

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Розв'язання задач виробничої практики і підготовка звітної документації

Навчально-методичний посібник

Електронний ресурс

Харків – 2023

УДК: 519.6
Р 64

Рецензенти:

Ю. В. Ромашов — д.тех.н., професор кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та мехатроніки Харківського національного технічного університету радіоелектроніки;

О. М. Дацок — к.тех.н., доцент кафедри біомедичної інженерії Харківського національного технічного університету радіоелектроніки.

*Затверджено до розміщення в мережі Інтернет
рішенням Науково-методичної ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 2 від 17 листопада 2022 року)*

Розв'язання задач виробничої практики і підготовка звітної документації : навчально-методичний посібник / уклад. Н. М. Кізілова. — Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. — 136 с.

У посібнику сформульовані цілі виробничої практики студентів-магістрів. Наведені приклади типових задач для розв'язання (за вибором студента) протягом проходження виробничої практики, а саме: задачі дослідження систем звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь в часткових похідних, обробки і візуалізації «великих даних» (Big Data) у вигляді часових рядів, аналіз графічної інформації, розв'язання сучасних прикладних задач механіки рідин, аналіз біологічної, екологічної та медичної інформації. Обговорюються питання підготовки звіту і презентації з виробничої практики, а також підготовки наукової публікації за темою практики у вигляді тез доповідей конференції або статті у науковому журналі.

Для студентів другого (магістерського) рівня вищої освіти зі спеціальності «Прикладна математика».

УДК 519.6

© Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 2023
© Кізілова Н. М., уклад., 2023
© Дончик І. М., макет обкладинки, 2023

ЗМІСТ

Вступ. Спеціальність «Прикладна математика»	5
1. Цілі і задачі виробничої практики	7
2. Розв'язання і аналіз властивостей систем ЗДР	9
2.1. Сучасні дослідження динаміки епідемій	10
Завдання 1	15
Завдання 2	15
Завдання 3	16
Завдання 4	17
Приклад виконання завдання	18
2.2. Дослідження реологічних моделей	20
2.2.1. В'язкопружні тверді матеріали	20
2.2.2. В'язкопружні рідкі матеріали	24
2.2.3. Ідентифікація реологічних параметрів моделей	26
Приклади завдань виробничої практики з реології	27
3. Розв'язання і аналіз властивостей систем ДРЧП	28
Завдання 5	32
Завдання 6	33
Завдання 7	34
Завдання 8	35
Завдання 9	36
Завдання 10	36
Завдання 11	37
4. Статистичний аналіз даних з відкритих джерел	37
4.1. Медична інформація	38
4.1.1. Обробка даних захворюваності на Covid-19 у вигляді часових рядів	38
Приклади завдань для статистичних досліджень	40
Приклад результатів кореляційного аналізу	41
Приклад результатів спектрального аналізу	44
Приклад результатів кластерного аналізу	49
4.1.2. Аналіз даних і математичне моделювання системи кровообігу людини	50
Завдання 12. Аналіз реограм	51
Завдання 13. Аналіз гемодинаміки коронарних артерій	55
4.1.3. Аналіз даних і математичне моделювання опорно-рухової системи людини	57
4.2. Біологічна інформація	64
4.3. Екологічна інформація	68
Завдання 14	69
Завдання 15	70

Завдання 16.....	71
Завдання 17.....	72
Приклад виконання завдання	73
5. Аналіз зображень	76
Завдання 18.....	79
Завдання 19.....	79
Завдання 20.....	80
Приклад виконання завдання	80
6. Візуалізація складних геометричних і механічних структур.....	85
Завдання 21.....	85
Завдання 22.....	87
Завдання 23.....	88
Приклад виконання завдання	89
7. Розв'язання задач обтікання аеродинамічних форм з використанням пакету AnSys Fluent.....	90
Завдання 24.....	92
Завдання 25.....	92
Завдання 26.....	92
Завдання 27.....	92
Завдання 28.....	92
Приклад виконання завдання	92
8. Підготовка матеріалів за результатами практики	94
8.1. Звіт	94
8.2. Презентація	97
8.3. Матеріали конференції	97
8.4. Наукова публікація	97
8.5. Щоденник практики	99
Перелік посилань	100
Додатки.....	103
Додаток А. Звіт (приклад).....	103
Додаток Б. Презентація (приклад)	113
Додаток В. Матеріали конференції (приклад)	123
Додаток Г. Стаття в науковому журналі (приклад).....	125
Додаток Д. Щоденник практики (приклад).....	132

Вступ. Спеціальність «Прикладна математика»

Прикладна математика – це розділ природничих наук, який займається розв’язанням задач фізики, техніки, інформатики, біології, медицини, екології, соціології, економіки, фінансової системи, промисловості та бізнесу із застосуванням математичних моделей і методів. Таким чином, прикладна математика є поєднанням математики, статистики і спеціальних знань з будь-яких галузей науки [1]. Потреби у розв’язанні прикладних задач часто приводили до розвитку відповідних математичних теорій, які потім ставали окремими напрямками математичної теорії.

Історично прикладна математика складалася з прикладного аналізу, особливо диференціальних рівнянь, з теорії наближень (асимптотичні методи, варіаційне обчислення і чисельний аналіз), і з теорії ймовірностей. Виникнення і становлення прикладної математики було пов’язане з розвитком ньютонівської механіки і фізики, так що фактично до середини XIX ст. існували єдині фізико-математичні науки. В багатьох країнах і в XX ст. теоретична механіка і механіка рідини викладалася на математичних факультетах університетів у рамках спеціальності «Прикладна математика», а не на фізичних факультетах.

У сучасному розумінні термін «Прикладна математика» означає не тільки застосування математичних моделей і підходів у будь-яких галузях науки і виробництва, але й розвинення самої математики у зв’язку з необхідністю розглядати нову прикладну задачу. Так, вивчення закономірностей динаміки чисельності тварин у популяціях, які взаємодіють в природі, призвело до розробки моделі «хижак – жертва» Лоткі-Вольтерри. Використання і доробка цієї моделі для моделювання взаємодії організмів з бактеріями або вірусами привело до виникнення **математичної епідеміології**, яка вивчає поширення захворювань і епідемій з можливістю контролю за цими процесами [2, 3]. Медики і біологи, які використовують ці моделі, застосовують математику для дослідження своїх проблем, але в процесі використання математичних моделей вони знаходять нові підходи і ставлять питання, які потім стимулюють розвиток «чистої математики».

Так, використання теорії чисел привело до розвинення сучасної **криптографії**. Відомий аттрактор Лоренца, який є реальним фізичним прикладом динамічної системи з хаотичною поведінкою, був досліджений на системі трьох звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), яка відповідає фізичному процесу конвекції у плоскому шарі рідини та деяким іншим фізичним процесам. Отримані результати привели до швидкого розвинення **теорії хаосу, теорії стійкості і керування** в системах ЗДР, **теорії фракталів, комп’ютерної графіки** та ін.

Важлива задача про оптимізацію розкрою листа матеріалу на виробництві (тобто про мінімізацію відходів / обрізків тканини, паперу, деревини, металу та ін.) була сформульована і досліджена відомим математиком

і економістом Л.В. Канторовичем.¹ У 1938 р. він консультував фанерний трест щодо проблеми мінімізації відходів деревини і зрозумів, що загальна математична задача зводиться до максимізації лінійної форми багатьох змінних за наявності великої кількості обмежень у формі лінійних рівностей та нерівностей. Для її розв'язання він модифікував метод множників Лагранжа і показав, що до подібних задач зводиться велика кількість проблем економіки. Розроблений метод був покладений в основу **лінійного програмування** – розділу математики, якій присвячений теорії та методам розв'язання екстремальних задач на множинах n -мірного векторного простору, який задається системами лінійних рівнянь і нерівностей.

Використання існуючих математичних методів і розробка нових, які пов'язані із задачами промисловості, іноді називають **«промисловою математикою»** (industrial mathematics). Теми досліджень цього розділу прикладної математики включають нелінійні реакційно-дифузійні хвилі, хаос і гістерезис, течії тонких плівок рідини, динаміку пучків трубопроводів, теплообмінники, моделювання рідкокристалічного дисплею, потоки рідини в пористих середовищах, мікрогравітаційну гідродинаміку, ядерне кипіння, та багато інших², які потребують складних математичних методів і нових підходів. У кожному випадку конкретна прикладна задача зводиться до відповідної математичної моделі у вигляді систем алгебраїчних, дискретних, ЗДР, диференціальних рівнянь у часткових похідних (ДРЧП), інтегральних рівнянь або синтетичних моделей будь-якої складності.

Відомий американський математик Джон Неш розвинув моделі математичної **теорії ігор** у застосуванні до процесів в економіці, і отримав у 1994 р. Нобелівську премію «за дослідження рівноваги в теорії некооперативних ігор». Зараз нові математичні напрямки теорії ігор, **теорії соціального вибору** та ін. широко використовуються в економіці. Математичне моделювання процесів і розглядання економіки як динамічної системи лежить в основі нової дисципліни **економічної кібернетики**. Крім того, з'явилися такі напрямки, як **фінансова математика**, **актуарна математика**, наука про дані (**big data analysis**), **біологічна інформатика** та багато інших.

Актуарна математика застосовує теорію ймовірностей, математичну статистику та економічну теорію для оцінки ризику в страхуванні, фінансах, на ринку, у промисловості тощо. Наприклад, розрахунки тарифних ставок страхування на основі методів математичної статистики застосовуються у всіх видах страхування (страхування життя, нерухомості, пенсійне і медичне страхування). Вони засновані на використанні закону великих

¹ Канторович Л. В., Залгаллер В. А. Рациональный раскрой промышленных материалов. Москва : Машиностроение, 1971.

² Industrial Mathematics. URL: <https://ijim.srbiau.ac.ir/>

чисел і відображають у вигляді математичних формул механізм утворення і витрачання страхового фонду.

Класична **фінансова математика** розглядає проведення процентних розрахунків; питання, пов'язані з різними борговими інструментами: векселями, депозитними сертифікатами, облігаціями; аналіз потоків платежів, який застосовується в банківській справі, кредитуванні, інвестуванні тощо. Стохастична фінансова математика включає розрахунки безарбітражної (або «справедливої») ціни фінансових інструментів. Таким чином, ці складні дослідження використовують достатньо складні математичні методи і моделі.

Успіх сучасних чисельних математичних методів і програмного забезпечення привів до появи **обчислювальної математики**, обчислювальної техніки і **інформаційних технологій**, які використовують високопродуктивні комп'ютерні обчислення. Поява комп'ютерів уможливила нові напрямки: вивчення та використання найновіших комп'ютерних технологій (інформатика) для вивчення різних міждисциплінарних задач (комп'ютерні науки), а також математику обчислень (теоретична інформатика, комп'ютерна алгебра, чисельний аналіз, математична логіка, дискретна математика, теорія графів, комбінаторика). Найпоширенішою математичною наукою залишається **математична статистика**, яка використовується в економіці, екології, географічних і соціальних науках, медицині і біології, геноміці і протеоміці [1] та ін., де є масиви будь-яких даних. Статистики не тільки вивчають закономірності в структурах даних, але й вдосконалюють самі статистичні процедури, розв'язують задачі класифікації (кластерний аналіз), оптимізації і прийняття рішень.

1. Цілі і задачі виробничої практики

Таким чином, спеціальність «Прикладна математика» передбачає уміння і навички у вигляді теоретичної і практичної підготовки для розв'язання прикладних задач, які можуть бути пов'язані з будь-якою галуззю науки, промисловості або суспільства, за допомогою моделей і методів різних областей сучасної математики, а саме:

- математичного аналізу;
- алгебри;
- аналітичної і диференціальної геометрії;
- теорії диференціальних рівнянь і керування;
- теорії імовірності і математичної статистики;
- теорії випадкових процесів;
- варіаційного числення і методів оптимізації;
- теорії чисел;
- теорії ігор;
- чисельних методів;
- інформатики і програмування.

Ступінь підготованості студента спеціальності «Прикладна математика» до розв'язання прикладних задач перевіряється протягом **виробничої практики**. Це є практична частина навчального процесу підготовки кваліфікованих робітників та фахівців, яка проходить на різних підприємствах в умовах реального виробництва або у навчальному закладі для розв'язання задач з різних галузей науки. Під час виробничої практики відбувається закріплення та конкретизація результатів теоретичного навчання, опанування різними загальними і спеціальними курсами, набуття студентами умінь та навичок практичної роботи зі спеціальності. Результати виконання виробничої практики підсумовуються у вигляді звіту та доповідаються на спеціальному семінарі кафедри, а також на наукових конференціях для студентів, докторантів і молодих фахівців. За результатами звіту студенти отримують оцінки заліку з виробничої практики.

Особливість прикладної математики, яка розглядає задачі з різних напрямків, а також з так званих міждисциплінарних наук (біомеханіка, біофізика, нанотехнології, медична фізика, економічна кібернетика та ін.), дозволяє студенту обрати задачу виробничої практики з тієї області, яка найбільш цікавить або в якій планує в подальшому працювати. Для виконання задач практики може використовуватися різний інструментарій, наприклад, відомі студенту підходи теорії диференціальних рівнянь, геометрії і топології, статистичний аналіз даних у вигляді часових рядів і т.д. Крім того, можуть рекомендуватися для використання нові підходи, такі як штучний інтелект, аналіз графічної інформації, аналіз геному, вейвлет-аналіз та інші, які студент може опанувати протягом виконання практики і використати в своїй подальшій професійній роботі.

Нижче наведені задачі, які були запропоновані студентам другого курсу другого (магістерського) рівня вищої освіти зі спеціальності «Прикладна математика» для виконання протягом виробничої практики в 2018–2021 роках. Кожна з наведених тем має різні аспекти і можливість використати різні методи і підходи до розв'язання і дослідження. Наприклад, наявність відкритих баз даних інформації (open source database) дозволяє провести статистичний аналіз даних і отримати закономірності у вигляді регресійних співвідношень між вимірюваними параметрами. Отримані залежності можуть бути покладені в основу математичної моделі у вигляді систем алгебраїчних рівнянь або ЗДР. Студенти, які прагнуть вдосконалити свої знання і уміння в галузі математичної статистики та опанувати нові методи, можуть обрати як задачу практики статистичний аналіз і цікавий для них тип даних (економічні, фінансові, біологічні, медичні, астрономічні, екологічні, геолого-географічні та ін. дані). Формалізація змісту задачі дозволяє використати раніше запропоновані математичні моделі або удосконалити їх з урахуванням типу даних і отримати розв'язок в аналітичному вигляді, як розкладень (ряди Фур'є, Тейлора та ін.) або з використанням чисельних методів. Найбільш популярними останнім

часом є використання таких високорівневих мов програмування загального призначення, як Python, R, системи комп'ютерної алгебри Maxima, Maple, Mathematics і MathCAD для математичних розрахунків.

Таким чином, задачі виробничої практики, сформульовані в такий спосіб, що дозволяє різнобічно дослідити проблему за допомогою різних методів, наприклад, статистичний аналіз даних, на основі якого проводиться математична постановка проблеми, розв'язання відповідної системи рівнянь або / та нерівностей, задачі оптимізації або керування, провести чисельні розрахунки, аналіз властивостей розв'язку, його стійкості, керованості тощо та виведення отриманих результатів у графічній формі за допомогою сучасних пакетів комп'ютерної графіки. Виконання цієї роботи часто потребує співпраці кількох студентів (2-4 особи), а в результаті можна отримати закінчене наукове дослідження поставленої проблеми. Протягом останніх років така співпраця студентів з керівником практики і викладачами кафедри приводила до публікації отриманих результатів у вигляді статей в фахових журналах і матеріалах наукових конференцій [2-19]. Нижче наведені приклади задач для виробничої практики з прикладної математики та різних методів їх розв'язання.

2. Розв'язання і аналіз властивостей розв'язків систем ЗДР

Задачі прикладної математики часто розглядаються як динамічні системи, тобто як системи рівнянь, які описують координати та властивості точок системи в навколишньому просторі як функції часу. Наприклад, коливання і стійкість руху маятника, течії рідини в системах труб, утворення і рух частинок води або льоду в повітрі, маса врожаю на полях або кількість риби в морях, річках та озерах, переніс забруднень у повітрі, воді та ґрунті, чисельність населення і т.д. Час може бути дискретним (щодобова кількість хворих під час епідемії) або безперервним (фізичний процес, який спостерігається шляхом спеціальних вимірювань). У будь-який момент часу динамічна система має стан, що представляє точку у відповідному просторі станів. Цей стан може задаватися набором дійсних чисел або вектором у геометричному просторі. Розв'язок відповідної системи рівнянь дає набір функцій, які описують можливі майбутні стани динамічної системи, які дозволені її поточним станом, тобто початковими умовами. Еволюція динамічної системи може бути детермінованою функцією, тобто для заданого інтервалу часу лише один майбутній стан впливає з початкового або стохастичною, оскільки випадкові події також впливають на зміну стану. Як відомо з теорії хаосу, під час еволюції таких систем можливі «точки біфуркації», в яких еволюція може піти одним з кількох можливих шляхів. Такі процеси вивчають в теорії біфуркацій, динаміці логістичних карт, теорій самоорганізації та ін. У фізиці динамічна система розглядається як ансамбль частинок, координати і властивості

яких змінюються з часом. Осереднені в просторі параметри такого ансамблю (тиск, температура, густина) теж описуються системами ЗДР і розглядаються як динамічні системи.

2.1. Сучасні дослідження динаміки епідемій

В грудні 2019 р. з території Китаю почалася пандемія коронавірусу COVID-19, яка на початок грудня 2020 р. охопила 220 країн і регіонів з майже 70 млн хворих, 1.5 млн померлих та 50 млн тих, хто одужав. Протягом 2020–2021 рр. в багатьох країнах були введені обмеження соціальних контактів, вакцинація та інші заходи. Дослідники всього світу вивчали закономірності поширення пандемії, можливості лікування хворих і стабілізації ситуації. В тому числі, були вдосконалені існуючі математичні моделі динаміки вірусних захворювань і розроблені нові, які враховували особливості COVID-19. Враховуючи важливість теми, задачі математичної епідеміології були запропоновані студентам як задачі виробничої практики [2, 3].

Сучасні моделі математичної епідеміології мають достатньо довгу і цікаву історію.

1760–1766 рр. – відомий математик і механік Д. Бернуллі досліджував можливість збільшення тривалості життя шляхом усунення віспи, яка на той час була однією з головних причин смерті. Він проаналізував динаміку кривих $I(t)$ чисельності хворих (I , infected) з часом.

1798 р. – Томас Мальтус розробив модель необмеженого експоненціального зростання чисельності населення $N(t)$ (мальтузіанська демографічна модель):

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = kN \\ N(0) = N_0 \end{cases} \Rightarrow N(t) = N_0 e^{kt}. \quad (1)$$

1838 р. – П.-Ф. Ферхюльст запропонував логістичну криву динаміки зростання чисельності бактерій в популяції, коли швидкість розмноження пропорційна як наявній чисельності популяції (як в моделі (1)), так і кількості доступних ресурсів:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = kN - rN^2 \\ N(0) = N_0 \end{cases} \Rightarrow N(t) = \frac{N_0 k e^{kt}}{k + rN_0(e^{kt} - 1)}, \quad (2)$$

де $r = \text{const}$. Ця модель описує так звану динаміку S-типу зі швидким зростанням чисельності популяції, яке потім уповільнюється та виходить до верхньої асимптоти $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = k / r$.

1870-ті рр. – Р. Кох і Л. Пастер підтвердили, що інфекційні захворювання спричиняються мікроорганізмами. Такі захворювання вивчали на кривих захворюваності $I(t)$ і смертності $D(t)$ (D , death).

1900-ті рр. – Дж. Сноу висунув гіпотезу про те, що епідемії припиняються, коли зменшується чисельність сприйнятливих осіб $S(t)$ (S , sensible), яких він назвав «епідемічним паливом».

1906 р. – Вільям Хамер визначив дворічний період для спалахів епідемій у великих містах і пояснив динаміку епідемії кору за допомогою гіпотези Сноу.

1911 р. – епідеміолог А. Маккендрік заново відкрив логістичну модель Ферхюльста (2) для росту бактерій і чисельно оцінив нелінійний параметр r для деяких популяцій бактерій.

1916 р. – лікар Р. Росс застосував теорію ймовірностей до передачі інфекції від хворих осіб $I(t)$ до сприйнятливих $S(t)$.

1925 р. – А. Лотка заново відкрив логістичне рівняння (2) і назвав його законом зростання населення

1926 р. – В. Вольтерра сформулював математичну модель динаміки чисельності двох видів тварин – жертви і хижака.

Результати досліджень Лотки і Вольтерри відомі як модель хижак – жертва з чисельностями $y(t)$ і $x(t)$ у вигляді системи двох ЗДР

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy, & \frac{dy}{dt} &= cxy - dy, \\ x(0) &= x_0, & y(0) &= y_0,\end{aligned}\tag{3}$$

де a – швидкість народження жертв, b – ймовірність зустрічі і поїдання жертви хижак, c – коефіцієнт переходу маси жертв в масу народжених хижаків, d – смертність хижаків.

1927 р. – А. Маккендрік³ застосував статистичну фізику та закон масової дії хімічних реакцій для опису передачі інфекції в результаті соціальних контактів між інфікованими (I) та здоровими сприйнятливими (S) особами. Він висунув гіпотезу, що популяція поводить себе як сукупність «частинок» різних типів, які випадково рухаються в середовищі, де кожне «зіткнення» між частинками з груп S і I має рівномірну ймовірність того, що частинка S -типу перетвориться на I -типу. Він вивів першу систему ЗДР для динаміки $S(t)$, $I(t)$ і тих, хто вибув із групи захворілих – одужали ($R(t)$, recovered) або вмерли ($D(t)$, dead) від хвороби) $z(t)=R(t)+D(t)$

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -aSI, & \frac{dI}{dt} &= aSI - bI, & \frac{dz}{dt} &= bI, \\ S(0) &= S_0, & I(0) &= I_0, & z(0) &= z_0,\end{aligned}\tag{4}$$

де a і b – коефіцієнти захворюваності і одужання.

Якщо поділити перше і третє рівняння (4), можна отримати рівняння для складної функції $S(R)$, яке легко інтегрується. Після підстановки

³ Kermack M., McKendrick A. Contributions to the mathematical theory of epidemics. Part I, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 1927. V.115 (5). P. 700–721.

результату в друге рівняння (4), отримаємо ЗДР для функції $I(R)$. Маккендрік отримав розв'язок (4) у вигляді (перевірте!)

$$z(t) = \frac{b^2}{a^2 S_0} \left(\frac{a}{b} S_0 - 1 + \sqrt{Q} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{Q}}{2} at - \phi \right) \right), \quad (5)$$

де $\phi = \operatorname{arcth}((aS_0/b - 1)/\sqrt{Q})$, $Q = (aS_0/b - 1)^2 + 2S_0 I_0 a^2/b^2$.

Розв'язок (5) показав добру відповідність кривим захворюваності та одужання від віспи (Д. Бернуллі) та низки інших епідемій (рис. 1а).

1959 р. – англійський ботанік Річардсон запропонував узагальнену криву зростання в живій природі (рослини, бактерії і т.д.) у вигляді

$$I(t) = a + \frac{c - a}{(C + Q \exp(-b(t - t_0)))^{1/d}}, \quad (6)$$

де a і c – нижня (ліва) і верхня (права) асимптоти (рис. 1б), b – швидкість зростання, d відповідає за момент найшвидшого зростання, $C=1$ найчастіше, Q є функцією $I(t_0)$.

На основі кривої Річардсона була запропонована замість (2) узагальнена логістична модель

$$\frac{dI}{dt} = aI \left(1 - \left(\frac{I}{c} \right)^b \right), \quad I(t_0) = I_0, \quad (7)$$

розв'язок якої $I(t) = c \left(1 + ((c/I_0)^b - 1) \exp(-ab(t - t_0)) \right)^{-1/b}$ описує криві зростання тіл тварин, біомаси риб, рослин і бактерій, а також динаміки онкологічних і вірусних захворювань, епідемій і пандемії COVID-19. В останні десятиріччя чимало зусиль було прикладене в дослідженнях нових загроз пандемії: 2000 р. – черевний тиф, 2002 р. – SARS, 2005 р. – пташиний грип, 2009 р. – свинячий грип, 2010 р. – лихоманка Західного Нілу, 2012 р. – MERS, 2014 р. – лихоманка Ебола, 2015 р. – лихоманка Зика, 2016 р. – сибірська виразка, 2019 р. – кір.

Основою моделі динаміки COVID-19 є модель (4), в якій також враховуються народження та природна смертність, оскільки пандемія триває достатньо довго і на результат впливають природні процеси. Крім того, особи, які одужали, можуть захворіти повторно, так що можливий ланцюг переходів $S \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S$ (SIRS модель) з рівняннями

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \lambda - \beta SI - \mu S + \delta R, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I - (\mu + \phi)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - (\mu + \delta)R, \end{aligned} \quad (8)$$

де λ – швидкість зростання популяції, β – швидкість інфікування, ϕ – смертність від хвороби, μ – смертність від інших причин, які беруться для кожної області / регіону / країни з демографічних таблиць 2019 р. (до епідемії), γ і δ – швидкості одужання та ослаблення імунітету, які залежать від типу вірусу (дельта, омікрон і т.д.).

Замість лінійної моделі зростання популяції іноді використовується модель Мальтуса, в якій перше ЗДР (8) має вигляд

$$\frac{dS}{dt} = (\lambda - \mu)S - \beta SI + \delta R. \quad (9)$$

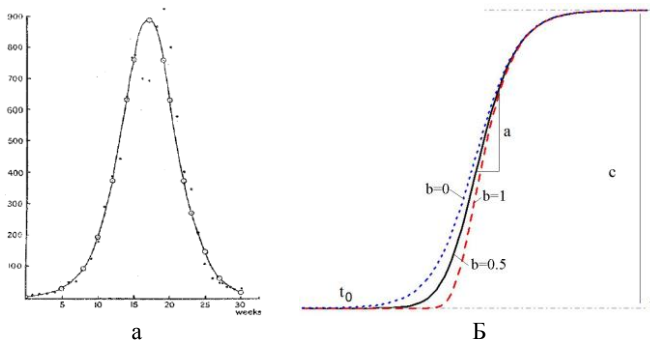


Рис. 1. Розв'язок моделі Маккендрика порівняно з даними вимірювань (а) і криві узагальненої логістичної моделі (б) при деяких параметрах

Для моделей (2) – (9) досліджуються розв'язки, стаціонарні точки, стійкість стаціонарних точок та можливості керування динамікою системи. Наприклад, модель (3) має стаціонарну точку $x^0 = d/c$, $y^0 = a/b$. Дослідження стійкості системи навколо цієї точки проводиться шляхом аналізу розв'язку у вигляді

$$x(t) = x^0 + x'(t), \quad y(t) = y^0 + y'(t), \quad (10)$$

де $x'(t) = A_x \exp(i\omega t)$, $y'(t) = A_y \exp(i(\omega t - \varphi)) = A_y \exp(i\omega(t - \tau))$, ω – частота коливань, $T = 2\pi/\omega$ – період коливань, φ – зсув фаз між коливаннями $x(t)$ і $y(t)$, $\tau = \varphi/\omega$ – час запізнення між піками коливань.

Лінеаризована система (3) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x'(t) &= ax'(t) - b(x^0 y'(t) + y^0 x'(t)), \\ \frac{d}{dt} y'(t) &= c(x^0 y'(t) + y^0 x'(t)) - dy'(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Підстановка (10) в (11) дає умову існування розв'язку (детермінант матриці коефіцієнтів при A_x і A_y дорівнює нулю) у вигляді $\omega = \sqrt{ad}$

(перевірте!), а також залежність $A_y = A_x e^{i\varphi} i\omega c / bd$, так що розв'язок лінеаризованої системи (11) є

$$x(t) = \frac{d}{c} + A_x e^{i\omega t}, \quad y(t) = \frac{a}{b} + A_x \frac{i\omega c}{bd} e^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (12)$$

Підстановка (12) до (11) з урахуванням початкових умов дає розв'язок

$$x(t) = \frac{d}{c} + \left(x_0 - \frac{d}{c}\right) e^{i\sqrt{ad}t}, \quad y(t) = \frac{a}{b} + \left(x_0 - \frac{d}{c}\right) \frac{i\omega c}{bd} e^{i(\sqrt{ad}t + \pi/2)}. \quad (13)$$

Оскільки коефіцієнт при i в (13) – чисто мнима величина, фазовий портрет системи (3) – цикл (Рис.2а), який описує коливання чисельності популяцій з часом (Рис.2б) зі зсувом фаз φ (10), (13).

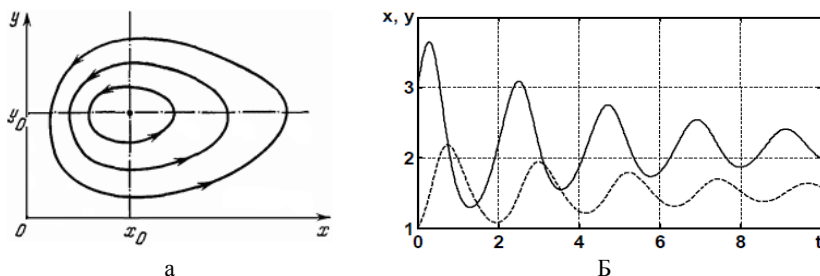


Рис. 2. Фазовий портрет (а) і динамічні криві (б) моделі Лоткі-Вольтерра

Було показано, що важливим індексом епідемічної загрози є базова репродуктивна швидкість (basic reproduction number, BRN) інфекції \mathfrak{R}_0 , який визначається як очікувана кількість випадків вторинного зараження, спричиненого одним типовим інфекційним випадком протягом усього періоду зараженості. У великій однорідній популяції \mathfrak{R}_0 – це пороговий параметр, який визначає, чи епідемія зростає, чи спадає. З точки зору математичного моделювання \mathfrak{R}_0 – це експоненціальний фактор зростання числа інфікованих відносно групи S

$$I(S) \sim \mathfrak{R}_0^{-1} \log(S / S_0), \quad (14)$$

де $S_0 = S(0)$. В моделі (4) $\mathfrak{R}_0 = a / b$.

В розвинених країнах значення \mathfrak{R}_0 щодобово розраховуються для кожного регіону як показник в експоненціальній апроксимації поточної частини часового ряду $I(t)$, оприлюднюються та використовуються для прийняття рішень. Так, в Італії протягом піка другої хвилі пандемії $\mathfrak{R}_0 > 2.6$, а на початок грудня 2020 р. знизився до $\mathfrak{R}_0 = 0.61-1.06$; для порівняння, протягом пандемічного грипу 1918 р. в Іспанії $\mathfrak{R}_0 \sim 2$. За критичні значення для введення локдауну з жорсткими обмеженнями приймають $\mathfrak{R}_0 = 1.5-2$ залежно від рівня заповнення лікарень.

Нижче наведені приклади задач виробничої практики для моделі SIRS ті її модифікацій, які були запропоновані в 2020–2021 роках.

Завдання 1. Система (8) має дві стаціонарні точки. Перша відповідає відсутності епідемії: $\{S^{00}, I^{00}, R^{00}\} = \left\{ \frac{\lambda}{\alpha}, 0, 0 \right\}$, а друга – постійному числу хворих і одужалих

$$S^0 = \frac{(\alpha + \gamma + \phi)}{\beta}, I^0 = \frac{(\alpha + \delta)(\alpha(\alpha + \gamma + \phi) - \beta\lambda)}{\gamma\delta\beta}, R^0 = \frac{\gamma I^0}{(\alpha + \delta)}. \quad (15)$$

Розглянемо розв'язок (8) у вигляді (10)

$$\begin{aligned} S(t) &= S^{00} + S^t(t), \quad S^t(t) = A_s \exp(i\omega t), \\ I(t) &= I^{00} + I^t(t), \quad I^t(t) = A_I \exp(i(\omega t - \varphi_I)), \\ R(t) &= R^{00} + R^t(t), \quad R^t(t) = A_R \exp(i(\omega t - \varphi_R)). \end{aligned} \quad (16)$$

Лінеаризована система (8) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dS^t}{dt} &= \lambda - \beta(S^{00}I^t + S^tI^{00}) + \delta R^t - \alpha S^t, \\ \frac{dI^t}{dt} &= \beta(S^{00}I^t + S^tI^{00}) - \gamma I^t - (\alpha + \phi)I^t, \\ \frac{dR^t}{dt} &= \gamma I^t - (\alpha + \delta)R^t. \end{aligned} \quad (17)$$

Треба отримати розв'язок (17) у вигляді (16) і знайти вирази для ω , коефіцієнтів $A_{S,I,R}$ і $B_{S,I,R}$. Провести ті ж самі розрахунки для другої стаціонарної точки $\{S^0, I^0, R^0\}$ (15) замість $\{S^{00}, I^{00}, R^{00}\}$. Отримати умови на коефіцієнти моделі, при яких можуть мати місце різні типи фазових портретів системи

$$\begin{aligned} A_s(i\omega + \beta I^{00} + \alpha) + \beta S^{00} A_I e^{i\varphi_I} - \delta A_R e^{i\varphi_R} &= 0, \\ A_I i\omega e^{i\varphi_I} \beta (S^{00} A_I e^{i\varphi_I} + A_s I^{00}) - \gamma A_I e^{i\varphi_I} - (\alpha + \phi) A_I e^{i\varphi_I}, \\ A_R i\omega e^{i\varphi_R} &= \gamma A_I e^{i\varphi_I} - (\alpha + \delta) A_R e^{i\varphi_R}. \end{aligned} \quad (18)$$

Завдання 2. В модифікованій (9) моделі (8) SIRS

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (\lambda - \alpha)S - \beta SI + \delta R, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I - (\alpha + \phi)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - (\alpha + \delta)R, \\ S(0) &= S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0, \end{aligned} \quad (19)$$

перша стаціонарна точка $\in \{S^{00}, I^{00}, R^{00}\} = \{0, 0, 0\}$, а друга

$$S^0 = \frac{\alpha + \gamma + \phi}{\beta}, \quad I^0 = \frac{(\alpha + \gamma + \phi)(\alpha + \delta)(\lambda - \alpha)}{\beta((\alpha + \gamma + \phi)(\alpha + \delta) - \gamma\delta)}, \quad R^0 = \frac{\gamma I^0}{(\alpha + \delta)}. \quad (20)$$

Розглянемо розв'язок системи ЗДУ (19) у вигляді (16). Лінеаризована система (19) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dS^t}{dt} &= (\lambda - \alpha)S^t - \beta(S^{00}I^t + S^tI^{00}) + \delta R^t, \\ \frac{dI^t}{dt} &= \beta(S^{00}I^t + S^tI^{00}) - \gamma I^t - (\alpha + \phi)I^t, \\ \frac{dR^t}{dt} &= \gamma I^t - (\alpha + \delta)R^t. \end{aligned} \quad (21)$$

Завдання практики – отримати розв'язок (21) у вигляді (16) і знайти вирази для ω , $A_{S,I,R}$ і $B_{S,I,R}$. Провести аналогічні розрахунки для другої стаціонарної точки $\{S^0, I^0, R^0\}$. Отримати умови на коефіцієнти моделі, які можуть мати різні типи фазових портретів.

Завдання 3. Найпоширенішою моделлю пандемії Covid-19 вважається модель SEIR (сприйнятливі, експоновані, інфіковані, одужалі). Після взаємодії з інфікованими (I) сприйнятливі (S) потрапляють до групи експонованих (E, які зазнали дії вірусу) і можуть стати носіями вірусу без симптомів хвороби, при цьому заражаючи оточуючих. Частина цієї групи E через деякий час виявляє ознаки захворювання (результати тестів) та потрапляє до групи хворих (I). Рівняння моделі та початкові умови мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \lambda - \beta SI + \delta R - \alpha S, & \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\alpha + \psi)E, \\ \frac{dI}{dt} &= \psi E - \gamma I - (\alpha + \phi)I, & \frac{dR}{dt} &= \gamma I - (\alpha + \delta)R, \end{aligned} \quad (22)$$

$$S(0) = S_0, \quad E(0) = E_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0,$$

де ψ – швидкість переходу з групи E до групи I, яка залежить від типу вірусу і ступеня експонування.

Система (22) має дві стаціонарні точки. Перша знов відповідає відсутності епідемії: $\{S^{00}, E^{00}, I^{00}, R^{00}\} = \left\{\frac{\lambda}{\alpha}, 0, 0, 0\right\}$, а друга – постійному числу експонованих, хворих, одужалих та уразливих

$$\begin{aligned} I^0 &= \frac{((\alpha + \psi)(\gamma + \alpha + \phi)\alpha - \lambda\psi\beta)(\alpha + \delta)}{\beta(\delta\gamma\psi - (\alpha + \delta)(\alpha + \psi)(\gamma + \alpha + \phi))}, & E^0 &= \frac{(\gamma + \alpha + \phi)I^0}{\psi}, \\ R^0 &= \frac{\gamma I^0}{(\alpha + \delta)}, & S^0 &= \frac{\lambda}{\alpha} + \left(\frac{\delta\gamma}{\alpha(\alpha + \delta)} - \frac{(\alpha + \psi)(\gamma + \alpha + \phi)}{\alpha\psi} \right) I^0 \end{aligned} \quad (23)$$

Розглянемо розв'язок (22) у вигляді (16)

$$\begin{aligned} S(t) &= S^{00} + S^t(t), \quad S^t(t) = A_s \exp(i(\omega t - \varphi_s)), \\ E(t) &= E^{00} + E^t(t), \quad E^t(t) = A_E \exp(i(\omega t - \varphi_E)), \\ I(t) &= I^{00} + I^t(t), \quad I^t(t) = A_I \exp(i(\omega t - \varphi_I)), \\ R(t) &= R^{00} + R^t(t), \quad R^t(t) = A_R \exp(i(\omega t - \varphi_R)). \end{aligned} \quad (24)$$

Лінеаризована система (22) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dS^t}{dt} &= \lambda - \beta(S^{00}I^t + S^tI^{00}) + \delta R^t - \alpha S^t, \\ \frac{dE^t}{dt} &= \beta(S^{00}I^t + S^tI^{00}) - (\alpha + \psi)E^t, \\ \frac{dI^t}{dt} &= \psi E^t - \gamma I^t - (\alpha + \phi)I^t, \\ \frac{dR^t}{dt} &= \gamma I^t - (\alpha + \delta)R^t. \end{aligned} \quad (25)$$

Треба отримати розв'язок (25) і знайти вирази для ω , $A_{S,E,I,R}$ і $B_{S,E,I,R}$. Провести аналогічні перетворення для другої стаціонарної точки $\{S^0, E^0, I^0, R^0\}$ (23) замість $\{S^{00}, E^{00}, I^{00}, R^{00}\}$. Отримати умови на коефіцієнти моделі, у яких можуть бути різні типи фазових портретів.

Завдання 4. Ще одна модифікація моделі SEIRS враховує доступності лікарень для пацієнтів, наявності апаратів штучної вентиляції легенів (ШВЛ) і загальну якість медичної допомоги, яка залежить від кількості ушпиталених. Найбільш загальна модель має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \lambda - \beta SI - \mu S + \delta R, & \frac{dI}{dt} &= \alpha E - \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{1 + bI} \right) I - (\mu + \phi)I, \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\alpha + \mu)E, & \frac{dR}{dt} &= \left(\phi + \frac{\varepsilon}{1 + bI} \right) I - (\mu + \delta)R, \end{aligned} \quad (26)$$

де ε – ефективність лікування в лікарні, b – коефіцієнт насичування лікарень хворими, α – параметр, який залежить від інкубаційного періоду вірусу.

Таким чином, модель (26) враховує ступінь підготовленості медичної системи країни до епідемії та дозволяє керувати динамічною системою за рахунок не тільки обмежень індивідуальних контактів ($\downarrow \beta$), але й поліпшення якості ($\downarrow \phi$) та доступності ($\downarrow b, \uparrow \varepsilon$) лікування. Параметри λ, μ теж піддаються контролю, але тільки в далекій перспективі, а параметр α може змінюватися неконтрольовано у зв'язку з мутаціями вірусу або іншими факторами. Сума рівнянь (26) дає баланс загальної чисельності популяції

за рахунок природних факторів та смерті від інфекції: $N' = \lambda - \mu N - \phi I$. З урахуванням співвідношення $N = S + I + E + R$ (26) може бути зведена до SEI-моделі.

Стационарний розв'язок (26) $\{S_0, E_0, I_0, R_0\}$ має вигляд

$$S_0 = \frac{\delta(\gamma(1 + bI_0) + \varepsilon)I_0 + \lambda(\mu + \delta)(1 + bI_0)}{(\mu + \delta)(\beta I_0 + \mu)},$$

$$E_0 = \frac{\beta S_0 I_0}{(\alpha + \mu)}, \quad R_0 = \frac{(\beta I_0 + \mu)S_0 - \lambda}{\delta},$$
(27)

де I_0 – позитивний корінь рівняння $I_0^2 + k_4 I_0 + k_5 = 0$,
 $k_4 = \frac{(\gamma + \varepsilon)k_1 - k_2 + k_3 - \mu\gamma}{(\gamma k_1 - k_2)b}$, $k_5 = \frac{k_3 - \mu(\gamma + \varepsilon)}{(\gamma k_1 - k_2)b}$, $k_1 = k\delta - \beta$, $k_2 = (\mu + \phi)\beta$,
 $k_3 = \lambda(\mu + \delta)k - \mu(\mu + \phi)$, $k = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \mu)(\mu + \delta)}$.

Залежно від параметрів моделі критерій стійкості системи (26) $\Re_0 < 1$ має вигляд [2]

$$\Re_0 = \begin{cases} -k_4, & \text{якщо } k_5 > k_4^2 / 4, \\ -k_5, & \text{якщо } k_4 > 2\sqrt{k_5}. \end{cases}$$
(28)

Треба отримати розв'язок (26) у вигляді (16) і знайти вирази для ω і коефіцієнтів $A_{S,E,I,R}$ і $B_{S,E,I,R}$ для обох стаціонарних точок (нульової і (27)). Отримати умови на коефіцієнти моделі, у яких можуть бути різні типи фазових портретів.

Приклад виконання завдання. Деякі результати математичного моделювання за результатами виробничої практики 2020 р. [2] порівняно з даними статистичного аналізу вимірювань [3] з відкритих джерел наведені на рис. 3. Чисельні розрахунки були проведені на ускладненій моделі SEIR (27). З метою валідації чисельного методу і програмного коду були використані дані спостережень за першою хвилею Covid-19 (з 3.03 по 10.05 2020 р.) в м. Джакарта, Індонезія, які раніше були досліджені на цій самій моделі⁴: $\alpha = 0.25$, $\beta = 1.44 \cdot 10^{-7}$, $\gamma = 0.27$, $\varepsilon = 0.23$, $\phi = 0.06$, $b = 10^{-4}$, $\delta = 0.5$, $\lambda = 0.0164$, $\mu = 0.0064$ (дані за до-ковідний 2019 р.). Була отримана достатньо низька похибка розрахунків (середня для значень S, E, I, R за досліджуваний період) в 2.81 %. Після цього

⁴ Aldila D., Khoshnaw S.H.A., Safitri E., et al. A mathematical study on the spread of COVID-19 considering social distancing and rapid assessment: The case of Jakarta, Indonesia. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. 139. 110042

аналогічні розрахунки були проведені для України та низки європейських країн. На рис. 3 наведені дані лише для кількох з них.

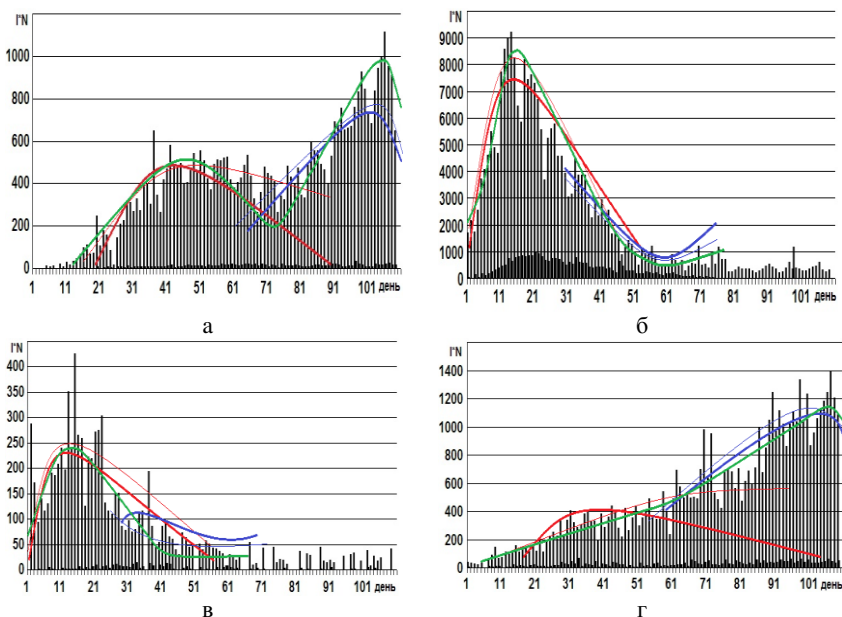


Рис. 3. Часові ряди і дані моделювання 1-ї хвилі пандемії:
Україна (а), Іспанія (б), Норвегія (в) і Індонезія(г) (за даними [2,3])

Чисельне дослідження чутливості системи ЗДР (27) до змін кожного з параметрів моделі показав, що найбільш значний вплив має параметр β , зміна якого на порядок викликає як зміни в значеннях $\{S_0, E_0, I_0, R_0\}$, так і в знаках критеріїв $\mathcal{R}_{01} = -k_4$, $\mathcal{R}_{02} = -k_5$. Спільні зміни деяких з параметрів моделі теж впливають на залежності $\mathcal{R}_{01}(\beta)$ і $\mathcal{R}_{02}(\beta)$. Для порівняння з даними для Індонезії проведемо розрахунки для деяких країн Європи із позитивною динамікою зростання населення (Франція $\lambda = 0.0123$, $\mu = 0.0093$ і Норвегія $\lambda = 0.0122$, $\mu = 0.081$), з майже стаціонарним станом (Іспанія $\lambda = 0.0094$, $\mu = 0.0091$), і з негативною динамікою (Україна, $\lambda = 0.0105$, $\mu = 0.0144$). Розрахунки критичних значень β^* , таких що при $\beta < \beta^*$ має місце асимптотична стійкість і $\mathcal{R}_{01} < 0$, $\mathcal{R}_{02} < 0$ дали значення $\beta^* = 0.4285, 0.3005, 0.2035, 0.2348, 0.2255$ для Індонезії, Франції, Норвегії, Іспанії і України відповідно.

Спільні зміни параметрів λ, μ , а також ε, b і γ, δ, ϕ впливають на значення β^* . Таким чином, залежно від наборів параметрів моделі

може мати місце біфуркація динамічної системи, коли асимптотично стійкий розв'язок, який відповідає умовам $k_4 > 0$, $k_5 > k_4^2/4$ в (7) може за рахунок зменшення ε , зростання b і т.д. перейти в нестійкий, який відповідає умові $k_4 < 0$.

Більш детальні розрахунки були проведені для чисельних рядів першої хвилі пандемії (з 20.03 по 30.06.2020)⁵. Результати моделювання, наведені на рис. 3, демонструють різні фази сплеску захворювання. Результати моделювання за (27) наведені у вигляді тонкої та жирної ($\Re_{01} < 0$ і $\Re_{02} < 0$) червоної та синьої ($\delta = 0.3$ і $\delta = 0.5$) ліній, а також для комбінованого сценарію (зелена лінія). В останньому випадку точність прогнозування помітно краще.

В результаті виконання завдання був зроблений висновок що (1) математичні моделі у вигляді систем з 3-6 ЗДР для числа здорових, контактних, хворих і тих, хто одужав і т.д. індивідів здатні відтворювати різні типи поведінки динамічної системи та передбачувати зростання, пік та спад епідемії; (2) моделі особливо чутливі для швидкості захворювання β (тривалість інкубаційного періоду) і слабо чутливі для інших параметрів; і (3) для якісного прогнозу поведінки системи треба використовувати не сталі, а часові значення параметрів, які треба перераховувати протягом всього часу спостереження за поширенням епідемії в кожній країні, вимірювання часових кривих та статистичної обробки даних.

2.2. Дослідження реологічних моделей

2.2.1. В'язкопружні тверді матеріали. Матеріали при навантаженні виявляють складні механічні властивості (деформації, течії, релаксацію), які описуються експериментальними залежностями напруження – деформація $\sigma(\varepsilon)$ і спрощеними реологічними моделями, які зводяться до ЗДР. Приклади 2-3 і багатоелементних реологічних моделей та методи дослідження відповідних ЗДР можна знайти у методичному виданні [20]. Приклад реологічної моделі такого складного біологічного матеріалу, як м'язи наведено на рис. 4. Пружини відповідають пружним волокнам м'язу, в'язкий елемент – внутрішньо- та міжклітинній рідині, а f – активний елемент, який викликає скорочення м'язу. Приймається, що сила скорочення елемента залежить від деформації і швидкості деформації $f = k_1\varepsilon + k_2\dot{\varepsilon}$, де $k_{1,2}$ – задані константи. Для 4-х елементної моделі (рис. 4а) реологічне співвідношення має вигляд [21]

⁵ Coronavirus Pandemic (COVID–2019). URL: <https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

$$(k_2 + \mu)\dot{\sigma} + (k_1 + E_2)\sigma = E_1(E_2 + k_1)\varepsilon + (E_1(k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)\mu)\dot{\varepsilon} + \mu k_2 \ddot{\varepsilon}, \quad (29)$$

де σ, ε – загальні механічні напруження і деформації в тілі, $E_{1,2}$ – модулі пружності пружин, μ – коефіцієнт в'язкості в'язкого елемента, а точка відповідає похідній за часом.

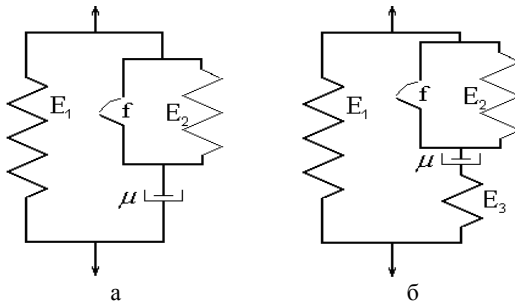


Рис. 4. 4-х (а) і 5-ти (б) -елементні реологічні моделі м'яза як активного в'язкопружного матеріалу

Реологічне співвідношення (29) являє собою ЗДР другого порядку для двох змінних – σ і ε , і тому не може мати незалежних розв'язків для змінних. Тому треба провести так званий ізотонічний експеримент, в якому задано значення $\sigma = \sigma^* = \text{const}$ і знайти з (29) вираз для $\varepsilon(t)$, а потім провести ізометричний експеримент при $\varepsilon = \varepsilon^* = \text{const}$ і знайти з (29) вираз для $\sigma(t)$ [20].

Дослідимо поведінку моделі (29) при ізотонічному навантаженні. Підстановка $\sigma = \sigma^*$ до (29) дає ЗДР 2-го порядку, розв'язок якого з найпростішими початковими умовами $\varepsilon(0) = 0, \dot{\varepsilon}(0) = 0$ дає криву повзучості

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\sigma^*}{E_1} \left(1 + \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right), \quad \lambda_{1,2} \\ &= \frac{E_1(k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)\mu \pm \sqrt{D_1}}{2\mu k_2}, \\ D_1 &= (E_1(k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)\mu)^2 - 4\mu k_2 E_1(E_2 + k_1) \end{aligned} \quad (30)$$

Після цього в деякий момент часу $t = t_1$, коли модель має деформацію ε_1 , знімаємо навантаження ($\sigma^* = 0$) і знаходимо розв'язок (29) з новою початковою умовою $\varepsilon(t_1) = \varepsilon_1$, який визначає релаксацію (тобто, поступове повернення до попереднього стану) деформацій матеріалу

$$\varepsilon_{rel}(t) = \frac{\varepsilon_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_2 e^{-\lambda_1(t-t_1)} - \lambda_1 e^{-\lambda_2(t-t_1)} \right). \quad (31)$$

Аналогічні результати для ізометричного навантаження отримаємо шляхом підстановки в (29) $\varepsilon = \varepsilon^* = \text{const}$ і інтегруванні отриманого ЗДР 1-го порядку з початковою умовою $\sigma(0) = \sigma_0$. Умова ненульова, оскільки під час ізометричного експерименту зразок матеріалу треба розтягнути і закріпити, а у розтягнутому матеріалі механічні напруження не можуть бути відсутніми (тобто нульовими). Отримуємо результат

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon^* (1 - e^{-\lambda t}) + \sigma_0 e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{k_1 + E_2}{k_2 + \mu}. \quad (32)$$

Знову в деякий момент часу $t = t_1$, коли модель має напруження σ_1 , знімаємо навантаження ($\varepsilon^* = 0$) і інтегруємо відповідне рівняння з новою початковою умовою $\sigma(t_1) = \sigma_1$. Отримуємо релаксацію напружень

$$\sigma_{rel}(t) = \sigma_1 e^{-\lambda(t-t_1)}. \quad (33)$$

Якщо $k_{1,2} = 0$ (активний елемент відсутній), схема рис. 4а відповідає відомій реологічній моделі Зенера, для якої $\lambda = E_2 / \mu$ [20], що відповідає (32).

Крім постійних напружень і деформацій до моделі (32) можна прикладати динамічні навантаження у вигляді кривих $\sigma = \sigma^*(t)$ або $\varepsilon = \varepsilon^*(t)$. Найчастіше використовуються динамічні експерименти з періодичним навантаженням гармонічними функціями, наприклад, у загальному випадку $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$. У відповідь у в'язкопружних матеріалах з'являються коливання деформацій $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i(\omega t + \phi)}$, де ϕ – фазовий зсув. Аналогічні залежності виникають при періодичних деформаціях $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$. Підстановка останнього виразу в (29) дає для напружень

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i(\omega t + \phi)}, \quad \sigma_0 = \frac{\varepsilon_0}{a_{12}^2 + a_{11}^2 \omega^2}, \quad (34)$$

$$\text{tg}(\phi) = \frac{b_{11} a_{11} \omega^3 + (b_{12} a_{12} - a_{11} b_{13}) \omega}{(b_{12} a_{11} - b_{11} a_{12}) \omega^2 + b_{13} a_{12}},$$

де $a_{11} = k_2 + \mu$, $a_{12} = k_1 + E_2$, $b_{11} = \mu k_2$, $b_{12} = E_1(k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)\mu$, $b_{13} = E_1(E_2 + k_1)$.

Для більш детальної 5-елементної реологічної моделі м'яза (рис. 4б) реологічне рівняння має вигляд [21]

$$\begin{aligned} \mu k_2 \ddot{\sigma} + ((k_2 + \mu)E_3 + (E_2 + k_1)\mu)\dot{\sigma} + E_3(k_1 + E_2)\sigma = \\ = E_1 E_3 (E_2 + k_1)\varepsilon + (E_1 E_3 (k_2 + \mu) + \\ + (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)\mu)\dot{\varepsilon} + \mu(E_1 + E_3)k_2 \ddot{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (35)$$

При ізотонічному навантаженні (35) дає криві повзучості та релаксації деформацій такі ж, як і (30) – (31) відповідно, але при цьому

$$\lambda_{1,2} = \frac{E_1 E_3 (k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)\mu \pm \sqrt{D_2}}{2\mu(E_1 + E_3)k_2}, \quad (36)$$

$$D_2 = (E_1 E_3 (k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)\mu)^2 - 4E_1 E_3 (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)k\mu.$$

При ізотонічному навантаженні моделі (35) отримаємо

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0 - E_1 \varepsilon^*}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}) + E_1 \varepsilon^*,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(k_2 + \mu)E_3 + (E_2 + k_1)\mu \pm \sqrt{D_3}}{2\mu k_2}, \quad (37)$$

$$D_3 = ((k_2 + \mu)E_3 + (E_2 + k_1)\mu)^2 - 4\mu k_2 E_3 (k_1 + E_2),$$

$$\sigma_0 = \left(E_1 + \frac{E_3 (E_2 + k_1)}{E_2 + E_3 + k_1} \right) \varepsilon^*,$$

а після зняття навантаження

$$\sigma_{rel}(t) = \frac{\sigma_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{-\lambda_1(t-t_1)} - \lambda_1 e^{-\lambda_2(t-t_1)}), \quad (38)$$

де $\sigma_1 = \sigma(t_1)$ отримано шляхом підстановки $t = t_1$ в (37).

У цьому випадку є два релаксацийних параметри як для деформацій, так і для напружень, причому вирази для них суттєво відрізняються.

Оцінюючи величини перших та других похідних кривих $\sigma(t), \varepsilon(t)$ (30) – (33), (36) – (38), отримаємо загальний вигляд кривих повзучості та релаксації (рис. 5).

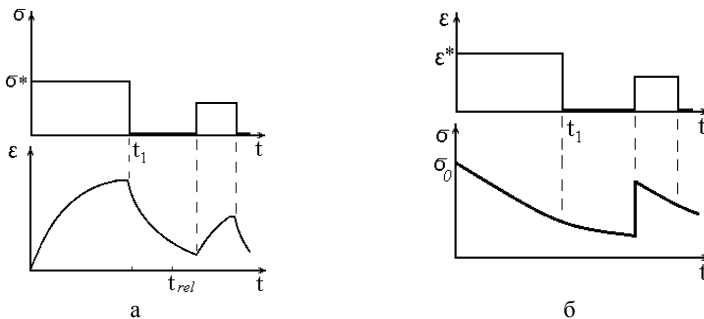


Рис. 5. Криві $\sigma(t)$ і $\varepsilon(t)$ для ізотонічного (а) і ізометричного (б) експериментів з моделями (29) і (35) відповідно

Динамічне навантаження моделі (35) дає формули для амплітуд і фазового зсуву між осциляціями механічних напружень і деформацій

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0}{(a_{23} - a_{21}\omega^2)^2 + a_{22}^2\omega^2},$$

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{(b_{22}a_{23} - a_{22}b_{23})\omega + (b_{21}a_{22} - b_{22}a_{21})\omega^3}{b_{21}a_{21}\omega^4 + (b_{22}a_{22} - b_{21}a_{23} - b_{23}a_{21})\omega^2 + b_{23}a_{23}},$$

де $a_{21} = \mu k_2$, $a_{22} = (k_2 + \mu)E_3 + (E_2 + k_1)\mu$, $a_{23} = E_3(k_1 + E_2)$,
 $b_{21} = \mu(E_1 + E_3)k_2$, $b_{22} = E_1E_3(k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)\mu$,
 $b_{23} = E_1E_3(E_2 + k_1)$.

2.2.2. В'язкопружні рідкі матеріали. За аналогією з біоактивними м'якими матеріалами можна запропонувати рідкі біоактивні матеріали, які можуть замінювати в'язкопружні гідрогелі. На рис. 6а наведено модифікацію моделі Джеффрі, реологічне співвідношення для якої має вигляд [21]

$$(k_2 + \mu_2)\dot{\sigma} + E_3(k_1 + E)\sigma = (\mu_1 + \mu_2)(E + k_1)\dot{\varepsilon} + (\mu_1\mu_2 + (\mu_1 + \mu_2)k_2)\ddot{\varepsilon}, \quad (40)$$

При ізотонічному навантаженні $\sigma = \sigma^* = \text{const}$ із (40) отримуємо

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^*}{(\mu_1 + \mu_2)}t - \frac{\sigma^*}{(\mu_1 + \mu_2)\lambda_2}(1 - e^{-\lambda t}), \quad \lambda = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(E + k_1)}{\mu_1\mu_2 + (\mu_1 + \mu_2)k_2}, \quad (41)$$

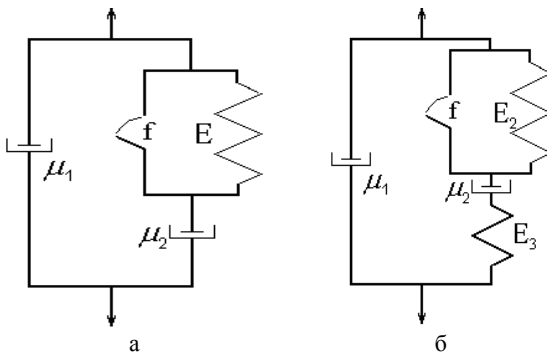


Рис. 6. 4-х (а) і 5-ти (б) -елементні реологічні моделі активні в'язкопружної рідини

а після зняття навантаження $\sigma^* = 0$ в деякий момент часу $t = t_1$ отримуємо

$$\varepsilon_{rel}(t) = \frac{\varepsilon_1}{1 + t_1\lambda}(\lambda t - e^{-\lambda(t-t_1)}). \quad (42)$$

При ізометричному навантаженні $\varepsilon = \varepsilon^* = \text{const}$ із (40) отримуємо

$$\sigma(t) = \varepsilon_1(k_1 + E)e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{k_1 + E}{k_2 + \mu_2}, \quad (43)$$

причому після зняття навантаження релаксаційна крива має той самий вигляд (43).

При динамічному навантаженні моделі (40) отримуємо

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0}{a_{32}^2 + a_{31}^2 \omega^2}, \quad \text{tg}(\phi) = \frac{(b_{32}a_{32} + b_{31}a_{31}\omega^2)\omega}{(b_{32}a_{31} - b_{31}a_{32})\omega^2}, \quad (44)$$

де $a_{31} = k_2 + \mu_2$, $a_{32} = E_3(k_1 + E)$, $b_{31} = \mu_1\mu_2 + (\mu_1 + \mu_2)k_2$, $b_{32} = (\mu_1 + \mu_2)(E + k_1)$.

Заміна в 5-елементній моделі пружного елемента на аналогічний попередньої моделі в'язкий елемент (рис. 6б) приводить до реологічного співвідношення

$$\begin{aligned} & \mu_2 k_2 \ddot{\sigma} + (E_2 k_2 + \mu_2 (E_1 + E_2 + k_1)) \dot{\sigma} + E_2 (E_1 + k_1) \sigma = \\ & = (E_1 + k_1)(\mu_1 + \mu_2) E_2 \dot{\varepsilon} + ((\mu_1 + \mu_2) k_2 E_2 + (E_1 + E_2 + k_1) \mu_1 \mu_2) \ddot{\varepsilon} + \mu_1 \mu_2 k_2 \ddot{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (45)$$

При ізотонічному навантаженні із (45) маємо

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^*}{\mu_1 + \mu_2} \left(t + \frac{\lambda_1^2 (1 - e^{-\lambda_2 t}) - \lambda_2^2 (1 - e^{-\lambda_1 t})}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \right), \quad (46)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\mu_1 + \mu_2) k_2 E_2 + (E_1 + E_2 + k_1) \mu_1 \mu_2 \pm \sqrt{D_4}}{2 \mu_1 \mu_2 k_2},$$

$$D_4 = ((\mu_1 + \mu_2) k_2 E_2 + (E_1 + E_2 + k_1) \mu_1 \mu_2)^2 - 4(E_1 + k_1)(\mu_1 + \mu_2) E_2 \mu_1 \mu_2 k_2,$$

а після зняття навантаження маємо релаксаційну криву

$$\varepsilon_{rel}(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) t + \lambda_2^2 e^{-\lambda_1(t-t_1)} - \lambda_1^2 e^{-\lambda_2(t-t_1)}}{\lambda_2^2 (1 + \lambda_1 t_1) - \lambda_1^2 (1 + \lambda_2 t_1)}. \quad (47)$$

При ізометричному навантаженні моделі (45) отримуємо

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{(\lambda_1 - \lambda_2)} (\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}), \quad \lambda_{1,2} = \frac{E_2 k_2 + \mu_2 (E_1 + E_2 + k_1) \pm \sqrt{D_5}}{2 \mu_2 k_2}, \quad (48)$$

$$D_5 = (E_2 k_2 + \mu_2 (E_1 + E_2 + k_1))^2 - 4 \mu_2 k_2 E_2 (E_1 + k_1),$$

а після зняття навантаження релаксаційна крива буде мати такий самий вигляд (47).

Оцінюємо знаки перших і других похідних $\sigma(t), \varepsilon(t)$ (41) – (44), (46) – (48), отримаємо загальний вигляд кривих повзучості і релаксації (рис. 7).

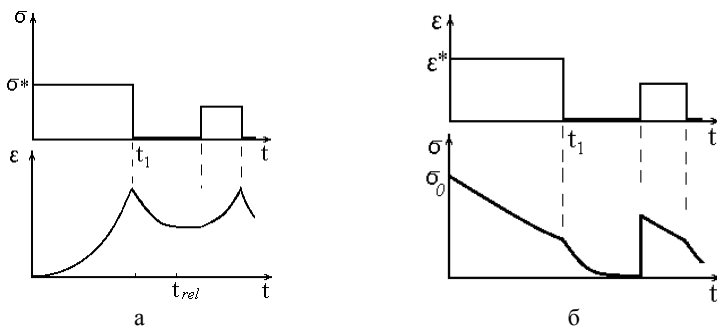


Рис. 7. Криві $\sigma(t)$ і $\varepsilon(t)$ для ізотонічного (а) та ізометричного (б) експериментів з моделями (40), (45)

При динамічному навантаженні моделі (45) маємо

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0}{(a_{43} - a_{41}\omega^2)^2 + a_{42}^2\omega^2}, \quad (49)$$

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{a_{41}b_{41}\omega^5 + (b_{42}a_{42} - b_{41}a_{43} - b_{43}a_{41})\omega^3 + b_{43}a_{43}\omega}{(b_{42}a_{41} - b_{41}a_{42})\omega^4 + (b_{43}a_{42} - b_{42}a_{43})\omega^2},$$

де $a_{41} = \mu_2 k_2$, $a_{42} = E_2 k_2 + \mu_2(E_1 + E_2 + k_1)$, $a_{43} = E_2(E_1 + k_1)$, $b_{41} = \mu_1 \mu_2 k_2$, $b_{42} = (\mu_1 + \mu_2)k_2 E_2 + (E_1 + E_2 + k_1)\mu_1 \mu_2$, $b_{43} = (E_1 + k_1)(\mu_1 + \mu_2)E_2$.

2.2.3. Ідентифікація реологічних параметрів моделей

Для вибору адекватної моделі матеріалу та ідентифікації її реологічних параметрів $\{E_j, \mu_j\}$ використовують експериментальні криві $\sigma(\varepsilon)$, релаксаційні криві $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$, а також амплітудно-фазовий спектр при періодичних навантаженнях $\sigma(t) \sim \sin(\omega t)$ і $\varepsilon(t) \sim \sin(\omega t)$. Як приклад проведення ідентифікації параметрів моделей (29) і (35) шляхом порівняння теоретичних і експериментальних кривих для м'язів експериментальних тварин [21] (рис. 8).

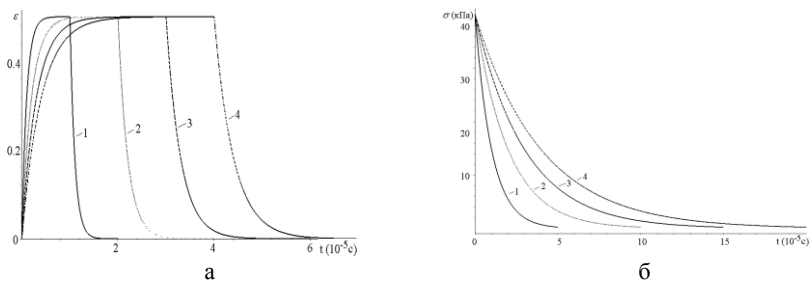


Рис. 8. Криві $\varepsilon(t)$ (а) і $\sigma(t)$ (б) для (29) при $E_1 = 10^5 \text{ Па}$, $E_2 = 10^6 \text{ Па}$, $E_3 = 10^7 \text{ Па}$, $\mu = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\sigma^* = 50 \text{ кПа}$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1; 2; 3; 4$ - (1-4).

При зменшенні модулів Юнга та збільшенні в'язкості дискретних реологічних елементів час релаксації деформацій в ізотонічних експериментах і напруги – в ізометричних – збільшується аналогічно до кривих, зображених на рис.8а та рис. 8б відповідно. При збільшенні ваги доданку, що відповідає біоактивному контролю за швидкостями деформацій, час релаксації швидко збільшується, а при більшій вазі контролю за величиною деформації (зростання) – швидко зменшується. Зіставлення релаксаційних кривих моделей (29) і (35) з даними експериментів з ізометричному та ізотонічному навантаженню скелетних м'язів [21] показало, що 5-елементна модель (35) краще описує динаміку ділянок повзучості та релаксації, ніж 4-елементна модель (29). Початковий вибір реологічних параметрів моделей, близьких за значеннями до основних компонентів (волокон актину, міозину і колагену) м'язової тканини, дозволяє швидко проводити ідентифікацію параметрів методом найменших квадратів. Результати ідентифікації наведено в табл. 1. Деякі відмінності в модулях Юнга можуть бути пов'язані з різними видами міозинів та числом волокон різного типу у м'язах тварин різних типів.

Таблиця 1

Результати ідентифікації параметрів моделі (35) для різних типів м'язів

М'яз	E_1 (МПа)	E_2 (МПа)	E_3 (МПа)	μ (сПз)	k_1 (МПа)	k_2 (сПз)
sartorius (жаба)	52.1	8.5	34.1	24.2	0.87	2.15
soleus (кіт)	45.2	9.3	29.6	28.7	0.67	3.42
gracilis anticus (щур)	46.9	7.9	31.2	34.1	0.79	3.90
gracilis anticus (кріль)	51.4	8.2	33.8	31.4	0.78	2.87

Приклади завдань виробничої практики з реології

- Отримати аналогічні рішення ЗДР (29) і (35) для лінійного «пилко-подібного» навантаження-розвантаження $\sigma^*(t) = a + bt$ і $\varepsilon^*(t) = a + bt$, $a, b = \text{const}$. Проаналізувати відмінності у поведінці розв'язків для навантаження і релаксації.
- Таке саме завдання для нелінійного навантаження-розвантаження у вигляді $\sigma^*(t) = a \cdot e^{bt}$ і $\varepsilon^*(t) = a \cdot e^{bt}$, $a, b = \text{const}$.
- Таке саме завдання для нелінійного навантаження-розвантаження у вигляді $\sigma^*(t) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot t^{i \cdot t}$ і $\varepsilon^*(t) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot t^{i \cdot t}$, $a_i = \text{const}$.
- Провести аналогічні дослідження властивостей 4- і 5-елементних моделей біологічних тканин із посібника [20] (рис. 13 а-с, 14 а,б, 15).

3. Розв'язання і аналіз властивостей систем ДРЧП

Задачі моделювання еволюції в часі будь-яких динамічних систем, які розташовані в просторі і важливими для них є процеси перенесення в просторі від точки до точки маси, імпульсу, заряду, інформації та інших величин, описуються системами диференціальних рівнянь в часткових похідних. Прикладами є задачі переносу тепла в просторі або забруднень в поверхневих або підземних водах, в повітрі та ґрунті. В математиці відомі загальні типи таких рівнянь – еліптичні, параболічні та гіперболічні. У загальному вигляді будь-яке лінійне ДРЧП другого порядку для функції $\varphi(x, y)$ двох змінних (x, y) можна записати у вигляді

$$A\varphi_{xx} + B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} + D\varphi_x + E\varphi_y + F\varphi + G = 0, \quad (50)$$

де A, B, C, D, E, F, G – функції (x, y) а нижній індекс відповідає похідним.

1. У разі $B^2 - 4AC < 0$ (50) дає еліптичне рівняння, яке може бути зведено до вигляду

$$\Delta\varphi = q, \quad (51)$$

де Δ – оператор Лапласа; (51) називається рівнянням Пуассона, або у випадку $q = 0$ – рівнянням Лапласа.

Еліптичні рівняння описують стаціонарні течії ідеальної рідини, задачі стаціонарної фільтрації рідини крізь пористе середовище, стаціонарного теплопереносу, скручування стрижня та інші. Ці рівняння не мають характеристичних кривих, за якими можна виключити хоча б одну другу похідну з (50). Оскільки характеристичні криві є єдиними кривими, вздовж яких розв'язки ДРЧП з гладкими параметрами можуть мати розривні похідні, розв'язки еліптичних рівнянь не можуть ніде мати розривних похідних. Таким чином, що еліптичні рівняння добре підходять для опису станів рівноваги, де будь-які розриви вже згладжені. Методи розв'язання еліптичних ДРЧП дуже добре розвинені.

2. У разі $B^2 - 4AC = 0$ (50) дає еліптичне рівняння, яке для двох змінних (t, x) має вигляд рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + q, \quad (52)$$

яке описує одновимірне поширення тепла (вздовж осі $0x$) за часом.

Нестаціонарне поширення тепла в просторі описується рівнянням вигляду

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \Delta\varphi + q. \quad (53)$$

3. У разі $B^2 - 4AC > 0$ (50) дає гіперболічне рівняння, яке для двох змінних (t, x) має вигляд рівняння розповсюдження хвиль вздовж осі $0x$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = q, \quad (54)$$

де c – швидкість поширення хвилі.

Рівняння (54) описує коливання струни, а двовимірний аналог (54) – коливання мембрани. Приклади таких задач та методи розв'язання відповідних ДРЧП наведені в підручниках з диференціальних рівнянь.

Гіперболічні рівняння в просторі

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi + q \quad (55)$$

описують поширення хвиль скінченної або малої амплітуди (у випадку лінеаризованої системи) у будь-якій фізичній системі (електромагнітні і акустичні хвилі, хвилі в заповнених рідиною м'яких трубках (теорія пульсових хвиль в артеріях), концентраційні хвилі автомобілів на дорогах та ін.). Розв'язки (55) у вигляді хвиль малої амплітуди використовуються для аналізу стійкості системи.

З курсу математичної фізики відомо, що для перелічених типів ДРЧП доведені теореми існування та єдності розв'язку у випадку таких трьох типів граничних умов:

$$1. \varphi|_{\partial\Omega} = \varphi^*, \quad 2. k \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = \vec{J}_{\varphi}^*, \quad 3. \left(\varphi + \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega} = \varphi^*, \quad (56)$$

та початкових умов

$$4. t = t_0 : \varphi = \varphi_0, \quad 5. t = t_0 : \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \dot{\varphi}_0, \quad (57)$$

де для рівняння (53) достатньо початкової умови 4 в (57), а для рівняння (55) потрібні обидві умови 4–5 з (57). Якщо границя $\partial\Omega$ області розглядання задачі Ω складається з підмножин $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3$ з різними умовами на них, то можливо використати на границях $\Omega_{1,2,3}$ умови 1,2,3 з (56) відповідно. Умови 1–3 називають умовами Діріхле, Неймана і Робіна, відповідно, або умовами першого, другого і третього (або змішаною умовою) роду.

Часто прикладні задачі зводяться до квазілінійних систем ДРЧП для функцій $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t, \vec{r})$ у вигляді

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{f}^i(\vec{\varphi}) = \vec{q}, \quad (58)$$

де $\vec{f}^i(\vec{\varphi}) \in \mathbb{C}^1$ є безперервно диференційовані функції.

Якщо якобіан системи (58)

$$M^i = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1^i}{\partial \varphi_1} & \dots & \frac{\partial f_1^i}{\partial \varphi_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n^i}{\partial \varphi_1} & \dots & \frac{\partial f_n^i}{\partial \varphi_n} \end{vmatrix} \quad (59)$$

має тільки дійсні власні значення та діагоналізований, система (58) є гіперболічною. Фізичні закони збереження (маси, імпульсу, моменту імпульсу, енергії, заряду, ентропії та інформації) можуть бути записані у вигляді системи (58) (так звана дивергентна форма запису).

Крім названих вище, існують й інші важливі типи систем ДРЧП, для багатьох з яких теореми існування розв'язку ще не доведені. Наприклад, рух рідини і газу в довільних геометріях описується рівняннями Нав'є-Стокса, які з урахуванням рівняння переносу тепла мають вигляд системи трьох ДРЧП для змінних p, \vec{v}, T :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{f}, \\ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} &= k \Delta T + D(\vec{v}) + \sigma_T, \end{aligned} \quad (60)$$

де ρ , μ , c_p , k – густина, динамічна в'язкість, питома теплоємність і теплопровідність рідини, які є функціями температури, \vec{v} і p – швидкість руху і гідростатичний тиск в рідині, \vec{f} – вектор зовнішніх сил, $D(\vec{v})$ – дисипативна функція, яка визначає незворотні витрати енергії руху на в'язку і теплову дисипацію (втрати за рахунок перетворення корисної енергії на тепло), σ_T – внутрішні джерела енергії.

У зв'язку з відсутністю доказаних теорем існування розв'язку у тривимірному випадку граничні умови для (60) визначаються різними способами:

1. $\vec{v}|_{\partial\Omega} = \vec{v}_w$ – класична умова непротікання рідини на твердих поверхнях, у зв'язку з чим частинки рідини біля поверхні «прилипають» до неї і рухаються з тією ж самою швидкістю \vec{v}_w , як і поверхнях у випадку нерухомої поверхні $\vec{v}|_{\partial\Omega} = 0$.

2. $\frac{\partial \vec{v}}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \vec{v}_n$ – умова проникнення рідини крізь пористу поверхню; у випадку непроникної поверхні $\partial \vec{v} / \partial n|_{\partial\Omega} = 0$.

3. $\left(\vec{v} - C_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} + C_2 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial n^2} \right)|_{\partial\Omega} = \vec{v}_w$, $C_{1,2} = \text{const}$ – умова прослизання рідини на шорсткій поверхні, яка використовується для нанорідин (суспензії наночастинок, $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$ – граничні рівняння другого порядку) і мікрорідин (суспензії мікрочастинок, $C_1 \neq 0, C_2 = 0$ – граничні рівняння

першого порядку); ці умови легко отримати шляхом розкладання швидкості в умові 1 в ряд Тейлора зі збереженням парного або першого і другого членів [22].

4. $\vec{v}|_{\infty} = \vec{v}_{\infty}$ – умова на відносно далекій відстані від твердої поверхні, наприклад, при обтіканні літака, дрона, човна газом або рідиною.

Для третього рівняння (60) повинні бути задані граничні умови для температури у вигляді (56) умов Діріхле (температура на поверхні фіксована), Неймана (потік тепла на поверхні заданий), Робіна (умова вільної конвекції тепла з поверхні в навколишнє середовище), або умови стрибку температури біля стінки

$$\left(T - T_w - \frac{2\gamma(2 - \tilde{\sigma})}{(\gamma + 1)\tilde{\sigma}} \frac{Kn}{Pr} \frac{\partial T}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (61)$$

де T_w – температура стінки, $\tilde{\sigma}$ – коефіцієнт акумуляції енергії, $\gamma = c_p / c_v$ – відношення питомих теплоємностей при постійному тиску та об'єму, $Re = \rho v h / \mu$ – число Рейнольдса, h – характерний розмір задачі, $Pr = c_p \mu / k$ – число Прандтля, $Ec = u^2 / C_p \Delta T$ – число Екерта, ΔT – характерна різниця температур в досліджуваній області.

Оскільки підвищення температури у стінок під час течій мікро- / нанорідин тісно зв'язано з умовами прослизання на стінках, для швидкості має бути задана більш складна гранична умова

$$\left(u - u_w - \frac{2 - \sigma}{\sigma} \frac{Kn}{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{3(\gamma - 1)}{2\pi\gamma} \frac{Kn^2 Re}{Ec} \frac{\partial T}{\partial s} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (62)$$

де σ – коефіцієнт акумуляції імпульсу, $Kn = \lambda / h$ – число Кнудсена, λ – середня довжина вільного руху частинки рідини.

Замість перелічених статичних можуть ставитися динамічні граничні умови, в яких всі константи можуть бути заданими функціями часу, наприклад, на границі можуть бути задачі осциляції швидкості ($\vec{v}|_{\partial\Omega} = \vec{v}_w(t)$), коливання температури ($T|_{\partial\Omega} = T^*(t)$) або потоку тепла

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = -\vec{J}_T^*(t) \right), \text{ або прикладені зовнішні періодичні сили у вигляді}$$

нормальних ($\vec{\sigma}_n|_{\partial\Omega} = \vec{\sigma}_n^*(t)$) або тангенціальних ($\vec{\sigma}_\tau|_{\partial\Omega} = \vec{\sigma}_\tau^*(t)$) компонент механічних напружень (відношення сили до площі поверхні, до якої вона прикладена). За умовами періодичної геометрії додаються умови періодичності тощо.

Розв'язки рівнянь Нав'є-Стокса можуть бути знайдені в аналітичному / напіваналітичному вигляді, у вигляді розкладань (ряди Тейлора, Фур'є та інші), в квадратурах або різними чисельними методами. Аналітичні розв'язки широко використовуються для перевірки (валідації)

програмного коду, розробленого для чисельного розв'язання задач, які не мають аналітичних розв'язків. Тому отримання і дослідження властивостей аналітичних розв'язків викликає значний інтерес. Найбільш відомими є аналітичні розв'язки рівнянь Нав'є-Стокса для течій однорідної в'язкої рідини без урахування переносу тепла ($T=\text{const}$) по циліндричним трубкам кругового, еліптичного, трикутного та довільного гладкого замкнутого контуру, а також між паралельними пластинами, між коаксіальними циліндрами та у відкритому каналі [22] з умовами як непротікання, так і прослизання на стінках.

Завдання 5. Отримати розв'язок системи рівнянь Нав'є-Стокса для одновимірної стаціонарної течії трьох нанорідин, що не змішуються, між безмежними паралельними пластинами за рахунок перепаду тиску (задача Пуазейля) і руху стінок каналу (задача Куетта).

Для однорідної ньютонівської рідини задача має аналітичне рішення (течія Куетта-Пуазейля) (рис. 9а). У разі одновимірної $(v_x, v_y, v_z) = (v, 0, 0)$ стаціонарної ($\partial/\partial t = 0$) течії між наскінченими ($\partial/\partial z = 0$) пластинами рівняння Нав'є-Стокса (60) мають вигляд

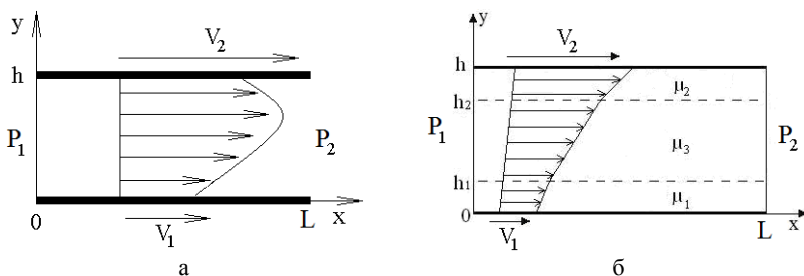


Рис. 9. Ламінарна стаціонарна течія між пластинами, які рухаються зі швидкостями $v_{1,2}$ однорідної рідини (а) і трьох не змішуваних рідин

із в'язкостями $\mu_{1,2,3}$ (б); L, h – довжина і відстань між пластинами,

$\Delta P = P_1 - P_2$ – перепад тиску на відкритих сторонах каналу

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow v = v(y), \quad (63)$$

$$0y: \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow p = p(x), \quad (64)$$

$$0x: -\frac{dp(x)}{dx} = \mu \frac{d^2 v(y)}{dy^2} \quad (65)$$

Граничні умови для (63) – (65) є

$$P|_{x=0} = P_1, \quad P|_{x=L} = P_2, \quad v|_{y=0} = V_1, \quad v|_{y=h} = V_2, \quad (66)$$

Інтегрування (65) з умовами (66) дає лінійний профіль тиску і параболічний профіль швидкості

$$p(x) = P_1 - \frac{P_1 - P_2}{L} x, \quad (67)$$

$$v(y) = V_1 + \left(\frac{\delta P}{2\mu L} h + \frac{V_2 - V_1}{h} \right) y - \frac{\delta P}{2\mu L} y^2. \quad (68)$$

Інтегрування (68) вздовж перерізу каналу дає вираз для об'ємної витрати рідини

$$Q_{K-П} = b \int_0^h v(y) dy = \frac{(V_1 + V_2)h}{2} + \frac{\delta P h^3}{12\mu L}, \quad (69)$$

де b – ширина каналу (вздовж осі Oz), індекс К-П означає відношення до течії Куетта-Пуазейля.

Диференціювання (67) дає, за визначенням, силу тертя на одиницю площини (дотичні напруження) в потоці

$$\tau_{K-П}(y) = -\mu \frac{dv}{dy} = \frac{\delta P}{L} y + \mu \frac{V_1 - V_2}{h} - \frac{\delta P}{2L} h, \quad (70)$$

так що на нижній і верхній пластинах тертя буде відповідно

$$\tau_{K-П}(0) = \mu \frac{V_1 - V_2}{h} - \frac{\delta P}{2L} h, \quad \tau_{K-П}(h) = \mu \frac{V_1 - V_2}{h} + \frac{\delta P}{2L} h. \quad (71)$$

Значення $\tau_{K-П}(0)$, $\tau_{K-П}(h)$ можна виміряти в експериментах за допомогою відповідних сенсорів (тензочуйники) і, таким чином, перевірити відповідність реальної течії моделі ламінарної течії Ньютона-Ньютонової рідини та відповідних граничних умов.

В'язку дисипацію (втрати енергії в одиницю часу, функція $D(v)$ в (60)) можна обчислити з (70) як

$$D_{K-П} \equiv \tau_{ik} v_{ik} = 2\mu \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 = \mu \left(\frac{\Delta P}{2\mu L} (2y - h) + \frac{V_1 - V_2}{h} \right)^2. \quad (72)$$

Вирази (69), (71), (72) дозволяють проаналізувати вплив параметрів задачі на течію, провести оптимізацію геометрії та / або режиму течії для досягнення мінімуму визначеного функціоналу / функціоналів, таких як в'язка дисипація, витрати енергії, задача швидкодії та інші. При $\Delta P = 0$ (69), (71), (72) переходять у відомі вирази для задачі Куетта, а при $V_1 = V_2 = 0$ – для задачі Пуазейля.

Завдання 6. У випадку течії нанорідин граничні умови (див. розд. 2) для рівнянь (39) в ізотермічному випадку мають вигляд

$$\left(v + \alpha_1 \frac{dv}{dy} + \beta_1 \frac{d^2 v}{dy^2} \right) \Big|_{y=0} = V_1, \quad \left(v - \alpha_2 \frac{dv}{dy} + \beta_2 \frac{d^2 v}{dy^2} \right) \Big|_{y=h} = V_2, \quad (73)$$

де $\alpha_1, \beta_1 > 0$ і $\alpha_2, \beta_2 > 0$ – параметри шорсткості верхньої і нижньої пластин відповідно.

Розв’язок (42)–(44) має той же вигляд $v(y) = C_1 + C_2 y - \frac{\delta P}{2\mu L} y^2$, де

$C_{1,2}$ – постійні інтегрування. Підставити цей вираз в (52), знайти константи C_1, C_2 , обчислити об’ємну витрату рідини Q , напруження в потоці $\tau(y)$ і на стінках $\tau(0), \tau(h)$, і в’язку дисипацію $D(v)$. Порівняти з (48) – (51), дослідити вплив всіх параметрів задачі на Q , $\tau(y)$, $\tau(0), \tau(h)$ і $D(v)$ і описати відмінності течій без та за наявності прослизання на стінках. Чи можливо за рахунок підбору параметрів шорсткості $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}$ збільшити Q для незмінних значень ΔP і $V_{1,2}$ за рахунок зменшення втрат енергії? Для цього розв’яжіть задачу оптимізації з обмеженням у вигляді рівняння

$$D(v) \rightarrow \min, \quad h \cdot L = \text{const}. \quad (74)$$

Порівняйте отримані результати з даними (⁵) – виноска на стор. 24. Для довідки використайте приклади формул, які були виписані для всіх відомих аналітичних розв’язків для течій в каналах з умовами прослизання другого порядку для нанорідин [22].

Завдання 7. У випадку стаціонарної ламінарної течії трьох незмішуваних в’язких рідин між паралельними пластинами (рис. 4б) маємо шарувату течію ньютонівських рідин

- 1) з в’язкістю μ_1 в шарі заввишки h_1 зі швидкістю v_1 ;
- 2) з в’язкістю μ_2 в шарі заввишки h_2 зі швидкістю v_2 ;
- 3) з в’язкістю μ_3 в шарі заввишки $h - h_1 - h_2$ зі швидкістю v_3 .

Течія кожної з рідин описується рівняннями (63) – (65), т.ч.

$$\begin{aligned} v_1(y) &= C_1 + C_2 y - \frac{\delta P}{2\mu_1 L} y^2 \\ v_2(y) &= C_3 + C_4 y - \frac{\delta P}{2\mu_2 L} y^2 \\ v_3(y) &= C_5 + C_6 y - \frac{\delta P}{2\mu_3 L} y^2 \end{aligned} \quad (75)$$

На поверхнях пластин маємо умови непротікання («прилипання») (66). Крім того, на поверхнях розділу $y = h_1$ і $y = h - h_2$ між шарами повинні виконуватися умови безперервності швидкості і механічних напружень (внутрішнього тертя), тобто

$$\begin{aligned} (v_1 - v_3)|_{y=h_1} &= 0, & (v_2 - v_3)|_{y=h_2} &= 0, \\ \left(\mu_1 \frac{dv_1}{dy} - \mu_3 \frac{dv_3}{dy} \right) \Big|_{y=h_1} &= 0, & \left(\mu_2 \frac{dv_2}{dy} - \mu_3 \frac{dv_3}{dy} \right) \Big|_{y=h_2} &= 0. \end{aligned} \quad (76)$$

Шість умов (66), (76) дають можливість знайти шість констант інтегрування C_{1-6} . Треба виписати відповідні розв'язки і провести ті ж самі обчислення і дослідження залежностей Q , $\tau(y)$, $\tau(0)$, $\tau(h)$ і $D(v)$ порівняно з результатами завдання 3.1, як це запропоновано для завдання 6.

Результати дослідження завдання такого типу, виконаного для течії трьох незмішуваних нанорідини між двома коаксіальними круговими циліндрами, були опубліковані у вигляді статті у фаховому виданні [7]. Методи дослідження та спосіб викладення результатів можна використати як приклад оформлення звіту з виробничої практики.

Завдання 8. Розв'язати задачу попереднього завдання за умовами течій нанорідини і шорстких стінок. Для цього підставити розв'язок у вигляді (75) в граничні умови вигляду (73), але для v_1 (при $y=0$) і v_3 (при $y=h$), а також в умові (76). Вирази для швидкостей будуть громіздкими, тому краще запровадити зручні перепозначення одним символом для повторюваних груп коефіцієнтів.

Обчислити об'ємну витрату швидкості за визначенням

$$Q = b \left(\int_0^{h_1} v_1(y) dy + \int_{h_1}^{h_2} v_3(y) dy + \int_{h_2}^h v_2(y) dy \right), \quad (77)$$

напруження зсуву в потоці (в шарах $y \in [0, h_1[$, $y \in [h_1, h - h_1 - h_2]$, $y \in [h - h_1 - h_2, h_2]$) і на стінках

$$\tau_1(0) = -\mu_1 \frac{dv_1(y)}{dy} \Big|_{y=0}, \quad \tau_2(h) = -\mu_2 \frac{dv_2(y)}{dy} \Big|_{y=h}, \quad (78)$$

а також сумарну в'язку дисипацію в трьох шарах вздовж трубки.

Виписати відповідні розв'язки і провести ті ж самі обчислення і дослідження Q , $\tau(y)$, $\tau(0)$, $\tau(h)$ і $D(v)$, як і в попередніх завданнях 5–7. Визначити, які набори параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ при заданих значеннях V_1, V_2 , h_1/h , h_2/h , μ_1/μ_3 , μ_2/μ_3 , $\delta P/L$ дозволяють підвищити Q за рахунок зменшення витрат енергії порівняно з випадком $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ (завдання 7).

Завдання мають практичні застосування для цілей оптимізації течій мікро- або нанорідин у каналах мікропристроїв (мікродвигунів, мініатюрних нагрівачів або охолоджувачів (кулерів), лабораторіях-чипах та ін.

Завдання 9. Знайти аналітичний розв'язок задачі (39) з урахуванням теплопереносу ($T \neq \text{const}$) для будь-якого з випадків одновимірної течії завдань 5–8. Результати дослідження зв'язаної системи рівнянь Нав'є-Стокса і теплопереносу для однорідної ньютонівської рідини і трубки кругового перерізу з шорсткими стінками, які були виконані протягом виробничої практики 2018 р., опубліковані у вигляді статті у фаховому виданні [4].

Завдання 10. Знайти розв'язок лінеаризованої системи рівнянь Нав'є-Стокса для випадку вісесиметричного ($\partial/\partial\theta=0$) хвильового ($\vec{v} = v(t, r, x) \cdot \vec{e}_x$) руху в'язкопружної рідини по трубці кругового перерізу $r=R$ під дією заданих коливань тиску на вході трубки. Рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{v}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \lambda \rho \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} &= -\nabla p - \lambda \frac{\partial}{\partial t} \nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \zeta \frac{\partial}{\partial t} \Delta \vec{v}, \end{aligned} \quad (79)$$

де $\rho, \lambda, \mu, \zeta$ – параметри моделі (константи, які залежать тільки від температури), \vec{v} – швидкість, p – тиск.

Граничні умови для (79)

$$v|_{r=R} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad p|_{x=0} = P_0 e^{i\omega t}. \quad (80)$$

З першого рівняння (79) маємо $v = v(t, r)$. Підстановка $p(t) = P_0 e^{i\omega t}$ в друге рівняння (79) дає можливість шукати вираз для швидкості у вигляді $v(t, r) = V(r) e^{i\omega t}$. Тоді для амплітуди $V(r)$ маємо рівняння Беселя, розв'язок якого з умовами (80) дає вирази для амплітуди швидкості $V(r)$. Треба виписати розв'язок рівняння, побудувати графіки $V(r)$,

обчислити об'ємну витрату $Q = 2\pi \int_0^R V(r) dr$. У випадку $\lambda = 0, \zeta = 0$ вирази

для $V(r)$ і Q повинні перейти в класичний розв'язок задачі Уомерслі для ньютонівської рідини (J.R. Womersley). Обчислили дисипацію за період коливань тиску

$$D_{Wom} = 2\mu \int_0^T dt \int_0^L dx \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \quad (81)$$

і розглянути задачу оптимізації

$$D_{Wom} \rightarrow \min, \quad R \cdot L = \text{const}. \quad (82)$$

Деякі результати обчислень завдання 10, які були виконані протягом виробничої практики 2020 р., опубліковані у вигляді статті у фаховому виданні [5].

Завдання 11. Розглядається система рівнянь, яка описує поширення плоских хвиль у м'якій трубці з незбурним перетином площиною S_0 , яка заповнена вязкопружною рідиною (узагальнені рівняння Лайтхілла)

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + S_0 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\mu u}{S} + \frac{\zeta}{S_0} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (83)$$

де

$$S(t, x) = S_0 + k(p - p_0), \quad (84)$$

– закон зміни площини перерізу м'якої трубки під час проходження хвилі по трубці, $\lambda, \rho, \mu, \zeta, k$ – задані постійні параметри стінки і рідини, p_0 – переріз незворушеної трубки, тобто $S = S_0 = \text{const}$ при $p = p_0$.

Знайти розв'язок задачі (83) – (84) у вигляді хвилі, що біжить

$$\begin{aligned} p(t, x) &= p_0 + P \cdot e^{-\alpha x} e^{i\omega(t-x/c)}, \\ u(t, x) &= U_0 + U \cdot e^{-\alpha x} e^{i\omega(t-x/c)}, \quad U_0 = 0 \end{aligned} \quad (85)$$

де ω – частота хвилі, c – її швидкість, α – коефіцієнт згасання.

Якщо $\alpha < 0$, система (83) – (84) є нестійкою (амплітуда малого збурення зростає під час поширення хвилі вздовж осі Ox).

Підставити (84) в (83), перетворити рівняння так, щоб отримати систему ДРЧП для $p(t, x)$ і $u(t, x)$. Підставити в систему розв'язок у вигляді (85), отримати з умови існування розв'язку вирази для $c(\omega)$ і $\alpha(\omega)$ і побудувати графіки цих залежностей. Отримати умову стійкості системи ($\alpha < 0$) у вигляді співвідношення між параметрами моделі. У випадку $\lambda = 0, \zeta = 0, \mu = 0$ отримана умова повинна дати відомий вираз класичної моделі Дж. Лайтхілла (J. Lighthill) для нев'язкої рідини, а для $\mu \neq 0$ – задачі Шапіро (Shapiro A.H.).

Деякі результати обчислень завдання 11, які були виконані протягом виробничої практики 2020 р., опубліковані у вигляді статті у фаховому виданні [6].

4. Статистичний аналіз даних з відкритих джерел

Перед початком обробки масивів статистичних даних з відкритих джерел рекомендується ознайомитися з найбільш важливими методами математичної статистики у прикладних дослідженнях, зокрема, у роботі з «великими» даними (big data analysis) [1]. Для виконання завдань виробничої практики пропонуються різні види даних – медична, біологічна, екологічна, астрофізична інформація, або будь-яка інша, на вибір студента, але ця інформація має бути еквівалентною за розміром масивів даних і типом завдань (методи статистичної обробки), які перелічені

у даному посібнику. Для обробки обраного типу даних рекомендовано використати 2–3 методи з наведеного переліку:

- 1) спектральний аналіз;
- 2) кореляційний аналіз;
- 3) регресійний аналіз;
- 4) дисперсійний аналіз;
- 5) кластерний аналіз;
- 6) дискримінантний аналіз;
- 7) факторний аналіз;
- 8) вейвлет аналіз;
- 9) фрактальний аналіз.

Ці методи включені до різних *пакетів прикладних програм*, які рекомендується використати під час виробничої практики, наприклад:

- електронні таблиці Microsoft Excel, Open Office, QuattroPro;
- математичні пакети Mathcad, MatLab, SkyLab;
- спеціальні статистичні пакети STATISTICA, SPSS, STATGRAPHICS, RStudio;
- RStudio⁶ (не R-Studio!) – вільне середовище розробки програмного забезпечення з відкритим вихідним кодом для мови програмування R, який розроблений для статистичної обробки даних, у тому числі для обробки графічної інформації (кривих, зображень).

4.1. Медична інформація

На вибір студента пропонується обробка інформації у вигляді часових рядів [1], числової і вербальної (описової) інформації з електронних медичних карт пацієнтів або обробки медичних зображень. Оскільки з початку 2020 р. розпочалася пандемія вірусного захворювання Covid–19, чисельні відкриті джерела пропонують якісні достатньо повні бази даних у вигляді часових рядів і додаткової інформації для математичного моделювання на основі моделей динамічних систем (см. розд. 2), ці дані надають чудову можливість студентам для використання різноманітних знань та навичок, отриманих протягом навчання за спеціальністю «прикладна математика».

4.1.1. Обробка даних захворюваності на Covid–19 у вигляді часових рядів

Детальна статистика доступна з відкритих джерел online-інформації:

- 1) Coronavirus Pandemic COVID–19.
URL: <https://ourworldindata.org/coronavirus>
- 2) Worldometr. URL: <https://www.worldometers.info/coronavirus/>

⁶ Deployment made easy. URL: <https://rstudio.com/>

- 3) The official portal for European data. URL:
<https://data.europa.eu/euodp/en/data/dataset/covid-19-coronavirus-data>
- 4) Cochrane COVID–19 publications. URL:
<https://www.cochrane.org/ru/coronavirus-covid-19-cochrane-resources-and-news>
- 5) COVID–19 map. URL: <https://www.google.com/covid19-map/>
- 6) Coronavirus tracker. URL: <https://www.ft.com/coronavirus-latest>
- 7) Coronavirus disease (COVID–19) pandemic. URL:
<https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019>
- 8) Novel Coronavirus Information Center. URL:
<https://www.elsevier.com/connect/coronavirus-information-center>

та багатьох інших.

Структура даних, наприклад, з ресурсу 2) www.worldometers.info/coronavirus включає: (1) date, (2) ISO code of country, (3) continent, (4) location, (5) number of total cases, (6) number of new cases daily, (7) new cases smoothed by 7 days, (8) number of total deaths, (9) number of new deaths daily, (10) new deaths smoothed by 7 days, (11) total cases per million of population, (12) number of new cases per million, (13) new cases smoothed by 7 days per million, (14) number of total deaths per million of population, (15) number of new deaths per million, (16) new deaths smoothed per million, (17) reproduction rate (\mathfrak{R}), (18) number of ICU (intensive care unit) patients, (19) number of ICU patients per million of population, (20) number of hospitalized patients, (21) hospitalized patients per million of population, (22) number of weekly ICU admissions, (23) number of weekly ICU admissions per million, (24) number of weekly hospital admissions, (25) number of weekly hospital admissions per million, (26) number of new tests, (27) number of total tests, (28) number of total tests per thousand of population, (29) number of new tests per thousand of population, (30) number of new tests smoothed by 7 days, (31) number of new tests smoothed by 7 days per thousand of population, (32) positive rate, number of tests per case, (33) number of tests units, (34) number of total vaccinations, (35) number of people vaccinated, (36) number of people fully vaccinated, (37) number of total boosters, number of new vaccinations, (38) number of new vaccinations smoothed by 7 days, (39) number of total vaccinations per hundred of population, (40) number of people vaccinated per hundred of population, (41) number of people fully vaccinated per hundred of population, (42) total number of boosters per hundred of population, (43) number of new vaccinations smoothed by 7 days per million of population, (44) number of new people vaccinated smoothed by 7 days, (45) number of new people vaccinated smoothed by 7 days per hundred of population, (46) stringency index, population size, (47) population density, (48) median age of population, number of aged 65 older, (49) number of aged 70 older, (50) GDP (gross domestic product) per capita in the country, (51) extreme poverty in the country, (52) cardiovasc death rate in the country, (53) diabetes prevalence in the

country, (54) female smokers in the country, (55) male smokers in the country, (56) handwashing facilities in the country, (57) hospital beds per thousand of population, (58) life expectancy in the country, (59) human development index in the country, (60) excess mortality cumulative absolute in the country, (61) excess mortality cumulative in the country, (62) excess mortality in the country, (63) excess mortality cumulative per million of population in the country.

Для цілей порівняння стану в різних країнах та виявлення закономірностей краще використовувати осереднені значення (середні за 7 днів поспіль) на певну одиницю населення (хворих на мільйон, протестованих на тисячу, вакцинованих на сотню) [2,3].

Серед численних факторів, пов'язаних із ризиком Covid-19, виявлено, що економічна нерівність посилює ризик передачі Covid-19. Кількість ліжок на душу населення негативно корелює зі смертністю від Covid-19. Групи крові В і АВ виявлені захисними факторами для ризику Covid-19, тоді як група крові А була фактором ризику. Збільшення споживання овочів, істівної олії, білків, вітаміну D та вітаміну К було пов'язано зі зниженням, тоді як збільшення споживання алкоголю було пов'язане з підвищенням ризику Covid-19. Інші фактори включали вік, стать, температуру, вологість, соціальну дистанцію, куріння, інвестиції в охорону здоров'я, рівень урбанізації та расу. Всебічна ідентифікація факторів, які впливають на передачу Covid-19 та летальний результат, може дати нові уявлення про пандемію Covid-19 та знайти ефективні стратегії запобігання та міграції поширення Covid-19.

Приклади завдань для статистичних досліджень. Провести регресійний, спектральний і фрактальний аналіз даних та перевірити наявність кореляцій захворюваності / смертності від Covid-19 в різних країнах, землях, областях тощо з:

1. Параметрами сонячної активності⁷.
2. Погодними факторами⁸.
3. Географічними координатами та площею країни (координатами деякого «умовного центру», геометричного або столиці, наприклад).
4. Числом курців у країні та рівнем продажів тютюнових виробів.
5. Залучення населення до активних занять спортом.
6. Рівнем серцево-судинних захворювань (гіпертонія, атеросклероз, серцева недостатність тощо).
7. Рівнем захворювань на астму.
8. Рівнем простудних та вірусних захворювань верхніх дихальних шляхів (грип, ангіна, пневмонія).
9. Рівнем захворювань на кон'юнктивіт.

⁷ Solar Influences Data Analysis Center. URL: <http://sidc.oma.be/silso/>

⁸ Gismeteo: Weather forecast for today. URL: <https://www.gismeteo.com/api/>

10. Рівнем захворюваності / смертності від сезонного грипу в цій країні за попередніми роками.
11. Рівнем коштів, вкладених у медицину.
12. Віковим складом населення.
13. Відмінною міжособистісною дистанцією в цій країні.
<http://psyresearchdigest.blogspot.com/2018/01/interpersonal-distances.html>
(інтернет-посилання не дійсне!)
14. Рівнем соціальної активності (частота комунікацій протягом дня) у цій країні.
15. Рівнем розвитку туризму (кількість туристів, що прибувають у країну).
16. Щільністю населення.
17. Індексом загального розвитку HDI (Human Development Index).
18. Рівнем захворюваності на ВІЛ.

Поставлені питання пов'язані з широким колом досліджень про можливі шляхи передачі та уражень індивідів вірусом Covid-19 та його модифікаціями, починаючи з перших місяців пандемії. Починаючи з 2020 р., з'являються наукові публікації з перелічених вище питань, наприклад, одна з найперших статей кореляції захворюваності на Covid-19 та історичним рівнем обов'язкової вакцинації населення країни з туберкульозу (БЦЖ).⁹

Дані захворюваності на пневмонію за останні роки можна знайти у відкритих джерелах, наприклад:

1) Статистика з пневмонії у світі. URL:

<https://ourworldindata.org/pneumonia>

2) Статистика в USA. URL:

<https://www.cdc.gov/nchs/fastats/pneumonia.htm>

3) Статистика в UK. URL: <https://statistics.blf.org.uk/pneumonia>

Під час виконання задач виробничої практики, які пов'язані зі статистичним аналізом даних пандемії Covid-19, студенти найчастіше використовували кореляційний, кластерний і спектральний аналіз даних [1].

Приклад результатів кореляційного аналізу. Була проведена статистична обробка даних з відкритих джерел щоденних вимірювань загальної кількості хворих I_{tot} і померлих D_{tot} та нових випадків на день I_{day} і D_{day} захворілих і померлих, загальні кількості активних A_{tot} і критичних C_{tot} випадків та тих, хто одужав R_{tot} пацієнтів, кількості T_{tot} проведених тестів, осереднені за 7 днів і перелічені на одиницю чисельності населення. Серед факторів, які найчастіше згадуються та вивчаються як найбільш впливові на динаміку хвороби в країні, кантоні, області тощо, є середній вік населення, доля літнього населення, індекс розвинення країни, кількість коштів, що витрачаються на медицину, HDI, туристична активність, соціальна дистанція,

⁹ MedPxiv. URL: <https://www.medrxiv.org/content/10.1101/2020.03.24.20042937v1.full.pdf+html>

рівень продажу тютюнових виробів, кількість курців, спортивна активність, кліматичні фактори та інші. Оскільки дослідити залежності від визначених вище факторів в рамках одного дослідження неможливо, були обрані соціально-економічні фактори. HDI – це сумарний показник середніх досягнень за ключовими параметрами людського розвитку: довге і здорове життя, рівень отриманих знань і гідний рівень життя, який розраховується як середнє геометричне нормованих індексів для кожного з трьох вимірів. Для детального уявлення найбільш вагомих параметрів, які повинні бути включені до математичної моделі, що дозволить прогнозувати динаміку пандемії та впливати на неї, проводився кореляційний аналіз між параметрами $\{I_{tot}, D_{tot}, I_{day}, D_{day}, I_{14}\}$ та різними соціально-економічними показниками з баз великих даних, що були виміряні для кожної з країн в 2019 р. Для порівняння були відібрані 60 країн, у тому числі з Європи (31), Азії (15), Африки (6), Північної (2) і Південної (4) Америки та Океанії (2). Методами кореляційного аналізу досліджувались таблиці коефіцієнтів кореляції. За наявності позитивної або негативної кореляції для діаграм розсіювання будувалися лінійні, експоненціальні та степеневі регресійні залежності методом найменших квадратів.

Статистичний аналіз показав, що кореляції між кумулятивними параметрами є незначними. Це може бути пов'язано з різною кумулятивною динамікою пандемії в країнах (перша хвиля, початок, пік, згасання або закінчення другої хвилі), введення суворих, середніх або легких обмежень, охопленість і доступність тестування, відкритість даних та ін. Значущими є лише ті результати, які виявили кореляції та відповідні регресійні залежності з високим коефіцієнтом детермінації (R^2). На рис. 10а,б наведені діаграми розсіювання $D_{mln}(I_{mln})$ і $I_{14}(I_{mln})$ для кількостей I_{day} , D_{day} , I_{14} перелічених на 1 млн населення країни. На рис. 5в,г наведені ті ж самі залежності, але тільки для країн Європи із зазначенням країн. Значущі регресійні залежності (рис. 10а) були знайдені для $D_{mln}(I_{mln})$ тільки для країн Африки $\sim 0.035 \cdot x^{0.798}$; ($R^2 = 0.9597$), тоді як залежності $I_{14}(I_{mln})$ – для країн Африки ($\sim 1.246 \cdot x^{1.001}$; $R^2 = 0.9954$), Азії ($\sim 1.515 \cdot x^{0.958}$; $R^2 = 0.9931$) і Європи ($\sim 2.309 \cdot x^{0.918}$; $R^2 = 0.9036$). Таким чином, географічне положення та рівень економічного розвитку країни не визначає залежності D/I за день, 2 тижні або за період пандемії, та інші фактори можуть бути суттєво більш значущими. Водночас виявилась лінійна кореляція між I_{14} і I_{mln} (рис. 10б). У наведених вище ступеневих залежностей показник ступеня ~ 1 , але коефіцієнти залежностей різні для країн Африки, Азії і Європи. Значно вищий коефіцієнт залежності для країн Європи може бути пов'язаний з кількістю тестувань та доступністю даних. Для країн Північної Америки та Океанії (по 2 країни) регресійний аналіз не має сенсу, але формальний аналіз дає такі залежності $D_{mln}(I_{mln})$ і $I_{14}(I_{mln})$: для Північної

Америки ($\sim 0.219 \cdot x^{0.458}$; $R^2 = 1$ і $\sim 0.576 \cdot x^{1.157}$; $R^2 = 1$) і для Океанії ($\sim 0.348 \cdot x^{0.657}$; $R^2 = 1$ і $\sim 0.941 \cdot x^{0.374}$; $R^2 = 1$). Таким чином,

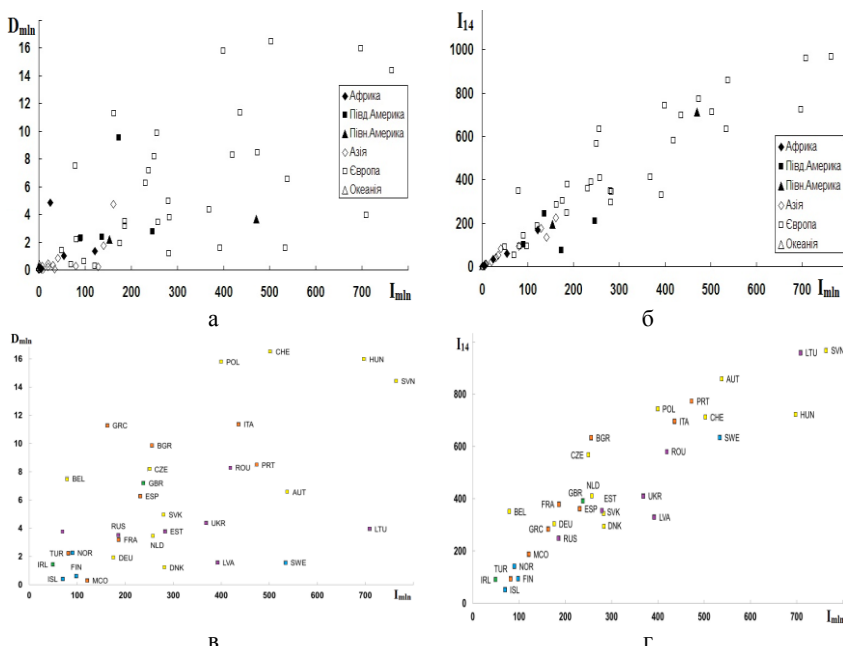


Рис. 10. Діаграми $D_{\text{mln}}-I_{\text{mln}}$ (а) і $I_{14}-I_{\text{mln}}$ (б) станом на 1/12/2020 р. для 60 країн та ті ж діаграми (в), (г) для країн Європи. Умовні позначення: Austria (AUT), Belgium (BEL), Bulgaria (BGR), Czechia (CZE), Denmark (DNK), Estonia (EST), Finland (FIN), France (FRA), Germany (DEU), Greece (GRC), Hungary (HUN), Iceland (ISL), Ireland (IRL), Italy (ITA), Latvia (LVA), Lithuania (LTU), Monaco (MCO), Netherlands (NLD), Norway (NOR), Poland (POL), Portugal (PRT), Romania (ROU), Russia (RUS), Slovakia (SVK), Slovenia (SVN), Spain (ESP), Sweden (SWE), Switzerland (CHE), Turkey (TUR), Ukraine (UKR), United Kingdom (GBR)

останні залежності суттєво відрізняються від статистичних. Таким чином, показник I_{mln} , який прийнятий як поріг для введення локдауну в деяких країнах Європи, є обґрунтованим, але повинен розраховуватися окремо для кожної країни з урахуванням різниці в отриманих вище коефіцієнтів у регресійних залежностях. Наприклад, у воєводствах республіки Польщі офіційно прийнятий поріг $I_{\text{day}} > 10^2/10^5$. Загальна статистика для всіх 60 країн дає залежності $\sim 0.124 \cdot x^{0.574}$; $R^2 = 0.498$ і $\sim 1.438 \cdot x^{0.988}$; $R^2 = 0.9805$ для $D_{\text{mln}}(I_{\text{mln}})$ і $I_{14}(I_{\text{mln}})$ відповідно. Як видно з рис. 10в,г чітких територіальних залежностей, які можна було б пояснити різницею в середньорічній температурі, вологості повітря та

інших географічних та кліматичних факторах, не спостерігається. Всі країни Північної Європи, крім Швеції, виявляють низькі значення D_{mln} , I_{mln} , I_{14} , що пояснюється особливістю обраної Швецією тактики боротьби з Covid-19 протягом першої хвилі пандемії.

Кореляційний аналіз проводився між усіма показниками пандемії $\{I, D, A, C, R\}$ за день, за 2 тижні і загальною кількістю на 1.12.2020 р. Та зазначеними вище економічними факторами. Були розраховані коефіцієнти кореляції Пірсона (P_{ij}). Оскільки більшість параметрів пандемії не має нормального розподілу, були обчислені коефіцієнти Спірмена (R_{ij}). У разі достатньо великих значень $P, R > 0.5$ будувалися відповідні діаграми розсіювання та кореляційні залежності (лінійні, експоненціальні та ступеневі). За умовою $R^2 > 0.8$ робився висновок про наявність значущої кореляції. Величина середнього геометричного (СГ) трьох показників давала можливість оцінити наявність відповідних прямих функціональних залежностей [1]. Деякі результати виконання завдання протягом практики 2020 р. [3] наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Наявність кореляцій між показниками:

$CG > 0.8$ (+), $0.8 > CG > 0.6$ (\pm), $0.6 > CG > 0.4$ (\mp), $0.4 > CG$ (-)

		I_{tot}	A_{tot}	C_{tot}	R_{tot}	D_{tot}
1	Географічне положення країни	\mp	-	-	-	-
2	Площа країни	\pm	-	-	-	-
3	Щільність населення	\pm	\mp	\mp	\mp	\pm
4	ВВП на душу населення	\mp	\mp	\mp	\pm	\pm
5	Витрати на охорону здоров'я (% ВВП)	\pm	\mp	\mp	\pm	\pm
6	Рівень розвитку туризму (% ВВП)	+	\mp	\mp	\mp	\pm
7	Кількість туристів на душу населення	+	\pm	+	\pm	+
8	HDI	\pm	\pm	\mp	\pm	\mp

Наведені результати виконання виробничої практики дають також приклад оформлення тексту звіту, таблиць і рисунків з результатами статистичного аналізу даних. Ці результати були опубліковані у вигляді статті у фаховому виданні [7].

Приклад результатів спектрального аналізу. Тривалість пандемії протягом більше 2 років дає можливість виявити та проаналізувати хвильовий характер кривих $I(t)$, $D(t)$ та інших з відкритих баз даних. Наявність у лікарень і лабораторій вихідних (субота-неділя) та психологічні особливості людей приводять до того, що дані нових випадків захворювань, смерті, тестуванні та ін. мають мінімум на вихідних і максимум – у середу-четвер. Для усунення наслідків «людського фактору» проводиться осереднення вихідних даних саме за 7 днів поспіль. Застосування більш широкосмугових фільтрів не поліпшує динаміку коливань, а тільки зменшує максимуми і підвищує мінімуми кривих.

Більш довгоперіодичні коливання динаміки захворювання можна проаналізувати за допомогою спектрального аналізу, тобто розрахунків амплітудно-фазового спектру [1]. Протягом виробничої практики 2021 р. студенти обрали як завдання спектральний аналіз динаміки Covid-19. Нижче як приклад наведені деякі результати виконання завдань практики, які були опубліковані у вигляді статті у фаховому виданні [8].

Офіційна статистика пандемії по країнам Європи в цілому починається з 22 січня 2020 р., хоча початок постійної щоденної реєстрації в різних країнах відрізняється. Так, в Україні це 3.03.2020 р. Для цілей

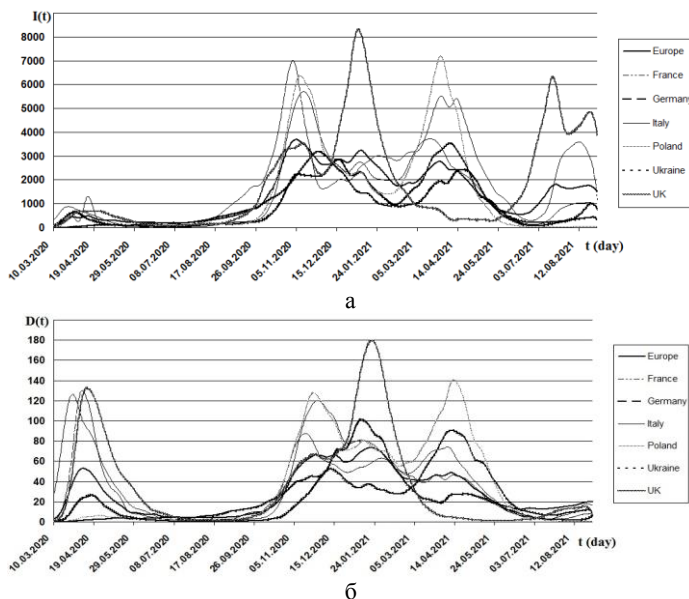


Рис. 11. Різні типи динаміки кривих $I(t)$ (а) і $D(t)$ (б) в країнах Європи

порівняльного аналізу обиралися дані, нормалізовані на чисельність населення станом на 2019 р., до початку пандемії. На рис. 11а,б наведені для порівняння згладжені нормалізовані криві $I(t)$ (рис. 11а) і $D(t)$ (рис. 11б) для України і деяких країн Європи. Видно, що динаміка поширення епідемії в деяких країнах суттєво відрізняється. Максимуми другої і третьої «хвилі» практично збігаються у Франції, Італії, Польщі, Великій Британії і трохи запізнюються – у Німеччині й Україні. Амплітуди хвиль значно вищі у Франції, Італії, Польщі, Великій Британії і значно нижчі – в інших країнах. Загальна динаміка по країнам Європи відображає сумарний вклад всіх країн і тому має складнішу багатохвилову динаміку. Максимуми кривих $D(t)$ часто майже збігаються, наприклад для першої хвилі (максимуми припадали на 31.03 – 16.05.2020 р.), другої (18.11.2020 –

23.01.2021 р.) і третьої (8.04 – 28.04.2021 р.) хвиль. Порівняння кривих $I(t)$ і $D(t)$ для кожної з країн показує, що максимуми кривих під час деяких хвиль зсунуті на 1–3 тижні, що відповідає часу розвинення різних штамів Covid-19 (інкубаційний період розвинення інфекційної хвороби).

Порівняння незгладжених даних (щоденні значення) і відповідних кривих, згладжених методом ковзаючого середнього з вікном у 7 днів дозволяє обчислити відповідні осциляції

$$I_{osc}(t) = I(t) - \langle I(t) \rangle, \quad D_{osc}(t) = D(t) - \langle D(t) \rangle. \quad (86)$$

Приклад результатів обчислення осциляцій наведений на рис. 12 для випадку України. Найбільш значні друга і третя хвилі мають чіткі максимуми, а швидкості зростання та зменшення числа нових випадків близькі (рис. 12а). Коливання чисельності нових випадків значно вище в третю хвилю, ніж у другу (рис. 12б), що може бути пов'язано як з недосконалістю або перевантаженістю системи контролю, так і з іншими чинниками.

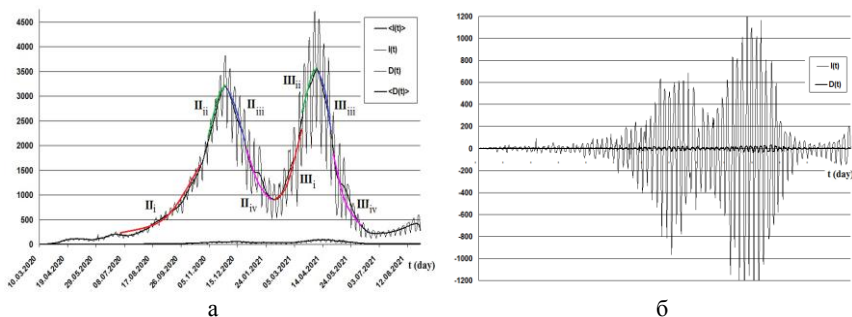


Рис. 12. Вихідні і осереднені криві для $I(t)$, $\langle I(t) \rangle$ і для $D(t)$, $\langle D(t) \rangle$ (а) і відповідні хвильові компоненти (б); i,ii,iii,iv відповідають різним стадіям хвилі

Був проведений спектральний аналіз кривих $I_{osc}(t)$, $D_{osc}(t)$ для України та сусідніх країн Європи. Коефіцієнти розкладення кривих в ряди Фур'є обчислювалися за формулами Ейлера для періодів коливань $T=2-21$ доби.

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(Amp_j \cdot \sin(\omega_j t - \varphi_j) \right), \quad (87)$$

$$\text{де } \omega_j = \omega_0 j, \quad \omega_0 = 2\pi / T, \quad Amp_j = \sqrt{A_j^2 + B_j^2}, \quad A_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi j}{T} t\right) dt, \\ B_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi j}{T} t\right) dt, \quad \varphi_j = \arctg(B_j / A_j).$$

Сезонні коливання з періодами >1 місяця не досліджувалися в силу недостатньо довгого періоду загальних спостережень. Результати розрахунків коефіцієнтів A_j , B_j розкладень по функціям $\cos(\omega_j t)$, $\sin(\omega_j t)$

згладжених часових рядів $I_{osc}(t)$, $D_{osc}(t)$ показали значно вищі амплітуди коливань для 2–4 хвиль і малі амплітуди, які знаходяться на межі похибок вимірювань, – для довгоперіодичних коливань з $T > 10$ –14 діб (рис. 13а).

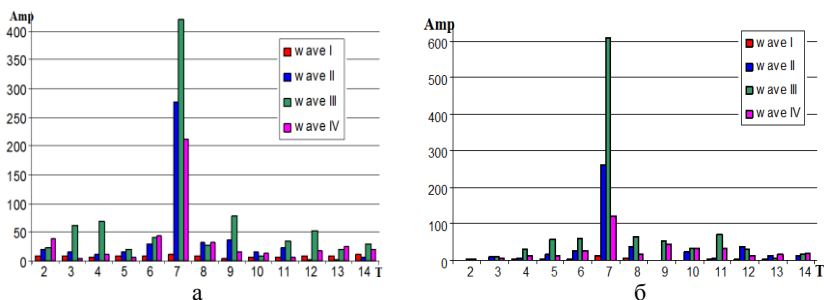


Рис. 13. Спектр коливань кривих $I_{osc}(t)$ для Європи (а) і України (б)

Амплітуди коливань з періодом $T=7$ діб відрізняються не тільки в різних країнах Європи, але й протягом різних хвиль (I–IV хвилі) в одній країні (рис. 14), що вказує на різні рівні підготовленості і напруженості систем медичної допомоги і контролю в країнах. Слід відмітити, що значність 7-денної компоненти в коливаннях числа нових випадків хвороби схожа в більшості країн Європи та в Європі в цілому (рис. 14а),

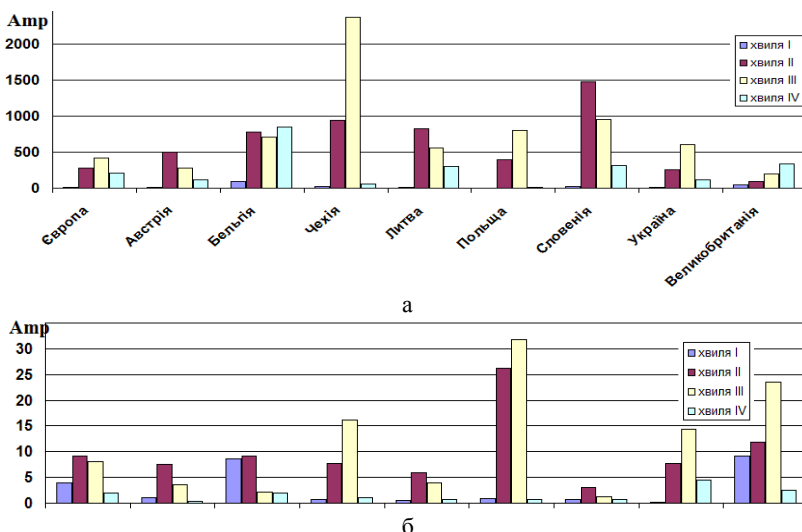


Рис. 14. Амплітуди спектрів кривих $I_{osc}(t)$ (а) і $D_{osc}(t)$ (б) з періодом $T=7$ діб але в статистиці смертельних випадків може відрізнятися в деяких країнах як в бік збільшення, так і зменшення (рис. 14б). Ця компонента не має математичного обґрунтування і тому значно ускладнює аналіз

статистичних даних з метою виявлення закономірностей і формулювання математичної моделі.

Для цілей аналізу даних, пов'язаних саме з поширенням вірусу, а не з особливостями статистичної служби в різних країнах, ця компонента з відповідною амплітудою була видалена з нормалізованих осереднених рядів даних $I_{osc}(t)$, $D_{osc}(t)$, $T_{osc}(t)$, $V_{osc}(t)$, $R_{osc}(t)$. Спектральний аналіз амплітуд Amp_j і фазових зсувів φ_j (87) отриманих осциляцій показав, що в більшості країн амплітуди і зсуви фаз інших компонентів $T_j = 2 - 6, 7, 8 - 21$ незначні, але в деяких країнах спостерігаються хаотичні стрибки обох параметрів від гармоніки до гармоніки, що відповідає можливості хаотичної динаміки. На рис. 15 наведений приклад такої динамічної поведінки для Словенії. Амплітуда окремих гармонік змінюється в різних хвилях (рис. 15а), а зсуви фаз немонотонно зростають з номером гармоніки для майже всіх значень $j = 2-21$ (рис. 15б). Така динамічна поведінка може вказувати як на специфіку поширення вірусу, так і на недостатність соціально-економічних заходів протидії пандемії.

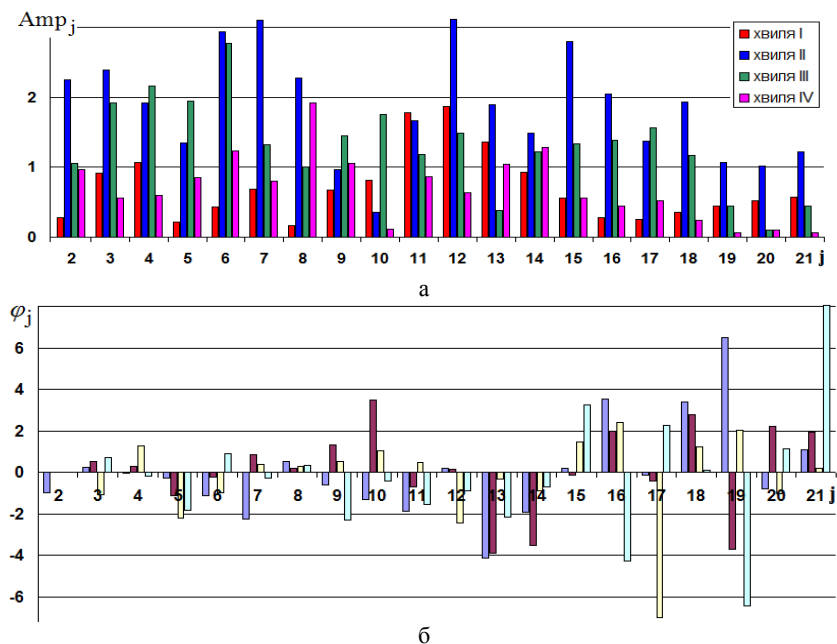


Рис. 15. Амплітуди (а) і зсуви фаз (б) спектру кривих $D_{osc}(t)$ для Словенії

Для кожної з хвиль I-III кожної з досліджених країн Європи були отримані статистичні апроксимації ділянок експоненціального зростання і спадання осереднених кривих $I(t)$ і $D(t)$, а саме стадій швидкого (і)

і повільного (ii) зростання, швидкого (iii) і повільного (iv) зменшення числа випадків в кожній із хвиль (рис. 2а) у вигляді залежностей $I_k(t) = a_{1k} \exp(b_{1k}t)$, $D_k(t) = a_{1k} \exp(b_{2k}t)$, де $k = \{i, ii, iii, iv\}$, $a_{1k}, b_{1k}, a_{2k}, b_{2k} = \text{const}$. Отримані залежності важливі для валідації математичних моделей пандемії (8), (19), (22) або (26) у кожній країні.

Наведені результати виконання виробничої практики у 2021 р. були опубліковані у вигляді статті у фаховому виданні [8].

Приклад результатів кластерного аналізу. Кластерний аналіз використовується для класифікації об'єктів за мірою схожості їх динамічної поведінки або інших показників. Виявлення ступеня схожості кривих захворювання в різних країнах дозволяє виявити взаємозв'язки між ними, схожі проблеми у боротьбі з пандемією. Під час проходження виробничої практики 2021 р. деякі студенти обрали задачі обробки даних пандемії Covid-19 за допомогою кластерного аналізу для подальшого математичного моделювання на основі математичних моделей (8), (19).

Дані з відкритих баз даних у вигляді часових рядів $I_j(t)$, $D_j(t)$, $R_j(t)$ та ін., де $j=1,2,\dots,n$ – порядковий номер країни, згладжувалися за кожні 7 діб. Проводилася загальна описова аналітика (максимум, мінімум, середні значення, медіана, дисперсія і т.д.). В кожному з рядів виділялися лінії тренду і осциляції (див. [1] і попередній розділ про спектральний аналіз). Оскільки відповідні імовірнісні розподілення не відповідали нормальному (Гаусовому), замість розрахунків коваріацій і парних кореляцій аналізу був використаний метод найближчого сусіда [1]. При цьому для кожної з пар кривих $(X_j(t), X_k(t))$, де j і k – номери з обраного набору з n країн, $X(t)$ – часові ряди одного типу (захворілі, померлі і т.д.) обчислювалася відстань $D(X_j, X_k)$ між ними у декартовій метриці

$$D(X_j, Y_k) = \left(N^{-1} \sum_{m=1}^N (X_j(t_m) - Y_k(t_m))^2 \right)^{1/2}, \quad (88)$$

де N – число днів спостережень або довжина часових рядів.

Пара країн з мінімальною серед усіх облічених відстанню замінювалася на новий часовий ряд $\{X_{jk}(t_m)\}_{m=1}^N = \{X_j(t_m) - X_k(t_m)\}_{m=1}^N$, після чого процедура обчислень відстаней для всіх пар зі списку $n-1$ країн повторювалась. Після кожної ітерації кількість країн зменшувалася на одну. Після закінчення ітерацій за (88) генерувалося дерево найближчих сусідів, яке відповідало найбільш подібним кривим динаміки епідемії в країнах. На рис. 16 наведений результат розрахунків для часових рядів $I_j(t)$ країн Європи у вигляді так званого дерева подібностей. Таким чином, на відміну від візуальної оцінки подібності динаміки у вигляді кількості і структури окремих хвиль (рис. 3а-г, рис. 11а,б, рис. 12а), використаний метод дозволяє кількісно оцінювати ступінь подібності

у вигляді дерева відстаней. Окремі агрегати країн дуже добре відповідають їх географічним локаціям, наприклад, Велика Британія і Ірландія; Іспанія, Португалія і Монако; Польща і Угорщина; Норвегія і Фінляндія, Росія і Білорусь і т.д. Ці агломерати відповідають країнам з найбільш інтенсивним сполученням, спілкуванням і переносом інфекції.

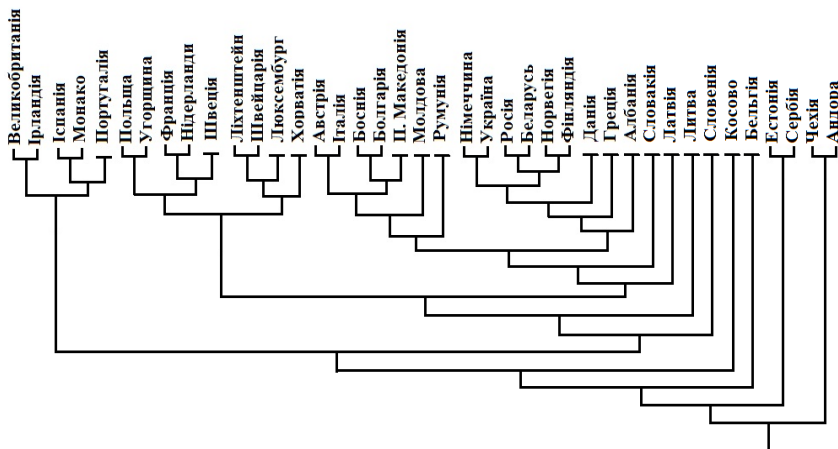


Рис. 16. Дерева відстаней для кривих $I(t)$ 40 країн Європи

Наведені результати виконання виробничої практики у 2021 р. були опубліковані у вигляді статті у фаховому виданні [9].

4.1.2. Аналіз даних і математичне моделювання системи кровообігу людини

Для проведення клінічної діагностики захворювань, уточнення діагнозу, вибору найкращого методу лікування або планування хірургічної операції в медицині використовуються різноманітні методи діагностики – клінічні аналізи крові та інших рідин організму, біопсія, аналіз медичних зображень і дані вимірювань сигналів, таких як коливання артеріального тиску і швидкості крові в артеріях і венах, кардіограма і енцефалограма та інші. Остатні дані є прикладом часових рядів, для аналізу яких завжди використовуються спеціальні статистичні методи і математичне моделювання. Як завдання виробничої практики були запропоновані статистична обробка медичної інформації у вигляді часових рядів і її аналіз за допомогою математичних моделей у вигляді систем ЗДР. Дані вибиралися з відкритих джерел медичної інформації, наприклад,

1. Open research resource for complex physiologic signals. URL: physionet.org/
2. Open electronic medical resource. URL: www.open-emr.org/
3. Open medical resource system. URL: openmrs.org/
4. Open source health charting system Nosh. URL: noshemr.wordpress.com/

5. A super-efficient practice management system. URL: www.solismed.com/
6. Clinical, diagnostic and patient management information database. URL: www.bahmni.org/
7. Open source electronic medical record and practice management system. URL: freemedsoftware.org/

Завдання 12. Аналіз реограм. Реографія – це метод дослідження пульсових коливань кровонаповнення судин різних органів і тканин, який пов'язаний з графічною реєстрацією змін повного електричного опору Z_e тканин за допомогою кругових електродів (рис. 17а). Метод застосовується в клінічній діагностиці різних судинних порушень кровопостачання внутрішніх органів. Найбільш поширені на сьогодні реоенцефалографія – метод оцінки мозкового кровообігу та офтальмореографія – метод оцінки кровопостачання очних яблук та очних м'язів. Оскільки зміни електричного опору тканин в будь-якому перерізі тіла людини пов'язані зі змінами об'єму крові, який притікає до органу в систолу та відтікає в діастолу, періодичні коливання $Z_e(t)$ можуть бути перераховані в коливання об'ємної витрати крові $Q(t)$ на відповідній ділянці тіла.

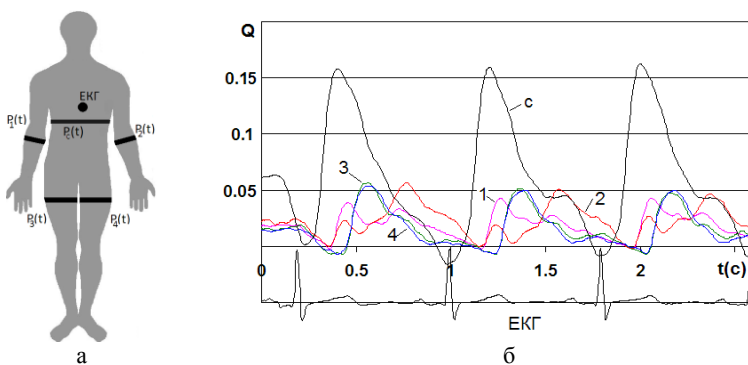


Рис. 17. Розташування кругових електродів під час вимірювань (а) та приклад кривих $Q_c(t)$ і $Q_{2-4}(t)$ (б)

Метод реографії простий, швидкий та дешевий порівняно з ультразвуковою або магніторезонансною технікою вимірювання. Він дозволяє ефективно проводити діагностику кровообігу нижніх та верхніх кінцівок, оцінювати ефективність лікування атеросклерозу та ін. Розташування електродів під час вимірювання залежить від цілей дослідження. Отримані криві $Q(t)$ (рис. 17б) далі згладжувалися і досліджувалися як часові ряди. Оскільки абсолютні і навіть відносні значення Z_e різних частин тіла мають значний індивідуальний розкид, найбільш достовірним є порівняльний аналіз параметрів кривих, наприклад, у лівій та правій кінцівках, до та після лікування або фізичного навантаження та ін.

Як задачу для виробничої практики було запропоновано дослідження коливань тиску $P_j(t)$ і об'ємної витрати крові $Q_j(t)$, що були виміряні з кроком за часом $\Delta t = 4$ мс на поперечних перетинах грудної клітки, верхніх та нижніх кінцівках разом з електрокардіографічним (ЕКГ) сигналом (рис. 17а). Криві були відібрані з відкритої бази даних фізіологічної інформації *physionet* (див. п. 1 з переліку на стор. 36). Приклад набору кривих для одного з випробуваних наведений на рис. 17б. Попередні дослідження реографічних даних показали, що у молодих здорових випробуваних спостерігається добре узгодження між всіма парами кривих $Q_j(t)$ у вигляді майже лінійних залежностей $Q_j(Q_k)$, тоді як у випробуваних старшого віку та у пацієнтів з порушеннями кровообігу в кінцівках спостерігаються нелінійні несиметричні залежності більшості з пар $Q_j(Q_k)$ з великим розкидом від скорочення до скорочення серця та навіть переходом до хаотичної динаміки [22]. Таким чином, використання кореляційного аналізу та методів оцінки міри хаотичності динамічних кривих можуть дати нові показники для медичної діагностики порушень кровообігу.

Всі вибрані криві згладжувались методом зваженого ковзного середнього, що дозволяє зберігати значення локальних максимумів і мінімумів кривих [1]:

$$F(t_i) = \frac{2}{s(s+1)} \sum_{j=1}^s j \cdot f(t_{i-j}), \quad s = \begin{cases} 1, & i = 1, n \\ 3, & i = 2, n-1 \\ 5, & 2 < i < n-1 \end{cases} \quad (89)$$

де $f(t_i)$ і $F(t_i)$ – вихідні і згладжені значення виміряних дискретних кривих.

Потім за піковими значеннями ECG на кривих виділялися окремі коливання. Оскільки ритм серцевих скорочень характеризується істотною варіабельністю і випадковими коливаннями амплітуди, всі окремі коливання наводилися до стандартної довжини $t = T^* = 1$ та значенню максимуму $Q = Q^* = 1$, де T^* – безрозмірний період скорочень серця, а Q^* – максимальна швидкість притоку крові у систолу. Оскільки значення T^* і Q^* різні у різних пацієнтів різної маси та року, приведення до безрозмірного вигляду має важливе значення для виявлення внутрішньо групових закономірностей.

Спектральний аналіз кривих $Q_j(t)$ проводився студентами за допомогою вбудованих функцій Python 3.8.2. Для розрахунків спектра використовувалося стандартне швидке дискретне перетворення Фур'є.

Наявність кореляцій між усіма парами дискретних кривих вивчалася на основі лінійного коефіцієнта коваріації

$$\text{cov}(Q_i, Q_j) \equiv \chi_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (Q_i(t_n) - \langle Q_i \rangle) (Q_j(t_n) - \langle Q_j \rangle), \quad (90)$$

де $\langle Q_{i,j} \rangle$ – середні значення відповідних дискретних кривих.

Як міра хаотичності динамічного процесу використовувалася експонента Ляпунова, яка обчислювалася за формулою [1]

$$\lambda = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{|x(t) - y(t)| \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \cdot \ln \frac{|x(t + \tau) - y(t + \tau)|}{|x(t) - y(t)|}, \quad (91)$$

де $x(t)$ і $y(t)$ – дві динамічні траєкторії, що незначно відрізняються в початковий момент часу. Якщо динамічний процес стійкий, через час τ збурені траєкторії будуть відрізнятися від початкових як $|x(t + \tau) - y(t + \tau)| = |x(t) - y(t)| \exp(\lambda \tau)$, де $\lambda < 0$. Якщо $\lambda > 0$, процес може стати хаотичним.

На рис. 18а-в представлені діаграми розсіювання для пар кривих Q_1 і Q_2 та Q_3 і Q_4 , що були виміряні в верхніх та нижніх кінцівках відповідно. Такі залежності характерні для більшості з випробуваних. Таким чином, коливання об'ємів крові, які постачаються в ліву та праву верхні кінцівки, майже синхронні як в систолу, так і в діастолу (рис. 18а,в).

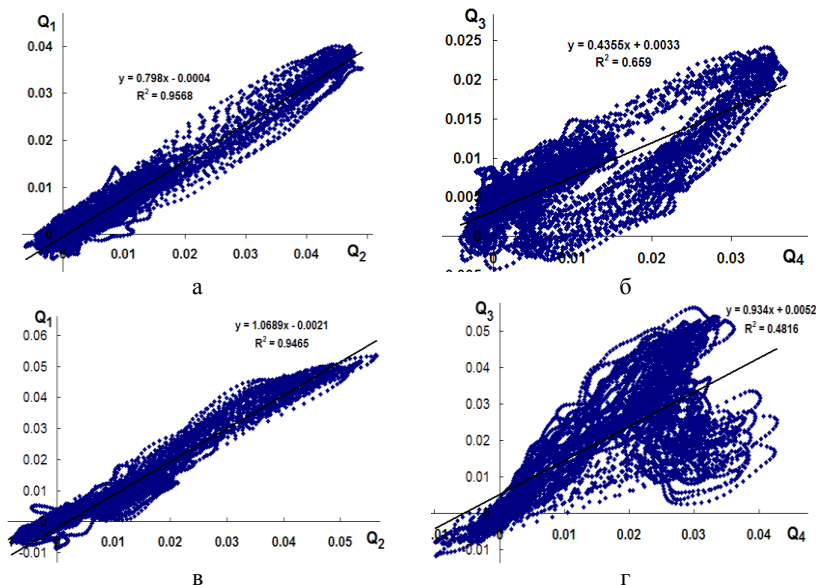


Рис. 18. Діаграми розсіювання пар кривих Q_1 і Q_2 (а,в) і Q_3 і Q_4 (б,г) для випробуваних середнього (36 р.) (а,б) та похилого (в,г) віку

Коефіцієнт кореляції у всіх випадках близький до одиниці ($\kappa > 0.88$), а дисперсія незначна. Відповідна математична модель може ґрунтуватися на моделі артеріального русла кінцівки як лінійної або слабко нелінійної в'язкопружної камери [22]. Значні нелінійні коливання із запізненням

між двома кінцівками спостерігалися тільки у двох випробуваних середнього віку з вираженим атеросклерозом. Аналогічні залежності між кровопостачання в ліву та праву нижні кінцівки більш складні. У відносно молодих випробуваних залежності $Q_3(Q_4)$ мають вигляд коливань навколо лінійного тренду з відносно невеликою дисперсією (рис. 18б). У більшості випробуваних похилого віку ці залежності змінюють свою поведінку від скорочення до скорочення та непередбачено відбиваються вище або нижче лінії тренду (рис. 18г), що вказує на хаотичну поведінку. Остання може бути пов'язана з несиметричним розширенням, підвищеною звивистістю та тромбозом глибоких судин нижніх кінцівок.

Результати обчислення коефіцієнтів коваріації χ_{ij} для всіх пар дискретних кривих показали, що у молодих здорових випробуваних є значна кореляція параметрів центральної гемодинаміки та кровопостачання до всіх кінцівок, так само як і між двома верхніми та двома нижніми кінцівками (табл. 3). При цьому всі значення $\chi_{ij} > 0.87$. У більшості літніх випробуваних кореляція між центральною та регіональною гемодинамікою слабка, так само як і кровопостачання до обох верхніх або обох нижніх кінцівок. При цьому $\chi_{ij} \in [0.35; 0.68]$; значення χ_{ij} вище для верхніх кінцівок, але значно нижче для нижніх кінцівок (табл. 3), навіть коли випробувані не мають виражених симптомів недостатності кровопостачання до кінцівки.

Таблиця 3

Коефіцієнти коваріації для різних пар кривих для здорових кінцівок (нижче діагоналі) та з порушеннями кровотоку (вище діагоналі)

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Q_1	1	0.649	0.55	0.777
Q_2	0.93	1	0.519	0.872
Q_3	0.91	0.907	1	0.463
Q_4	0.915	0.912	0.98	1

Аналогічні висновки були отримані під час аналізу розрахунків експонент Ляпунова λ_j всіх виміряних дискретних сигналів (табл. 4).

У більшості випадків позитивні значення λ_j малі порівняно з часами, на яких можливий перехід від регулярної динаміки до хаотичної з помітними змінами діаграм розсіювання (рис. 18), але наявність великого числа скорочень серця та можливого впливу протягом цього часу великої сукупності зовнішніх фізичних та внутрішніх фізіологічних факторів уможливорює перехід до непередбачуваних некорельованих осциляцій гемодинамічних параметрів у різних відділах зв'язаної системи кровообігу людини (наприклад, рис. 18в,г).

Таблиця 4

Значення експонент Ляпунова для 7 груп випробуваних ($\cdot 10^{-3}$)

	Q_c	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
1	-0.95	0.3	-0.3	-0.035	-0.3
2	-0.48	0.5	0.6	0.4	0.85
3	-0.76	0.022	0.02	0.09	1.05
4	-1.2	-0.027	-0.07	0.03	0.037
5	0.0214	1.1	-1	0.5	0.92
6	0.1	0.1	0.18	0.19	0.0345
7	-1.4	-1	0.0854	-0.2	-0.5

На основі дослідження були встановлені такі закономірності:

- у молодих здорових випробуваних коефіцієнти коваріації χ_{ij} всіх пар кривих ($Q_i(t)$, $Q_j(t)$) мають значення $\chi_{ij} > 0.87$, що відповідає корельованості показників центрального та периферійного кровообігу, а також між правими та лівими верхніми та нижніми кінцівками. Спектр кривих $Q_j(t)$ має 3 (в окремих випадках 4) значущі гармоніки та значення експонент Ляпунова $\lambda_j < 0$, що відповідає регулярній динаміці;
- у більшості літніх випробуваних коефіцієнти коваріації $\chi_{ij} \in [0.35; 0.68]$; вони мають більші значення для верхніх та нижчі значення – для нижніх кінцівок. Спектр всіх кривих має >4 значущих гармонік, а практично всі $\lambda_j > 0$, що відповідає динамічним системам з хаотичною динамікою;
- у випробуваних без явних захворювань або вікових змін системи кровообігу спостерігаються ускладнення спектру, наявність значень як $\chi_{ij} > 0.87$, $\lambda_j < 0$, так і $\chi_{ij} < 0.87$, $\lambda_j > 0$.

Таким чином, значення χ_{ij} , λ_j і спектр дискретних сигналів є важливими параметрами для ранньої діагностики вікових змін та порушень системи кровообігу і потребують подальшого детального вивчення, зокрема на інших гемодинамічних кривих. Результати виконання виробничої практики були опубліковані у вигляді статті у фаховому виданні [10].

Завдання 13. Аналіз гемодинаміки коронарних артерій

Стеноз коронарних артерій – звуження судини, яке поступово розвивається внаслідок пошкодження її стінки, зміни структури у вигляді атеросклеротичної бляшки, можливої закупорки тромбом та ін. Внаслідок звуження артерії кровоток через звужену ділянку різко знижується, а розташовані нижче за течією тканини відчують нестачу кисню і поживних речовин (ішемію). Симптоми стенозу коронарних артерій проявляються лише на досить пізніх стадіях. Для прийняття рішення про

необхідність хірургічного втручання проводиться вимірювання кривих тиску і швидкості крові поблизу стенозу, а для прийняття рішення щодо стентування використовуються різні індекси недостатності кровопостачання:

1) Stenotic index $SI = D_{\min}/D_N$ (%) – відношення мінімального діаметра на ділянці стенозу D_{\min} до діаметру судини без стенозу D_N , або аналогічний індекс, який розрахований за відповідними площами просвіту судини, minimal lumen area $MLA = A_{\min}/A_N$ (%);

2) Fractional flow reserve $FFR = P_d/P_a$, де P_a і P_d – тиски, виміряні безпосередньо перед і після стенозу (рис. 18а) відразу після введення судинорозширювального агента, що різко знижує вплив опору системи мікроциркуляції на результати вимірювання; індекс показує втрати тиску на стенозі;

3) Hyperemic Stenosis Resistance $HSR = (P_a - P_d)/Q_a$, де Q_a – максимальна швидкість кровотоку, що виміряна перед стенозом; індекс характеризує гідравлічний опір стенозу;

4) Coronary flow reserve $CFR = V_{\text{hyp}}/V_{\text{rest}}$, де V_{hyp} і V_{rest} – середні швидкості кровотоку при гіперемії і в спокої; індекс показує резервні можливості ділянки русла до її швидкої перебудови в умовах гіперемії;

5) Index of microvascular resistance $IMR = V_{\text{hyp}} \cdot P_d$ дозволяє оцінити витрати енергії за рахунок гідравлічного опору ділянки русла;

6) Instantaneous wave-free ratio $iFR = P_d/P_a$ і instantaneous wave-free pressure gradient $iFG = (P_a - P_d)/L$ – відношення тисків і градієнт тиску на ділянці стенозу, які виміряні під час діастолі, коли вплив відбитих пульсових хвиль на результати вимірювання мінімальний без введення судинорозширювального агента (рис. 18б).

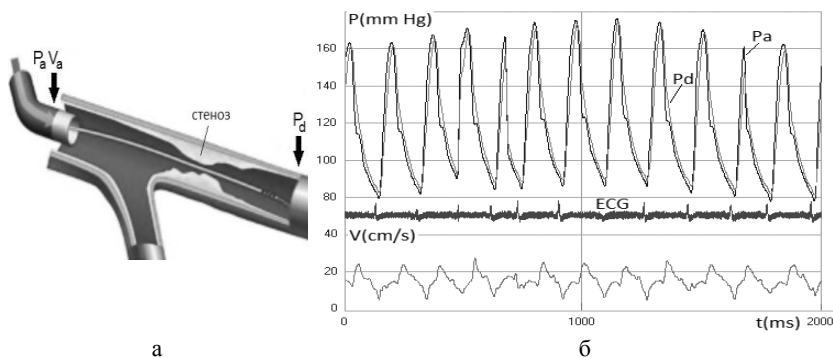


Рис. 18. Стеноз артерії і місця вимірювання параметрів кровотоку (а) з прикладами виміряних залежностей $P_a(t)$, $P_d(t)$, $V_a(t)$ (б)

Криві з відкритих баз даних фізіологічної інформації згладжувались методом зваженого ковзного середнього (88). Зарядний аналіз проводився з використанням табличного процесора MS Office Excel (рис. 19).

Спектральний і кореляційний аналіз кривих $P_a(t)$, $P_d(t)$, $Q_a(t)$ проводився за допомогою вбудованих функцій Python 3.8.2. Для розрахунків спектра використовувалося дискретне перетворення Фур'є

$$X_j = \sum_{k=1}^N F_k \exp\left(-\frac{2\pi i}{N+1}kj\right), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (91)$$

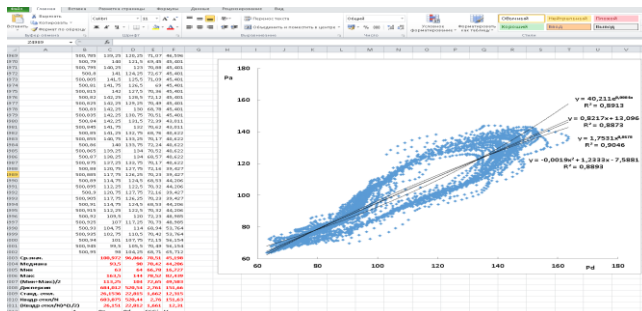


Рис. 19. Результати статистичної обробки гемодинамічних кривих $P(V)$ (сині точки): обчислення середніх, дисперсій, похибок і лінійних трендів (чорні лінії)

На рис. 20а-в представлені результати спектрального аналізу кривих $P_a(t)$, $P_d(t)$, $V_a(t)$, які наведені на рис. 18б, рис. 19. Аналогічні залежності були отримані для всіх 30 наборів даних для пацієнтів до і після введення судинорозширюючої речовини.

В табл. 5 представлені результати розрахунків коефіцієнтів кореляції всіх пар кривих з набору $P_a(t)$, $P_d(t)$, $V_a(t)$. У всіх досліджених випадках спостерігалася позитивна кореляція ($\kappa \sim 0.9$) кривих $P_a(t)$ і $P_d(t)$ (табл. 5). У пацієнтів з $FFR > 0.8$ кореляції тисків і швидкості були незначні, але також з $\kappa > 0$, тоді як у випадку $FFR < 0.7$ ці кореляції були завжди негативними. В групі «сірої зони» ($0.7 < FFR < 0.8$) у випадках з описаними вище змінами спектра коефіцієнти кореляції були також негативними, що може служити додатковим діагностичним параметром для прийняття рішень.

Таблиця 5

Коефіцієнти кореляції різних пар кривих для пацієнтів 1–3

	$\kappa(P_a, P_d)$	$\kappa(P_a, V_a)$	$\kappa(P_d, V_a)$
Пацієнт 1	0.9419	0.1522	0.2613
Пацієнт 2	0.9576	-0.6108	-0.6419
Пацієнт 3	0.8809	-0.5791	-0.6514

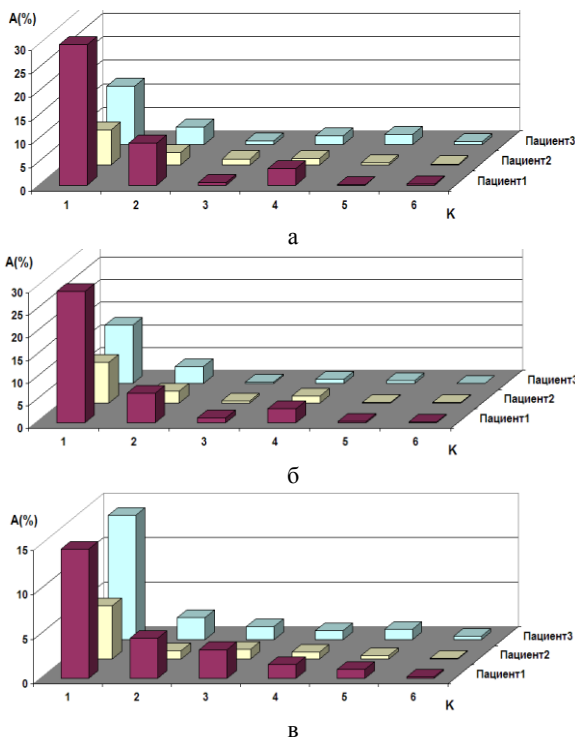


Рис. 20. Амплітуди $A(\%)$ перших $K=6$ гармонік кривих $P_a(t)$ (а), $P_d(t)$ (б), $V_a(t)$ (в) для пацієнтів з різною виразністю стенозу коронарних артерій

В результаті виконання завдання були встановлені закономірності у вигляді співвідношень між амплітудами гармонік і коефіцієнти кореляцій кривих тисків $P_a(t)$, $P_d(t)$ і швидкості $V_a(t)$, які дозволяють виділити в групі пацієнтів «сірої зони» ті стенози, які вимагають негайного стентування. В інших випадках потрібне додаткове обстеження. Отримані набори додаткових діагностичних параметрів можуть бути протестовані на математичних моделях у вигляді 3ДР.

Результати виконання виробничої практики були опубліковані у вигляді статті у фаховому виданні [11].

4.1.3. Аналіз даних і математичне моделювання опорно-рухової системи людини

Дослідження динамічних параметрів вертикальної стійки людини єважливою складовою компонентою медичної діагностики захворювань як опорно-рухової (ОРС), так і нервової, вестибулярної та низки інших систем людини [23]. За допомогою спектрального та вейвліт-аналізу була показана наявність як квазірегулярних, так і хаотичних режимів ко-

ливань центру мас (ЦМ) проекції тіла людини на горизонтальну поверхню стабілографічної платформи [24], залежно від її віку та наявності захворювань. Одним з таких важливих показників хаотичної динаміки є максимальна експонента Ляпунова (largest Lyapunov exponent, LLE).

Експонента Ляпунова характеризує швидкість сепарації $\delta \vec{r}(t) = |\vec{r}_0(t) - \vec{r}(t)|$ в фазовому просторі траєкторій динамічної системи $\vec{r}_0(t)$ і $\vec{r}(t)$, які в початковий момент часу $t=0$ знаходилися нескінченно близько одна від одної $\delta \vec{r}_0 = |\vec{r}_0(0) - \vec{r}(0)| < \varepsilon$. Якщо $|\vec{r}_0(t) - \vec{r}(t)| = \delta \vec{r}_0 \cdot \exp(\lambda t)$, то $\lambda_L = \text{Re}(\lambda)$ називається експонентою Ляпунова. Якщо система нестійка, $\text{Re}(\lambda) > 0$. У випадку, коли траєкторії описуються системою n лінійних звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку з постійними коефіцієнтами

$$\vec{r}'(t) = A \cdot \vec{r}(t) + \vec{f}(t) + \vec{u}(t), \quad (92)$$

де A – матриця коефіцієнтів системи, $\vec{f}(t)$ – зовнішні сили, $\vec{u}(t)$ – функція керування, то дійсні частини власних чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ є експонентами Ляпунова.

Якщо $\text{Re}\{\lambda_j\}_{j=1}^n \equiv \lambda_{Lj} > 0$, всі траєкторії сходяться в одній точці. Значення $(\lambda_{Lj})^{-1}$ називаються часом Ляпунова. Це є час, за який відстань між сусідніми траєкторіями системи зростає в e разів. В консервативній системі $\sum_j \lambda_j = 0$, а в дисипативній системі $\sum_j \lambda_j < 0$.

Особливий інтерес представляє максимальна експонента Ляпунова

$$LLE \equiv \lambda_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta \vec{r}_0 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} \ln \left(\frac{|\delta \vec{r}(t)|}{|\delta \vec{r}_0|} \right) \right). \quad (93)$$

Максимальний час Ляпунова LLE^{-1} – це інтервал часу, протягом якого можливо передбачати еволюцію системи, тому що зміни її початкового стану при $t < (\lambda_{\max})^{-1}$ не ведуть до суттєвої зміни її поведінки, але при $t \gg (\lambda_{\max})^{-1}$ «пам'ять» про параметри початкового стану втрачається. Максимальний час Ляпунова задає міру для передбачуваності системи, але часто становлять інтерес оцінки локальної передбачуваності навколо деякої точки в фазовому просторі – так званої короткочасної (short-time) експоненти Ляпунова (STEL). Якщо динаміка системи визначається нелінійною системою ЗДР, для обчислення значень λ_j використовують інші методи і чисельні алгоритми (лінеаризації та послідовних наближень). А. М. Ляпунов показав, що якщо система першого наближення регулярна, а її $LLE < 0$, то рішення вихідної системи асимптотично стійко. Пізніше О. Перон продемонстрував, що вимога регулярності першого наближення є istotною, і є приклади, коли $LLE < 0$ вздовж нульового рішення першого

наближення, але це рішення є нестійким за Ляпуновим. Крім того, значення $LLE > 0$ можуть не означати перехід системи до хаосу.

Наявність хаотичної динаміки у вигляді випадкових змін знаків STEL електроенцефалограм, електроміограм, мовних сигналів та стабілограм була показана в низці досліджень. Було виявлено, що функції керування осциляціями у фронтальній (вліво-вправо) та сагітальній (вперед-назад) площинах мають різні властивості [24]. Осциляції центру мас тіла можна представити у вигляді суми квазіперіодичної та стохастичної компонент, причому друга компонента не має саме подібності і тому не є детермінованим хаосом [24]. Показники LLE і STEL можуть вказувати на вікові порушення OPC [6], але у здорових випробуваних потрібно вживати синтетичні коефіцієнти LLE і STEL для ускладнених сигналів, наприклад, у вигляді амплітуд осциляцій між різними сегментами тіла або з додаванням додаткового руху верхніми кінцівками, несподіваним рухом стабілографічної платформи та інших.

Як завдання практики деякі студенти обрали статистичний аналіз кривих коливань координат $(X_C(t), Y_C(t))$ центру мас (ЦМ) тіла людини з відкритих медичних баз даних.

На рис. 21а зображений стабілограф, на рис. 21б – приклад вимірної траєкторії руху центра мас, а на рис. 21в – модель людини як 3-ланкового перевернутого маятника. Випробувані виконували декілька тестів, такі як вільне стояння на двох стопах (i), з переносом ваги тіла на праву (ii) та ліву (iii) стопи. Прямокутники на рис. 21б показують амплітуди коливань ЦМ у фронтальній (вздовж OY) та сагітальній (вздовж OX) площинах. Асиметрія розташування ЦМ та хаотична динаміка властиві кожному з тестів. При балансуванні із заплющеними очима амплітуда коливань зростає в середньому в 2 рази, тоді як при балансі на одній нозі спостерігається парадоксальна стабілізація коливань за рахунок більш чіткого керування [23].

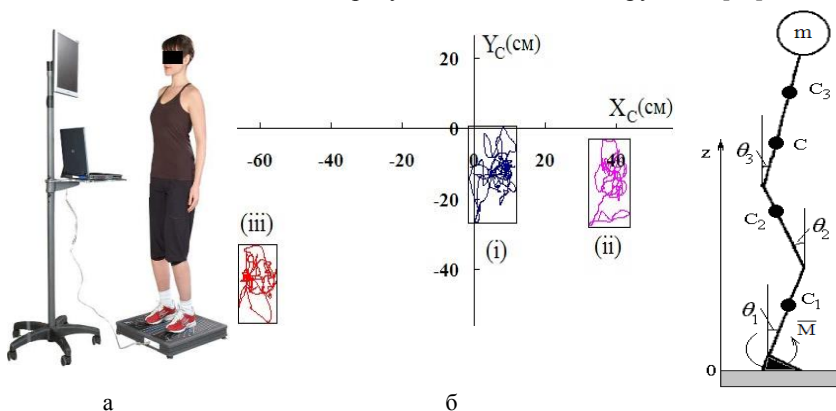


Рис. 21. Платформа стабілографа з комп'ютерною системою (а), траєкторії $(X_C(t), Y_C(t))$ для тестів (i), (ii) та (iii) (б) і 3-ланкова модель тіла людини (в)

Знов проводилося згладжування кривих $X_C(t), Y_C(t)$ за допомогою фільтру (88). Далі проводилося їх чисельне диференціювання за часом і будувалися фазові криві $f'(f), f''(f), f'''(f)$, де $f = \{X_C, Y_C\}$.

Після того проводились обчислення експоненти Ляпунова з використанням алгоритму Вольфа [12]:

1) фіксуємо деякий малий зсув τ кривих $X_C(t), Y_C(t)$ за часом;

2) визначаємо початкове положення $X_C(0), Y_C(0)$ кривих;

3) знаходимо таке значення t_1 , щоб $|X(t_1) - X(0)| < \varepsilon$, де ε – задане мале значення, яке перевищує частоту дискретизації кривих $X_C(t), Y_C(t)$;

4) якщо такого значення t_1 не існує, обираємо t_1 таке, щоб $|X(t_1) - X(0)| = \min_k |X(t_k) - X(0)|$;

5) обчислюємо перше наближення експоненти Ляпунова

$$\lambda_1(0) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{|X(t_1 + \tau) - X(\tau)|}{|X(t_1) - X(0)|};$$

6) знаходимо t_2 так само як в 3)–4);

7) обчислюємо друге наближення експоненти Ляпунова

$$\lambda_1(\tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{|X(t_2 + \tau) - X(2\tau)|}{|X(t_2) - X(\tau)|};$$

8) повторюємо 6)–7) і обчислюємо наближення $\lambda_1(2\tau), \lambda_1(3\tau), \dots$ до досягнення потрібного часу t , після чого повертаємося до 1), трохи збільшуємо значення τ та знаходимо наближення $\lambda_2(0), \lambda_2(\tau), \lambda_2(2\tau), \lambda_2(3\tau), \dots$;

9) після кількох ітерацій алгоритму 1)–8) остаточно обчислюємо експоненту Ляпунова як

$$\lambda = \left(\frac{m+2}{2} \right)^{-1} \sum_{k=m/2}^m \left(\frac{n_k+2}{2} \right)^{-1} \sum_{j=n_k/2}^{n_k} \lambda_k(j\tau). \quad (94)$$

Деякі результати обчислень за (94) для групи молодих здорових волонтерів і серії з 8 випробувань (i–iii із розплющеними і заплющеними очима, а також на одній стопі) наведені на рис. 22. Таким чином, підтвердилися висновки попередніх досліджень про наявність позитивних значень LLE стабілограм як на всьому часі вимірювань, так і короткочасних (STLE) навіть для комфортних двоопорних положень тіла (i)–(iii). Середні за групою молодих здорових випробуваних значення $LLE < 0.2$ значно нижче, ніж значення, які були раніше обчислені для літніх випробуваних та пацієнтів з порушеннями ОРС та нервової системи [23, 24].

Результати статистичного аналізу були використані для ідентифікації параметрів математичної моделі тіла людини як перевернутого багатоланкового маятника [23, 24]. ЗДР 2-го порядку цієї моделі є

$$M \cdot \frac{d^2}{dt^2} \bar{\theta} + C(\dot{\bar{\theta}})^2 + N \cdot \bar{\theta} = 0, \quad (95)$$

де $\bar{\theta}^T = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$, $\theta_j(t)$ – кут нахилу j-го ланцюга до вертикалі, T – транспозиція, M, C і N – матриці мас-інерційних, Кориолісових і гравітаційних коефіцієнтів.

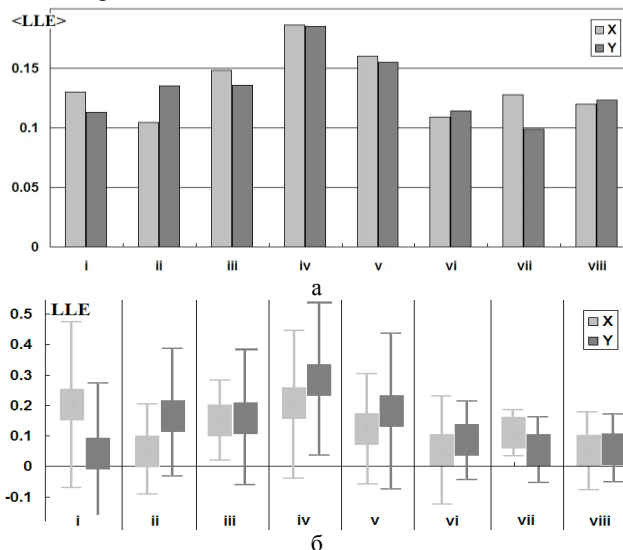


Рис. 22. Осереднені за групою значення <LLE> для координат X(t), Y(t) (а) та значення з дисперсією (б) для тестів i-viii

Для вільної двохопорної стійки кути відхилення та їх похідні за часом малі, і (95) зводиться до лінійної системи ЗДР вигляду (92). Тоді функції керування тілом у фронтальній та сагітальній площинах $\ddot{u}(t) = (u_x(t), u_y(t))$ можна облічити з лінійної системи шляхом підстановки виміряних кривих $x(t)$, $y(t)$ як

$$u_x(t) = \left(m + \frac{J_x}{L^2} \right) \ddot{x}(t) - mgx(t), \quad u_y(t) = \left(m + \frac{J_y}{L^2} \right) \ddot{y}(t) - mgy(t), \quad (96)$$

де m – маса тіла, $J_{x,y}$ – моменти інерції відносно осей $0x, 0y$, $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння.

Типовий приклад функцій керування $(u_x(t), u_y(t))$, обчислений з (96) для двохопорної стійки одного з досліджуваних, наведений за наявності (рис. 23а) та відсутності (рис. 23б) додаткового зорового контролю за підтриманням пози. Самокореляції для кожної із залежностей, а також кореляції між $u_x(t)$ і $u_y(t)$ відсутні, що вказує на незв'язаний характер обробки сигналів, які виходять з кожного з півкružних каналів органу рівноваги, нервовою системою. Можливі взаємозв'язки такими сигналами

поки що недостатньо вивчені [23, 24]. Найпростіший підхід, який розглядає окремо керування за кутом відхилення тіла від вертикалі та за швидкістю відхилення у вигляді $u_x(t) = k_{x1}(X(t) - X_0) + k_{x2}(X'(t) - X'_0)$, $u_y(t) = k_{y1}(Y(t) - Y_0) + k_{y2}(Y'(t) - Y'_0)$, показує, що не існує постійних коефіцієнтів k_{x1} , k_{x2} , k_{y1} , k_{y2} . Амплітуди керування вищі, а спектр більш складніший під час заплучених очей, що відповідає майже подвійному зростанню амплітуди самих коливань, що було виявлено в [23].

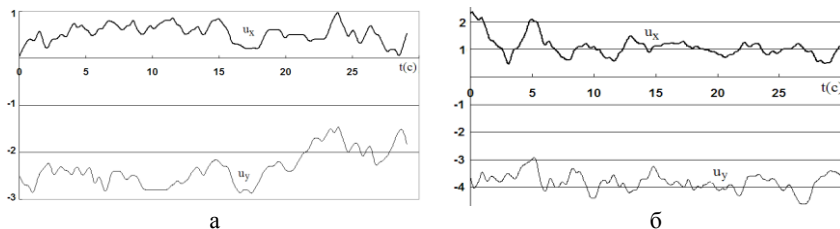


Рис. 23. Керування $u_x(t)$, $u_y(t)$ для двохопornoї стійки з розплученими (а) та заплученими (б) очима протягом 30 с для одного з випробуваних

Був також проведений спектральний аналіз стабілографічних даних з метою виявлення головних частот коливань, їх залежності від зросту людини і наявності захворювання опорно-рухової системи з метою використання амплітудно-фазового спектру у медичній діагностиці. Розрахунки частот, амплітуд і фазових зсувів проводилися за (87). В пакеті програм MatLab ця опція виконується функцією $\text{fft}(x)$, приклад роботи якої наведений на рис. 24. Вихідний дискретний сигнал (рис. 24а) має два максимуми з частотами 50 і 60 Гц (рис. 24б), а решта гармонік відповідають випадковій компоненті (шум). До використання функції $\text{fft}(x)$ можна спочатку відфільтрувати шум будь-яким придатним фільтром з бібліотеки MatLab і отримати чистіший результат. На рис. 24в наведений приклад стабілографічних даних після згладжування фільтром (89) і результат розрахунків спектру (рис. 24г) у вигляді спектральної щільності міцності сигналу PSD (Power Spectral Density)

$$PSD(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{E}_T(\omega)|^2}{T}, \quad (97)$$

де $\tilde{E}_T(\omega)$ – результат перетворення Фур'є від міцності сигналу

$$E_\tau(\tau) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} X^2(t) dt, \quad \tau - \text{заданий малий інтервал часу.}$$

Аналіз спектру коливань центру мас тіла показує, що майже на всіх частотах амплітуди коливань $y(t)$ у сагітальній (боковій) площині значно більші, ніж амплітуди коливань $x(t)$ у фронтальній площині, що є нормою для здорової людини. За наявності патологічних або вікових змін в організмі, може спостерігатися інша залежність.

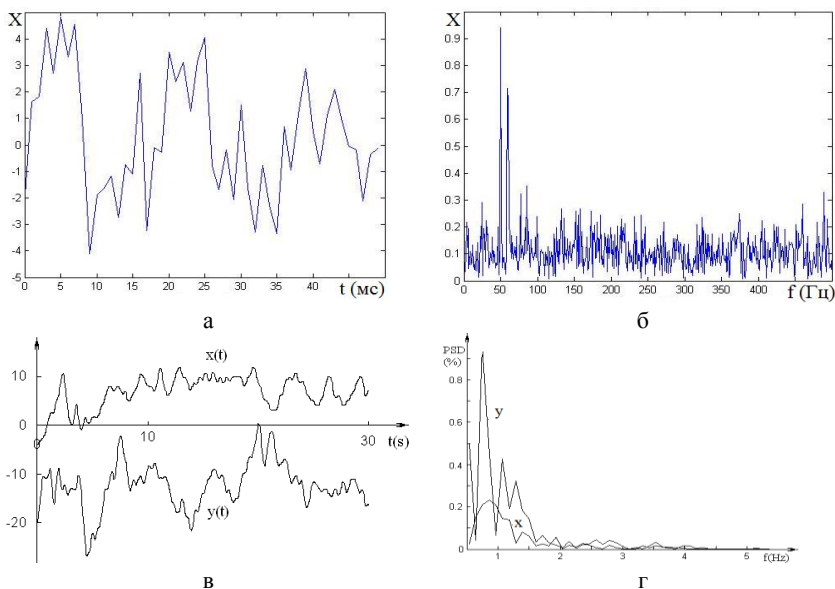


Рис. 24. Приклади незгладженого (а) і згладженого (в) сигналів та їх спектрів без (б) і з (г) попередньою фільтрацією

Таким чином, проведені в ході виробничої практики статистичний аналіз і математичне моделювання опорно-рухової системи людини дозволили отримати нові цікаві дані, які були опубліковані у вигляді статті у фаховому виданні [12].

4.2. Біологічна інформація

Прикладами біологічної інформації є також часові ряди коливань за часом різних фізіологічних параметрів тварин або рослин (наприклад, механічних або електричних), траєкторій їх руху, чисельності тварин у популяціях, наприклад, хижаків і жертв. В останньому випадку для аналізу даних можна долучити математичні моделі хижак – жертва у вигляді систем ЗДР (див. розд. 3.1).

Крім того, статистична обробка і порівняльний аналіз генетичної інформації – даних про структуру ДНК (геноміка), окремих білків (протеоміка), регуляторів метаболізму (метаболоміка) та інші доступні у багатьох відкритих джерелах інформації, наприклад, www.uniprot.org. Прикладні задачі, пов'язані з дослідженням генетичної інформації, дуже поширені в останні десятиріччя. Методики збору і аналізу ДНК стають дедалі доступними і дешевими. Лабораторії, наукові і медичні інститути потребують розробки програмного забезпечення та нових математичних методів для аналізу геометричної форми і топології молекул у водному середовищі, обчислень площі їх поверхні, яка змочується водою (ван-

дер-ваальсова поверхня), поверхневий граф розташування активних центрів та ін. В останні роки подібні задачі пропонувалися студентам факультету математики і інформатики ХНУ, які обирали опанування спеціалізацією «Біостатистика» з подальшим працевлаштуванням.

Для виконання задач практики з аналізу генетичної інформації студентам пропонувалося проведення порівняльного аналізу генетичної інформації щодо найбільш поширених типів білків, наприклад, Actin, alpha cardiac muscle, Actin, alpha skeletal muscle, Actin, aortic smooth muscle, Actin, cytoplasmic Adenylosuccinate lyase, ATP synthase, Collagen alpha, Cytochrome c oxidase, Cytochrome b, Elastin, F-actin, Myosin, Osteocalcin NADH-ubiquinone oxidoreductase, Melanocortin, Microcephalin, ATP synthase, Spectrin, Nitric oxide synthase для таких видів:

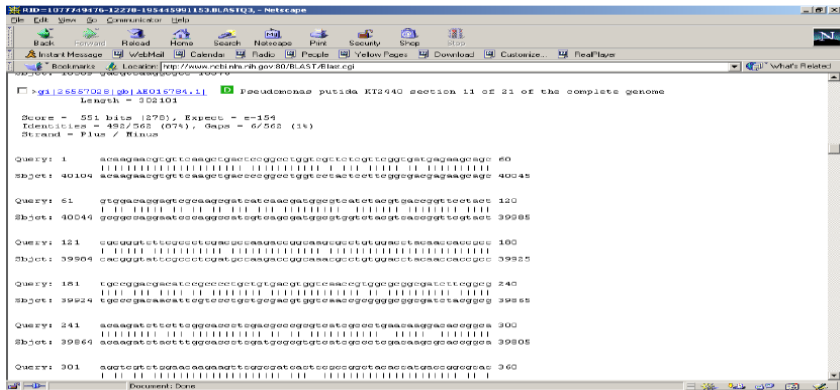
1. Homo sapiens.
2. Homo sapiens neanderthalensis (Neanderthal).
3. Homo sapiens subsp. 'Denisova' (Denisova hominin).
4. Homo heidelbergensis (Heidelberg man).
5. Pan troglodytes (chimpanzee).
6. Gorilla (Western lowland gorilla).
7. Pongo pygmaeus (Bornean orangutan).
8. Pongo abelii (Sumatran orangutan).
9. Macaca mulatta (Rhesus macaque).
10. Macaca fascicularis (Crab-eating macaque) (Cynomolgus monkey).
11. Macaca fuscata fuscata (Japanese macaque).
12. Macaca nemestrina (Pig-tailed macaque).
13. Hylobates lar (Common gibbon) (White-handed gibbon).
14. Nomascus leucogenys (Northern white-cheeked gibbon).

Приклад запису з бази даних наведений на рис. 25.

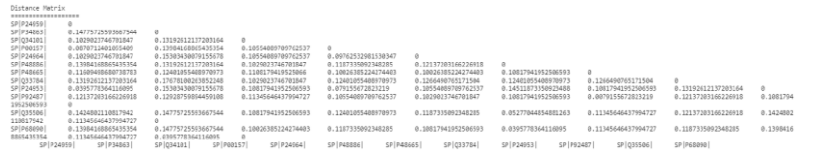
Entry	Entry name	Protein name	Gene names	Organism	Length
P01971	HBA_ALCAA	Hemoglobin subunit alpha	HBA	Alces alces alces (European moose) (Elk)	142
P00667	RNAS1_ALCAA	Ribonuclease pancreatic	RNASE1 RNS1	Alces alces alces (European moose) (Elk)	124
P02073	HBB_ALCAA	Hemoglobin subunit beta	HBB	Alces alces alces (European moose) (Elk)	145
Q047922	CYB_ALCAA	Cytochrome b	MT-CYB COB, CYTB, MTCYB	Alces alces alces (European moose) (Elk)	379
P56442	MSHR_ALCAA	Melanocyte-stimulating hormone rece...	MC1R MSHR	Alces alces alces (European moose) (Elk)	317
Q7M315	FTBA_ALCAA	Fibrinogen alpha chain	FGA	Alces alces alces (European moose) (Elk)	19
Q69352	Q69352_ALCAA	Major prion protein	Prnp	Alces alces alces (European moose) (Elk)	256

Рис. 25. Результат пошуку білка гемоглобіну в базі даних www.uniprot.org

В останні роки у зв'язку з поширенням пандемії коронавірусу та чисельними мутаціями останнього актуальними є також порівняльний аналіз різних форм цього вірусу (альфа, бета, дельта, омікрон та ін.) та розробка нових математичних методів оцінки їх активності, небезпечності і можливості дезактивації (комп'ютерний дизайн ліків).



a



6

Gorilla (Western lowland gorilla)	Homo heidelbergensis (Heidelberg man)	Homo sapiens neanderthalensis (Neanderthal)	Homo sapiens sapiens (Denisova (Denisova hominin)	Hylobates lar (Common gibbon) (White- handed gibbon)	Macaca fascicularis (Orang-utan macaque) (Cynomys-like monkey)	Macaca fasciata fasciata (Japanese macaque)	Macaca mulatta (Rhesus macaque)	Macaca nemestrina (Pig tailed macaque)	Nomascus leucogenys (Northern white chested gibbon)	Pan troglodytes (Chimpanzee)	Pongo abiei (Sumatran orangutan)	Pongo pygmaeus (Bornean orangutan)	Macaca leionna (Northern pig- tailed macaque (Macaca nemestrina leionna)
1	20	20	20	20	20	20	1	20	20	1	20	20	20
2	20	20	20	20	20	20	1	20	20	1	1	20	20
1	20	20	20	20	20	1	20	20	20	1	20	20	20
20	20	20	20	20	1	20	1	20	20	1	1	20	20
20	20	1	20	20	6	20	6	6	3	2	4	20	20
20	20	20	20	20	20	3	20	20	20	1	2	20	20
5	1	2	3	7	9	10	20	7	4	6	6	6	8
4	1	1	2	5	8	9	9	2	3	6	6	6	7
2	20	20	20	20	3	4	2	4	3	2	4	3	20
2	20	20	20	20	5	20	5	4	6	2	3	20	20
1	20	20	20	20	5	20	5	5	2	3	4	4	20
2	20	20	20	20	6	20	6	5	4	2	3	3	20
2	20	20	20	20	6	20	3	20	20	2	20	20	20
4	2	3	3	6	9	10	10	6	5	7	7	8	8
2	20	20	20	20	4	20	3	4	6	2	5	20	20
1	20	20	20	20	5	20	6	6	3	2	4	4	20
6	20	20	20	20	4	20	3	4	7	1	5	20	20

B

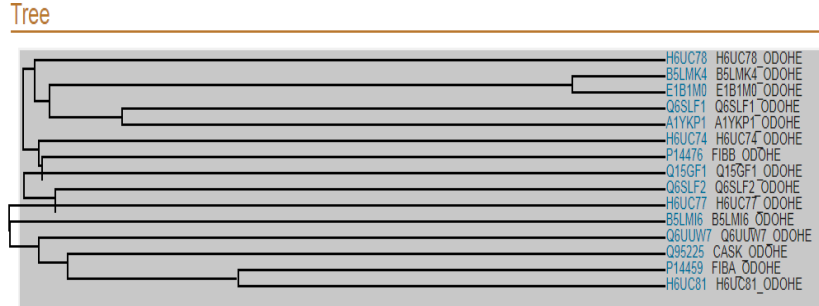
 Γ

Рис. 26. Приклад вирівнювання послідовностей нуклеотидів (а), розрахунків парних відстаней (б), таблиці відстаней (в) і філогенетичного дерева (г)

Кожен набір даних по білку (для всіх тварин / людей) треба знайти в базі даних www.uniprot.org або www.rcsb.org, скласти в свій «кошик» на сайті і потім завантажити в окремий файл (txt або xls). До кожного білка провести вирівнювання (alignment) з використанням інструментів сайту або власних. Результати вирівнювання треба зберегти як файл txt. Під час вирівнювання з використанням алгоритму BLAST однакові нуклеотиди помічаються лінією, а різні – не помічаються (рис. 26а). Для побудови дерева подібності (філогенетичного дерева) (рис. 26г) за допомогою методу найближчого сусіда (6б) будується матриця попарних відстаней (рис. 26б) і таблиця округлених значень відстаней (рис. 26в). пари сусідів з найменшими відстанями розміщуються на «вершині» дерева (права частина рис. 26г). У міру просування до більш далеких «сусідів» в структурі дерева з'являються або спільний «корінь» (рис. 16), або кілька окремих «коренів» (ліва частина рис. 26г).

Найбільш поширені алгоритми вирівнювання послідовностей:

- BLAST. URL: <https://blast.ncbi.nlm.nih.gov/Blast.cgi>
- ClustalW. URL: <http://www.ebi.ac.uk/Tools/clustalw/index.html>
- Muscle. URL: <http://phylogenomics.berkeley.edu/cgi-bin/muscle/>
- T-COFFEE. URL: <http://www.igs.cnrsmrs.fr/Tcoffee/tcoffee.cgi/index.cgi>

На рис. 27 наведений приклад коду для розрахунків і будови дерева в Python, розроблений одним зі студентів, який обрав задачу обробки біологічної інформації для виробничої практики.

```
#python
from Bio import Phylo
from Bio.Phylo.TreeConstruction import DistanceCalculator
from Bio.Phylo.TreeConstruction import DistanceTreeConstructor
from Bio import AlignIO

# Read the sequences and align
aln = AlignIO.read('NAME_FALE.phy', 'phylip')

# Print the alignment
print (aln)

# Calculate the distance matrix
calculator = DistanceCalculator('identity')
dm = calculator.get_distance(aln)

# Print the distance Matrix
print("\nDistance Matrix\n=====")
print(dm)

# Construct the phylogenetic tree using UPGMA algorithm
constructor = DistanceTreeConstructor()

# Draw the phylogenetic tree
Phylo.draw(tree)

print("\nPhylogenetic Tree\n=====")
Phylo.draw_ascii(tree)
```

Рис. 27. Приклад використання функцій Python для обробки генетичної інформації

Потім треба знайти дані на ці ж білки у кожного виду тварин або рослин у базі даних www.ebi.ac.uk/pdbe/node/1 у форматі pdb. Завантажити файли з даними по кожному з білків окремо в сервіс ekhidna2.biocenter.helsinki.fi/dali/index.html#tabs-1, який побудує 3D-структури білків і порівняє їх просторову геометричну і топологічну подібність у різних видів тварин / людей. Приклади візуалізації, порівняння (методом найменшої сумарної відстані між геометричними 3D-структурами) і обчислень загальної площі змочуваної поверхні і площин активних центрів наведені на рис. 28.

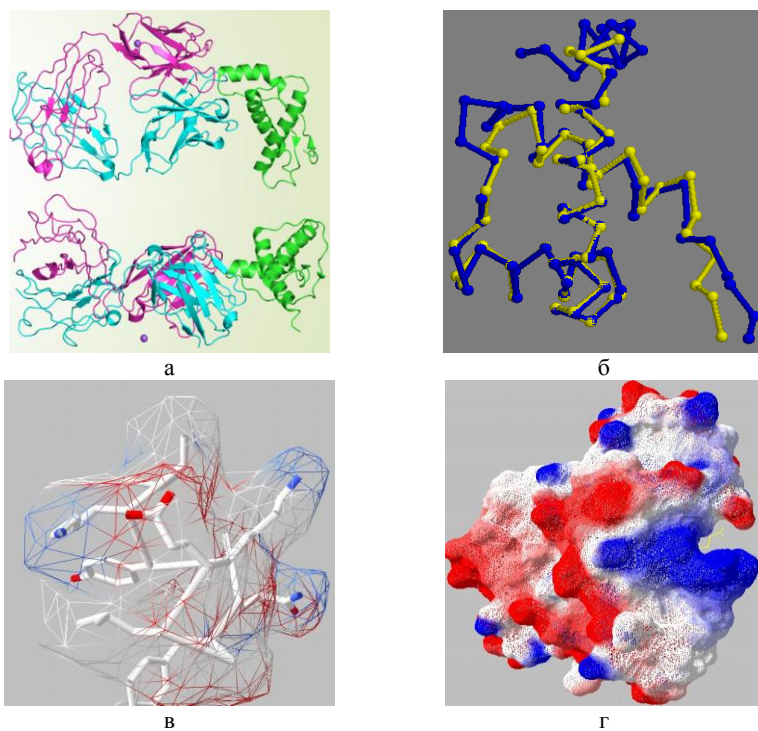


Рис. 28. Приклади візуалізації 3D-форм подібних білків (а), перевірки схожості просторової геометрії (б), обчислень площі ван-дер-ваальсової поверхні (в), і поверхневих площин активних центрів молекули (г)

4.3. Екологічна інформація

В останні десятиріччя спостерігаються глобальні зміни клімату, а саме підвищення середньорічної температури повітря, танення глетчерів, підвищене випаровування води і солоності вод річок, озер, ставків, зміни звичного образу існування водних, підземних і наземних тварин, а також здоров'я і тривалості життя людей. Оскільки країни світу тісно

зв'язані між собою «відкритими кордонами» повітря і вод, будь-які локальні забруднення переносяться з потоками повітря, поверхневих і підземних вод до інших країн, земель і материків. Розповсюдження і накопичення забруднень в воді, ґрунтах, рослинах, стінах і дахах будинків і т.д. складає значну проблему і загрозу життя людей, тварин і рослин.

Оцінка екологічного стану і прогнози на наступні роки і десятиріччя базуються на даних постійного моніторингу навколишнього середовища метеорологічними, кліматичними, хімічними і біохімічними станціями, лабораторіями і дослідницькими групами. Результатом цих зусиль є онлайн бази даних з відкритим доступом, які дозволяють візуалізувати результати моніторингу і проводити обробку даних новими математичними методами для отримання надійних показників стану навколишнього середовища. Забруднення повітря щороку вбиває більше людей у всьому світі, ніж СНІД, малярія, діабет або туберкульоз. У звіті за 2015 рік Berkeley Earth оцінила вплив забруднення повітря на здоров'я, співвідносячи якість повітря з кількістю викурених сигарет щодня. Наприклад, середній день в країнах ЄС становить 1,6 сигарети на день, а день у Пекіні складе 25 сигарет, тобто більше пачки на день (за даними мобільного монітору «Sh*t I Smoke App» розробленого Amaury Martiny і Marcello Coelho).

Математична екологія аналізує результати вимірювань концентрацій забруднюючих речовин у вигляді часових рядів, які є доступними у великій кількості як глобальних, так і регіональних базах даних. Отримані закономірності у вигляді регресійних залежностей або результатів класифікації за допомогою кластерного аналізу далі використовуються для ідентифікації параметрів математичних моделей еволюції концентрацій C_i забруднень у вигляді систем ЗДР [13, 14].

Як завдання виробничої практики студентам були запропоновані завдання, які потребують використання знань і вмінь зі статистичного аналізу, математичного моделювання, теорії стійкості, методів оптимізації, теорії диференціальних рівнянь і керування.

Завдання 14. Провести статистичний аналіз даних у вигляді часових рядів про рівень забруднення:

- 1) поверхневих вод (річки, озера, водосховища);
- 2) підземних вод (джерела, артезіанські свердловини);
- 3) ґрунтів;
- 4) повітря.

На території м. Харків, Харківської обл. або інших міст / областей України у порівнянні між собою та / або між різними країнами. Проаналізувати отримані результати у зв'язку із глобальними змінами клімату.

Рекомендовані джерела інформації:

1. Глобальні дані по забрудненню. URL: <https://www.pollution.org/>
2. Дані по забрудненню повітря, води, ґрунту, глобальним змінам клімату. URL: <https://www.statista.com/topics/4739/environmental-pollution/>

3. Глобальні дані якості повітря, у тому числі шкідливих мікро- і наночастинок. URL: <https://www.cdc.gov/nceh/tracking/topics/AirQuality.htm>
 4. Дані забруднення повітря. URL: <https://www.stateofglobalair.org/data/#/air/plot> -
 5. Глобальні дані забруднення повітря. URL: <https://reliefweb.int/report/ukraine/satellite-data-monitors-air-pollution-space>
 6. Показники глобального потепління. URL: <http://berkeleyearth.org/whats-new/?cat=temperature-updates>
 7. Екологічні карти. URL: <https://www.imbf.org/karty/karty-ehkologii.html>
 8. Дані в динаміці для вулиць Харкова. URL: <https://www.iqair.com/ru/earth?nav>
 9. Air Pollution Data. Є дані для Харкова. URL: <https://aqicn.org/map/>
 10. Карта моніторингу якості повітря. URL: <https://eco-city.org.ua/>
 11. Дані моніторингу стану здоров'я населення. URL: <https://www.cdc.gov/nceh/tracking/topics/AirQuality.htm>
 12. Показники якості повітря. URL: <https://www.epa.gov/air-trends/air-quality-national-summary>
 13. Показники якості повітря по країнам (є Україна). URL: <https://www.stateofglobalair.org/data/#/air/plot> -
 14. Екологічні дані по Україні. URL: <https://reliefweb.int/report/ukraine/satellite-data-monitors-air-pollution-space-during-covid-19-helps-inform-policy-makers> -
- Завдання 15.** Розробка власного проекту в сервісі Google Earth Engine earthengine.google.com з використанням однієї з вбудованих баз даних, наприклад, за температурою поверхні (рис. 29а) і кліматом (рис. 29б), атмосферних даних та погоди, карт ландшафту та земного покриття (рис. 29в), якості земель (рис. 29г), нічної освітленості та ін., наявних на developers.google.com/earth-engine/datasets

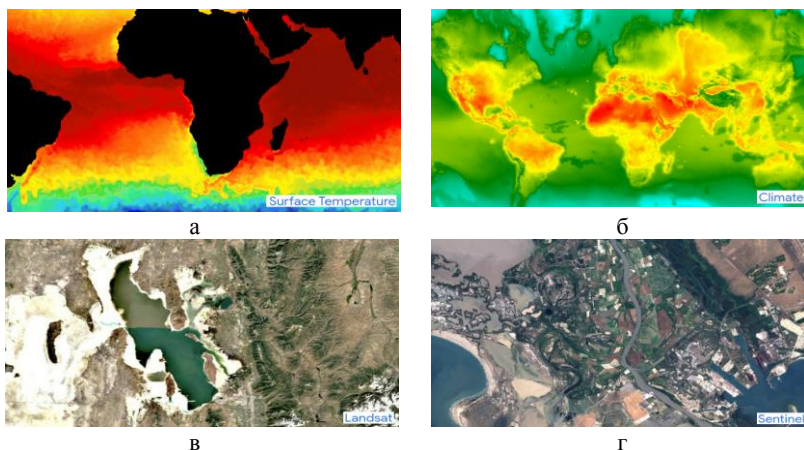


Рис. 29. Наявні дані з ресурсу earthengine.google.com для задач практики

Приклади наявних даних:

- 1) клімат – історичні дані аналізу з NCEP/NCAR, набори метеорологічних даних з координатної прив'язкою, такі як NLDAS-2 і GridMET, вихідні дані кліматичних моделей, такі як MACAv2-METDATA університету Айдахо, масштабні кліматичні прогнози NASA Earth Exchange;
- 2) температура поверхні – теплові супутникові датчики;
- 3) всепогодні радіолокаційні та оптичні зображення з високою роздільною здатністю від Sentinel-1A і -1B;
- 4) дані про океан і сушу для моніторингу навколишнього середовища і клімату від Sentinel 3;
- 5) атмосферні дані – рівні озону, CO₂, O₂ і т.д.;
- 6) погода, включаючи рівень опадів, температуру, вологість, силу і напрям вітру і ін. Earth Engine також містить дані прогнозів з Глобальної системи прогнозів NOAA (GFS) і системи прогнозування клімату NCEP (CFSv2), а також дані датчиків з таких джерел, як Місія по виміру тропічних опадів (TRMM);
- 7) зміни ландшафту Землі з 1972 р. Супутники Landsat знімають всю поверхню Землі з 30-метровим дозволом приблизно раз на два тижні, включаючи мультиспектральні і теплові дані.

Пропонується виконати проект за наявними онлайн-даними по Харківській області порівняно з 3–4 іншими областями України та / або іншими країнами.

Завдання 16. Розробка власного проекту у хмарному сервісі Map of Life cloud.google.com/customers/map-of-life з використанням вбудованих баз даних Google Earth та запитів Google BigQuery.

Map of Life підтримує освіту, моніторинг, дослідження та прийняття рішень з питань біорізноманіття Google Cloud Platform products для збору, аналізу та візуального представлення глобальних даних. Багатство і різноманітність життя на Землі має фундаментальне значення для складних систем, що населяють її. Але такі явища, як зміна клімату, забруднення навколишнього середовища, нестійке сільське господарство, руйнування і деградація довкілля, загрожують екосистемам і жителям планети. За оцінками Всесвітнього фонду дикої природи (WWF), в період з 1970 по 2012 рік популяції диких тварин у всьому світі скоротилися на 58 %. Щоб повернути назад такі тенденції, потрібно знати, де і як спрямувати зусилля, щоб допомогти запобігти зникненню і зберегти біорізноманіття. Єльський університет та Університет Флориди (UF) об'єдналися для вирішення цієї проблеми шляхом збору та аналізу глобальних джерел даних і надання інформації, яка допоможе направляти дослідження, політику і збереження (наприклад, картування вразливих видів, онлайн «Червона книга» та ін.)

На цей час Map of Life використовує понад 600 мільйонів записів по всьому світу, які містять інформацію приблизно про 44 351 видів хребетних, рослин і комах і про більш ніж 700 000 назв видів із Google

Cloud Storage. Його здатна до масштабування високопродуктивна архітектура також включає платформу Google App Engine як послугу (PaaS) для розміщення логіки програми та передачі інформації в різні інтерфейси через інтерфейси прикладних програм (API) RESTful. Геоолокаційні і просторові дані можна аналізувати і відображати за допомогою API Google App Engine, які підключаються до Google Earth Engine і хмарним платформ геоолокаційні даних CARTO. Сервіс Map of Life CARTO працює на Google Compute Engine, використовуючи віртуальні машини для поліпшення масштабованості векторних відображень і запитів на вимогу.

Теж пропонується виконати проект за наявними онлайн даними по Харківській області порівняно з 3–4 іншими областями України та / або іншими країнами. Виконання завдання дозволить студентам опанувати нові цифрові технології накопичення, зберігання і обробки даних за допомогою статистичних методів і математичних моделей в хмарних сервісах, набути практичних вмінь роботи з «великими даними» big data.

Завдання 17. Моніторинг якості повітря за допомогою Google Earth (м. Харків, будь-яке місто України) за допомогою розрахунків відстаней від будинків до найближчих автострад і кумулятивного індексу накопичення забруднень. Взяти за основу метод і формули, які Google Earth вже використав для Лондона¹⁰ і низки інших крупних міст.

Одним із найпоширеніших забруднювачів Лондона є діоксид азоту NO₂, який утворюється при спалюванні викопного палива для цілей опалення та виробництва електроенергії. Вплив NO₂ дратує легені і може спричинити шкідливі респіраторні захворювання, що підвищує ризик важких захворювань, таких як Covid-19 та ін. Забруднення атмосферного повітря щороку призводить до 9 400 смертей у Лондоні.

Google збирав дані за допомогою автомобілів Street View (пробіг 140000 миль і 7000 годин водіння), які були оснащені мобільною сенсорною платформою Aclima для вимірювання оксиду азоту (NO), діоксиду азоту (NO₂), шкідливих твердих частинок (PM-2,5, PM-10), ультратонких твердих частинок (PM-0,1) і сажі.

Для виконання завдання рекомендовані такі ресурси:

1. Дані для Великої Британії. URL: <https://uk-air.defra.gov.uk/latest/google-earth>
2. Дані в динаміці для Харкова. URL: <https://www.iqair.com/ru/earth?nav>
3. Air Pollution Data – є дані для Харкова. URL: <https://aqicn.org/map/>
4. Карти моніторингу якості повітря. URL: <https://eco-city.org.ua/>
5. Mapping air pollution. URL: <https://apte.caee.utexas.edu/google-air-mapping/>
6. Hight Resolution Air Pollution Mapping. URL: <https://pubs.acs.org/doi/10.1021/acs.est.7b00891> .

¹⁰ Mapping London`s Air Pollution. URL: earth.google.com/web/@51.51191822,-0.11389985,8.82638142a,13152.19365398d,35y,0.99998841h,0.58953924t,0r/data=CjESLxIgMTlmODU2YzlyMDM3MTFlYW11Mml3Nzk0OGI0ZWZhZjQjC3ZveV9wb2ludF8x

Приклад виконання завдання. Протягом виробничої практики 2020–2021 рр. низка студентів провели дослідження різних прикладних задач екології. Зокрема був проведений аналіз стану забрудненості повітря в великих містах на території України. Головним джерелом забруднення атмосферного повітря в Україні є підприємства паливно-енергетичного комплексу (36 %) від загального обсягу викидів, підприємства обробної (35 %) та видобувної промисловості (25 %). Головними забруднюючими речовинами є CO_2 , SO_2 , аміак (NH_3), феноли ($\text{C}_6\text{H}_6\text{O}$), формальдегід (CH_2O). Крім того, понад третина усього обсягу викидів забруднюючих речовин в Україні належить автотранспорту, який додає до атмосфери ~65 % свинцю, ~54 % – CO_2 , ~32 % – вуглеводнів і ~24 % – NO_x від загальної кількості викидів цих речовин. Частинки PM_{10} (великий пил) – це суміш зважених в повітрі частинок діаметром $d < 10$ мкм, які пов'язані, зокрема, з процесами горіння твердого і рідкого палива (токсичні речовини бензопірен, фуран, діоксини та ін.). Частинки $\text{PM}_{2.5}$ утворюють атмосферні аерозолі (зважений пил) з $d < 2.5$ мкм, який, за оцінкою Всесвітньої організації охорони здоров'я (ВООЗ), є найбільш шкідливими для здоров'я людини серед усіх забруднювачів атмосфери. Частинки PM_{10} потрапляють до легенів і викликають захворювання верхніх дихальних шляхів і супутні проблеми, а частинки $\text{PM}_{2.5}$ потрапляють у кров, а з нею – до всіх клітин і тканин організму, і викликають тяжкі захворювання. Близько 80 % передчасних смертей, пов'язаних з викидами вугільних електростанцій в Європі, були викликані впливом $\text{PM}_{2.5}$. Згідно зі звітами ВООЗ, тривалий вплив $\text{PM}_{2.5}$ скорочує тривалість життя, а короточасний вплив високих концентрацій $\text{PM}_{2.5}$ збільшує кількість смертей від респіраторних і серцево-судинних захворювань, загострень астми, порушень функції легенів, а також від Covid-19.

При виконанні завдання практики для порівняння стану забрудненості атмосфери великих міст України були вибрані 16 міст з 4-х регіонів країни (центрального, східного, західного і південного, для яких у відкритих джерелах є дані моніторингу кількості найважливіших забруднювачів повітря, якості питної води та ряду інших показників. Для порівняльного аналізу використовувалися дані про ГДК досліджуваних речовин в атмосфері.

Для статистичного аналізу даних по різних показникам, містам і регіонам використовувалися методи статистичного аналізу ресурсу Google Data Studio. Проведений аналіз наявних відкритих даних Державного моніторингу якості повітря на території великих міст України¹¹ показав, що в різних містах вимірювалися різні параметри. Так, в офіційних звітах в більшості міст наведені дані вмісту завислих речовин

¹¹ Міністерство захисту довкілля та природних ресурсів України. URL: <https://mepr.gov.ua/timeline/Stan-atmosferного-povitrya.html>

(Suspended Solids, SS), SO_2 , CO_2 , NO_2 , у більшості міст – також вмісту NO , формальдегіду (CH_2O), фенолу ($\text{C}_6\text{H}_6\text{O}$), а у деяких містах – ще й аміаку (NH_3), фтористого водню (HF), хлористого водню (HCl) і сажі (С). В більшості звітів відсутні (частково або повністю) дані вимірювань показників в суботу і неділю, свята і період літніх відпусток (липень-серпень), що робить неінформативним звичайний статистичний аналіз. Тому для проведення розрахунків були використані математичні методи аналізу неповних / нечітких даних на базі баєсовських функцій і методів інтерполяцій. Для цього був розроблений проект в онлайн-сервісі Map of Life з використанням вбудованих в нього баз даних Google Earth і запитів Google BigQuery.

Результати статистичного аналізу були представлені у вигляді графіків, діаграм і таблиць. Вміст зважених речовин у повітрі (рис. 30), наявність окремих забруднень та їх загальний вміст по містам (табл. 6) і регіонам України (табл. 7), наявність кореляцій між вмістом (табл. 8) та багато інших закономірностей було досліджено за допомогою статистичних методів і математичного моделювання.

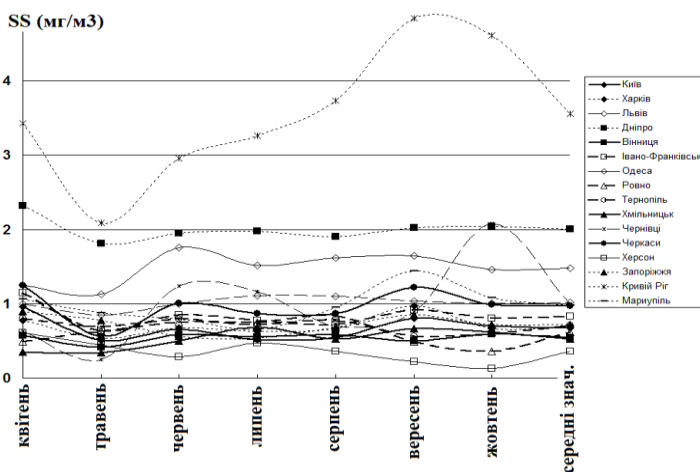


Рис. 30. Вміст SS в 16 містах України

У результаті виконання завдання практики була показана спільна динаміка сезонних коливань вмісту забруднюючих речовин (весна-літо-осінь) як на території кожного міста, так і по регіонам, і в країні в цілому. Наведений своєрідний «антирейтинг» міст з найбільшим вмістом найбільш небезпечних для здоров'я людей речовин, який очолюють відомі індустріальні «гіганти». Були виявлені кореляції між вмістом окремих речовин в повітрі як кожного з міст, так і регіонів і країни в цілому. Також показана наявність сезонних коливань цих залежностей. Досліджені кореляції можуть вказувати, чи єдине джерело спричиняє викид цих речовин

Таблиця 6

Вміст забруднюючих речовин в атмосфері 16 крупних міст України (04-10.2020 р.) Кольори позначають міста центрального, західного, східного і південного регіонів відповідно

№	Місто	SS	SO ₂	CO ₂	NO ₂	NO	NH ₃	CH ₂ O	Всього
1	Київ	0.67	1.47	0.52	4.25	1.37	0.26	1.82	12.1
2	Вінниця	0.54	0.02	0.54	3.35	—	0.46	2.02	8.0
3	Хмельницький	0.53	0.44	0.52	1.28	0.48	0.20	1.16	5.4
4	Черкаси	0.97	0.27	0.43	1.07	0.72	1.91	2.82	8.2
5	Львів	1.02	0.22	0.71	1.24	0.51	—	2.39	6.7
6	Івано-Франківськ	0.84	0.17	0.46	1.15	0.51	—	—	3.1
7	Рівне	0.62	0.02	0.33	0.74	0.33	0.08	2.08	5.5
8	Тернопіль	0.71	0.12	0.53	1.28	0.47	—	0.89	4.0
9	Чернівці	0.99	0.05	0.11	0.49	0.06	—	1.25	5.2
10	Харків	0.70	0.13	0.47	0.74	0.30	0.08	0.87	4.4
11	Дніпро	2.01	0.25	0.80	2.39	0.80	0.99	5.87	14.1
12	Запоріжжя	0.72	0.14	0.38	1.81	0.86	—	1.73	8.0
13	Кривий Ріг	3.56	0.32	0.62	1.21	0.38	0.29	6.58	13.7
14	Маріуполь	0.98	0.46	0.29	1.30	—	0.25	7.82	12.3
15	Одеса	1.48	0.87	1.13	1.40	0.61	—	4.92	13.7
16	Херсон	0.36	0.13	0.36	3.50	1.69	—	1.80	8.9

в атмосферу міста (за фактом наявності у відкритих джерелах), чи результат статистичних спостережень відбиває синергію кількох джерел, у тому числі не в даному місті, але з інших джерел, які потрапили в дане місто завдяки процесам переносу в атмосфері.

Таблиця 7

Середній вміст забруднюючих речовин по регіонах України

Регіон	SS	SO ₂	CO ₂	NO ₂	NO	C ₆ H ₆ O	Сер. знач.
Центральний	0.68	0.55	0.50	2.49	0.86	0.99	6.06
Західний	0.83	0.12	0.43	0.98	0.38	0.65	3.39
Східний	1.59	0.26	0.51	1.49	0.58	1.14	5.58
Південний	0.92	0.50	0.75	2.45	1.15	1.23	6.99

Результати досліджень якості повітря і річкових вод м. Харкова порівняно з іншими містами України були опубліковані у вигляді статей у фахових виданнях [13, 14].

Таблиця 8

Коефіцієнти кореляцій залежностей між сумарними показниками забруднення по 16 містам України

	SS	SO ₂	CO ₂	NO ₂	NO	C ₆ H ₆ O	NH ₃	HF
SO ₂								
CO ₂	0.269	0.393						
NO ₂		0.425						
NO		0.354		0.912				
C ₆ H ₆ O				0.365	0.388			
NH ₃						0.221		
HF					0.331	0.324	0.453	
HCl	0.248	0.214	0.717	0.327	0.442			0.547
CH ₂ O	0.817		0.315				0.901	

5. Аналіз зображень

Математичний аналіз зображень являє собою цікаву і важливу задачу прикладної математики. Так, аналіз медичних зображень дозволяє швидко і своєчасно виявляти пухлини, тромби та інші порушення завдяки розв'язанню задач розпізнавання і класифікації, часто із використанням штучного інтелекту [26]. Аналіз зображень Землі і планет дозволяє аналізувати геологічні процеси, зміни стану рослинного покриву і джерел води та багато ін. В основі аналізу лежать розрахунки числа пікселів різних кольорів, виділення контурів за допомогою поліномів Лежандра або ін., обчислення периметрів ліній і площин складних поверхонь. Важливою компонентою досліджень є фрактальний аналіз геометричних структур у вигляді наборів 1D-, 2D- або 3D-форм. Приклади таких геометрій можна знайти в природі (рис. 31а-в). В останні роки багато наукових досліджень проводяться шляхом аналізу зображень онлайн ресурсів Google Maps, Google Earth, Google Planets¹² (рис. 31г).

Фрактальний аналіз – це обчислення фрактальної розмірності будь-якої кривої $X(t)$ або зображення і виявлення розбіжностей між геометричною та однією з фрактальних розмірностей, найчастіше **розмірністю Хаусдорфа**

$$D_{\chi} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} M_{\alpha}^{\varepsilon}(\Omega), \quad (98)$$

де $M_{\alpha}(\Omega)$ – α -міра Хаусдорфа множини Ω , $M_{\alpha}^{\varepsilon}(\Omega) = \inf(\Theta_{\alpha}(\Xi))$, де \inf береться по всім ε -покриттям Ω .

¹² Зображення Місяця та Марсу за посиланнями. URL: <https://www.google.com/moon/>, <https://www.google.com/mars>

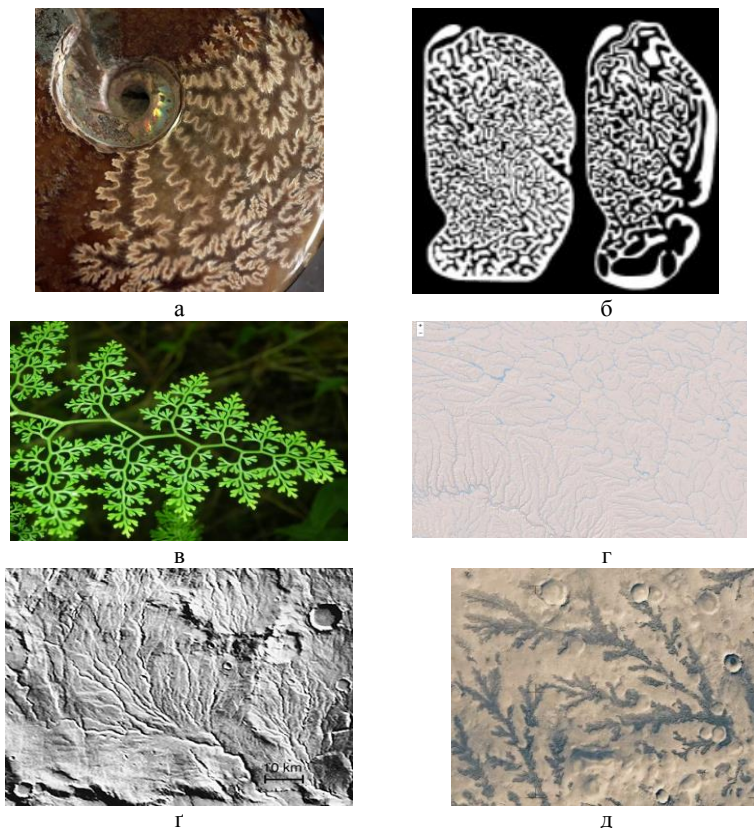


Рис. 31. Фрактальні структури в природі: шви раковин молюсків (а), дихальних шляхів тварин (б), листків рослин (в), річкових систем Землі (г), сухих річкових русел (г) і хімічних фронтів поверхні (д) Марсу

Для обмеженої множини в метричному просторі використовують **розмірність Мінковського**

$$D_m = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)}, \quad (99)$$

де N – мінімальне число елементів, яке потрібне для повного покриття відповідної фрактальної структури на площині або у просторі стандартними елементами з характерним розміром ε . Якщо ліміт не існує, можна розглядати верхню і нижню межу і говорити відповідно про верхню та нижню розмірності Маньківського. Таким чином, фрактальна розмірність – це мінімальне число ε -мірних «квадратів» для покриття заданої множини.

Фрактальні (самоподібні) структури утворюються шляхом виключення з геометричної кривої, перетину або з об'єму матеріалу деяких складових частин, які поступово самоподібно зменшуються з масштабом зменшення ε . Типовими прикладами фрактальних пористих структур є множина Кантора (Канторовий пил рис. 32а) з $D = \ln 2 / \ln 3$, крива фон Коха (рис. 32б) з $D = \ln 4 / \ln 3$, серветка Серпінського (рис. 32в) з $D = \ln 3 / \ln 2$, губка Менгера (рис. 32г) з $D = \ln 2 / \ln 3$ та ін.

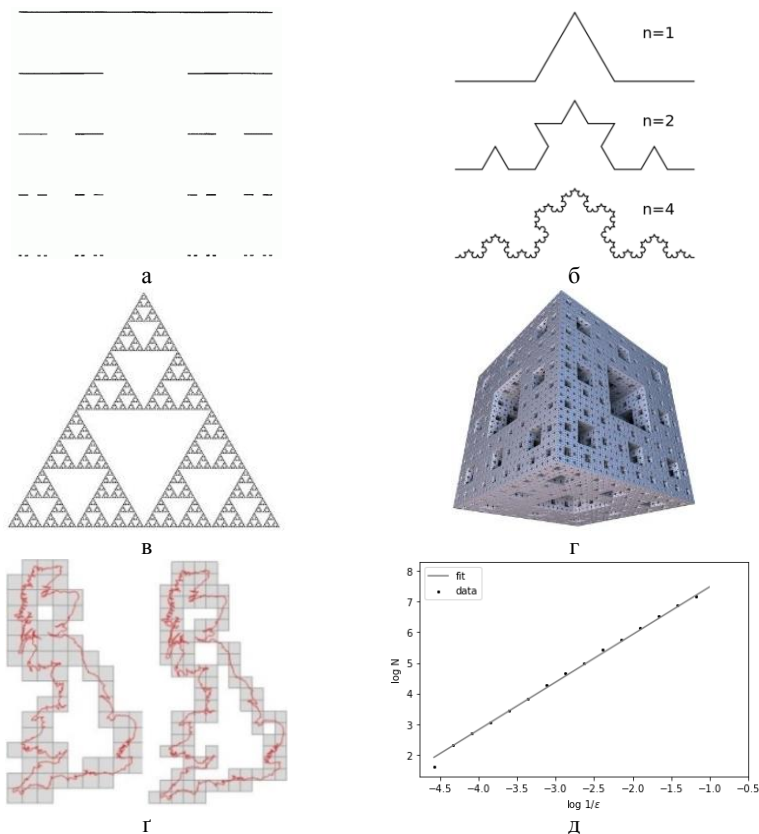


Рис. 32. Канторова множина (а), крива Коха (б), серветка Серпінського (в), губка Менгера (г), покриття квадратами берегової лінії Англії (е) і обчислення D_m (д)

Відповідно до визначення (99), чисельні розрахунки фрактальної розмірності проводяться шляхом послідовного покриття кривої або площини квадратами з довжиною сторони $a = \varepsilon^{-n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ і підрахування числа квадратів (метод **box-counting**). При цьому облічується число квадратів, які містять хоча би одну точку кривої (зображення).

На рис. 32д наведений приклад розрахунків для довжини берегової лінії Англії. Обчислення проводять до тих пір, поки залежність $\ln N_n(\ln \varepsilon_n)$ не наблизиться з достатньою точністю до прямої (рис. 43д).

Завдання 18. Пропонується аналіз фрактальних розмірностей структур із ресурсів Google Maps, Google Earth, таких як (1) річкові русла Землі та планет, (2) гірські хребти, (3) рельєф берегової лінії океанів, морів та озер, (4) хімічні фронти у ґрунтах. Крім того, можна обрати дослідження фрактальних розмірностей систем кровоносних судин, дихальних шляхів на медичних зображеннях (ангіограми, комп'ютерні томограми, мікрофотографії).

Іншим важливим інструментом аналізу зображень, а також хаотичної поведінки динамічних систем є **вейвлет-аналіз**, який призначений для виявлення самоподібності кривих, сигналів, структур, зображень і т.п. Формально це є представленням деякої функції $X(t)$ (часового ряду або послідовності пікселів зображення) відносно або повної ортонормованої множини деяких базових функцій $\{\phi_j(t)\}_j$, або надповної множини або фрейму векторного простору для простору Гілберта інтегрованих з квадратом. На відміну від методу Фур'є, $\{\phi_j(t)\}_j$ не є гармонічними функціями і тому вейвлет-аналіз дозволяє наближати саме подібні стохастичні функції. Наприклад, як базову функцію можна використати $\phi(t) = (\sin(k\pi t) - \sin(\pi t)) / (\pi t)$, $k > 1$. Симетричні базові функції $\phi(0) > 0$ немонотонно спадають до $\phi(\infty) = 0$, наприклад, як найпростіший з велветів мексиканська шляпа [1]. В такому разі можна ввести підпростір функцій

$$\phi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \phi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (100)$$

де $a > 0$ і b визначають масштаб і зсув вихідного вейвлету $\phi(t)$, так що проекція функції $X(t)$ на підпростір

$$X_a(t) = \int_{\mathbb{R}} X_{\phi}\{X\}(a,b) \cdot \phi_{a,b}(t) db, \quad (101)$$

де $X_{\phi}\{X\}(a,b) = \int_{\mathbb{R}} X(t) \phi_{a,b}(t) dt$ - вейвлет-коефіцієнти.

Фактично, $[a^{-1}, 2a^{-1}]$ – це є смуга частот, в якій проводиться пошук самоподібності. Результати розрахунків за (100) – (101) для різних наборів (a,b) формують спектрограми – частотні залежності коефіцієнтів (позначаються кольором) на різних масштабах (див. приклади в [1]).

Завдання 19. Як завдання виробничої практики студентам пропонується вейвлет-аналіз різних природних структур з відкритих джерел. Приклади програмного коду як для обчислень фрактальної розмірності, так

і вейвлет-аналізу, в середовищах Python, R, C++ MatLab та ін. Можна знайти в інтернеті.

Завдання 20. Ще одна важлива задача, яка доступна студентам як задачі практики – це обчислення просвітності θ середовищ на знімках (рис. 33) як долю числа білих пікселів, які відповідають пустотам, до загального числа пікселів. Значення θ використовуються в численних емпіричних формулах для розрахунків пористості і проникливості ґрунтів для води та розчинених забруднювачів або гідравлічної провідності дихальних шляхів тварин (рис. 31б) та подібних структур.

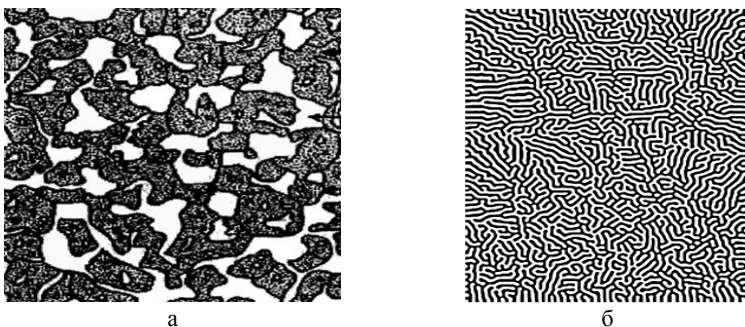


Рис. 33. Приклади пористих структур для обчислень θ : ґрунт (а), суміш (б)

Приклад виконання завдання

З використанням методів комп'ютерної графіки та власного програмного коду в C++ були проведені розрахунки фрактальних розмірностей дихальних шляхів арктичних тварин, які еволюційно пристосовані для швидкого нагріву повітря, яке вдихається, від низьких зимових $-10-70^{\circ}\text{C}$ до температури тіла $+37-39^{\circ}\text{C}$ [27].

Пористі середовища широко поширені в природі і техніці, а дослідження деформацій пористих матеріалів та течій крізь них різних рідин та газів має велике прикладне значення. На рівні великих масштабів це фільтрація ґрунтових вод, нафти або газу в ґрунтах з різними фізичними властивостями. В техніці фільтрація використовується для постачання, розділення, очищення сумішей. В біологічних тканинах рідини рухаються крізь пористі структури кісток, печінки, легенів та інших тканин. В мікро- / нанопристроях використовуються мікро- / нанофільтри для зміни фізичних властивостей рідин. У всіх випадках потрібно отримати робочі формули для ефективності відповідних фізичних процесів шляхом розв'язання задач прикладної математики, для чого треба формалізувати опис властивостей пористих матеріалів, таких як пористість $\mathcal{S} = V_p / V$ та гідравлічна провідність $K = \mu L Q / (\Delta P \cdot S)$, де V_p і V – об'єми пор та матеріалу, μ – в'язкість рідини, L і S – довжина та поперечний переріз зразка матеріалу,

Q і ΔP – об'ємна витрата та перепад гідростатичних тисків крізь зразок. Обчислення значень \mathcal{G} і K потребують складних експериментальних вимірювань, тому багато зусиль прикладається для математичного моделювання пористих матеріалів та обчислення їх властивостей на простіших формулах. Наприклад, для ізометричних пор обчислення \mathcal{G} замінюються обчисленнями просвітності $m = \Sigma_p / \Sigma$, де Σ_p – загальна площа пор на поперечному перерізі Σ зразка. Таким чином, обчислення \mathcal{G} можуть проводитись на перерізах ґрунтів та матеріалів або комп'ютерних томограмах біологічних тканин шляхом комп'ютерного аналізу зображень. Для обчислень K використовуються різні спрощені моделі пористих середовищ як сукупності трубок (модель Козені), кульок з заданими діаметрами d_0 (формула Кармана-Козені $K = \mathcal{G}^3 d_0^2 / (\kappa(1 - \mathcal{G}^2))$), де κ – коефіцієнт звивистості пор, який залежить від типу розташування кульок). Найбільш плідні підходи пов'язані з моделюванням пористих середовищ як фрактальних структур.

Фрактальні або самоподібні структури, розмірність Хаусдорфа для яких відрізняється від їх геометричної розмірності, утворюються шляхом виключення з перетину або з об'єму матеріалу деяких складових частин, які поступово самоподібно зменшуються з масштабом зменшення $r > 1$. Фрактальні моделі мають пори різних розмірів від макро- до нанорозмірних, що відповідає реальним природним матеріалам. Фрактальний підхід дозволяє отримати формули для проникливості пористого середовища, у тому числі для зв'язаних пор та подвійно-пористих або тріщинуватих середовищ.

Для природних ґрунтів вимірювання дають значення $D=1.112-1.526$. Для пористих металів $D=1.25-1.43$, а залежність між фрактальною розмірністю та пористістю описувалася емпіричною формулою

$$D = k_2 + \frac{k_2 - k_1}{1 + \exp((\mathcal{G} - k_0) / k_3)}, \quad (102)$$

де $k_{0,1,2,3}$ – константи, різні для кожного з матеріалів.

Залежність (102) означає, що структури з різними фрактальними розмірностями можуть мати різну пористість та гідравлічну проникливість, і тому моделювання пористої структури фракталом з тією ж розмірністю може бути невірним з точки зору гідромеханіки. В даній роботі вивчається зв'язок фрактальних та гідравлічних властивостей деяких пористих структур, які зустрічаються в живій природі, та відповідних фрактальних моделей.

Для виконання завдання практики зображення поперечних перетинів пористих структур верхніх дихальних шляхів арктичних тварин були отримані з опублікованих даних КТ-зображень перерізів назальних пазух морської видри, яка має надзвичайно високе відношення

поверхня/об'єм або $\zeta = \Sigma_p / A$ де A – загальний просвіт дихального шляху на зображенні (області білого кольору на рис. 34). Наведені на рис. 34а-є слайси мають продовжні координати $x=0.52; 0.64; 0.74; 0.78; 0.81; 0.85; 0.92; 0.96$ відповідно. Фракталоподібні структури в верхніх частинах слайсів рис. 34е-є відповідають області, яка розпізнає запахи та не беруть участі у нагріванні повітря. Детальний аналіз слайсів рис. 34б,в показує, що пористі структури дихальних шляхів також утворені фракталоподібними розгалуженнями (L-дерева).



Рис. 34. КТ знімки верхніх дихальних шляхів арктичної видри

Значення Σ_p та A для кожного слайсу були облічені автоматично при проведенні КТ. Фрактальна розмірність кожної структури обчислювалась за допомогою алгоритму box counting вбудованих функцій Python 3.8.2.

Значення Σ_p , A і фрактальних розмірностей зображень рис. 34а-є наведені в табл. 9. Таким чином, структури, які відповідні за нагрівання повітря, мають фрактальну розмірність, близьку до розмірності квадратного килима Серпінського.

Таблиця 9

Значення фрактальних розмірностей перерізів дихального шляху видри

Слайс	а	б	в	г	г	д	е	є
D	1.82	1.82	1.78	1.81	1.76	1.76	1.75	1.65
Σ_p (мм)	270	1250	740	480	410	400	450	250
A (мм ²)	120	260	230	180	165	160	152	110
ζ	2.25	4.81	3.22	2.67	2.49	2.5	2.96	2.27
ξ	607.5	6012.6	2382.8	1281.6	1021	1000	1332	567.5
D_h (мм)	1.78	0.832	1.24	1.5	1.61	1.6	1.35	1.76

Використовуючи обчислені дані, можна розрахувати коефіцієнт $\zeta = A^{-1} \Sigma_p$, безрозмірний фактор форми $\xi = \Sigma_p^2 / A$ та гідравлічний діаметр $D_h = 4A / \Sigma_p$, який використовується в механіці рідини як

характеристика гідравлічного опору каналів складної форми. Для трубки кругового перерізу D_h дорівнює її діаметру, а для каналу квадратного перерізу D_h дорівнює стороні квадрата. Результати розрахунків також наведені в табл. 9. Методами статистичного аналізу показана наявність таких залежностей між обчисленими параметрами (табл. 10).

Таблиця 10

Статистичні залежності між параметрами з табл. 9, (R^2 – коефіцієнт детермінації)	
$A = 5.92 \cdot \Sigma_p^{0.543}$, $R^2 = 0.942$;	$\xi = 58.19 \cdot \zeta^{3.013}$, $R^2 = 0.964$;
$\xi = 0.168 \cdot \Sigma_p^{1.458}$, $R^2 = 0.942$;	$D_h = 14.163 / \xi^{0.32}$, $R^2 = 0.963$;
$D_h = 23.8 / \Sigma_p^{0.459}$, $R^2 = 0.942$;	$\zeta = 0.0042 \cdot A^{2.476}$, $R^2 = 0.893$;
$\xi = \zeta \Sigma_p$;	$D_h = 4 / \zeta$.

Таким чином, пористі структури рис. 34б,в мають найвищі відношення ζ (периметр / площа перерізу). Їх форма найскладніша, що характеризується найбільшими значеннями звивистості $\xi > 2000$. Гідравлічний діаметр цих перерізів найменший, що відповідає еквівалентним круговим трубкам з діаметрами $D_h < 1.25$ мм.

Математичною моделлю пористої структури слайсів рис. 34а-е може бути квадратний килим Серпінського, а для слайсів рис. 34д-е – круговий фрактал. Згідно з табл. 9, найближчу до цих слайсів фрактальну розмірність мають килими Серпінського з $N=7.5$, $r=3$ ($D=1.834$), $N=13$, $r=4$ ($D=1.85$), $N=19$, $r=5$ ($D=1.829$).

Для порівняння гідромеханічних властивостей структур розглянемо область із заданою площиною $A_0 = \text{const}$ та довільною початковою формою перерізу. Тоді початкові розміри квадратної, трикутної, прямокутної та діаметр кругової областей складуть, відповідно

$$a_{\square} = \sqrt{A_0}, \quad a_{\Delta} = 2 \sqrt{\frac{A_0}{\sqrt{3}}}, \quad H = a_{\square} \sqrt{\frac{A_0}{\lambda}}, \quad a_o = 2 \sqrt{\frac{A_0}{\pi}}, \quad (103)$$

де $\lambda = W / H$ – фактор форми прямокутної області.

Значення Σ_p , A , m , D_h , розраховані з урахуванням (103) для квадратного, трикутного, і прямокутного (з початковими розмірами $a_{\square} \times \lambda a_{\square}$ = висота \times ширина) килимів Серпінського та кругового фракталу, наведені в табл. 11. Для $n \rightarrow \infty$ всі килими Серпінського перетворюються у канторовий пил з нескінченим периметром $\Sigma_{p\infty} \rightarrow \infty$ та початковою площиною $A_{\infty} = A$. Залежності з табл. 10, обчислені для $n < 10$, наведені

на рис. 35. Безрозмірні залежності $m_n(n)$ ідентичні рис. 3б. Монотонно зростаючі залежності $\Sigma_{pn}(n)$ і $\xi_n(n)$ розташовані таким чином:

$$\Sigma_{\square, \lambda=5} > \Sigma_{\square, \lambda=4} > \Sigma_{\square, \lambda=3} > \Sigma_{\square, \lambda=2} > \Sigma_{\square, \lambda=1} > \Sigma_O > \Sigma_\Delta,$$

$$\xi_{\square, \lambda=1} > \xi_O > \xi_\Delta > \xi_{\square, \lambda=2} > \xi_{\square, \lambda=3} > \xi_{\square, \lambda=4} > \xi_{\square, \lambda=5}.$$

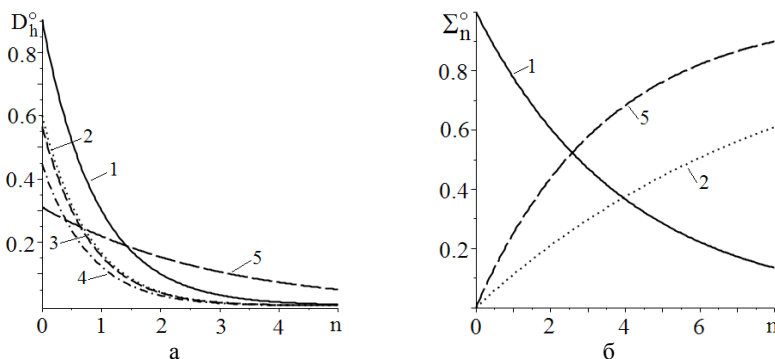


Рис. 35. Залежності $D_h(n)$ та $\Sigma_{pn}(n)$ для розглянутих фракталів

У випадку каналів кругового, квадратного, прямокутного або трикутного перерізу, гідравлічна провідність Z_{jn} відповідних фрактальних структур може бути обчислена за аналітичними формулами, які у безрозмірному вигляді $Z_{jn}^o = Z_{jn} A_0^2 / \mu L$ мають вигляд

$$Z_{\Delta n}^o = 20\sqrt{3} \sum_{k=1}^n 2^{4k} 3^{k-1}, \quad Z_{\square n}^o \sim \kappa \sum_{k=1}^n 9^k 8^{k-1}, \quad Z_{On}^o = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n (7 \cdot 3^4)^k, \quad (104)$$

причому для $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$ маємо $\kappa = 28.407; 8.746; 5.064; 3.768; 2.746$ відповідно.

Статистичний аналіз залежностей з табл. 11 виявив закономірності, які відповідають отриманим в табл. 10, тільки для $\zeta(\Delta)$ квадратного та трикутного і залежності $\xi(\Sigma_p)$ трикутного килимів Серпінського. Таким чином, гідравлічний діаметр недостатньо точно описує реальне співвідношення периметр / переріз слайсів, поверхня / об'єм пористого матеріалу, звивистість пор та гідравлічний опір матеріалу, тому що гідравлічний діаметр трикутних, квадратних та прямокутних кожної з пор дорівнює радіусу вписаного кола і, таким чином, применшує площу перерізу та збільшує гідравлічний опір кожної з них, що вже після кількох ітерацій фракталу вносить суттєві похибки до загальної величини гідродинамічних параметрів.

Таблиця 11

Параметри фрактальних структур

	Σ_{pn}	A_n	m_n	D_h
Рис. 1а	$\frac{4}{5} \frac{8^n - 3^n}{3^n} a_{\square}$	$\frac{9^n - 8^n}{9^n} a_{\square}^2$	$1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$	$\frac{5(9^n - 8^n)}{6^n(8^n - 3^n)} a_{\square}$
Рис. 1б	$3 \frac{3^n - 2^n}{2^n} a_{\Delta}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{4^n - 3^n}{4^n} a_{\Delta}^2$	$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$	$\frac{a_{\Delta}}{4\sqrt{3}} \frac{4^n - 3^n}{2^n(3^n - 2^n)}$
Рис. 1в	$\frac{2(\lambda + 1)}{5} \frac{8^n - 3^n}{3^n} a_{\square}$	$\lambda a_{\square}^2 \frac{9^n - 8^n}{9^n}$	$1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$	$\frac{10\lambda a_{\square}}{(\lambda + 1)} \frac{9^n - 8^n}{6^n(8^n - 3^n)}$
Рис. 1г	$\pi a_o \frac{7^n}{3^n}$	$\pi a_o^2 \frac{7^n}{4 \cdot 9^n}$	$\left(\frac{7}{9}\right)^n$	$\frac{a_o}{16 \cdot 3^n}$

Таким чином, кращими математичними моделями пористих структур можуть бути мультифрактали, в яких за рахунок вибору значень N_p , r_p та форми каналів φ_p на кожній генерації мультифракталу можна забезпечити не тільки статистичні залежності вигляду (табл. 10), що відповідають даним вимірювань на зразках матеріалу, але й фрактальні розмірності та гідравлічний опір каналу в цілому. Результати виконання завдання практики були опубліковані у вигляді статей у фаховому виданні [15, 16].

6. Візуалізація складних геометричних і механічних структур

Студенти спеціальності «прикладна математика» прослуховують навчальний курс з комп'ютерної графіки і виконання завдання виробничої практики на цю тему дозволяє оновити теоретичні знання і вдосконалити практичні вміння роботи з пакетами 3D-графіки. Рекомендовані до використання такі загальновідомі пакети, як AutoCAD, Autodesk 3ds Max, Autodesk Fusion 360, CATIA, Daz Studio, Design Spark Mechanical, Geomodeller 3D, Hexagon, LightWave 3D, Open CASCADE, SelfCAD, SolidWorks, Wolfram Mathematica, багато з яких є безкоштовними для студентів вищих навчальних закладів, або використати власноручно розроблений код.

Завдання 21. Генерація пористих структур і розрахунки їх просвітності m , пористості ϑ , сумарного периметру пор (змочувана поверхня) Σ_p , сумарної площини перерізу пор A , фрактальної розмірності D_h та ін.

1) Для виконання завдання можна використати підхід моделі сукупності твердих кульок. При цьому задається діаметр кульки d (або певний набір діаметрів $\{d_i\}_{i=1}^p$) і випадковим чином генеруються координати центрів кульок в просторі (рис. 36а). У разі пересічень пари кульок нова кулька

або зміщується вбік, або її діаметр зменшується до усунення самопересічень (рис. 36 б). Оскільки існують емпіричні залежності $\mathcal{G}(d)$, вони можуть бути перевірені під час виконання завдання. Наприклад, відома формула Козені-Кармана, яка дозволяє обчислити гідравлічну провідність пористого середовища як функцію від пористості \mathcal{G} , поверхні пор Σ_p і форми кульок.

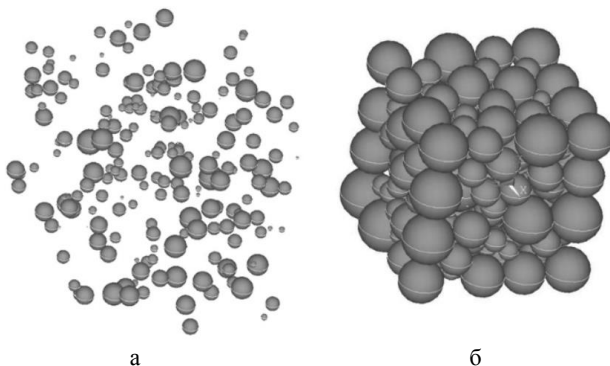


Рис. 36. Генерація кульок в просторі (а) до повного заповнення (б)

2) Для виконання завдання рекомендується алгоритм генерації мозаїки Лагерра-Вороного [28], яка є розбиттям евклідової площини на багатокутні осередки, що визначаються набором кіл. Осередок для даного кола C складається з усіх точок, для яких відстань до C менша, ніж відстань до інших кіл. Діаграма потужності є формою узагальненої діаграми Вороного; вона збігається з діаграмою Вороного центрів кіл у разі, якщо всі кола мають однакові радіуси. На рис. 37 наведений приклад розбиття кубу мозаїкою Лагерра-Вороного (рис. 37а) і заміною ліній на циліндричні балки (рис. 37б).

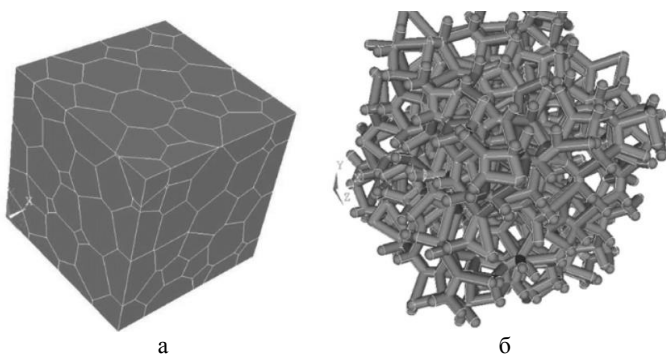


Рис. 37. Генерація мозаїки Лагерра-Вороного в кубі (а) і заміна ліній балками до утворення пористої структури (б)

Поставлене завдання є важливим для розрахунків методами скінченних елементів, граничних елементів, скінченних та граничних об'ємів – течій нафти, газу, води крізь ґрунти з різниці пористостями і формою пор. «Ручна» збірка геометрії таких структур займає багато часу, а використання запропонованих алгоритмів дає можливість за лічені секунди генерувати геометрії для подальших чисельних розрахунків.

Завдання 22. Візуалізація динамічних структур в просторі методами динаміки частинок або молекулярної динаміки. При цьому в заданому об'ємі простору генеруються сукупності кульок різних діаметрів $\{d_i\}_{i=1}^p$, які не мають пересічень поверхонь. Кулькам можуть задаватися різні властивості типу «тверді», «рідкі з високою рухливістю», «рідкі з малою рухливістю» та ін. Відповідно до типу задаються сили попарної взаємодії між частинками (молекулярні, електричні, магнітні і т.д.), а також зовнішні сили (гравітація, відцентрові та ін.). Після цього проводиться інтегрування системи ЗДР динаміки Ньютона для кожної частинки

$$m_j \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij} + \vec{g}_j, \quad \vec{r}_j|_{t=t_0} = \vec{r}_j^0, \quad (105)$$

де i, j , m_j і \vec{r}_j – номери, маси і вектор координат частинок, \vec{f}_{ij} – сили парних взаємодій, які діють на частинку j з боку частинки i , \vec{f}_i^h – сили, що діють тільки на частинку j з боку рідини (сила в'язкого тертя) та зовнішніх полів.

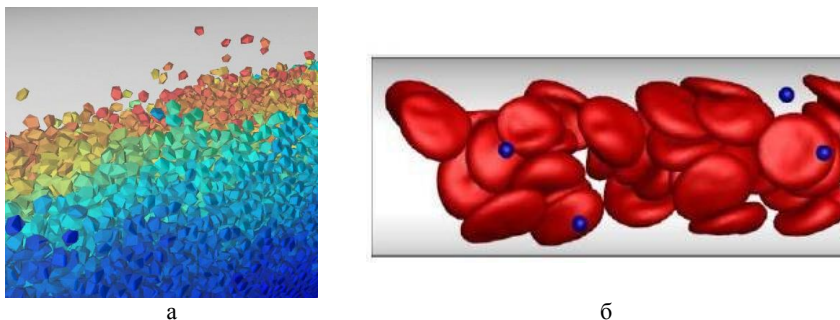


Рис. 38. Моделювання течії гранульованого середовища (а) і клітин крові (б) методом динаміки частинок

Інтегрування (105) на малому кроку часу Δt дає координати всіх частинок в момент часу $t_0 + \Delta t$. Тоді всі сили в правій частині (105) мають бути перелічені з новими координатам, а рівняння (105) знову двічі інтегруються і знаходяться координати в момент часу $t_0 + 2\Delta t$. Ітерації повторюються. Якщо на якомусь кроку відстань між деякою парою центрів

частинок стане меншою від суми їх діаметрів $|\vec{r}_{ij}(t+n\Delta t)| < (d_i + d_j)/2$, додаються сили відштовхування, які унеможливають наявність двох частинок в одній точці простору. Детальний перелік сил і відповідні формули є в роботі [29]. Форма частинок може бути довільною. Приклади розрахунків для різних типів частинок наведені на рис. 38.

Завдання 23. Генерація і візуалізація фрактальних дерев (L-систем). Багато структур в природі мають властивості фрактальних дерев. Наприклад, бінарні дерева, які можна представити графом, кожне ребро якого розгалужується в симетричний (рис. 39а) або несиметричний (рис. 39б) спосіб на два ребра, три або більше. Такі структури використовуються для вивчення механічних властивостей (стійкості, гідравлічної або термічної провідності та ін.) дерев, коренів і листків рослин, бронхіального та артеріального дерева судин людини та ін. Для таких систем значення довжин, діаметрів і кутів розгалужень в біфуркаціях бувають задані з результатів вимірювань або отриманих статистичних залежностей, наприклад [17] закон Мюрея

$$d_0^y = d_1^y + d_2^y, \quad (106)$$

де (Рис.40а) d_0 – діаметр батьківської судини, $d_{1,2}$ – діаметри двох дочірніх судин, $\gamma \approx 3$ ($\gamma = 2.55-3.02$ і $\gamma = 2.76-3.02$ для артеріальних і венозних судин, $\gamma = 2.61-2.91$ для бронхіального дерева).

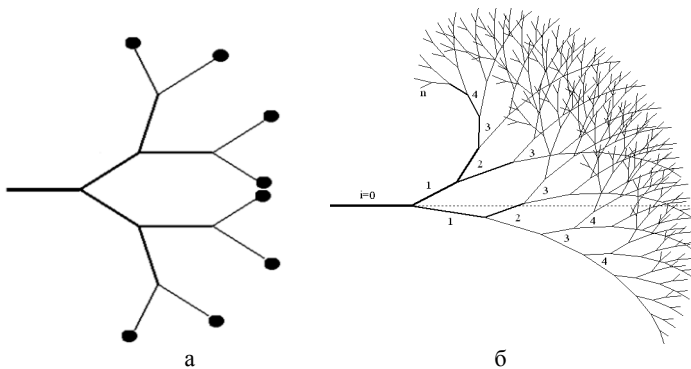


Рис. 39. Бінарне дерево з $n=3$ (а) і $n=7$ (б) генераціями, починаючи з кореня графа ($n=0$)

Для кутів розгалужень $\alpha_{1,2}$ виконуються співвідношення Розена:

$$\alpha_1 = \arccos \left(\frac{(1 + \xi^3)^{\frac{4}{3}} + 1 - \xi^4}{2(1 + \xi^3)^{\frac{2}{3}}} \right), \quad \alpha_2 = \arccos \left(\frac{(1 + \xi^3)^{\frac{4}{3}} \xi^4 - 1}{2\xi^2(1 + \xi^3)^{\frac{2}{3}}} \right), \quad (107)$$

де $\xi = \min\{d_1, d_2\} / \max\{d_1, d_2\}$ – коефіцієнт асиметрії біфуркації.

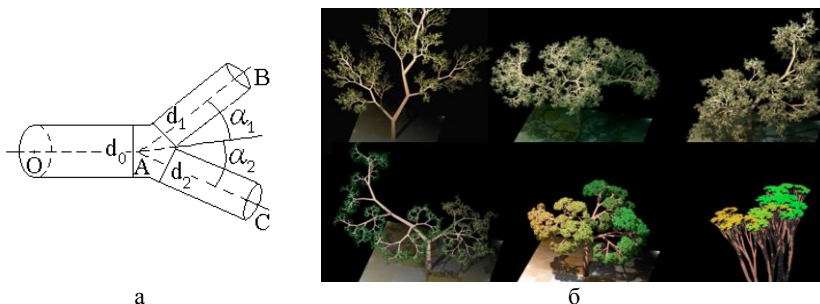


Рис. 40. Біфуркація трубок в бінарному дереві (а) і приклади 3D-дерев (б)

Для довжин трубок виконуються співвідношення типу:

$$L_j = ad_j^\beta, \quad (108)$$

де для артеріальних систем $\alpha \in [2.6; 7.59]$, $\beta \in [0.84; 1.16]$, але можливі також апроксимації залежностей $L_j(d_j)$ поліномами та іншими функціями.

Для генерації дерев задаємо діаметр d_0 першого елемента (кореня графа) і обчислюємо за (108) значення L_0 . Далі задаємо коефіцієнт асиметрії ξ і обчислюємо $d_{1,2}$ – з (106), $\alpha_{1,2}$ – з (107) і $L_{1,2}$ – з (108). Будуємо першу біфуркацію. Ітерації за (106) – (108) дають значення для дерева з довільним числом n (рис. 39а), але на деякому етапі з'являються самопересічення (рис. 39б). Треба розробити алгоритм генерації дерева без самопересічень гілок у просторі. Приклади наведені на рис. 40б.

Приклад виконання завдання. Під час виконання завдання 23 для дерева коронарних артерій людини був розроблений ефективних алгоритм генерації трубок моделі дерева без самопересічень. В основі алгоритму лежить поворот на малий кут в просторі площини, в якій лежать дочірні трубки, навколо осі батьківської трубки. Шляхом експериментів з обертанням площин для різних дерев були встановлені оптимальні кули обертання, які мінімізували час розрахунків.

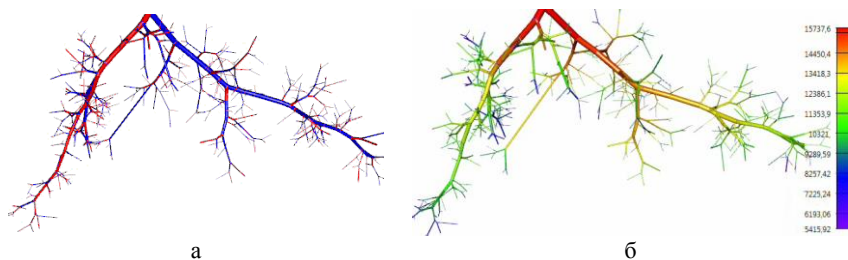


Рис. 41. Візуалізація швидкості руху крові (а) і тиску (б) в 3D-моделі

Був також доданий експорт гемодинамічних властивостей (провідність трубки, в'язкість рідини, тиски і швидкості руху рідини по трубках).

Розроблений програмний код підтримує автоматичний розрахунок параметрів побудованої моделі серцево-судинної системи та експорт їх у файл таблиці Microsoft Office Excel. Розроблений також анагліфний режим, який дозволяє 3D-візуалізацію з використанням червоно-синіх окулярів. Деякі результати візуалізації наведені на рис.41 були опубліковані у вигляді статті у фаховому виданні [17].

Розроблений алгоритм дозволив проводити моделювання розподілу крові в поверхневих тканинах тіла людини під час лікування оптичним опроміненням [30, 31], а також знаходження оптимальної локації для розміщення стенту в коронарних артеріях хворих на ішемічну хворобу серця [32, 33].

7. Розв'язання задач обтікання аеродинамічних форм з використанням пакету AnSys Fluent

Студенти спеціальності «прикладна математика» прослуховують навчальні курси з чисельних методів і мають уявлення про метод скінченних елементів, який на сьогодні є одним з найбільш використаних для розв'язання прикладних задач, пов'язаних зі стійкістю та міцністю будь-яких конструкцій, обтіканню тіл (літаків, підводних човнів, дронів) і течій рідин і газів (олії, газу, води, хімічних речовин, полімерних розплавів, рідких металів) по трубопроводах і каналах (річки, водогони).

Комп'ютерна механіка рідини (CFD) – це галузь механіки рідини, яка використовує чисельний аналіз та структури даних для вирішення проблем, що стосуються потоків рідин. Комп'ютери використовуються для виконання розрахунків, необхідних для моделювання потоку рідини, а також взаємодії рідин і газів з поверхнями, визначеними граничними умовами. За допомогою високошвидкісних суперкомп'ютерів можна розв'язувати достатньо складні задачі, які часто потрібні для вирішення прикладних проблем. CFD-аналіз дозволяє підвищити точність і швидкість складних режимів течій, таких як гіперзвукові або турбулентні потоки.

Початкова перевірка такого програмного забезпечення зазвичай проводиться за допомогою експериментальних апаратів, таких як аеродинамічні труби. Крім того, для порівняння можна використати раніше проведений аналітичний або емпіричний аналіз певної проблеми. Остаточна перевірка часто проводиться за допомогою повномасштабного тестування, наприклад, льотних випробувань.

CFD застосовується до широкого спектру дослідницьких та інженерних проблем у багатьох галузях дослідження та галузях промисловості: аеродинаміка та аерокосмічний аналіз, моделювання погоди, природничі науки, інженерія навколишнього середовища, проектування та аналіз промислових систем, біологічна інженерія, потоки рідин та теплообмін, двигуни і аналіз горіння тощо.

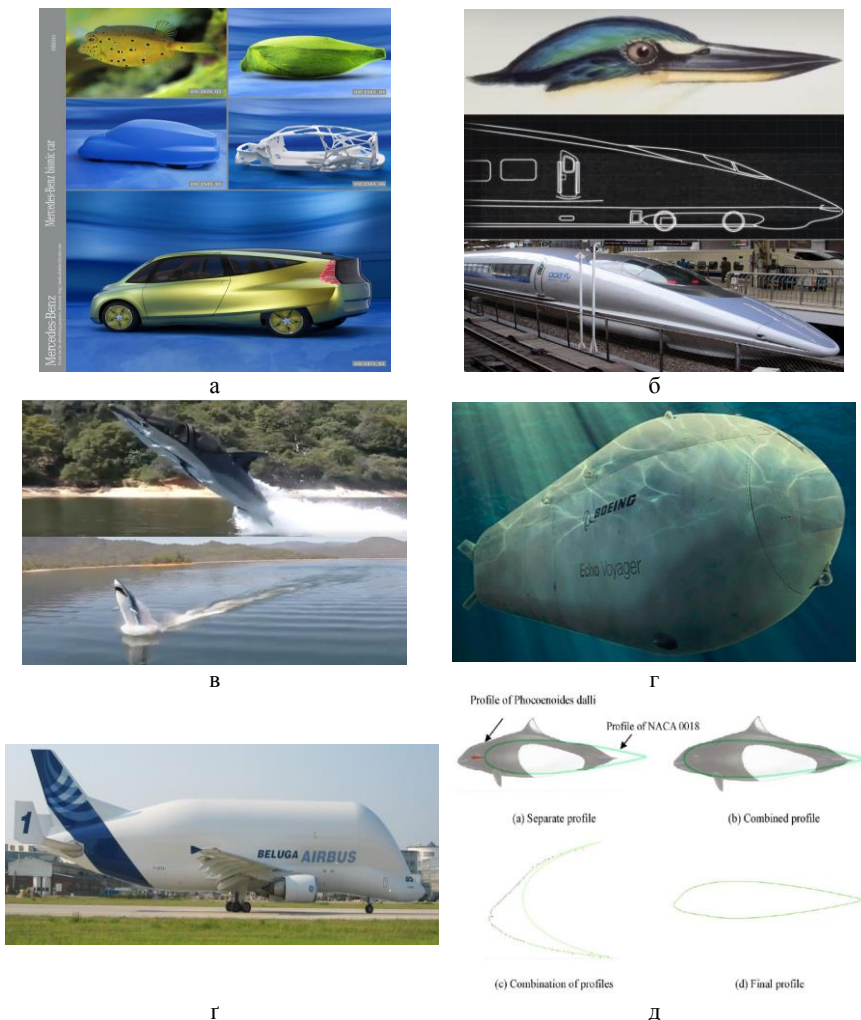


Рис. 42. Біонічний автомобіль (а), потяг (б), моторні човни (в), підводний дрон (г), вантажний літак (е) і дизайн крила пасажирського літака (д)

Для поліпшення аеродинамічної форми літаків, автомобілів, потягів тощо часто використовуються природні форми риб і птахів, які мають унікальні властивості і пристосування для прискорення і стабілізації руху. Такий підхід називається біоміметикою (biomimetics) або біонікою. Так, в 2016 р. фірма Мерседес-бенц випустила біонічний автомобіль, форма якого була запозичена у риби boxfish, яка має високу маневреність і стійкість на заворотах (рис. 42а). В 2018 р. японська фірма

розробила надшвидкий потяг серії Shinkansen, який дає дуже низький рівень шуму, коли проходить крізь тунель з максимальною швидкістю 285–320 км/год, відповідно до випробувань. Форма локомотиву була запозичена з форми голови, шиї та дзьобу птаха *halcyon*, який полює на дрібну рибу, стрибаючи у воду практично без її збурення (рис. 42б). Форми тіл акул і дельфінів використовуються для супершвидких підводно-надводних човнів (рис. 42в), а також підводних багатофункціональних дронів фірми Boeing (рис. 42г). Форма тіла кита-білухи була досліджена і використана в суперважкому транспортному літаку фірми Airbus, який доставляє крупногабаритні вантажі (рис. 42г).

Нещодавно була запропонована модифікація крила NASA0018 пасажирського літака з використанням частини голови дельфіна (рис. 42д), що приводить до значного підвищення підйомної сили і зниження тертя. Таким чином, біоміметичний підхід дозволяє оптимізувати аеродинамічні форми на випадки обтікання їх як газом, так і рідиною. Відповідні попередні дослідження проводяться чисельним методом скінченних елементів з використанням пакетів, найбільш доступним з яких є AnSys Fluent.

Для набуття або удосконалення навичок розв’язання прикладних задач методом скінченних елементів в пакеті AnSys Fluent, який є безкоштовним для студентів і наукових співробітників вищих навчальних закладів, пропонуються спеціальні завдання практики.

Завдання 24. Провести чисельні розрахунки тиску і швидкості рідини / газу при зовнішньому обтіканні аеродинамічної форми з бази даних крилових форм airfoiltools.com. Провести порівняльний аналіз аеродинамічної якості форм, наприклад, з сімейств NASA 0012, 0014, 0016, 0018 та їх модифікацій.

Завдання 25. Провести оптимізацію стандартної крилової форми з airfoiltools.com з використанням біоміметичних форм (дельфінів, птахів).

Завдання 26. Провести порівняльний аналіз аеродинамічних властивостей тіл дельфінів різних сімейств.

Завдання 27. Провести порівняльний аналіз аеродинамічних властивостей тіл іхтіозаврів еволюційно різних форм.

Завдання 28. Провести порівняльний аналіз аеродинамічних властивостей тіл пінгвінів різних сімейств, які мають навички плавання з найбільшими швидкостями серед тварин.

Оцифровані профілі для CFD-розрахунків як у 2D-, так і в 3D-форматі є у відкритих джерелах даних.

Приклад виконання завдання. Нижче наведені результати розрахунків для 2D-обтікання тіл риб під різними кутами атаки α (кут між вектором потоку рідини на вході і віссю тіла риби). Шляхом імпорту заданої оцифрованої кривої (рис. 43а) будується геометрія тіла (властивості – тверда)

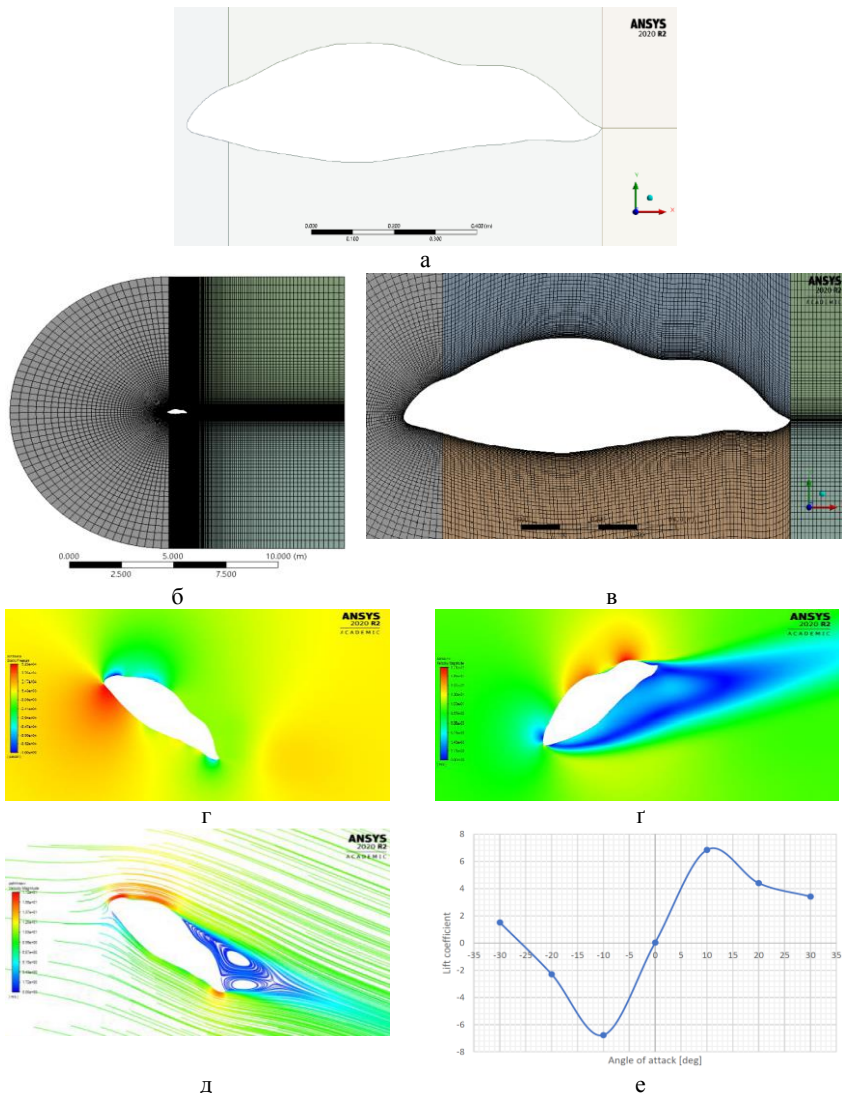


Рис. 43. Геометрія тіла (а), сітка в розрахунковій області (б) і біля тіла (в), результати розрахунків поля тиску (г), швидкості (г), ліній току (д) і кривої $C_L(\alpha)$ (е)

і деякого великого поля (модель аеродинамічної труби) для руху рідини (властивості – рідка). Будується сітка в розрахунковій області (рис. 43б) зі згущенням біля твердої поверхні тіла (рис. 43в). Після цього

кодуються установки для солверу (модель, системи рівнянь, властивості матеріалів, чисельна схема, моніторинг збіжності і т.д., див. методичний посібник [34, 34]). Результати чисельних розрахунків наведені на рис. 43г,г,д,е. Значення коефіцієнтів підйомної сили C_L , сили тертя C_D і дестабілізуючого моменту сил C_M , а також відношення C_L / C_D , C_L^3 / C_D^2 для різних кутів атаки мають можливість порівнювати форми за ефективністю і розв'язувати задачі оптимізації.

Результати розв'язання студентами задач для деяких типів аеродинамічних форм були опубліковані у вигляді статей в міжнародних і фахових виданнях [18, 19, 36].

8. Підготовка матеріалів за результатами практики

Завдання виробничої практики виконуються протягом місяця (4 тижні). Результати ретельно збираються і оформлюються у вигляді письмового звіту на 10–20 стор., який подається у роздрукованій формі або у вигляді файлів формату doc, pdf з додатковими матеріалами (зображення, відео, бази даних, коди розроблених програм).

8.1. Звіт

Звіт починається з *титульної сторінки* (рис. 44а), за якою міститься сторінка зі змістом тексту (рис. 44б). З наступної сторінки починається текст звіту відповідно до *Змісту*. У *Вступі* треба розповісти про актуальність задачі. Де можуть бути використані результати дослідження поставленої проблеми? Чому саме Ви обрали цю задачу та метод її дослідження / розв'язання?

В наступному розділі *Огляд літератури* слід вказати, хто раніше займався вивченням подібної задачі і які розв'язки / результати були отримані. В тексті слід вказувати відповідну літературу (книжки, статті), в яких результати досліджень Вашої задачі (або схожих, подібних) були опубліковані. Всі посилання на літературу мають бути пронумеровані в порядку цитування і додані до списку посилань у стандартному форматі. Приклад оформлення можна взяти з цього методичного видання.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

(повне найменування вищого навчального закладу)

Факультет математики і інформатики

(повне найменування інституту, назва факультету (відділення))

Кафедра прикладної математики

(повна назва кафедри (предметної, циклової комісії))

Звіт з виробничої практики

магістр

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему: «Статистична обробка даних на основі математичної моделі
з використанням спектрального аналізу»

Виконав: студент (-ка) групи МП61

II курсу (другий магістерський рівень),

спеціальності 113 «Прикладна математика»

(шифр і назва напрямку підготовки, спеціальності)

Прикладна математика

(освітньо-професійна програма)

Прізвище І.Б.

(прізвище та ініціали)

Керівник: проф. Кізілова Н. М.

(прізвище та ініціали)

Харків – 2023 р.

Зміст	
1. Вступ.....	3
2. Огляд літератури.....	5
3. Завдання практики. Постановка задачі.....	7
4. Методи розв'язання задачі.....	8
5. Статистичний аналіз даних.....	9
6. Аналітичні перетворення.....	11
5. Чисельні розрахунки.....	12
6. Обговорення результатів порівняно з відомими даними.....	14
7. Висновки.....	16
8. Перелік посилань.....	17
9. Додаток 1. Виведення формули для xxxxx.....	18
10. Додаток 2. Код програми в середовищі XXXXX.....	20

б

Рис. 44. Формат титульної сторінки (а) і змісту (б)

Далі треба вставити формулювання завдання практики у тому вигляді, який був отриманий від керівника практики (текст, рівняння, статистичні дані з вказанням джерела, що треба дослідити). В наступному розділі треба розповісти, які методи і підходи будуть використані для розв'язання задачі і обґрунтувати вибір. Якщо це статистична обробка даних, навести відповідні формули і алгоритми.

Якщо передбачається розв'язання систем ЗДР або ДРЧП, треба провести аналіз типу рівнянь, вибрати метод розв'язання, провести потрібні аналітичні перетворення і т.д. Далі, якщо потрібно, отримати розв'язок за допомогою чисельних методів. При цьому треба оцінити похибку розрахунків, показати збіжність ітерацій і т.д. Результати навести у вигляді контурних, векторних графіків, траєкторій руху, а також графічних залежностей між параметрами у вигляді кривих. Якщо була розроблена нова математична модель, або чисельний метод, або власний програмний код, треба провести валідацію, тобто перевірити правильність моделі / методу / коду на модельній задачі з відомим (аналітичним) розв'язком. У випадку аналізу зображень, розрахунків пористості або фрактальної розмірності, валідацію треба провести на простих геометріях з відомими з літератури просвітностями / пористостями / розмірностями. Шляхом порівняння власних результатів з літературними даними треба оцінити точність власної розробки.

Отримані результати треба порівняти з аналогічними, які вже були попередньо досліджені або виміряні в експериментах. Обговорити, які нові властивості / ефекти були отримані порівняно з відомими даними і за рахунок яких механізмів / впливів. Зробити висновки у вигляді нумерованого переліку. Навести перелік посилань на літературу, інтернет-ресурси, бази даних, які були використані. Всі наявні додаткові матеріали розмістити у додатках. Файл звіту назвати *Прізвище_звіт практики_рік.pdf* і вислати керівнику практики. Приклад оформлення звіту наведений у Додатку (розд. 1).

8.2. Презентація

За результатами практики студенти складають залік, до якого входить захист результатів практики на спеціальному семінарі кафедри. Для цього треба підготувати презентацію, наприклад, в форматах Microsoft Power Point (ppt, pptx) або Adobe Acrobat (pdf). На виклад результатів виконання практики дається 10 хв і ще 5–10 хв – на запитання. Таким чином, треба підготувати презентацію на 8–12 слайдів разом з приблизним текстом доповіді за слайдами. Доповідь має бути розрахована на 10 хв, для цього рекомендується кілька разів попрактикуватися вдома і робити запис часу виступу.

Розташування слайдів має відповідати структурі звіту (рис. 44б) і починатися з титульного слайду з інформацією про тему практики, доповідача, керівника, міста і року захисту. Наступний слайд традиційно представляє зміст доповіді (не зміст звіту!), до якої зазвичай входять: цілі і задачі практики і мотивація студента (1), постановка задачі (змістовно і у вигляді схеми моделі / процесу, рівнянь, структури даних для обробки) (2), методи і підходи, які були використані, з додаванням відповідних формул (3), результати і їх обговорення (4), висновки і (за потреби) головні посилання, які були використані в роботі (5). На кожний з розділів доповіді використовуйте 1 слайд. Виключення складає розділ з результатами та, можливо, методами і підходами, якщо були використані нетрадиційні способи, які потребують пояснень. Таким чином, титул, зміст, постановка, методи, висновки – це 5 обов'язкових слайдів, а решту 3–7 слайдів можна використати для більш детальної презентації результатів, або додати ще по одному слайду до постановки задачі і поясненню методів.

При оформленні презентації можна використовувати стандартні шаблони з бібліотеки Power Point, але рекомендується не перенавантажувати слайди складними широкими кольоровими фреймами, а також білим шрифтом на чорному фоні. Презентації не білому фоні без прикрас добре підходять для цілей захисту результатів. Рекомендуються нумерація слайдів для зручності слухачів і можливості задавати питання до слайду із вказаним номером. Приклад оформлення презентації наведений у Додатку (розд. 2).

8.3. Матеріали конференції

Додатковим бонусом, який впливає на оцінку практики, є презентація матеріалів за результатами виробничої практики на студентських науково-практичних конференціях, конференціях молодих вчених і міжнародних заходах, які щороку проводяться на різних факультетах ХНУ імені В. Н. Каразіна, інших вищих навчальних закладів м. Харкова та інших міст України, а також на міжнародних конференціях. Зазвичай для участі в таких заходах приймаються тези доповіді на 1–2 стор., або розгорнуті тези на 4 стор. Формат і правила оформлення завжди є на сайтах відповідних заходів в розділі «правила оформлення» або «для авторів». На момент захисту результати можуть бути не докладені на конференції, але направлені. Також під час захисту за результатами доповіді студента і його / її відповідей на питання учасників спеціального семінару робота може бути рекомендована до презентації на найближчому науковому заході. Приклад оформлення тез доповіді на міжнародній конференції «Математичне моделювання прикладних задач» (ХАДІ, Харків, 2018 р.) наведений в Додатку (розд. 3).

8.4. Наукова публікація

Результати виконання студентами завдань виробничої практики неодноразово складали тему публікацій у вигляді оглядової або оригінальної статті у наукових міжнародних журналах або у виданнях з переліку фахових видань Державної Атестаційної Комісії (ДАК) України (mon.gov.ua/ua/nauka). Для публікації отримані результати мають бути новими порівняно з уже відомими опублікованими даними. Наприклад, може бути знайдений та / або детально досліджений новий розв'язок системи ЗДР або ДРЧП. Можуть бути отримані нові цікаві залежності між параметрами динамічної системи шляхом статистичного аналізу даних вимірювань / спосереджень. Можуть бути запропоновані нові математично обгрунтовані рішення / підходи для задач інженерії, виробництва, транспорту, наприклад, обгрунтування нового дизайну автомобіля, літака, човна або дрона з використанням CFD-розрахунків (розд. 8). Події останніх років показали корисність використання повітряних, надводних і підводних дронів з розмірами від кількох метрів до кількох сантиметрів (дрони-бджоли, призначені для опилу квітучих полів за умовами вимирання бджіл внаслідок глобальних змін клімату). Аналогічні тенденції помічаються в космонавтиці, де перехід від гігантських супутників до малих, навіть мікро- і нано-супутників (наноавіоніка: мікросупутники – 10–100 кг, наносупутники – 1–10 кг, пікосупутники – менше 1 кг) дозволяє значно зекономити витрати і купувати власні супутники для будь-яких потреб (астрофізичних, погодних, агрономічних та ін.). Для розробки, оптимізації дизайну і режимів роботи відповідних матеріалів, систем стабілізації, мікро- / нанорідинних систем нагріву / охолодження процесорів і двигунів

супутників потрібно рішення відповідних прикладних задач, частина з яких наведена в даному методичному посібнику. Інші завдання за цікавими прикладними задачами можуть бути додані на вибір студента.

Наукові публікації приймаються відповідно до прийнятого формату журналу, які знаходяться на вебсторінці журналу в розділі «Правила оформлення». Крім того, так само розміщують приклад оформлення статті (sample article), або можна скачати статтю із останнього номера і подивитись на оформлення тексту, рисунків, фармул, діаграм і таблиць. Приклади структури тексту і особливостей оформлення статей, опублікованих за результатами виконання завдань виробничої практики в 2018–2022 рр., можна знайти онлайн за лінками з переліку посилань [2–19, 21, 22, 29].

8.5. Щоденник практики

На початку роботи над завданням практики треба заповнити щоденник практики, в якому вказати власні дані (П.І.Б., курс, група, спеціальність, установа, в якій студент буде проходити практику), а також заповнити календарний план проходження практики за тижнями.

Зазвичай *перший* тиждень присвячується пошуку літератури за темою завдання, а також даних для валідації моделі, статистичної обробки і т.п.

Другий тиждень варто присвятити пошуку методів дослідження теми і розв'язання задачі, аналітичних перетворенням, написанню програмного коду та його відладки і валідації моделі на простіших прикладах або даних експериментів / вимірювань.

Третій тиждень – дослідження властивостей аналітичних розв'язків, аналіз статистичних залежностей, проведення чисельних розрахунків, збір результатів у вигляді таблиць, кривих, зображень. Повторні розрахунки для уточнення, отримання надійних достовірних результатів для захисту звіту.

Четвертий тиждень просвячується написанню тексту звіту, підготовці презентації і додаткових матеріалів (supplementary materials).

До календарного плану треба вписати скорочене формулювання складу тижневої праці. Приклад заповнення щоденника наведений нижче.

Пакет документів (звіт, презентація, додаткові матеріали і щоденник практики) треба надіслати керівнику практики. Керівник перевіряє результати роботи і вносить зауваження і коментар на останню сторінку щоденника практики. Оцінка за практику (залік) вноситься до щоденника і до залікової відомості після закінчення виступів на спеціальному семінарі кафедри після обговорення членами кафедри – учасниками семінару.

Перелік посилань

1. Кізілова Н. М. Методи аналізу «великих даних» : методичні рекомендації з курсу «Прикладні задачі аналізу великих даних» для студентів спеціальності «Прикладна математика». Харків: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2021. 96 с.
2. Костецька В. В., Кізілова Н. М. Математичне моделювання динаміки пандемії COVID-19. *Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2020. Вип. 48. С. 65–71. URL: <https://periodicals.karazin.ua/mia/article/view/17031>
3. Захарова А. А., Кізілова Н. М. Дослідження кореляцій динаміки захворювання на COVID-19 з деякими соціально-економічними факторами. *Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. – 2020. Вип. 47. С. 49–56. URL: <https://periodicals.karazin.ua/mia/article/view/17028>
4. Кізілова Н. М., Ткаченко Є. Д. Особливості тепломасообміну в ламінарних течіях мікро- і нанорідин по трубкам і каналам. *Вісник КНУ імені Т. Г. Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки»*. 2018. № 4. С. 62–67. URL: http://bphm.univ.kiev.ua/public/journals/1/issues/fiz_mat_2018_4.pdf?download=1
5. Брауде Я. І., Кізілова Н. М. Дослідження періодичної вісесиметричної течії в'язкопружної рідини по циліндричній трубці. *Вісник КНУ імені Т. Г. Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки»*. 2020. № 1–2. – С. 49–52. URL: <http://www.bphm.univ.kiev.ua/index.php/bphm/issue/view/65>
6. Кізілова Н. М., Майко І. В. Узагальнення задачі Лайтхілла на випадок заповнених в'язкою рідиною трубок з ускладненою реологією стінки. *Вісник КНУ імені Т. Г. Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки»*. 2020. № 1–2. С. 67–70. URL: <http://www.bphm.univ.kiev.ua/index.php/bphm/issue/view/65>
7. Куркчі Є. П., Кізілова Н. М. Моделювання ламінарних течій нанорідин між двома коаксіальними циліндрами в мікрорідинних пристроях. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2021 Вип. 51. С. 52–59. URL: <https://periodicals.karazin.ua/mia/article/view/17968>
8. Волошина К. І., Кізілова Н. М., Кіпоренко П. В. Дослідження динаміки чотирьох хвиль Covid–19 в країнах Європи. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2021. Вип. 52. (прийнята до друку)
9. Кулік Д. А., Куркчі Є. П., Кізілова Н. М. Аналіз «великих даних» і математичне моделювання епідемії Covid–19 в країнах Європи. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2021. Вип. 52. URL: <https://periodicals.karazin.ua/mia/issue/archive>
10. Андрєєва Д. М., Вдовіченко Т. В., Кізілова Н. М., Ніколаєв А. С. Перспективні математичні методи для ранньої діагностики порушень системи кровообігу людини. *Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2020. Вип. 45. С. 4–9. URL: <https://periodicals.karazin.ua/mia/article/view/15818>

11. Кізілова Н. М., Паккі Д. М. Статистичний аналіз даних моніторингу коронарного кровотоку для гемодинамічної оцінки ступеня стенозу коронарних артерій. *Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2020. Вип. 46. С. 50–55. URL: <https://periodicals.karazin.ua/mia/article/view/15823>
12. Гриневич П. С., Кізілова Н. М. Дослідження хаотичної динаміки вертикальної стійки тіла людини на моделі переверненого маятника. *Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2020. Вип. 45. С. 35–40. URL: <https://periodicals.karazin.ua/mia/article/view/15821>
13. Ричак Н. Л., Кізілова Н. М., Майструк В. А. та ін. Математичний аналіз забруднення повітря на території України з використанням даних з відкритих джерел. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. 2021. № 4 (157). С. 20–31. URL: https://visnyk.vntu.edu.ua/public/titles&tocs/tyt&zm_157.pdf
14. Кізілова Н. М., Ричак Н. Л., Чебукін Д. С. та ін. Екологічна оцінка якості поверхневих вод у бездошовий період в умовах міського водозбору. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Геологія. Географія. Екологія»*. 2021. № 54. – Р. 289–305. URL: <https://periodicals.karazin.ua/geoeoco/article/view/17613>
15. Кізілова Н. М., Світличний О. В., Чуйко В. В. Дослідження зв'язку фрактальних та гідравлічних властивостей пористих структур верхніх дихальних шляхів деяких арктичних тварин. *Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2020. Вип. 46. С. 17–24. URL: <https://periodicals.karazin.ua/mia/article/view/16269>
16. Вервейко К. Є., Друшляк В. В., Кізілова Н. М. та ін. Фрактальні структури і механічні властивості раковин амонітів. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2021. Вип. 52. URL: <https://periodicals.karazin.ua/mia/issue/archive>
17. Балабанов В. А., Кізілова Н. М. Моделі транспортних систем для рівномірного постачання рідини до заданого об'єму простору. *Вісник КНУ імені Т. Г. Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки»*. 2018. № 2. С. 21–26. URL: http://bphm.univ.kiev.ua/public/journals/1/issues/fiz_mat_2015_spec.pdf?download=1
18. Друшляк В. В., Кізілова Н. М., Корякіна О. А. та ін. Оцінка аеродинамічних характеристик біонічних форм. *Механіка. Дослідження і інновації*. Збірник праць. Видавництво Гомельського університету. 2021. Вип. 14. – С. 57–66. URL: <https://www.bsut.by/science/scientific-publication/mechanic?vypuski-sbornika>
19. Друшляк В. В., Кізілова Н. М., Корякіна О. О. Порівняльне дослідження аеродинамічних властивостей тіл іхтіозаврів. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2021. Вип. 52. URL: <https://periodicals.karazin.ua/mia/issue/archive>
20. Kizilova N. N., Solovjova H. N. “Rheology of materials.” Методичні рекомендації до практичних занять з курсу «Основи реології» для студентів спеціальності «Прикладна математика». Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна. 2020. 52 с.
21. Solovjova H., Kizilova N. Mathematical modeling of bioactive arterial wall. *Visnyk KhNU. Ser. Mathematics, applied mathematics, mechanics*. 2018. Vol. 88. P. 44–57.

22. Cherevko V., Kizilova N. Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip boundary conditions. In: Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications, Springer Proceedings in Physics. Vol. 183. 2017. P. 207–230.
23. Kizilova N. Three chamber model of human vascular system for explanation the quasi-regular and chaotic dynamics of the blood pressure and flow oscillations. *Applied Non-Linear Dynamical Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Vol. 181. 2016. P. 209–220.
24. Karpinsky M.Yu., Kizilova N. N. Computerized posturography for data analysis and mathematical modelling of postural sway during different two-legged and one-legged human stance. *J.Vibroeng.* 2007. V. 9, N3. P. 118–124.
25. Kizilova N., Karpinsky M., Karpinska E. Quasi-regular and chaotic dynamics of postural sway in human. *Applied Non-Linear Dynamical Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. Vol. 93. 2014. P. 103–114.
26. Kizilova N. Multidisciplinary Approaches in Cancer Diagnosis and Treatment: Towards Patient-Specific Predictive Oncology. *Acta Scientific Cancer Biology*. 2019. V.3, N8. P. 1–2.
27. Solberg S.B.B., Kjelstrup S., Magnanelli E. et al. Energy-Efficiency of Respiration in Mature and Newborn Reindeer. *Journal of Comparative Physiology B: Biochemical, Systemic, and Environmental Physiology*. 2020. V. 190. P. 509–520.
28. Wejrzanowski, T., Skibinski, J., Szumbariski, J. et al. Structure of foams modeled by Laguerre-Voronoi tessellations. *Computational Materials Science*, 2013. 67, P. 216–221.
29. Баранець В. А., Кізілова Н. М. Дискретне моделювання агрегації та осідання мікро- і наночастинок у суспензіях. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2018. Т. 40. – С. 4–14.
30. Кізілова Н. Н., Коробов А. М. Математичне моделювання теплообміну у шкірі при дії низькоінтенсивного оптичного випромінювання. *Матеріали XLV міжнародної науково-практ. конф. «Застосування лазерів в медицині і біології»*. Буковель. 2016. С. 119–122.
31. Кізілова Н. М., Коробов А. М. Математичне моделювання змін інтенсивності мікроциркуляції при температурних реакціях шкіри людини. *Applications of lasers in medicine and biology. Materials of the 50-th Intern. Scientific and Practic Conf. Kharkiv, Ukraine*. 2019. P. 231–233.
32. Kizilova N. Patient-specific multidimensional model of coronary vasculature. *Mechanics in medicine*. Vol. 12. Rzeszow Univ. Press. 2014. P. 108–119.
33. Kizilova N. Diagnostics of Coronary Stenosis: Analysis of Arterial Blood Pressure and Mathematical Modeling. *Biomedical Engineering Systems and Technologies. Springer Series on Communications in Computer and Information Science*. Plantier G., Schulz T., Fred A., Gamboa H. (eds.). 2015. P. 299–312.
34. Кізілова Н. М., Ромашов Ю. В. Метод скінченних елементів у розв’язанні внутрішніх та зовнішніх задач обтікання. Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2017. 48 с.
35. Кізілова Н. М. Метод скінченних елементів в розв’язанні прикладних задач механіки рідини з AnSys Rluent 2021R1. Харків: ХНУ ім. В.Н. Каразіна. 2021. – 80 с.
36. Khalin A., Kizilova N. Performance comparison of different aerodynamic shapes for autonomous underwater vehicles. *Arch. Mech. Eng.* 2019. V. 66, N 2. P. 171–189.

Додатки

Додаток А. Звіт (приклад)

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

(повне найменування вищого навчального закладу)

Факультет математики і інформатики

(повне найменування інституту, назва факультету (відділення))

Кафедра прикладної математики

(повна назва кафедри (предметної, циклової комісії))

Звіт з виробничої практики

магістр

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему: «Комп'ютерне моделювання турбулентного обтікання тіл
потокм в'язкої рідини в середовищі AnSys Fluent 2021»

Виконав: студент (-ка) групи МП61
II курсу (другий магістерський рівень),
спеціальності 113 «Прикладна математика»
Прикладна математика

Виконав: Шишов М. І.
(прізвище та ініціали)

Керівник: Кізілова Н. М.
(прізвище та ініціали)

Вступ

Обчислювальна механіка рідини (CFD) – це галузь механіки рідини, яка використовує чисельний аналіз та структури даних для вирішення проблем, що стосуються потоків рідин. CFD-аналіз дозволяє підвищити точність і швидкість складних режимів течій, таких як гіперзвукові або турбулентні потоки.

Застосування: аеродинаміка та аерокосмічний аналіз, моделювання погоди, природничі науки, інженерія навколишнього середовища, біологічна інженерія, потоки рідин та теплообмін, двигуни і аналіз горіння тощо.

Для поліпшення аеродинамічної форми часто використовуються природні форми живих організмів, які мають унікальні властивості і пристосування для прискорення й стабілізації руху. Такий підхід називається біоміметикою (biomimetics) або біонікою.



Рис. 1



Рис. 2

У 2018 р. японська фірма розробила надшвидкий потяг серії Shinkansen (рис. 1), який дає низький рівень шуму, коли проходить крізь тунель з максимальною швидкістю. Форма локомотиву була запозичена з форми голови, шиї та дзьобу птаха зимородка (рис. 2), що полює на дрібну рибу, стрибаючи у воду. Форма тіла кита-білухи (рис.3) була використана в суперважкому транспортному літаку фірми Airbus (рис. 4), який доставляє великогабаритні вантажі.



Рис. 3



Рис. 4

Постановка задачі

В нещодавній роботі [1] була запропонована модифікація крила літака з використанням частини голови дельфіна, що приводить до значного підвищення підйомної сили і зниження тертя. Було показано, що еволюційно різні форми не мають значних аеродинамічних переваг при русі з кутом атаки $\alpha=0$.

Завдання практики: треба провести порівняльний аналіз тіл деяких морських тварин за допомогою CFD-розрахунків в пакеті AnSys Fluent, виявити можливі переваги їх аеродинамічної форми при різних кутах атаки. Порівняти модифікований криловий профіль із запропонованим у [1].

Матеріали і методи

В роботі поводиться порівняльний аналіз форми при різних кутах атаки. Для задачі геометрії профілю запускаємо ANSYS Workbench відкриваємо новий проект, в якому активізуємо Design Modeler. Завантажуємо файл, в якому збережено координати точок крилового профілю (рис. 5).

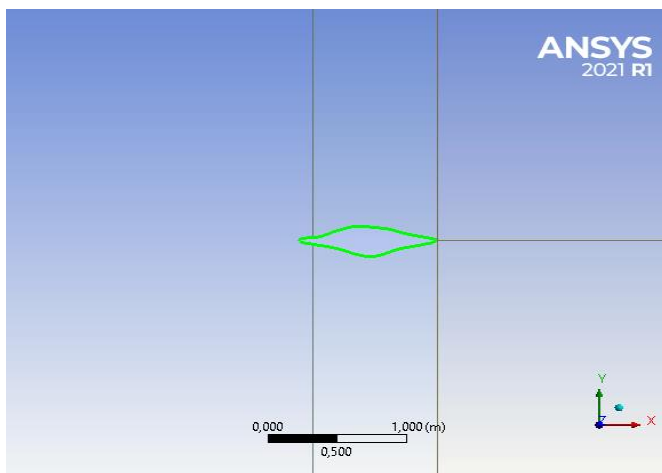


Рис. 5

Були використані такі граничні умови:

- 1) швидкість потоку на вході: для вхідних поверхонь обчислювальної області;
- 2) тиск на виході: для вихідних поверхонь обчислювальної області;
- 3) симетрія: для вертикальних площин симетрії фігур;
- 4) стінка: для всіх інших поверхонь тіл.

Стабільний потік рідини по поверхні планера зафіксований під заданим кутом атаки α , виробляє підйомну силу F_L (позитивна вгору) та силу тяги F_D , які є вертикальними та горизонтальними складовими сили, що діють на об'єкт і врівноважуються за допомогою гравітації, плавучості та сили опору

$$F_L = \frac{1}{2} \rho u^2 C_L A, \quad F_D = \frac{1}{2} \rho u^2 C_D S,$$

Загальна сила $\vec{F} = \vec{F}_L \vec{n} + F_D \vec{\tau}$ – це результат динамічного тиску $P = \frac{\rho}{2} (u_h^2 + u_v^2)$ і відмінності, що діють на верхню та нижню частини поверхні, де u_h і u_v є горизонтальна та вертикальна складові потоку рідини, які регулюються відповідними динамічними рівняннями рідини для турбулентної дозвучової моделі.

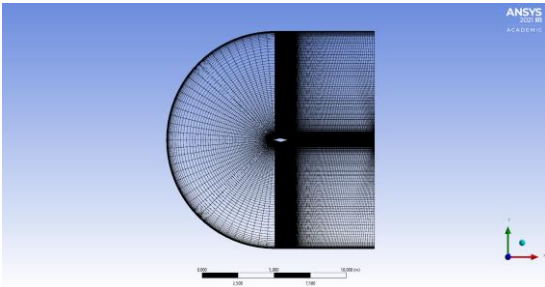
Порівняльний аналіз аеродинамічних характеристик проводиться на основі залежності коефіцієнтів C_L та C_D від кута атаки, $\frac{C_L^3}{C_D^2(C_L)}$ (індекс потужності) та C_M тут: $C_M = \frac{M}{\rho A l^3}$, де M – момент сили, який намагається обертати тіло навколо центру його мас, l – це довжина хорди аеродинамічного профілю. Індекс потужності $Pi = \frac{C_L^3}{C_D^2}$ визначає необхідну потужність для збереження нерухомого положення тіла в потоці

$$N = \frac{f(Pi) \sqrt{2f}}{\rho S}$$

Найкращий підйом і максимальний політ витривалості буде досягнутий при макс. значеннях Pi .

В системі AnSys було проведено геометричне моделювання, сітки та розрахунки CFD.

Details of "Mesh"	
Display	
Display Style	Use Geometry Setting
Defaults	
Physics Preference	CFD
Solver Preference	Fluent
Element Order	Linear
<input type="checkbox"/> Element Size	Default (1,0397 m)
Export Format	Standard
Export Preview Surface Mesh	No
Sizing	
Quality	
Inflation	
Batch Connections	
Advanced	
Statistics	



Розбиття у вертикальному напрямку:

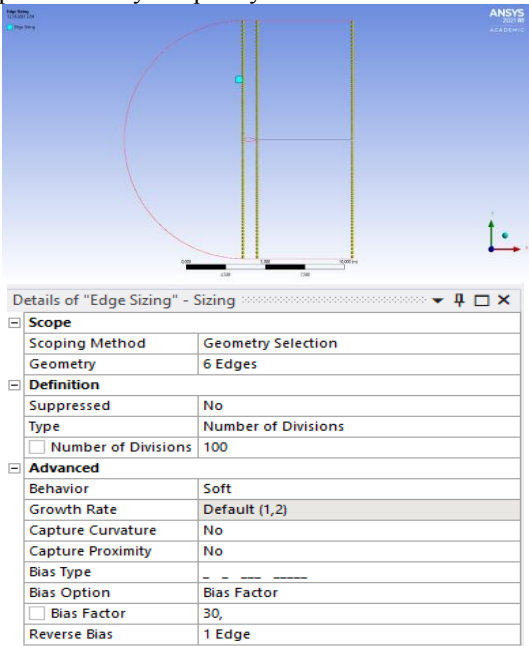
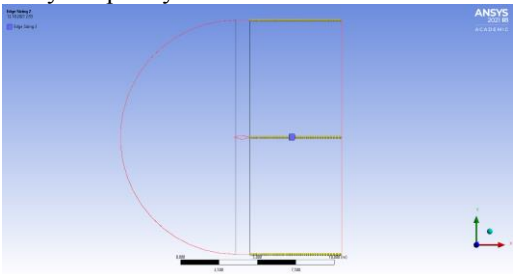


Рис. 6

У горизонтальному напрямку:



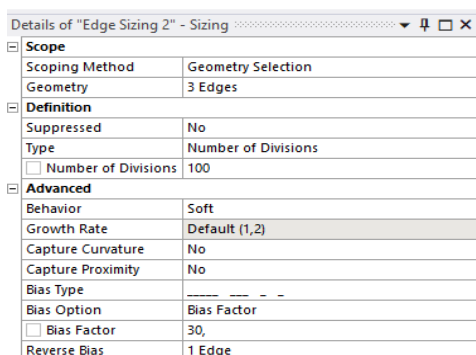


Рис. 7

Розбиття контурів форми:

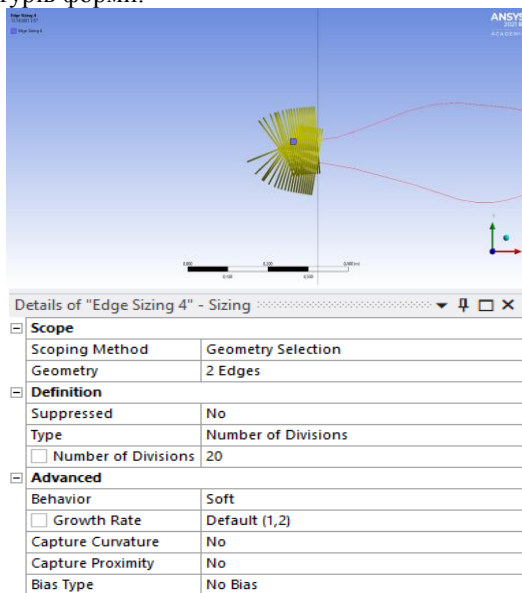
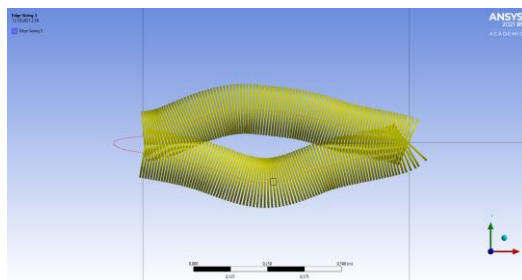


Рис. 8



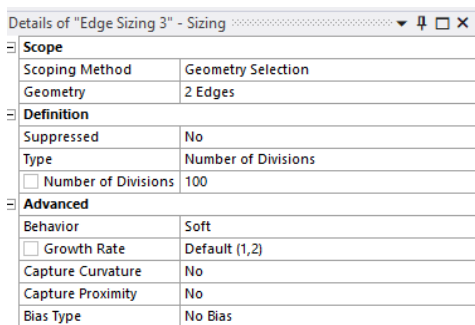
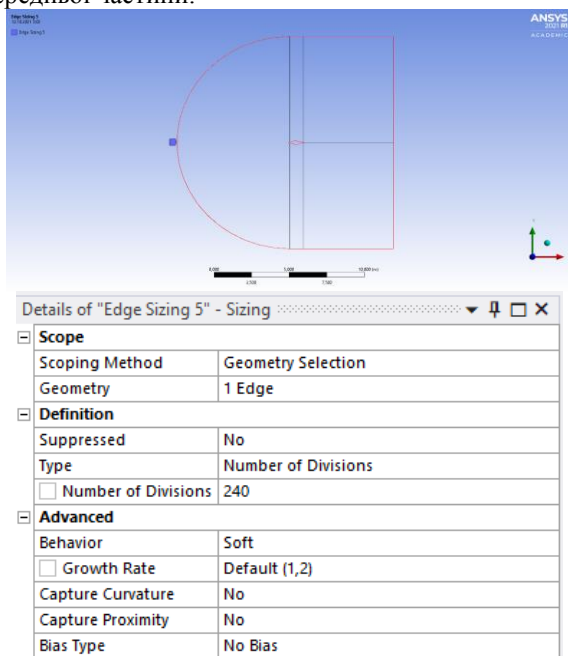


Рис. 9

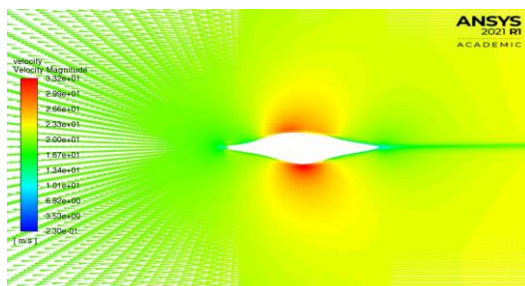
Розбиття передньої частини:



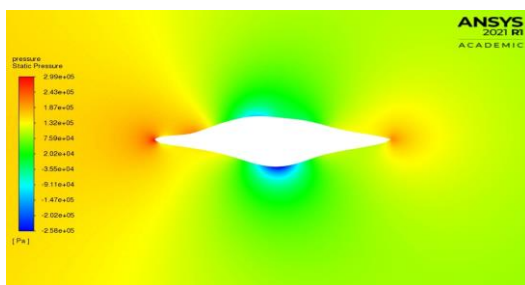
Результати чисельних розрахунків

Після детального аналізу форми, геометричне моделювання, сітки та обчислення CFD були проведені в AnSys15.0. Аеродинамічні характеристики при $\alpha = 0^\circ$:

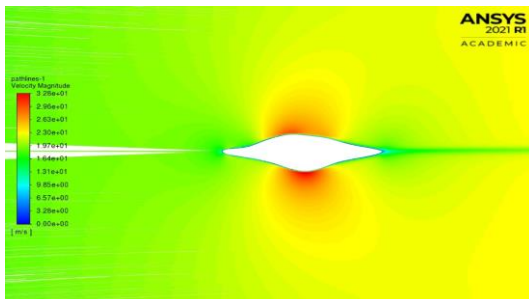
Velocity:



Pressure:

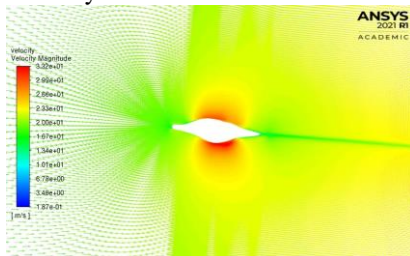


Pathlines:

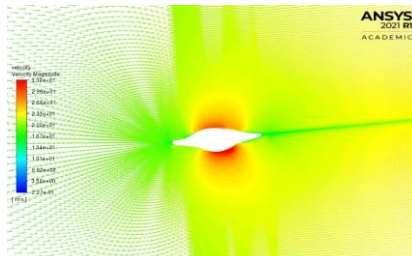


Аеродинамічні характеристики при $\alpha = +5^\circ$ та -5° :

Velocity:

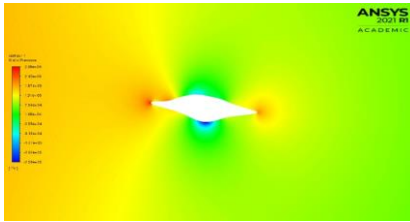


+5

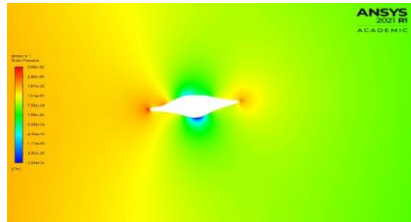


-5

Pressure:

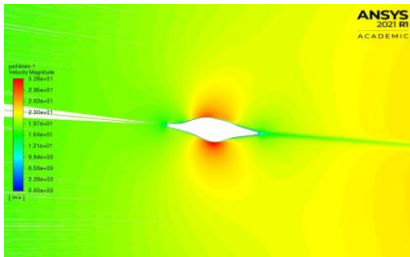


+5

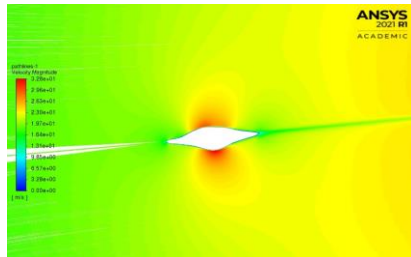


-5

Pathlines:



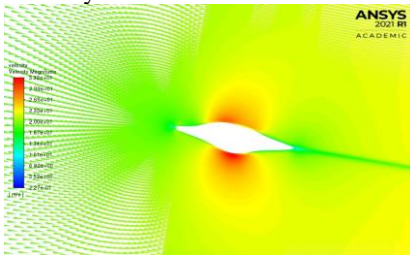
+5



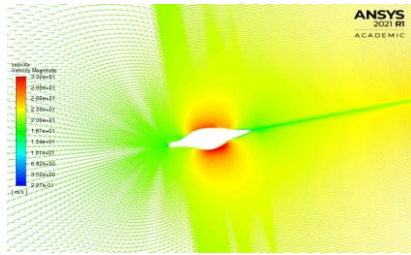
-5

Аеродинамічні характеристики при $\alpha = +10^\circ$ та -10° :

Velocity:

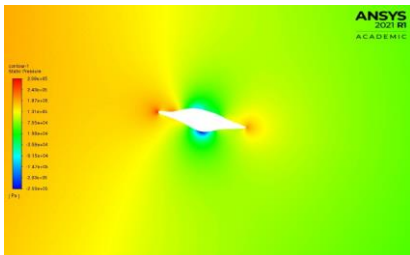


+10

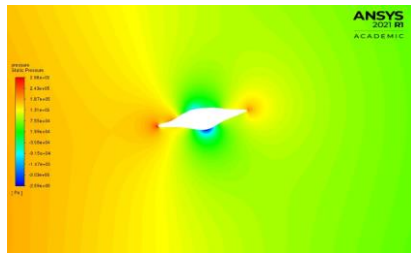


-10

Pressure:

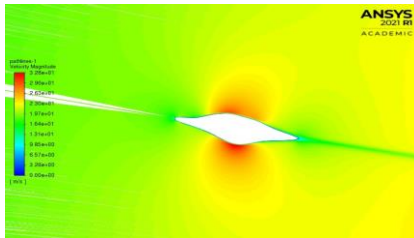


+10

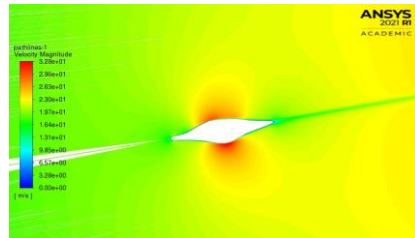


-10

Pathlines:



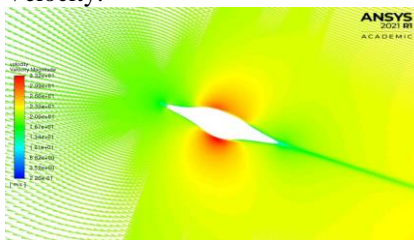
+10



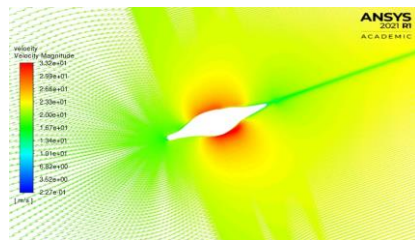
-10

Аеродинамічні характеристики при $\alpha = +20^\circ$ та -20° :

Velocity:

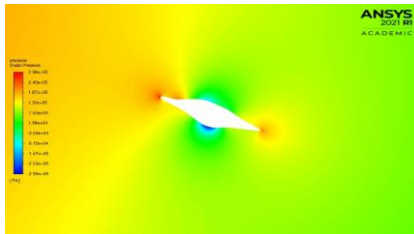


+20

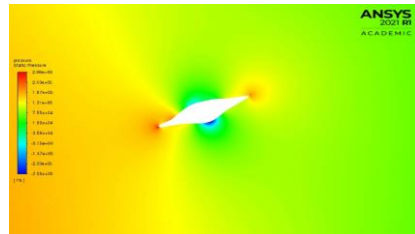


-20

Pressure:

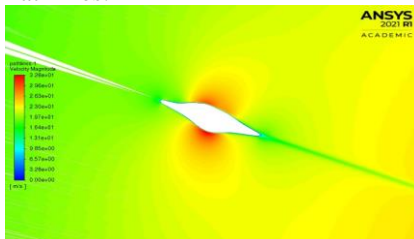


+20

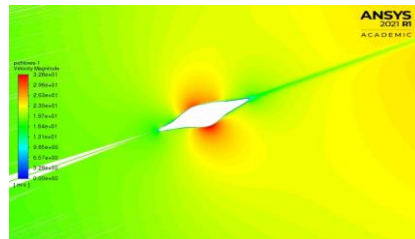


-20

Pathlines:



+20



-20

Висновки. Таким чином, в результаті роботи над поставленою задачею було показано, що 1)....., 2)....., 3).....

Додаток Б. Презентація (приклад)

**Дослідження кореляцій динаміки захворювання
на COVID-19 з деякими факторами (хвороби
верхніх дихальних шляхів, астма, кон'юнктивіт)**

Панютчева Є. В.
керівник

д.ф.-м.н., професор
Кізілова Н. М.

Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна
Кафедра прикладної математики

Постановка задачі

- ▶ Задані ряди даних щодо захворюваності/ смертності від COVID-19 та захворюваності на астму, кон'юнктивіт і хвороби верхніх дихальних шляхів в різних країнах.

Задача практики: провести кореляційний аналіз рядів даних.

Досліджено 23 європейські країни, дані були обрані з:

- ▶ <https://data.europa.eu/euodp/en/data/dataset/covid-19-coronavirus-data>;
<https://ourworldindata.org/>



Обґрунтування актуальності задачі

- ▶ Попередній статистичний аналіз даних з COVID-19 показав, що важкість перебігу захворювання та смертність підвищується в разі наявності у хворого таких додаткових хвороб, як астма, хронічні хвороби верхніх дихальних шляхів, гіпертонія та низка інших.
- ▶ Крім того, якщо вірус потрапляє на відкриті поверхні ока, наявність захворювання на кон'юнктивіт також є додатковим негативним фактором.



Кореляція (з лат. correlation – відповідність) – статистична залежність між величинами.

- ▶ Коефіцієнтом парної кореляції називають відношення кореляційного моменту до добутку середніх квадратичних відхилень:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}},$$

де X_i , Y_i – числові значення величин, між якими встановлюється кореляційний зв'язок.



- ▶ Значення коефіцієнта кореляції завжди розташовані в діапазоні від -1 до 1 й інтерпретуються так
 - 1) якщо коефіцієнт кореляції близький до 1 , то між змінними спостерігається позитивна кореляція;
 - 2) якщо коефіцієнт кореляції близький до -1 , це означає, що між змінними має місце сильна негативна кореляція;
 - 3) проміжні значення, близькі до 0 , будуть вказувати на слабку кореляцію між змінними і, відповідно, низьку залежність.

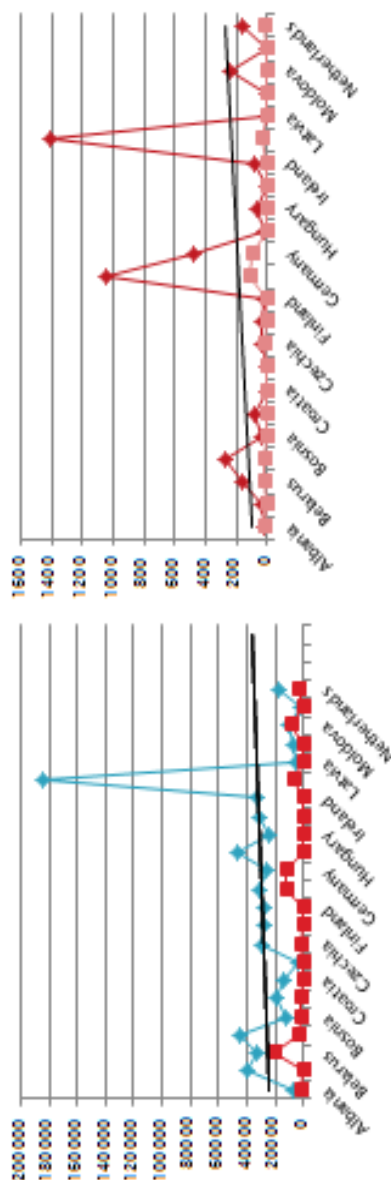
Матеріали і методи

► Усі обчислення зроблені в програмі Excel.

1	cases_covid19	countries	populationdata	cases_asthma	death_asthma	cases_respiratory	death_respiratory	cases_conjunct	death_conjunct
2	1344	25 Albania	2862428	6845	12	109	18	357	13
3	1028	35 Austria	8858776	39347	5	987	16	1107	27
4	20132	158 Belarus	9452410	32768	14	327	12	1181	29
5	2969	278 Belgium	11455320	44485	12	1021	25	143	11
6	1850	31 Bosnia	3300998	11616	6	342	22	412	23
7	2318	83 Bulgaria	7000039	20008	3	380	21	875	27
8	479	4 Croatia	4076246	13281	4	261	19	509	19
9	53	2 Cyprus	875899	4051	3	49	24	309	2
10	2575	29 Czechia	10649800	28931	12	672	17	1331	31
11	1118	34 Denmark	5806081	27578	5	529	34	725	9
12	383	12 Finland	5517919	28463	7	173	13	689	7
13	12764	1042 France	67012883	30481	107	3452	11	8376	42
14	12777	473 Germany	83019213	26865	100	5720	21	10377	51
15	475	16 Greece	10724599	47188	2	1150	19	1340	27
16	278	61 Hungary	9722756	24431	10	677	27	1221	21
17	16	0 Iceland	356091	31522	0	567	18	44	0
18	533	85 Ireland	4504240	32367	4	338	29	613	6
19	7772	1404 Italy	60355546	184599	39	4436	15	7544	38
20	52	6 Latvia	1919968	6387	3	70	9	239	4
21	146	8 Lithuania	2794154	7800	1	111	12	349	6
22	8259	245 Moldova	4043258	11455	1	321	16	505	3
23	177	2 Montenegro	622182	1549	1	67	8	777	12
24	3966	156 Netherlands	17282163	17564	12	3576	27	2160	35

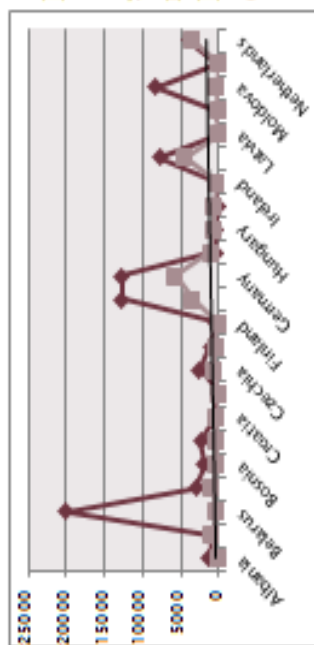
Постановка задачі. Результат для даних COVID-19 з рівнем захворюваності на астму.

- Дані наведені в Excel-таблиці.



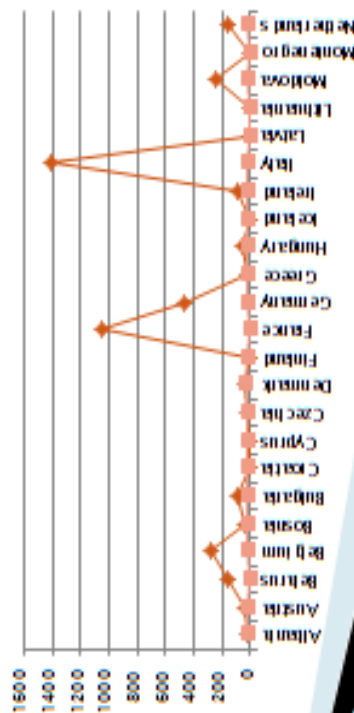
- $R=0.238$ (кореляція між кількістю хворих на COVID-19 та астму).
- $R=0.7$ (кореляція між кількістю смертей).

Результат для даних COVID-19 з рівнем захворюваності верхніх дихальних шляхів

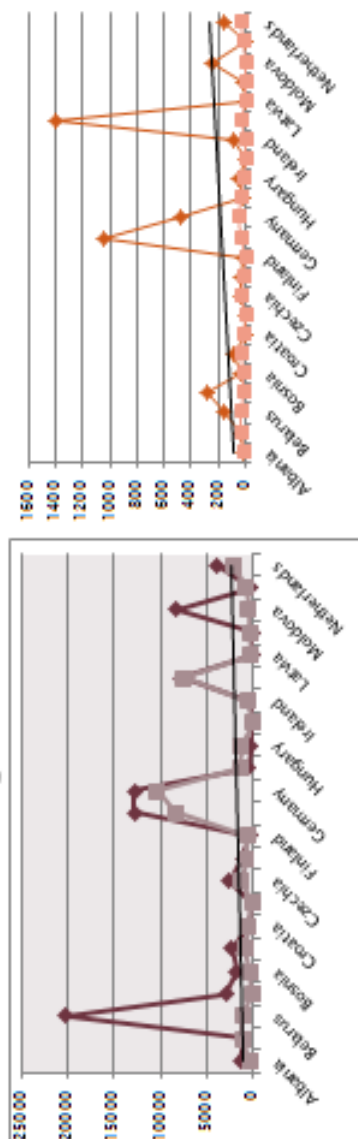


$R=0,514$ (кореляція між кількістю хворих на COVID-19 із захворюванням верхніх дихальних шляхів).

$R=-0,18$ (кореляція між кількістю смертей).



Результат для даних COVID-19 з рівнем захворюваності на кон'юнктивіт



$R=0,6$ (кореляція між кількістю хворих на COVID-19 та кон'юнктивіт).

$R=0,56$ (кореляція між кількістю смертей).



ВИСНОВОК

- ▶ Коефіцієнт кореляції між даними з кількості смертей від COVID-19 та астми має сильну залежність, в той час як коефіцієнт кореляції між даними щодо COVID-19 з рівнем захворювання на кон'юнктивіт (захворюваність/смертність) та хворих на COVID-19 із захворюванням верхніх дихальних шляхів показує середню залежність.
- ▶ Коефіцієнт кореляції між кількістю хворих на COVID-19 та на астму показує слабку залежність.



Додаток В. Матеріали конференції (приклад)

UDC 532.54+612.13

PARTICLE AGGREGATION AND SEDIMENTATION IN NON-UNIFORM FIELDS FOR EVALUATION THE SUSPENSION STABILITY

V.A. Cherevko, N.N. Kizilova

V.N. Karazin Kharkov National University

e-mail: xxxxxxxx@gmail.com

Abstract: A three phase mathematical model of aggregation and sedimentation of suspension of blood erythrocytes is developed in application to the blood sedimentation tests. The quasi-1D model is derived and its solution is given by the method of characteristics. The computed results are compared to the measured sedimentation curves of young healthy volunteers and the patients with drug and food allergy.

Many technical and biological liquids are colloidal systems of polymerizing fibers or aggregating particles. The sedimentation test is very useful for estimation the suspension stability, aggregation rate, particle size and dispersion stability of particles in the liquid. Sedimentation test with a portion of human blood in a thin vertical tube is widely used in clinics as a reliable nonspecific diagnostic index of diseases and treatment success. Blood sedimentation test lasts for 1-3 hours and different modification of the test have been proposed to shorten the time of examination and increase its informativity, such as acceleration of the sedimentation in centrifugal field [1,2], using the short microtubes [3], test execution with addition of potential allergens to the blood samples for detection the food and drug allergy [4].

In this paper the novel 3-phase model of a suspension with aggregating particles settling in a non-uniform force field is presented. The mixture model of suspension is considered. The mass balance equations for the cell concentration C , aggregate concentration H and the concentration $H-C$ of fluid bond inside the aggregates are the followings

$$\frac{\partial(1-H)}{\partial t} + \frac{\partial(1-H)u_j^1}{\partial x_j} = -\theta, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial Cu_j^2}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial(H-C)}{\partial t} + \frac{\partial(H-C)u_j^3}{\partial x_j} = \theta$$

where C and H are concentrations of particles and aggregates, $j=1,2,3$ are related to the free plasma, particles and the plasma confined in aggregates. Dynamic equations are the following [3]

$$\begin{aligned} & -(1-H)\frac{\partial p}{\partial x} + (1-H)\rho_f G(x) + F(u^2 - u^1) = 0, \\ & -C\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p_s^2 C}{\partial x} + p_H^2 \frac{\partial(H-C)}{\partial x} - F(u^2 - u^1) - D(u^2 - u^3) + C\rho_s G(x) = 0, \\ & -(H-C)\frac{\partial(p - p_H^2)}{\partial x} + D(u^2 - u^3) + (H-C)\rho_f G(x) \end{aligned}$$

where $G(x)$ are external non-uniform forces, for instance $G(x) = \omega^2(x+a)$ for centrifugal forces. The phase velocities are

$$\begin{aligned}
 u^1 &= \left[-\frac{H(1-H)}{F} + \frac{(H-C)^2}{D} \right] C(\rho_s - \rho_f) \omega^2 (x+a), \\
 u^2 &= \left[\frac{(1-H)^2}{F} + \frac{(H-C)^2}{D} \right] C(\rho_s - \rho_f) \omega^2 (x+a), \\
 u^3 &= \frac{(1-H)^2}{F} \xi_1 + \frac{(H-C)(1-H+C)}{D} \xi_2
 \end{aligned}$$

where $\xi_1 = C(\rho_s - \rho_f) G(x) + \frac{\partial [p_s^2 C + p_H^2 (H-C)]}{\partial x}$, $\xi_2 = \xi_1 - \frac{\partial p_H^2}{\partial x}$.

The resulting governing equations are

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial t} + u^2 \frac{\partial w}{\partial x} &= -\phi w^2 / C \\
 \frac{\partial H}{\partial t} + \gamma_{11} \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma_{12} \frac{\partial C}{\partial x} + \gamma_{13} \frac{\partial w}{\partial x} &= \theta + (1-H) \frac{\partial u^1}{\partial x} \\
 \frac{\partial C}{\partial t} + \gamma_{21} \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma_{22} \frac{\partial C}{\partial x} + \gamma_{23} \frac{\partial w}{\partial x} &= -C \frac{\partial u^2}{\partial x} \\
 \gamma_{11} = u^1 - (1-H) \frac{\partial u^1}{\partial H}, \quad \gamma_{12} = -(1-H) \frac{\partial u^1}{\partial C}, \quad \gamma_{13} = -(1-H) \frac{\partial u^1}{\partial w} \\
 \gamma_{21} = C \frac{\partial u^2}{\partial H}, \quad \gamma_{22} = u^2 + C \frac{\partial u^2}{\partial C}, \quad \gamma_{23} = C \frac{\partial u^2}{\partial w}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

The hyperbolic system (1) can be solved with the method of characteristics. The result of numerical computations on the model (1) has been compared to the experimental data obtained on the in vivo measurements on young healthy volunteers.

During experimental investigation series of tests on the erythrocyte sedimentation of the native venous blood samples of patients and samples with addition of potential allergens was conducted. Typically, when a patient has an allergy accelerated erythrocyte sedimentation in the sample with added allergen is observed, in some cases we can see slow sedimentation. In any case, adding the allergen affects the dynamics of the sedimentation process. Sedimentation curves were constructed by the points being registered every 5-10 minutes for each of the samples. Obtained curves were smoothed by standard filters. This method allows us to obtain a sufficiently smooth sedimentation curves. In the course of investigation different dynamics of the curves was found.

LITERATURE

- [1] Datsok O. M., Zolonsky E. N., Kizilova N. N. Analysis of erythrocyte aggregation in non-uniform force field. *Electronics and Communications*. 2002. № 15. P. 145–149.
- [2] Datsok O. M., Zolonsky E. N., Kizilova N. N. Two-phase model of erythrocyte sedimentation in non-uniform force field. *Vestnik KhDPU*. 2002. № 135. P. 61–66.
- [3] Kizilova N. N., Cherevko V. A. Gravitational sedimentation of erythrocytes: experiments and theoretical modeling. *Vestnik KhNU. Ser. Mathematics, applied mathematics, mechanics*. 2009. № 875. P. 80–94.
- [4] Kizilova N. N., Cherevko V. A. Method of diagnostics of drug and food allergy. Patent № 57165 Bulletin № 3; 10.02.2011. Patent application U201009671; 02.08.2010.

Додаток Г. Стаття в науковому журналі (приклад

УДК 532.5

Кізілова Н. М., д. ф.-м. н., проф.

Майко І.В., студент

Узагальнення задачі Лайтхілла на випадок заповнених в'язкою рідиною трубок з ускладненою реологією стінки

¹Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
Харків, майдан Свободи, 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com

²Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
Харків, Україна,
e-mail: illia.maiko@ukr.net

N. M. Kizilova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

I.V. Maiko, student

Generalization of the Lighthill problem for the viscous fluid filled tubes with complicated wall rheology

¹V.N. Karazin Kharkiv National University, 61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com

²V.N. Karazin Kharkov National University,
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: illia.maiko@ukr.net

Запропоновано узагальнення моделі Лайтхілла поширення плоских хвиль по в'язкопружних трубках, які заповнені в'язкою рідиною. Реологічне співвідношення для стінки трубки має по два часи релаксації напружень і деформацій. Отримані рівняння узагальненої моделі, які описують осереднені тиск, швидкість рідини, а також площину перерізу судини. Отримано розв'язок рівнянь у вигляді хвиль, які поширюються, а також дисперсійне рівняння. Проаналізовані особливості розв'язку узагальненої моделі та дисперсії хвиль порівняно як з класичними задачами Лайтхілла та Шапіро, так і з в'язкопружною моделлю Кельвіна-Фойхта для матеріалу стінки. Чисельні розрахунки проведені для набору параметрів моделі, які відповідають системі кровообігу людини. Показано, що ускладнені властивості матеріалу дозволяють урахувати моди Юнга і Ляме, а також стабілізувати моди, які були нестійкими у випадку трубок з простішою реологією. Розроблена модель дозволяє

проводити чисельні розрахунки на складних моделях артеріальних русел з суттєвою економією комп'ютерних ресурсів і часу.

Ключові слова: в'язкопружні трубки, пульсові хвилі, математичне моделювання, дисперсія хвиль.

A generalization of the Lighthill model of the plane waves propagation along fluid-filled viscoelastic tubes is proposed. The rheological relation of the wall has two relaxation times for strains and stresses. The equations of the generalized model for the averaged pressure, velocity and the cross-sectional area of the tube are obtained. The solution of the equations in the form of the running waves and the dispersion relation are obtained and compared to those for the Lighthill and Shapiro problems, and the viscoelastic Kelvin-Voigt model for the wall material. Numerical calculations for the model parameters corresponded to human circulation system have been carried out. It is shown, the complicated properties of the material allow accounting for both Young and Lamé wave modes, and stabilization the modes that were unstable in the case of simpler rheology. The developed model is helpful in performing the numerical calculations on complex models of arterial vasculatures at lower computation time and resources.

Key Words: viscoelastic tubes, pulse waves, mathematical modeling, wave dispersion.

1. Вступ

Лінійна теорія плоских хвиль (1d) в заповнених рідиною трубках була розроблена англійським математиком Дж. Лайтхіллом [1]. Було також отримано розв'язок задачі про поширення циліндричних хвиль (2d) в прямих трубках кругового перетину [2], в трубках з тонкими і товстими пружними стінками, що монотонно звужуються або розширюються, з в'язкопружними та багатошаровими стінками [3, 4]. В кожному випадку було виписано розв'язки задач у вигляді нормальної моди і досліджено дисперсію хвиль.

Класична задача Лайтхілла заснована на законах збереження маси і імпульсів нев'язкої рідини, а також реологічному співвідношенню $F(P, U) = 0$, де $P(t, x)$, $U(t, x)$ – тиск і поздовжня швидкість рідини, які осереднені за поперечним перерізом трубки, який може бути довільної форми. У разі в'язкої рідини рівняння Лайтхілла були сформульовані А. Шапіро [5] і пізніше виведені шляхом осереднення рівнянь Нав'є-Стокса по перетину трубки [6]. Оскільки задача Лайтхілла та її узагальнення широко використовуються при моделюванні системи кровообігу [7], значний інтерес представляють узагальнення цієї задачі на випадок ускладненої реології стінки трубки та неньютонівських рідин [8, 9]. У даній роботі наведено узагальнення моделі Лайтхілла на випадок в'язкопружних стінок, що представлені різними поєднаннями пружного, в'язкого й інер-

ційного елемента (EVI, elastic, viscous, inertial), а також досліджені властивості рішення узагальненої моделі та особливості дисперсії хвиль. Ця модель відповідає сучасним мікро- і нано-структурованим композитам і має цікаві додаткові реологічні властивості.

1. Постановка задачі

Розглянемо систему рівнянь Лайтхілла–Шапіро [9]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(SU) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\mu}{S} U = 0, \quad (2)$$

для замикання якої використовуємо реологічне співвідношення EVI моделей, що містять 3–5 елементів:

$$d \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + c \frac{\partial S}{\partial t} + S = S_0 + k(P - P_0) + a \frac{\partial P}{\partial t} + b \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (3)$$

де ρ і μ – густина і в'язкість рідини, a, b, c, d – реологічні параметри, P_0 – тиск, при якому стінка трубки повністю розправлена і має перетин S_0 .

У класичній задачі Лайтхілла розглядається лінеаризована відносно рівноважного стану система (1) – (3) при $\mu, q, a, b, c, d = 0$, а її рішення розшукується у вигляді $P = P_0 + \tilde{P}$, $S = S_0 + \tilde{S}$, $U = \tilde{U}$, де $\tilde{P}, \tilde{S}, \tilde{U}$ – малі збурення змінних відносно рівноважного стану $\{P = P_0, S = S_0, U = 0\}$. Повторюючи цю процедуру, з (1) – (3) отримаємо лінеаризовану систему рівнянь для збурень

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + S_0 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} - \frac{\mu}{S_0} \tilde{U} = 0, \quad (5)$$

$$d \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial t^2} + c \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \tilde{S} = k \tilde{P} + a \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + b \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Виключаючи з (4) – (6) змінні \tilde{P}, \tilde{S} , отримаємо рівняння для \tilde{U} (позначення над змінними для простоти опущені)

$$\begin{aligned} & -b\rho \frac{\partial^4 U}{\partial t^4} + \left(\frac{b\mu\rho}{S_0} - a\rho \right) \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \left(\frac{a\mu\rho}{S_0} - \rho k \right) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \\ & + \frac{k\mu\rho}{S_0} \frac{\partial U}{\partial t} + S_0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + cS_0 \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} + dS_0 \frac{\partial^4 U}{\partial t^2 \partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Знаходячи розв'язок (7) і підставляючи його в (4) і (5), отримуємо рівняння для \tilde{P}, \tilde{S} . Для дослідження особливостей поширення хвиль в трубах з ускладненою реологією будемо шукати розв'язок (4) – (6) у вигляді $f(t, x) = f^* \cdot \exp(i(\omega t - nx))$, де $f = \{P, S, U\}$, f^* і ω – амплітуда і частота хвилі, n – хвильове число.

2. Дисперсійне рівняння

Після згаданої вище підстановки за умови існування розв'язку алгебраїчної системи рівнянь для амплітуд звичайним шляхом отримуємо дисперсійне співвідношення у вигляді

$$\omega^4 + iA\omega^3 + (B - Cn^2)\omega^2 + i(Dn^2 - E)\omega + n^2 = 0, \quad (8)$$

$$\text{де } A = \frac{\mu}{S_0} - \frac{a}{b}, \quad B = \frac{a\mu}{bS_0} - \frac{k}{b}, \quad C = \frac{dS_0}{b\rho}, \quad D = \frac{cS_0}{b\rho}, \quad E = \frac{k\mu}{bS_0}, \quad F = \frac{S_0}{b\rho}.$$

$$\text{Рівняння (8) має 4 комплексних кореня } \omega_{1,2,3,4}(n) = i\frac{A}{4} \pm \sqrt{z_1} \pm \sqrt{z_2} \pm \sqrt{z_3},$$

де $z_{1,2,3}$ – корені кубічного рівняння, що пов'язане з (8) причому залежно від параметрів моделі можливі випадки: $\{z_1 = z_2 = z_3\} \in R$, $\{z_1 = z_2 \neq z_3\} \in R$, $\{z_1 \neq z_2 \neq z_3\} \in R$, $\{z_1 \in R, \{z_2 = z_3^*\} \in C\}$, де зірочка позначає комплексне сполучення. Таким чином, розв'язок (8) при будь-якому наборі параметрів має вигляд $\omega = \omega'(n) + i\omega''(n)$. Якщо $\omega''(n) > 0$, будь-які малі початкові збурення загасають за часом і система (4) – (6) є стійкою. Відповідно, фазову та групову швидкості хвилі можна обчислити як $\varphi = \varphi'(n) + i\varphi''(n)$, $V_g = V'(n) + iV''(n)$, де $V'(n) = d\omega'(n)/dn$, $V''(n) = d\omega''(n)/dn$, $\varphi'(n) = \omega'(n)/n$, $\varphi''(n) = \omega''(n)/n$.

Як відомо, в дисипативних середовищах групову швидкість зменшується зі зростанням частоти в разі нормальної дисперсії і збільшується в середовищах з аномальною дисперсією. В класичній задачі Лайтхілла ($\{a, b, c, d, \mu\} = 0$) розв'язок (8) має вигляд $\omega(n) = \sqrt{S_0/\rho kn}$, тому фазова швидкість хвилі збігається з груповою, що характерно для плоских хвиль в середовищах без дисперсії. У моделі Шапіро розв'язок (8) має

$$\text{вигляд } \omega_{1,2} = -i\frac{\mu}{2S_0} \pm \sqrt{\frac{S_0}{k\rho}n^2 - \left(\frac{\mu}{S_0}\right)^2}, \text{ так що за будь-яких наборів}$$

параметрів моделі фазова швидкість хвилі не збігається з груповою. Подальше дослідження властивостей розв'язку (8) може бути проведено чисельними методами.

3. Чисельне рішення і аналіз результатів

Обмежимося випадком, який відповідає поширенню пульсових хвиль по артеріальній системі людини, і візьмемо $\rho = 1050 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 3.5 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $k = 2\sqrt{\pi E h S_0^{-3/2}} / 3$, $E = 10^6 \text{ Па}$ – модуль Юнга, $h = 0.2R_0$ – товщина стінки, $R_0 = \sqrt{S_0 / \pi} = 0.01 \text{ см}$ – радіус артерії. Величини $c \equiv \tau_\varepsilon$ і $a/k \equiv \tau_\sigma$ мають сенс часів релаксації деформацій та напружень в матеріалі стінки артерії і можна покласти $\tau_\varepsilon = \tau_\sigma = 0.01 \text{ с}$ [2, 9]. Експериментальні вимірювання параметрів b , d дають дуже різні діапазони значень, тому має сенс дослідити вплив саме цих параметрів на розв'язок і особливості дисперсії хвиль. При розрахунках використовувалися значення $d/\tau_\varepsilon \equiv \tilde{\tau}_\varepsilon$ і $b/k\tau_\sigma \equiv \tilde{\tau}_\sigma$, де $\tilde{\tau}_\varepsilon = \tilde{\tau}_\sigma \sim 0.1\text{--}1 \text{ с}$ – часи релаксації деформацій і напружень другого порядку.

Чисельні розрахунки показали, що при всіх наборах параметрів моделі за наявності 4-х різних коренів (8) два з них відповідають позовжнім повільним хвилям (моди Юнга), а два інших – швидким хвилям (моди Ламе), як і у випадку вісесиметричної 2d-течії в'язкої рідини по товстостінній трубці [2]. В класичних моделях Лайтхілла і Шапіро існує тільки один тип хвиль. У випадку в'язкопружної трубки, яка відповідає реологічній моделі Кельвіна–Фойхта, отримуємо рівняння (8), яке має тільки три ненульових розв'язки, тому представлена EVI модель має більше число мод і, таким чином, більш різноманітний набір властивостей, у тому числі резонансних [3,7]. Крім цього, за рахунок додаткових членів в реологічному співвідношенні (3) ті моди, які були нестійкі при $\tilde{\tau}_\varepsilon = \tilde{\tau}_\sigma = 0$, можуть стати стабільними за певних значень $\tilde{\tau}_\varepsilon \neq \tilde{\tau}_\sigma \neq 0$, які можна знайти з умови стійкості $\omega''(n) > 0$ системи (1) – (3).

Результати розрахунків дисперсійних залежностей $\omega'(n)$ представлені на рис. 1а. Розглянуто випадки як коротких ($n > 1$), так і довгих ($n < 1$) хвиль. Вздовж вертикальної осі відкладена безрозмірна частота. За основну частоту прийнято значення частоти серцебиття 72 уд./хв. Розрахунки обмежені першими $m=8$ гармоніками, яких вистачає для апроксимації $\sim 96\text{--}98 \%$ пульсової хвилі [9].

На рис. 1б представлені залежності $\omega''(n)$ для випадку, коли вихідна мода була нестійкою, а за рахунок вибору ненульових параметрів $\tilde{\tau}_\varepsilon \neq \tilde{\tau}_\sigma \neq 0$ її вдалося стабілізувати. На рис. 1в показані залежності $\phi'(\omega)$ при тих самих наборах параметрів задачі. Обчислені залежності добре відповідають даним вимірювань $\phi'(\omega)$ на артеріях з різними радіусами. Прямая лінія відповідає швидкості, яка розрахована за тих самих параметрів стінки і рідини для бездисперсійного розв'язку класичної задачі Лайтхілла. Ці значення, так само як і модель чисто пружної стінки,

зазвичай завищують величину швидкості пульсової хвилі [9], тоді як моделі з урахуванням релаксацийних параметрів першого і другого порядку лежать ближче до експериментальних кривих [2, 9, 10].

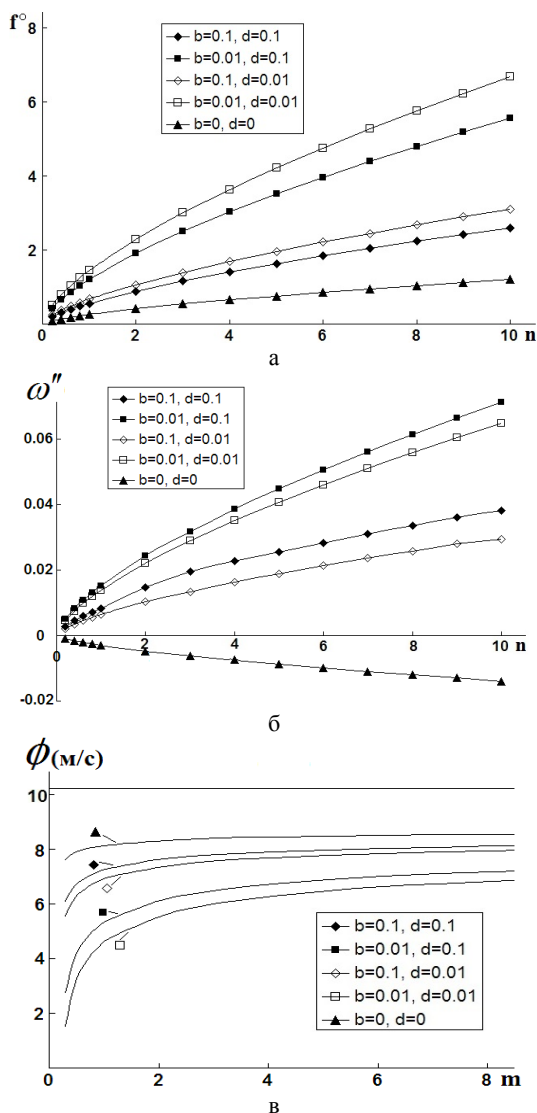


Рис. 1. Залежності $f^o(n)$ (а), $\omega''(n)$ (б) и $\phi'(m)$ (в) для різних наборів параметрів стінки

5. Висновки

Запропонована узагальнена модель Лайтхілла–Шапіро, яка описує поширення хвиль в заповнених в'язкою рідиною трубках, реологічне співвідношення яких має 5 реологічних коефіцієнтів – окружну стисливість і по два часи релаксації напружень та деформацій. Розв'язок задачі може бути знайдено у вигляді хвиль тиску, швидкості, що біжать, та осциляцій стінки трубки. Дисперсійне рівняння описує швидкі й повільні моди Ламе і Юнга. Показано, що за рахунок додаткових параметрів можна стабілізувати нестійкі моди, а дисперсійні залежності стають ближчими до експериментальних, ніж розв'язки класичних задач Лайтхілла, Шапіро, і для випадку реологічної моделі Кельвіна–Фойхта.

Список використаних джерел

1. Lighthill J. *Waves in fluids*. Cambridge: Cambridge University Press. 1978. 504.
2. Womersley J.R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. *Phil.Mag.* 1955. V. 46. № 73. P. 199–221.
3. Kizilova N., Hamadiche M., Gad-el-Hak M. Flow in Compliant Tubes: Control and Stabilization by Multilayered Coatings. *Intern. J. Flow Control*. 2019. V. 1. № 3. P. 199–211.
4. Sherwin S. J., Franke F., Piero J., Parker K.H. One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables. *J.Eng. Math.* – 2003. V. 47. P. 217–250.
5. Shapiro A. H. Steady flow in collapsible tubes. *J. Biomech. Eng.* 1977. V. 99, № 8. P. 126–147.
6. Smit C.H. On the modeling of the distributed outflow in one-dimensional models of arterial blood flow. *Zeitschr.Angew.Mathem.Physik*. 1981. V. 32. P. 408–420.
7. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Свойства нормальных волн упруго-жидкостного волновода, помещенного в жидкость. *Акуст. вісн.* 2006. Т. 9. № 4. С. 17–34.
8. Pedley T.J. Blood flow in arteries and veins. *Perspectives in Fluid dynamics*. Batchelor G.K., Mofatt H.K. (eds.). Cambridge: Cambridge Univ.Press. 2000. P. 105– 158.
9. Ghigo A. R., Lagrée P.-Y., Fullana J.-M. A time-dependent non-Newtonian extension of a 1D blood flow model. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2018. V. 253. P. 36–49.

Додаток Д. Щоденник практики (приклад)

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

ЩОДЕННИК ПРАКТИКИ

Студента (-ки) _____ Прізвище І.Б. _____
(прізвище, ім'я та по батькові в родовому відмінку)
спеціальності **113 «Прикладна математика»** _____
(шифр і назва спеціальності (-тей))
освітньо-професійна програма
«Прикладна математика» _____
(назва програми)
рівня вищої освіти **магістр** _____
(назва рівня вищої освіти)
факультету **Математики і інформатики** _____
(назва факультету)
курсу **2**, групи **МП61** _____
(номер курсу) (шифр групи)
спеціалізації _____
(шифр і назва спеціалізації (цій))

РОЗПОРЯДЖЕННЯ НА ПРАКТИКУ

Студент _____
(прізвище, ім'я, по батькові)

направляється на учбово-виробничу практику до Харківського
національного університету імені В. Н. Каразіна

Термін практики: з 02.09.2021 р. до 29.09.2021 р.

Календарний графік проходження практики

№ з/п	Назви робіт	тижні				Виконання
		1	2	3	4	
1	Огляд літератури	х				Вик.
2	Первинна обробка даних для моделі		х			Вик.
3	Проведення чисельних розрахунків			х		Вик.
4	Підготовка звіту				х	Вик.

Оцінка роботи студента на практиці

Студент _____
 (прізвище, ім'я, по батькові)
 програму практики:

☐ виконав повністю

☐ виконав в цілому

☐ не виконав

підготував звіт:

☐ задовільний

☐ незадовільний

☐ не підготував

Загальна оцінка _____

Коментар керівника практики (за необхідності)

Керівник практики _____

ДЛЯ НОТАТОК

Електронне навчальне видання
комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимі

Кізілова Наталія Миколаївна

**Розв'язання задач виробничої практики
і підготовка звітної документації**

Навчально-методичний посібник

Коректор *О. В. Пікалова*
Комп'ютерне верстання *Н. М. Кізілова*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Підписано до видання 17.11.2022 р. Гарнітура Times New Roman.
Обсяг 110,2 Мб. Зам. № 175/22.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32