УДК 513.88

Л. В. ГЛАДУН

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ ЧИСЛОВЫМИ ОБЛАСТЯМИ ХАРАКТЕРИСТИКИ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА И ЕГО ПОДПРОСТРАНСТВ

Пусть X — банахово пространство. Через X^* обозначим его сопряженное. Напомним, что характеристикой тотального линейного подпространства $F \subset X^*$ называется величина

$$r(F) = \inf_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \sup \{|f(x)| : f \in F, \ \|f\| \leqslant 1\}. \tag{1}$$

Другие эквивалентные определения характеристики и простейшие ее свойства можно найти, например, в книге [1]. Если $r(F) > 0$. то говорят, что подпространство F нормирующее, или что F нормирует X.

Пусть Y — подпространство банахова пространства X. Рассмотрим оператор $R: X^* \to Y^*$, который ограничивает функционалы из X^* на Y. Если $G \subset Y^*$ — нормирующее подпространство, то по лемме 3 работы [2] подпространство $F = R^{-1}G$ нормирует X, причем $r(F) \geqslant \lambda r(G)$, $\lambda = \frac{1}{3}$. Покажем, что, когда подпространство Y хорошо дополняемо в X, эту оценку можно уточнить.

Теорема. *Пусть банахово пространство $X = Y \oplus Z$, оператор проектирования P пространства X на Y параллельно подпространству Z имеет единичную норму и норма проектора $Q = I - P$ также равна единице. Тогда для каждого нормирующего подпространства $G \subset Y^*$ $r(F) \geqslant \frac{1}{2} r(G)$.*

Доказательство. Так как $\|P\| = 1$ и $\|Q\| = 1$, то можно считать, что $Y^* = Z^\perp$, $Z^* = Y^\perp$ ($M^\perp$ — аннулятор подпространства $M \subset X$ в X^*). Возьмем произвольный элемент $x = y + z$, $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, $\|x\| = 1$, и рассмотрим функционал $|||x||| = \sup\{|f(x)| : f \in F, \|f\| \leqslant 1\}$. Легко видеть, что каждый элемент $f \in F$ представляется в виде $f = g + u$, где $g \in G$, $u \in Y^\perp$. Поскольку $\|x\| = 1$, то отсюда следует, что или $\|y\| \geqslant \frac{1}{2}$, или $\|z\| \geqslant \frac{1}{2}$. В случае, когда $\|y\| \geqslant \frac{1}{2}$, имеем

$$|||x||| \geqslant \sup\{|g(y)| : g \in G, \|g\| \leqslant 1\} \geqslant \frac{1}{2} r(G). \tag{2}$$

Если же $\|z\| \geqslant \frac{1}{2}$, то

$$|||x||| \geqslant \sup\{|u(z)| : u \in Y^\perp, \|u\| \leqslant 1\} = \|z\| \geqslant \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) получаем $|||x||| \geqslant \frac{1}{2} r(G)$ для каждого $x \in X$, $\|x\| = 1$. А это и означает согласно определению (1), что $r(F) \geqslant \frac{1}{2} r(G)$.

Следующий пример показывает, что константу $\lambda = \frac{1}{3}$ в лемме 3 из работы [2] улучшить нельзя.

Пример 1. Пусть $0 \leqslant a \leqslant 1$ и X_a — подпространство $l_\infty(M)$, $M = N \cup \{-1, 0\}$, натянутое на $c_0(N)$ и элементы $e: e(m) = 1$, $m \in M$, и $e_a: e_a(0) = -a$, $e_a(-1) = 1$, $e_a(n) = 0$, $n \in N$, N — натуральные числа. Определение пространств $c_0(M)$, $l_1(M)$ и $l_\infty(M)$ можно найти, например, в [1, с. 7].

Поскольку пространству X_a принадлежит элемент $x = \frac{2}{a+1} e_a + \frac{a-1}{a+1} e$, то стандартным способом (см. [4], с. 186) показывается, что $X_a^* = l_1(M)$. Двойственность задается естественным образом:

$$f(x) = \sum_{m \in M} f(m)\, x(m),\ f \in X_a^*,\ x \in X_a.$$

Выберем в X_a подпространство $Y = c_0(N) \oplus [e]$ ($[A]$ обозначает линейную оболочку множества A). Сопряженное пространство Y^* отождествим с фактор-пространством $X_a^*/[f_{-1}]$, где $f_{-1} \in l_1(M)$: $f_{-1}(-1) = 1$, $f_{-1}(0) = -1$, $f_{-1}(n) = 0$, $n \in N$. Возьмем в Y^* подпространство $H = l_1(N)/[f_{-1}]$. Заметим, что если $y \in Y$ и $\|y\| = 1$, то или $\exists k \in N \ |y(k)| = 1$, или $\lim\limits_{k \to \infty} |y(k)| = 1$. Но тогда для функционалов $f_k \in H : f_k(m) = 0$, $m \in M \setminus \{k\}$, $f_k(k) = 1$, с единичной нормой, имеем $|f_k(y)| = 1$ в первом и $\lim\limits_{k \to \infty} |f_k(y)| = 1$ во втором случаях. А это означает равенство единице характеристики подпространства H, т. е. $r(H) = 1$.

Пусть $F = R^{-1}H = l_1(N) \oplus [f_{-1}]$. Покажем, что $r(F) = \frac{1+a}{3+a}$. Сначала для произвольного элемента $x \in X_a$, $\|x\| = 1$, проверим справедливость неравенства $|||x||| \geqslant \frac{1+a}{3+a}$, где $|||x||| = \sup\{f(x) \mid : f \in F,\ \|f\| \leqslant 1\}$. Если $\|x\| = 1$ и $\sup\limits_{k \in N} |x(k)| \geqslant \frac{1+a}{3+a}$, то, как нетрудно убедиться, оно выполняется. Пусть теперь для некоторого элемента $x \in X_a$ $\|x\| = 1$, неравенство не выполняется, причем $\sup\limits_{k \in N} |x(k)| < \frac{1+a}{3+a}$. Каждый элемент $x \in X_a$ однозначно представляется в виде $x = \frac{x(-1) - x(0)}{1+a} e_a + \frac{x(0) + ax(-1)}{1+a} e + y$, где $y \in c_0(N)$. Отсюда следует $\lim\limits_{k \to \infty} x(k) = \frac{x(0) + ax(-1)}{1+a}$. Отметим также, что функционал $f = \frac{1}{2} f_{-1} \in F$ и $\|f\| = 1$. Поэтому для этого элемента x должны выполняться неравенства $|f(x)| = |(x(-1) - x(0))/2| < \frac{1+a}{3+a}$ и $\left|\frac{x(0) + ax(-1)}{1+a}\right| < \frac{1+a}{3+a}$. Объединяя их в систему и решая ее относительно $x(-1)$ и $x(0)$, находим $|x(-1)| < 1$ и $|x(0)| < \frac{3a+1}{3+a}$. Поскольку $\sup\limits_{k \in N} |x(k)| < \frac{1+a}{3+a}$, а $\|x\| = 1$, то или $|x(-1)| = 1$, или $|x(0)| = 1$. То есть получили противоречие. Итак, $|||x||| \geqslant \frac{1+a}{3+a}$ для каждого $x \in X_a$, $\|x\| = 1$. Но элемент

$x_0 \in X_a : x_0(-1) = 1,\ x_0(0) = \frac{1-a}{3+a},\ x(k) = \frac{1+a}{3+a},\ k \in N$, имеет, единичную норму и для всякого $f \in F$, $\|f\| = 1$, имеем

$$|f(x_0)| = |f(-1) + \frac{1-a}{3+a} f(0) + \frac{1+a}{3+a} \sum_{k \in N} f(k)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 - \frac{1-a}{3+a}\right) |f(0)| + \frac{1+a}{3+a} \sum_{k \in N} |f(k)| = \frac{1+a}{3+a},$$

так как $f(-1) = -f(0)$ и $\sum_{k \in N} |f(k)| = 1 - 2|f(0)|$. Отсюда следует $|||x_0||| = \frac{1+a}{3+a}$. Тем самым показали, что $r(F) = \frac{1+a}{3+a}$.

Замечание. Мы построили банаховы пространства X_a, $0 \leqslant a \leqslant 1$, каждое из которых содержит подпространство Y такое, что для некоторого $H \subset Y^*$ с единичной характеристикой $r(R^{-1}(H)) = \frac{1+a}{3+a}$. То есть $\lambda = \frac{1+a}{3+a}$. При $a = 0$ получаем $\lambda = \frac{1}{3}$. По-видимому, для всякого $\frac{1}{3} \leqslant \lambda \leqslant 1$ можно привести такой пример пространства X_λ и его подпространства Y, что существует подпространство $H \subset Y^*$ с $r(H) = b$, а $r(R^{-1})(H)) = \lambda b$ для некоторого $0 < b \leqslant 1$.

Для банахова пространства X рассмотрим числовую область характеристики $\mathbf{R}(X) = \{\lambda : \exists F \subset X^*,\ r(F) = \lambda\}$, F — замкнутое по норме тотальное собственное подпространство X^*. Некоторые свойства множества $\mathbf{R}(X)$ изучались в [3]. Естественно поставить вопрос о соотношениях между числовыми областями характеристики пространства X и его подпространств (как известно [1, с. 40] всегда $\mathbf{R}(X) \supset \left(0, \frac{1}{2}\right)$, если X — нерефлексивно). Приведем примеры таких банаховых пространств X_n, $n \in N$, каждое из которых содержит некоторое подпространство Y с $\mathbf{R}(Y) = [0, 1]$, в то время как $\mathbf{R}(X_n) = \left[0, \frac{2n+1}{4n+1}\right]$.

Пример 2. Пусть $n \in N$ и X_n — подпространство $l_\infty(M)$, где $M = \{-n, -n+1, \ldots, 0\} \cup N$, натянутое на $c_0(N)$ и элементы $e_0, e_{-1} \ldots, e_{-n} : e_{-i}(-i) = 1,\ e_{-i}(m) = 0,\ m \in \{0, \ldots, 1-i, -1-i, \ldots, -n\},\ e_{-i}(k) = 1/(n+1),\ k \in N,\ i = \overline{0, n}$.

Рассмотрим в X_n подпространство $Y = c_0(N) \oplus [\sum_{i=0}^{n} e_{-i}]$. Поскольку Y изометрично пространству сходящихся последовательностей (изометрия задается естественным образом), следовательно, $\mathbf{R}(Y) = [0, 1]$ (см. [3]). Покажем, что $\mathbf{R}(X_n) = \left[0, \frac{2n+1}{4n+1}\right]$.

Утверждение. Для каждого замкнутого по норме тотального собственного подпространства $F \subset X_n^*$ $r(F) \leqslant \frac{2n+1}{4n+1}$.

Доказательство. Как легко проверить, $X_n^* = l_1(M)$. Двойственность задается естественным образом. Так как тогда $X_n^{**} = l_\infty(M)$, то достаточно показать [1, с. 39], что для каждого элемента $\varphi \in l_\infty(M)$ выполняется неравенство

$$r(\varphi^\top) = \inf\{\|\lambda\varphi - x\| : x \in X_n,\ \|x\| = 1,\ \lambda \in R\} \leqslant \frac{2n+1}{4n+1} \qquad (4)$$

($\varphi^\top$ — аннулятор φ в пространстве X_n^*).

Пусть $\varphi \in l_\infty(M)$, $\|\varphi\| = 1$ и $a = \sup_{k \in N} |x(k)|$. Если $a > \frac{n}{n+1}$, то $A\varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in N$ $a - |\varphi(k_0)| < \varepsilon$. Элемент $x = \sum_{i=0}^{n} \alpha \operatorname{sign} \varphi(-i) e_{-i} + \left(\operatorname{sign} \varphi(k_0) - \frac{\alpha}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \operatorname{sign} \varphi(-i)\right) e_{k_0}$, где $\alpha = \frac{(2n+1)(1-a)}{(4n+1)(1+a)}$ и e_{k_0}: $e_{k_0}(m) = 0$, $m \in M \setminus \{k_0\}$, $e_{k_0}(k_0) = 1$, имеет единичную норму и при значении $\lambda = \frac{2(2n+1)}{(4n+1)(1+a)}$ $\|\lambda\varphi - x\| \leqslant \frac{2n+1}{4n+1} + \varepsilon$. Ввиду произвольности ε, отсюда следует, что неравенство (4) в этом случае выполняется.

Если же $a \leqslant \frac{n}{n+1}$, то $\exists i \in \{-n, \ldots, 0\}$ $|\varphi(i)| = 1$, поскольку $\|\varphi\| = 1$. Тогда при $\lambda = \frac{2n}{4n+1}$ и для элемента $x = \operatorname{sign} \varphi(i) e_{-i} - \alpha \operatorname{sign} \varphi(i) \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq i}}^{0} e_k$, где $\alpha = \frac{1}{4n+1}$, с единичной нормой, получаем $\|\lambda\varphi - x\| \leqslant \frac{2n+1}{4n+1}$. Тем самым утверждение доказано.

Возьмем теперь $\varphi \in l_\infty(M) : \varphi(-n) = \ldots = \varphi(0) = 1$, $\varphi(k) = -\frac{n}{n+1}$, $k \in N$, и покажем, что $r(\varphi^T) = \frac{2n+1}{4n+1}$. Достаточно проверить справедливость неравенства $\|\lambda\varphi - x\| \geqslant \frac{2n+1}{4n+1}$ для произвольных элементов $x \in X_n$, $\|x\| = 1$, и чисел $\lambda \in R$, $\lambda > 0$.

Пусть существуют элемент $x \in X_n$ с единичной нормой и число $\lambda > 0$, для которых

$$\|\lambda\varphi - x\| < \frac{2n+1}{4n+1}. \qquad (5)$$

Если $\sup_{k \in N} |x(k)| = 1$, то из (5) непосредственно следует $\lambda > \frac{2(n+1)}{4n+1}$ и $x(k) > \frac{1}{4n+1}$ для всех $k \in \{-n, \ldots, 0\}$. Из конструкции пространства X_n получаем равенство $\lim\limits_{k\to\infty} x(k) = \sum\limits_{i=0}^{n} x(-i)/(n+1)$. Тогда $\sup\limits_{k\in N} |(\lambda\varphi - x)(k)| \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} |(\lambda\varphi - x)(k)| = \frac{\lambda n}{n+1} + \sum\limits_{k=0}^{n} x(-k)/(n+1) > \frac{2n+1}{4n+1}$, что противоречит (5). Если же $\sup\limits_{k\in N} |x(k)| < 1$, то существует $i \in \{-n, \ldots, 0\}$ $|x(i)| = 1$. В этом случае для выполнения (5) необходимо, чтобы $\lambda > \frac{2n}{4n+1}$ и $x(k) > -\frac{1}{4n+1}$ для каждого $k \in \{-n, \ldots, 0\} \setminus \{i\}$. Но пр и этих ограничениях имеем

$$\|\lambda\varphi - x\| \geqslant \lim_{k\to\infty} |(\lambda\varphi - x)(k)| = \frac{\lambda n}{n+1} + \sum_{k=0}^{n} x(-k)/(n+1) > \frac{2n}{4n+1}.$$

Снова получили противоречие с неравенством (5). Следовательно, неравенство (5) не может выполняться ни при каких $x \in X_n$, $\|x\| = 1$, и $\lambda > 0$. Тогда из утверждения следует $r(\varphi^T) = \frac{2n+1}{4n+1}$, т. е. $\frac{2n+1}{4n+1} \in \mathbf{R}(X_n)$. Поскольку $\dim l_\infty(M)/X_n = \infty$, то пространство X_n неквазирефлексивно, а, значит, число ноль принадлежит множеству $\mathbf{R}(X_n)$ [1, с. 78]. Чтобы завершить доказательство равенства $\mathbf{R}(X_n) = \left[0, \frac{2n+1}{4n+1}\right]$, осталось только воспользоваться утверждением и теоремой 1 из [1, с. 39].

Итак, мы построили банаховы пространства X_n, $n \in N$, для которых $\mathbf{R}(X_n) = \left[0, \frac{2n+1}{4n+1}\right]$. Причем каждое X_n содержит некоторое подпространство Y с числовой областью характеристики $\mathbf{R}(Y) = [0, 1]$.

Автор выражает глубокую признательность А. Н. Пличко за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы: 1. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения.— К.: Вища шк. 1980.—216 с. 2. *Davis W. J., Jonson W. B.* Basiq sequences and normin Subspaces in non-quasi-reflexive Banach spaces.—Israel J. Math., 1973, **14**, № 4, p. 353—367. 3. *Годун Б. В., Кадец М. И.* О множестве значений характеристики подпространств сопряженного пространства.—Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1978, вып. 29, с. 25—31. 4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1981.—544 с.

Поступила в редколлегию 13.04.84.