, e_2$ має вигляд:

$$A_e = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть матрицю оператора $A$ в базисі $u_1 = e_1 + 2e_2$, $u_2 = e_1 - e_2$.

*Розв'язок.* Спочатку запишемо матрицю переходу від базису $e_1, e_2$ до базису $u_1, u_2$. Для цього запишемо координати векторів $u_1, u_2$ в базисі $e_1, e_2$ у стовпчики матриці:

$$T_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до формули оберненої матриці

$$T_{e\to u}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$A_u = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}.$$

## 7.7 Власні числа та вектори лінійних операторів

**Вправа 7.17.** Знайдіть власні числа та власні вектори оператора, що у деякому базисі задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Чи є цей оператор діагоналізовним?

*Розв'язок.* Знайдемо власні числа оператора.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 = 0.$$

Отже, $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 1$. Знайдемо власні вектори. Для цього потрібно знайти розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь з матрицею $A - \lambda I$.

$$A - \lambda_{1,2} I = A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1 \to A_1 + (-A_2)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3 \to A_3 + 6A_1]{A_2 \to A_2 + 5A_1}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_1 \to -A_1]{A_2 \to A_2/3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1 \to A_1 + 2A_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & -1/3 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3/3 \\ 2x_3/3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 0$, мають вигляд

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, c \neq 0.$$

Умова $c \neq 0$ виключає нульовий вектор. Тепер розглянемо випадок $\lambda = 1$.

$$A - \lambda_3 I = A - I = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_1 \leftrightarrow A_3]{A_3 \to A_3 + (-A_2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -8 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3 \to A_3 + (-3)A_1]{A_2 \to A_2 + (-5)A_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2 \to A_2/3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & -1 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 1$, мають вигляд

$$b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b \neq 0.$$

Таким чином, існує всього два лінійно незалежні власні вектори у тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$, тобто базису з власних векторів не існує, тому оператор не є діагоналізовним.

**Вправа 7.18.** Знайдіть власні числа та власні вектори лінійного оператора, який в деякому базисі задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

Чи є оператор діагоналізовним? Якщо так, то випишіть матрицю переходу від даного базису до базису з власних векторів.

*Розв'язок.* Знайдемо власні числа.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}7-\lambda & -12 & 6\\ 10 & -19-\lambda & 10\\ 12 & -24 & 13-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-1)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0.$$

Отже, $\lambda_{1,2}=1$, $\lambda_3=-1$. Знайдемо власні вектори.

$$A-\lambda_{1,2}I=A-I=\begin{pmatrix}6 & -12 & 6\\ 10 & -20 & 10\\ 12 & -24 & 12\end{pmatrix}\xrightarrow[A_3\to A_3/12]{A_1\to A_1/6, A_2\to A_2/10}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[A_3\to A_3+(-A_1)]{A_2\to A_2+(-A_1)}\begin{pmatrix}\boxed{1} & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_2-x_3\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda=1$, мають вигляд

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, |\alpha|+|\beta|\neq 0.$$

Умова $|\alpha|+|\beta|\neq 0$ виключає нульовий вектор.

$$A-\lambda_3I=A+I=\begin{pmatrix}8 & -12 & 6\\ 10 & -18 & 10\\ 12 & -24 & 14\end{pmatrix}\xrightarrow[i=1,2,3]{A_i\to A_i/2}\begin{pmatrix}4 & -6 & 3\\ 5 & -9 & 5\\ 6 & -12 & 7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_1\to A_1+(-A_2)}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2\\ 5 & -9 & 5\\ 6 & -12 & 7\end{pmatrix}\xrightarrow[A_3\to A_3+6A_1]{A_2\to A_2+5A_1}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2\\ 0 & 6 & -5\\ 0 & 6 & -5\end{pmatrix}\xrightarrow[A_2\to A_2/6]{A_1\to -A_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1 \to A_1 + 3A_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\dfrac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3/2 \\ 5x_3/6 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = -1$, мають вигляд

$$\gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \gamma \neq 0.$$

Відповідно до твердження 4.15, власні вектори, що відповідають $\lambda = 1$, і власні вектори, що відповідають $\lambda = -1$, лінійно незалежні. Тому існує базис із власних векторів

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Матриця оператора в цьому базисі має вигляд

$$A_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу від базису $e_1, e_2, e_3$ до базису $u_1, u_2, u_3$ має вигляд

$$T_{e \to u} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Увага! Порядок власних векторів у базисі $u_1, u_2, u_3$ такий самий, як порядок власних чисел на головній діагоналі матриці. Тобто в базисі $v_1 = u_3$, $v_2 = u_1$, $v_3 = u_2$ матриця оператора буде мати вигляд

$$A_v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а матриця переходу матиме вигляд

$$T_{e\to v} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірте самостійно формулу

$$A_v = T_{e\to v}^{-1} A_v T_{e\to v}.$$

## Література


1. Авдєєва Т. В., Шраменко В. М. Лінійна алгебра в задачах та прикладах. Київ: НТУ «КПІ», 2016. – 206 с.
2. Андрійчук В. І., Забавський Б. В. Лінійна алгебра: навчальний посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2008. – 226 с.
3. Axler Sheldon. Linear Algebra Done Right. Second Edition. Springer, 1997. – 251 p.
4. Баранник В. Ф., Дроботенко Е. С., Рудько В. П., Шапочка І. В. Лінійна алгебра: навчальний посібник. Ужгород, 1999. – 91 с.
5. Безущак О. О., Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. А. Навчальний посібник з лінійної алгебри для студентів механіко-математичного факультету. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2019. – 224 с.
6. Greub Werner. Linear Algebra. Fourth Edition. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1975. – 451 p.
7. Kostrikin A. I., Manin Yu. I. Linear Algebra and Geometry. Gordon and Breach, 1997.
8. Kurosh A. Higher Algebra. Mir, 1972.
9. Панасенко О. Б. Лекції з лінійної алгебри: електронний навчальний посібник. Вінниця, 2015. – 273 с.
10. Proskuryakov I. V. Problems in Linear Algebra. Mir, 1978.
11. Романів О. М. Лінійна алгебра: навч. посібник. Львів: І.Е.Чижиков, 2014. – 279 с.
12. Чарін В. С. Лінійна алгебра. Київ: Техніка, 2004. – 416 с.