УДК 517.982

В. П. ФОНФ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СЕМЕЙСТВ ВЛОЖЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть $\{E_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ — семейство вложенных банаховых пространств т. е. для каждой пары чисел $\alpha < \beta$, $(\alpha, \beta \in [0, 1])$ определено взаимнооднозначное линейное ограниченное отображение (в дальнейшем — вложение) $T_{\beta\alpha} : E_\beta \to E_\alpha$, причем выполняются свойства 1) $\mathrm{Cl} T_{\beta\alpha} E_\beta = E_\alpha$, т. е. $T_{\beta\alpha}$ — плотное вложение; 2) $T_{\alpha\gamma} T_{\beta\alpha} = T_{\beta\gamma}$, $0 \leqslant \gamma < \alpha < \beta \leqslant 1$; 3) $T_{\beta\alpha}^{-1}$ — неограниченное отображение.

Примерами таких семейств являются семейство пространств $L_p [0, 1]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $E_\alpha = L_{\frac{1}{1-\alpha}} [0, 1]$, $\alpha \in [0, 1]$ и другие семейства банаховых пространств, построенные различными методами интерполяции [1].

Цель данной статьи — доказательство теорем 1, 2, которые развивают некоторые результаты работ [2—4]. Через $U(E)$ ($S(E)$) будем обозначать единичный шар (единичную сферу) пространства E. Начнем с вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть $\{E_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ — семейство вложенных банаховых пространств. Для каждого числа $\alpha \in (0, 1)$ найдутся два банаховых пространства $X = X(\alpha)$, $Y = Y(\alpha)$ обладающие свойствами:*

а) *Существует плотное вложение $A : X \to E_\alpha$ и для каждого числа $\beta > \alpha$ вложения $A_\beta : E_\beta \to X$ такие, что $AA_\beta = T_{\beta\alpha}$ и отображения A^{-1}, A_β^{-1} неограничены. В частности $AX \supset \bigcup\limits_{\beta>\alpha} T_{\beta\alpha}E_\beta$;*

б) *Существуют плотное вложение $B : E_\alpha \to Y$ и для каждого числа $\gamma < \alpha$ плотное вложение $B_\gamma : Y \to E_\gamma$, причем $B_\gamma B = T_{\alpha\gamma}$ и отображения B^{-1}, B_γ^{-1} неограничены.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и $\{\beta_n\} \subset (0, 1)$ — убывающая, а $\{\gamma_n\} \subset (0, 1)$ — возрастающая последовательности, причем $\lim \beta_n = \lim \gamma_n = \alpha$. Положим
$$V = \operatorname{cl}\operatorname{co} \bigcup_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{\|T_{\beta_n\alpha}\|} T_{\beta_n\alpha} U(E_{\beta_n}),$$
и в качестве пространства X возьмем линейную оболочку $\lim V$ множества V с единичным шаром V. Все требуемые свойства пространства X достаточно очевидны. Обозначим теперь
$$L = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_{\gamma_n 0} E_{\gamma_n}, \quad M = \left\{x \in L : |||X||| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|T_{\alpha\gamma_n}\|} \|T_{\gamma_n 0}^{-1} x\| < \infty\right\}.$$

Непосредственно проверяется полнота линейного многообразия M в норме $|||\cdot|||$ (упрощенно говоря, сходимость в норме $|||\cdot|||$ равносильна сходимости в каждом пространстве E_{γ_n}; полнота M в норме $|||\cdot|||$ получается, как следствие полноты пространств E_0, E_{γ_n}, $n = 1, 2, \ldots$ и того, что норма $|||\cdot|||$ сильнее нормы E_0). Пусть $x \in T_{\alpha 0}E_\alpha$, тогда
$$|||x||| = \sum_n \frac{1}{2^n \|T_{\alpha\gamma_n}\|} \|T_{\gamma_n 0}^{-1} x\| = \sum_n \frac{1}{2^n \|T_{\alpha\gamma_n}\|} \|T_{\alpha\gamma_n} T_{\alpha 0}^{-1} x\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_n 2^{-n} \|T_{\alpha 0}^{-1}\| = \|T_{\alpha 0}^{-1} x\|,$$
откуда следует, что оператор $T_{\alpha 0}$ осуществляет вложение пространства E_α в M. Положим $Y = |||\cdot||| - \operatorname{cl} T_{\alpha 0}E_\alpha$. Таким образом, отображение $B = T_{\alpha 0}$ осуществляет плотное вложение пространства E_α в Y. Проверим, что B не является изоморфизмом. Пусть $\varepsilon > 0$, $2^{-n+1} < \varepsilon/2$ и элемент $y \in S(E_\alpha)$ таков, что $\|T_{\alpha\gamma_n} y\| \leqslant \varepsilon \, (2 \times \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \|T_{\gamma_n\gamma_i}\|)^{-1}$ ($T_{\alpha\gamma_n}$ — не изоморфизм).

Имеем
$$|||By||| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i \|T_{\alpha\gamma_i}\|} \|T_{\alpha\gamma_i} y\| = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i \|T_{\alpha\gamma_i}\|} \|T_{\gamma_n\gamma_i} T_{\alpha\gamma_n} y\| +$$
$$+ \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^n \|T_{\alpha\gamma_i}\|} \|T_{\alpha\gamma_i} y\| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Проверка остальных свойств пространства Y не вызывает затруднений (например, в качестве вложений $B_\gamma : Y \to E_\gamma$ необходимо взять $T_{\gamma 0}^{-1}$).

Лемма доказана.

Замечание 1. Если семейство $\{E_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ состоит из сепарабельных пространств, то пространство Y также сепарабельно.

Лемма 2. *Пусть $\{z_i\}$ — нормированная базисная последовательность в сепарабельном банаховом пространстве E и $\varepsilon > 0$. Тогда существует сопряженная система $\{f_i\} \subset E^*$ такая, что подпространство $[f_i]_1^\infty$ — нормирующее и $\|f_i\| \leqslant 2Ci^{1+\varepsilon}$, $i = 1, 2, \ldots$, C — базисная постоянная базиса $\{z_i\}$.*

Доказательство. Обозначим через $q : [z_i]_1^\infty \to E$ естественное вложение подпространства $[z_i]_1^\infty$ в E, и пусть $F = [z_i^*]_1^\infty$ — подпространство, натянутое на сопряженную систему. Пользуясь нормируемостью F, нетрудно проверить, что $q^{*^{-1}}(F)$ — также нормирующее подпространство. Пусть $\{t_k\}_1^\infty w^*$ — плотное подмножество в открытом шаре $\mathring{U}(q^{*^{-1}}(F))$. Таким образом, каждый элемент $q^* t_k$ можно сколь угодно точно приблизить комбинацией вида $\sum_{i=1}^{m_k} a_i^k z_i^*$. Без ущерба общности можно считать, что последовательность номеров $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ обладает свойствами:

$$1)\ m_1 < m_2 < \ldots; \qquad 2)\ \left\| q^* t_k - \sum_{i=1}^{m_k} a_i^k z_i^* \right\| < \frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2, \ldots;$$

$$3)\ a_{m_k}^k = 1/m_k^{\varepsilon_2}, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

$$4)\ m_k^{1+\varepsilon} < m_{k+1}^{\varepsilon/2}, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

Пусть $h_k = q^* t_k - \sum_1^{m_k} a_i^k z_i^*$ и H_k — продолжение с сохранением нормы функционала h_k на все пространство E.

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_{m_1 - 1}$ — продолжения с сохранением нормы на E функционалов $z_1^*, \ldots, z_{m_1-1}^*$. Очевидно, $\|f_i\| \leqslant 2C$, $i = 1, \ldots, m_1 - 1$. Положим

$$f_{m_1} = \frac{1}{a_{m_1}^1}\left(t_1 - H_1 - \sum_{i=1}^{m_1-1} a_i^1 f_i\right)$$

и оценим $\|f_{m_1}\|$. Имеем

$$\|f_{m_1}\| \leqslant m_1^{\varepsilon/2}(1 + 1 + (m_1 - 1)\,2C) \leqslant 2Cm_1^{1+\varepsilon/2} \leqslant 2Cm_1^{1+\varepsilon}.$$

Далее пусть $f_{m_1+1}, \ldots, f_{m_2-1}$ — продолжения с сохранением нормы на E функционалов $z_{m_1+1}^*, \ldots, z_{m_2-1}^*$.

Положим
$$f_{m_2} = \frac{1}{a_{m_2}^2}\left(t_2 - H_2 - \sum_{i=1}^{m_2-1} a_i^2 f_i\right).$$

Тогда

$$\|f_{m_2}\| \leqslant m_2^{\varepsilon/2}\left(1+\frac{1}{2}+2Cm_1^{1+\varepsilon}+2C(m_2-2)\right) \leqslant$$

$$\leqslant m_2^{\varepsilon/2}\cdot 2Cm_1^{1+\varepsilon}m_2 \leqslant 2Cm_2^{\varepsilon/2}m_2^{1+\varepsilon/2} = 2Cm_2^{1+\varepsilon},$$

и так далее построим последовательность $\{f_i\}_1^\infty$, обладающую свойствами

$$\|f_i\| \leqslant 2Ci^{1+\varepsilon}, \qquad \left\|t_i - \sum_{j=1}^{m_i} a_j^i f_j\right\| < \frac{1}{i}, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots .$$

Легко видеть, что $[f_i]$ — нормирующее подпространство. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть V — абсолютно выпуклое ограниченное замкнутое и нетелесное подмножество банахового пространства E, $[V]=E$, $\{t_n\}$ — нормированная последовательность элементов E и $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность положительных чисел. Тогда существуют нормированная последовательность элементов $\{w_n\} \subset E$ и последовательность положительных чисел $\{\gamma_n\}$ такие, что $\|t_n - w_n\| < \varepsilon_n$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, $\operatorname{cl}\operatorname{co}\{\pm\gamma_n w_n\}_1^\infty \cap V = 0$.*

Доказательство. Пусть $L = \operatorname{lin} V$ — линейная оболочка множества V. Так как $L \neq E$ (V — не телесно), существует элемент $w_1 \in S(E)\setminus L$ такой, что $\|w_1 - t_1\| < \varepsilon_1$. Положим $L_1 = \operatorname{lin}\{w_1,\ L\}$. Снова $L_1 \neq E$ (противное противоречило бы $\operatorname{cl} L = E$ и $L \neq E$) и, значит, существует элемент $w_2 \in S(E)\setminus L_1$ такой, что $\|w_2 - t_2\| < \varepsilon_2$. Положим $L_2 = \operatorname{lin}\{w_1,\ w_2,\ L\}$ и так далее построим последовательность $\{w_m\}_1^\infty$. Легко видеть, что для всех $n=1,\ 2,\ \ldots$ $[w_m]_1^n \cap L = 0$. Для каждого $n=1,\ 2,\ \ldots$ рассмотрим функцию

$$r_n(\alpha) = \inf\{\|x-y\| : x \in \alpha S([w_m]_1^n),\ y \in V\},\ \alpha > 0.$$

Нетрудно проверить, что $r_n(\alpha)$ — строго возрастающая функция и, кроме того, $r_{n+1}(\alpha) \leqslant r_n(\alpha)$, $n=1,\ 2,\ \ldots$. Положим $\gamma_k = 2^{-k} r_k\left(\frac{1}{k}\right)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ и покажем, что $\operatorname{cl}\operatorname{co}\{\pm\gamma_k w_k\}_1^\infty \cap V = 0$. Прежде всего из приведенных свойств функций $r_n(\alpha)$ следует $\sum\limits_{n+1}^\infty \gamma_k < r_n\left(\frac{1}{n}\right)$, $n=1,\ 2,\ \ldots$. Пусть $y = \sum a_k\gamma_k w_k \in \operatorname{cl}\operatorname{co}\{\pm\gamma_k w_k\}_1^\infty$, $\sum |a_k| \leqslant 1$, $\|y\| = \alpha > 0$ и номер n таков, что $\alpha/2 \geqslant \|\sum\limits_1^n a_k\gamma_k w_k\|$, $\alpha/2 > 1/_n$.

Для каждого $z \in V$ получаем

$$\|y-z\| \geqslant \|\sum_1^n a_k\gamma_k w_k - z\| - \|\sum_{n+1}^\infty a_k\gamma_k w_k\| \geqslant$$

$$\geqslant r_n(\|\sum_1^n a_k\gamma_k w_k\|) - \sum_{n+1}^\infty \gamma_k \geqslant r_n(\alpha/_2) + r_n(1/_n) > 0,$$

откуда $y \notin V$. Лемма доказана.

Прежде чем переходить к теореме 1 напомним, что раствором двух подпространств E_1 и E_2 банахова пространства E называет число

$$\theta(E_1, E_2) = \max\{\sup\{d(x, E_1), x \in S(E_2)\}, \sup\{d(x, E_2), x \in S(E_1$$

Теорема 1. *Пусть X, Y, E — банаховы пространства, приче. Y и E сепарабельны и отображения $A: X \to E$ и $B: E \to Y$ — плотные вложения, не являющиеся изоморфизмами. Пусть далее подпространство $E_1 \subset E$ таково, что оператор $B/_{E_1}$ не является изоморфизмом и $E_1 + AX \neq E$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует подпространство $L \subset E$ такое, что*

$$L \cap AX = 0;$$
$$\mathrm{cl}\, BL = Y;$$
$$\theta(L, E_1) < \varepsilon.$$

Доказательство. Положим $V = \mathrm{cl\,co}\{AU(X) \cup U(E_1)\}$ и пусть последовательность $\{t_i\} \subset S(E)$ такова, что $\{Bt_i\}$ есть M-базис пространства Y (образ BE плотен в Y). Пусть далее последовательность $\{\varepsilon_i\}$ такова, что из неравенств $\| Bt_i - y_i \| < \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots$ следует, что $\{y_i\}$ — также M-базис Y. Применяя лемму 3, найдем последовательность $\{w_i\} \subset S(E)$ и числовую последовательность $\{\gamma_i\}$, $0 < \gamma_i < 2^{-i-2}$ такие, что $\| t_i - w_i \| < \varepsilon_i (2 \| B \|)^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots$ и $\mathrm{cl\,co}\{\pm \gamma_n w_n\}_1^\infty \cap V = 0$. Легко видеть, что последовательность $\{Bw_i\}$ — M-базис Y, откуда, в частности, следует, что последовательность $\{w_i\}$ минимальна.

Далее, пользуясь тем, что отображение $B/_{E_1}$ не изоморфизм, с помощью стандартных рассуждений выберем на сфере $S(E_1)$ базисную последовательность $\{z_i\}$ с базисной постоянной $C \leqslant 2$, обладающую свойством $\| Bz_i \| \leqslant 2^{-4} \varepsilon \varepsilon_i \gamma_i i^{-1-\varepsilon}$, $i = 1, 2, \ldots$. По лемме 2 найдем сопряженную систему $\{f_i\} \subset E_1^*$ такую, что подпространство $[f_i]$ — нормирующее и $\| f_i \| \leqslant 4 i^{1+\varepsilon}$, $i = 1, 2, \ldots$. Определим изоморфное вложение $T: E_1 \to E$ по формуле

$$Tx = x + \frac{\varepsilon}{8} \sum_{i=1}^{\infty} i^{-1-\varepsilon} \gamma_i f_i(x) w_i, \quad x \in E_1$$

и положим $L = TE_1$. Легко проверить, что $\theta(L, E_1) < \varepsilon$. Убедимся, что $L \cap AX = 0$. Пусть для некоторого элемента $x \in E_1$ $Tx \in AX$, тогда $Tx - x \in \mathrm{lin\,cl\,co}\{\pm \gamma_n w_n\}$, ($\mathrm{lin}\, D$ — линейная оболочка множества D), но $Tx - x \in \mathrm{lin}\, V$, значит $Tx - x = 0$, ($\mathrm{lin}\, V \cap \mathrm{lin\,cl\,co}\{\pm \gamma_n \times \times w_n\} = 0$). Откуда, пользуясь тотальностью системы $\{f_i\}$ и минимальностью системы $\{w_i\}$, делаем вывод $x = 0$. Докажем, что $\mathrm{cl}\, BL = Y$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\left\| B\left(\frac{8 i^{1+\varepsilon}}{\varepsilon \gamma_i} Tz_i\right) - Bt_i \right\| \leqslant \frac{8 i^{1+\varepsilon}}{\varepsilon \gamma_i} \left(\| Bz_i \| + \frac{\varepsilon \gamma_i}{8 i^{1+\varepsilon}} \| B \| \| w_i - t_i \| \right) < \varepsilon_i,$$

отсюда, учитывая выбор последовательности $\{\varepsilon_i\}$, получаем, что $\{BTz_i\}$ — M-базис пространства Y, что и завершает доказательство равенства $\mathrm{cl}\, BL = Y$. Теорема доказана.

Замечание 2. Подпространство E_1 с требуемыми в теореме 1 свойствами можно построить с помощью рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 1. Именно, возьмем в качестве $V = \mathrm{cl}\, AU(X)$, а в качестве E_1 любое собственное бесконечномерное подпространство пространства $T[z_i]_1^\infty$.

Замечание 3. Свойство $L \cap AX = 0$ равносильно $w^* - \mathrm{cl}\, A^* L^\perp = X^*$.

Замечание 4. Последовательность $\{Tz_i\}$ является базисной.

Теорема 2. *Пусть $\{E_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ — семейство вложенных сепарабельных банаховых пространств. Тогда для каждого $\alpha \in [0, 1]$ в пространстве E_α существует подпространство G_α с базисом $\{g_i\}$ такое, что*

1) $G_\alpha \cap \bigcup\limits_{\beta>\alpha} T_{\beta\alpha} E_\beta = 0$;

2) для всех $\gamma < \alpha$ система $\{T_{\alpha\gamma} g_i\}_{i=1}^\infty$ есть M-базис пространства E_γ; в частности, образ $T_{\alpha\gamma} G_\alpha$ плотен в пространстве E_γ.

Доказательство. Воспользуемся леммой 1 и пусть X и Y — пространства, о которых в ней идет речь, причем Y сепарабельно (замечание 1). Будем пользоваться обозначениями леммы 1. Выберем в пространстве Y M-базис $\{x_i\}$ с сопряженной системой $\{x_i^*\} \subset B_0^* E_0^*$ и пусть последовательность $\{\delta_i\}$, $\delta_i > 0$ удовлетворяет требованию $\sum \delta_i (\| B_0^{*^{-1}} x_i^* \| + \| x_i^* \|) < 1$. Легко видеть, что для всех $\gamma < \alpha$ $\{B_\gamma x_i\}_{i=1}^\infty$ — M-базис пространства E_γ и по теореме Крейна—Мильмана—Рутмана об устойчивости M-базиса из неравенства $\| \bar{x}_i - x_i \| < \delta_i (\| B_0 \| + 1)^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots$ следует, что $\{\bar{x}_i\}$ — M-базис Y, а $\{B_0 \bar{x}_i\}$ — M-базис E_0. Откуда нетрудно получить, что $\{B_\gamma \bar{x}_i\}$ — M-базис E_γ, $\gamma < \alpha$.

Теперь для завершения доказательства теоремы 2 достаточно применить рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, выбрав $t_i \in S(E_\alpha)$ так, чтобы

$$\| Bt_i - x_i \| \leqslant \delta_i / 2(\| B_0 \| + 1), \qquad \varepsilon_i < \delta_i / 2(\| B_0 \| + 1), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Список литературы: 1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М., 1978. С. 400. 2. *Пличко А. Н.* Выбор в банаховом пространстве подпространств со специальными свойствами и некоторые свойства квазидополнений//Функцион. анализ и его прил. 1981. 15, №2. С. 88—89. 3. *Шевчик В. В.* О подпространствах в паре банаховых пространств//Мат. заметки. 1985. 38, №4. С. 545—553. 4. *Shevchik V. V.* On subspaces of a Banach space that coincide with the ranges of continuous linear operators//Rev. Roumaine de math. pures e. a. 1986. XXXI, №1. P. 65—71.

Поступила в редколлегию 05.07.89